SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Sur certaines inégalités de théorie des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 117-120
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__117_0>

SUR CERTAINES INEGALITÉS DE THEORIE DES MARTINGALES

par C.S. CHOU

Dans cette note, nous indiquons une généralisation des inégalités de théorie de martingales dues à Chevalier. Cette généralisation s'applique en particulier aux fonctionnelles introduites par Barlow-Yor en théorie des martingales. Elle est aussi valable en présence d'un poids.

NOTATIONS. Nous ne travaillons ici que sur des martingales locales continues. La notation M_t^* a son sens habituel, on écrit simplement $\langle M\rangle_t$ au lieu de $\langle M,M\rangle_t$. On désigne par $L_t^a(M)$ le temps local de M en a , donc on choisit toujours une version continue en (t,a) - ce qui est possible d'après les travaux de Yor(1) et on pose $L_t^* = \sup_a L_t^a$.

Les constantes $c,c'...$ figurant dans les inégalités (et dont la valeur explicite est sans importance) peuvent varier de place en place. Elles ne dépendent pas du choix des processus ou de l'espace probabilisé. Une relation écrite $a\sim b$ entre deux nombres signifie que l'on a une inégalité du type $ca \leq b \leq c'a$, c et c' étant comme ci-dessus.

Rappelons un lemme fondamental de l'article [4], p. 29 :

LEMME 1. Soient A, B deux processus croissants continus, adaptés, positifs. On convient que $A_{0-}=B_{0-} = 0$, et que $\underline{\underline{F}}_{0-}$ est la tribu dégénérée. On suppose que pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt bornés tels que $0_- \leqq S \leqq T$ on a pour un $q>0$:

(1) $$E[|A_T-A_S|^q] \leqq E[B_T^q I_{\{S<T\}}]$$

Alors pour toute fonction F sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0, croissante, modérée (non nécessairement convexe) on a

(2) $$E[F(A_\infty)] \leqq cE[F(B_\infty)] \ .$$

SUR UNE INEGALITÉ DE CHEVALIER

Avec les notations introduites ci-dessus, les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy pour les martingales locales continues peuvent s'écrire

(3) $$E[F(M_\infty^*)] \sim E[F(\langle M\rangle_\infty^{1/2})] \ .$$

Chevalier [2] a eu l'idée (lorsque $F(x)=x^p$: le cas général est dû à Lenglart-Lépingle-Pratelli [4]) de renforcer cette inégalité en montrant l'équivalence de $E[F(M_\infty^* \wedge \langle M\rangle_\infty^{1/2})]$ et $E[F(M_\infty^* \vee \langle M\rangle_\infty^{1/2})]$. Nous allons modifier la démonstration de [3] de telle sorte, qu'elle nous

1. Ou simplement d'après le théorème de Trotter.

donnera par exemple l'équivalence de

(4) $\quad E[F(M^*_\infty \wedge \langle M\rangle^{1/2}_\infty \wedge L^*_\infty(M))]$ et $E[F(M^*_\infty \vee \langle M\rangle^{1/2}_\infty \vee L^*_\infty(M))]$

Considérons une application $M \mapsto U(M)$ qui associe à toute martingale continue bornée M (sur un espace probabilisé donné $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles) un processus croissant $U(M)$, adapté à la même filtration, continu, positif (on convient que $U(M)_{0-}$ est nul). Nous faisons les hypothèses suivantes :

i) $U(M)_\infty = 0$ sur $\{M^*_\infty = 0\}$; $U(M)^T = U(M^T)$ pour tout t. d'a. T.

Cette hypothèse permet de définir $U(M)$ pour une martingale locale continue M, mais nous laisserons au lecteur cette extension.

ii) $E[M^*_\infty] \sim E[U(M)_\infty]$.

Pour la troisième condition, nous considérons deux temps d'arrêt S,T tels que $0_- \leqq S \leqq T \leqq \infty$, et nous introduisons la martingale $N = I_{]S,T]} \cdot M$. Nous faisons l'hypothèse

iii)$_a$ $\quad E[U(M)_T - U(M)_S] \leqq cE[N^*_\infty]$

iii)$_b$ $\quad U(N)_\infty \leqq cU(M)_T$.

On remarquera que iii)$_a$, pour $S=0-$ et $T=\infty$, entraîne la moitié $\geqq$ de l'équivalence ii) . D'autre part, si $A \in \underline{\underline{F}}_S$ on peut remplacer S,T par S_A, T_A et en déduire

$$E[U(M)_T - U(M)_S | \underline{\underline{F}}_S] \leqq cE[N^*_\infty | \underline{\underline{F}}_S] \quad .$$

En pratique, on obtient iii)$_a$ en vérifiant d'abord la moitié $\geqq$ de l'équivalence ii) (donc $E[N^*_\infty] \geqq cE[U(N)_\infty]$), et d'autre part que

iv) $\quad U(M)_T - U(M)_S \leqq cU(N)_\infty$.

Par exemple, $U(M)=M^*$ satisfait à iv) avec $c=1$, et iii)$_b$ avec $c=2$; $U(M)=\langle M\rangle^{1/2}$ satisfait à iv) avec $c=1$ et à iii)$_b$ avec $c=1$, l'équivalence en ii) étant l'inégalité de Davis. Enfin, $U(M)=L^*(M)$ satisfait à l'équivalence en ii) d'après les inégalités de Barlow-Yor, et à iii)$_a$ et iv) avec $c=1$ d'après la formule

(5) $\quad L^a_T(M) = L^a_S(M) + L^{a+M_S}_\infty(N)$.

L'application du lemme 1 va nous donner :

THEOREME 1. Pour toute fonction modérée F on a $E[F(U(M)_\infty)] \sim E[F(M^*_\infty)]$.

<u>Démonstration</u>. Pour montrer l'inégalité dans le sens $\leqq$ on applique le lemme 1 avec $A=U(M)$, $B=cM^*$, $q=1$; la relation (1) est fournie par iii)$_a$, en se rappelant que $N^*_\infty \leqq 2M^*_T$. Pour montrer l'inégalité dans le sens $\leqq$ on prend $A=M^*$, $B=cU(M)$, $q=1$, la relation (1) étant

$$E[M^*_T-M^*_S] \leqq E[N^*_\infty] \underset{(ii)}{\leqq} cE[U(N)_\infty] \underset{iii)_b,\ i)}{\leqq} c'E[U(M)_T I_{\{S<T\}}] .$$

Voici notre résultat principal, qui contient le théorème de Chevalier. Nous ne saurions pas le démontrer en remplaçant $iii)_a$ par iv).

THEOREME 2. Soient $M \mapsto U(M)$, $V(M)$ deux applications satisfaisant à i), ii), iii). Alors $I(M) = U(M)\wedge V(M)$ et $S(M) = U(M)\vee V(M)$ y satisfont aussi.

COROLLAIRE. Si $U^1,..,U^n$ satisfont à i), ii), iii), on a pour F modérée

$$E[F(U^1(M)_\infty\wedge\ldots\wedge U^n(M)_\infty)] \sim E[F(M^*_\infty)] \sim E[F(U^1(M)_\infty\vee\ldots\vee U^n(M)_\infty)]$$

<u>Démonstration</u>. Il est évident que i), $iii)_b$ passent au sup et à l'inf. Pour $iii)_a$, cela résulte des inégalités évidentes

$$\begin{matrix} I(M)_T-I(M)_S \\ S(M)_T-S(M)_S \end{matrix} \leqq (U(M)_T-U(M)_S)+(V(M)_T-V(M)_S) \quad ;$$

et on a remarqué plus haut que $iii)_a$ entraîne la moitié $\geqq$ de l'équivalence ii). Reste donc seulement la moitié $\leqq$: celle-ci est évidente pour le sup $S(M)$, pour laquelle le théorème 2 est établi (et donc aussi le théorème 1). Reste la partie délicate

$$E[M^*_\infty] \leqq cE[I(M)_\infty] ,$$

pour laquelle nous allons suivre le raisonnement de [4]. Nous écrivons (en omettant la mention de M lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté)

$$E[U_T-U_S] \underset{iii)_a}{\leqq} cE[N^*] \underset{ii)}{\leqq} c'E[V(N)_\infty] \underset{iii)_b,\ i)}{\leqq} c''E[V(M)_T I_{\{S<T\}}]$$

ce qui nous donne, en remplaçant S,T par S_A,T_A puis en faisant $T=\infty$

$$E[U_\infty-U_S|\underline{\underline{F}}_S] \leqq cE[V_\infty|\underline{\underline{F}}_S]$$

Alors

$$E[U^2_\infty] = 2E[\int_0^\infty (U_\infty-U_s)dU_s] \leqq cE[\int_0^\infty V_\infty dU_s] = cE[U_\infty V_\infty]$$

D'autre part, on a d'après le théorème 1

$$E[V^2_\infty] \leqq cE[U^2_\infty] .$$

D'après le théorème 1 aussi, M étant bornée, toutes ces espérances sont finies, et l'inégalité de [4] p. 39 montre que

$$E[U^2_\infty\vee V^2_\infty] \leqq cE[U^2_\infty\wedge V^2_\infty]$$

Appliquant ceci à la martingale $N=I_{]S,T]}\cdot M$, nous en déduisons

$$E[(M^*_T-M^*_S)^2] \leqq cE[N^{*2}_\infty] \leqq cE[S(N)^2_\infty] \leqq cE[I(N)^2_\infty] \leqq cE[I(M)^2_T I_{\{S<T\}}]$$

Alors le lemme 1, avec q=2, nous donne pour F modérée

$$E[F(M^*_\infty)] \leqq cE[F(I_\infty)]$$

On prend F(x)=x, et la démonstration est achevée.

APPLICATION AUX INEGALITÉS AVEC POIDS

Considérons maintenant une seconde loi de probabilité $\hat{P} = Z_\infty P$ sur l'espace Ω , équivalente à P , telle que la martingale $(Z_t) = E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$ satisfasse à la condition $(\hat{A}_p)$ pour un $p>1$

$$\frac{1}{Z_t}(E[Z_\infty^{p/p-1} | \underline{\underline{F}}_t])^{1/p} \leqq c_p \quad .$$

Nous continuons à considérer l'application $M \mapsto U(M)$ définie sur la classe des P-<u>martingales continues</u>, mais nous modifions les conditions ii) et iii)$_a$ en remplaçant partout les espérances E par rapport à P, par des espérances $\hat{E}$ par rapport à $\hat{P}$. La nouvelle classe d'applications U ainsi définie contient encore $U(M)=M^*$ ou $\langle M\rangle^{1/2}$ (Kazamaki) et $U(M)=L^*(M)$ (Barlow-Yor). Nous avons

THEOREME 3. La classe des applications $U(M)$ satisfaisant à i),ii),iii) pour les P-martingales continues, mais relativement à $\hat{P}$, est encore stable pour $\vee$ et $\wedge$.

<u>Démonstration</u>. Remplacer E par $\hat{E}$ dans la démonstration du th. 2 .

En particulier, nous retrouvons ainsi les inégalités de Chevalier avec poids, que nous avons établies dans [3] par une autre méthode.

Nous remercions P.A. Meyer pour ses commentaires sur une première version du manuscrit.

REFERENCES

[1]. BARLOW (M.T.) et YOR (M.). Semimartingale inéqualities via Garsia-Rodemich-Rumsey lemma. Application to local times. A paraître.

[2]. CHEVALIER (L.). Un nouveau type d'inégalités pour les martingales discrètes. ZW 49, 1979, p. 249-256.

[3]. CHOU (C.S.). Une inégalité de martingales avec poids. Sém. Prob. XV, 1981, p. 285-289. Lecture Notes in M. 850.

[4]. LENGLART (E.), LEPINGLE (D.) et PRATELLI (M.). Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Prob. XIV, 1980, p. 26-48. Lecture Notes in M. 784.

CHOU Ching-Sung
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li, TAIWAN