LAURENT SCHWARTZ

Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome S16 (1982), p. 1-148

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__S16__1_0>

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE DU $2^{\text{ème}}$ ORDRE, SEMI-MARTINGALES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES SUR UNE VARIETE DIFFERENTIELLE

par Laurent SCHWARTZ

INTRODUCTION

Il y a longtemps qu'on a, sans vouloir vraiment le dire, utilisé des semi-martingales à valeurs dans une variété de classe C^2. J'ai formalisé en détail cette notion dans Schwartz [1]. Mais il y a deux points que je n'étais pas bien arrivé à résoudre. Le premier, c'est la gêne constante introduite par la nécessité de vérifier, dans une intégrale stochastique, que la fonction à intégrer était véritablement intégrable ; voir par exemple Schwartz [1], théorèmes X et XI et leurs démonstrations. C'est ce qui m'a poussé à introduire les semi-martingales formelles, pour lesquelles aucune vérification d'intégrabilité n'est plus jamais nécessaire ; c'est l'objet de Schwartz [2]. Il sera constamment fait référence à ces deux articles, en les abrégeant par S[1] et S[2]. Le deuxième point est relatif au calcul différentiel du second ordre ; d'où l'obligation de ne considérer que $J \cdot X^c$, sorte de composante martingale locale continue d'une semi-martingale $J \cdot X$ qui n'existe pas ; voir S[1], pages 66 et suivantes. Je sentais bien alors qu'un $J \cdot X$ devait exister (il se notera ici $J \cdot \underline{X}$), mais avec un calcul différentiel du second ordre. Par ailleurs, il y longtemps aussi qu'on a étudié des diffusions et des équations différentielles stochastiques sur des variétés, et vu l'intervention des termes du second ordre (par suite de la formule d'Itô) dans les changements de cartes. Il est curieux qu'on n'ait je crois, jamais noté que ce changement de cartes faisait simplement intervenir le calcul différentiel du second ordre. Tout cela est l'objet du présent article.

Nous supposerons toujours donné un ensemble Ω, une tribu $\mathcal{O}$ sur Ω, une probabilité λ sur $(\Omega,\mathcal{O})$, et une filtration $(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, famille croissante et continue à droite de tribus λ-mesurables λ-complètes. Tous les processus seront donc indexés par le temps $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, comme dans S[1] et S[2]. Par ailleurs, toutes les intégrales stochastiques sont prises en excluant le temps 0 : $(f \cdot X)_t = \int_{]0,t]} f_s \, dX_s$, comme dans S[1] et S[2]. Ces différences mises à

part, mes notations sont les mêmes que dans P.A. Meyer [1], auquel je renverrai par M[1]. Sauf dans le cas particulier où la variété est un groupe de Lie, les discontinuités des semi-martingales semblent plutôt pathologiques.
Semi-martingale voudra donc toujours dire semi-martingale continue, martingale voudra dire martingale locale continue. Par contre on n'imposera pas du tout à une semi-martingale d'être nulle au temps 0, parce qu'en général elle sera définie seulement sur un ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et à valeurs dans une variété ! Avant de rédiger cet article, j'ai exposé mes idées à Paul André Meyer. Nous avons ensuite discuté, et échangé des versions successives de manuscrits, et finalement publié chacun un article, le sien est P.A. Meyer [2], le mien est celui-ci. Nous avons essayé chacun de rendre à César ce qui lui appartenait, sans aller jusqu'à l'obsession. Les deux articles se ressemblent beaucoup, mais valent tous les deux la peine d'être publiés, car ils tournent autour de points de vue qui ne sont pas exactement les mêmes ; il a travaillé surtout avec des ouverts de $\mathbb{R}^N$ (cartes), et des tenseurs avec indices, moi avec des espaces tangents et cotangents sans cartes ; chaque point de vue a ses avantages et ses inconvénients(♦). Meyer a intitulé son article "Géométrie stochastique sans larmes" ; je ne suis pas sûr qu'il n'y ait pas de larmes, mais suis à peu près sûr qu'il y en a dans le mien. Les larmes paraissent un peu inévitablement liées au calcul du second ordre ; on ne pleure pas au premier ordre, on pleure au second, depuis déjà des générations.

****

(♦) Les notations tensorielles utilisées par Meyer et moi ne sont pas partout les mêmes, de sorte qu'hélas il y a des facteurs $2! = 2$ en plus chez lui ou chez moi.

§ 1. LES ESPACES TANGENTS ET COTANGENTS D'ORDRE 2 SUR UNE VARIETE

Résumé du § 1. Ce paragraphe définit les notions essentielles du calcul différentiel du second ordre. (1.1) définit les espaces 1-cotangent $T^{*1}(V,v)$ et 2-cotangent $T^{*2}(V,v)$ en un point v d'une variété V, et les différentielles $D\varphi$ et $D^2\varphi$ d'une fonction φ sur V. On examine le cas où V est un espace vectoriel E, muni d'une base. On passe aux structures duales, espaces 1-tangent $T^1(V,v)$ et 2-tangent $T^2(V,v)$ à V en v, avec le cas $V = E$, muni d'une base. Puis (1.8) traite des images par une application C^2 d'une variété dans une autre, avec l'exemple de l'accélération complète d'une trajectoire.

(1.1) V sera une variété différentielle de classe C^2, de dimension N. Une fonction φ réelle de classe C^2, $\varphi \in C^2(V;\mathbf{R}) = C^2(V) = C^2$, est dite k-plate en $v \in V$, $k = 0,1,2$, si φ et ses dérivées d'ordre $\leq k$ sont nulles en v (définition sur une carte, indépendante de la carte). L'espace vectoriel des fonctions φ nulles en v, modulo les fonctions k-plates, $k = 1,2$, se note $T^{*k}(V,v)$, et s'appelle espace des vecteurs k-cotangents à V en v ; l'image de φ dans cet espace se note $D^k\varphi(v)$, $k = 1,2$; si φ ne s'annule pas en v, on pose $D^k\varphi(v) = D^k(\varphi - \varphi(v))(v)$, où $D^k 1(v) = 0$; $T^{*1}(V,v)$ est de dimension N, $T^{*2}(V,v)$ de dimension $N + \frac{N(N+1)}{2}$. On appèllera $P^*(V,v)$ le sous-espace de $T^{*2}(V,v)$, formé des classes des fonctions 1-plates en v, de dimension $\frac{N(N+1)}{2}$; le quotient $T^{*2}(V,v)/P^*(V,v)$ est évidemment l'espace des fonctions nulles en v, modulo les fonctions 1-plates en v, c-à-d. $T^{*1}(V,v)$. Si $\varphi, \psi \in C^2$ sont nulles en v, $\varphi\psi$ est 1-plate en v, donc $D^2(\varphi\psi)(v) \in P^*(V,v)$, et si l'une d'elle est 1-plate, leur produit est 2-plat ; on définit donc ainsi une application bilinéaire $(D\varphi(v), D\psi(v)) \mapsto D^2(\varphi\psi)(v)$ de $T^{*1}(V,v) \times T^{*1}(V,v)$ dans $P^*(V,v)$, donc une application linéaire de $T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$ ($\odot$ est le produit tensoriel symétrique) dans $P^*(V,v)$, qu'une carte montre être une bijection. Par cette bijection, nous identifierons $T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$ et $P^*(V,v)$ et poserons, pour φ et ψ nulles en v, $D\varphi(v) \odot D\psi(v) = D^2(\varphi\psi)(v)$. Si φ et ψ ne s'annulent pas en v, $\varphi - \varphi(v)$

et $\psi - \psi(v)$ s'annulent, d'où

$$(1.2)\quad \begin{cases} D\varphi(v) \odot D\psi(v) = D(\varphi - \varphi(v))(v) \odot D(\psi - \psi(v))(v) \\ = D^2((\varphi - \varphi(v))(\psi - \psi(v)))(v) = D^2(\varphi\psi)(v) - \varphi(v) D^2\psi(v) - \psi(v) D^2\varphi(v)\,. \end{cases}$$

<u>(1.2bis)</u> Tout produit tensoriel $F \odot F$ est muni d'une structure d'ordre naturelle : on dit qu'un élément de $F \odot F$ est ≥ 0 s'il est une somme finie $\sum\limits_\alpha f_\alpha \odot f_\alpha$, $f_\alpha \in F$. Si $(f_k)_{k=1,\ldots,\ell}$ est une base de F, $\sum\limits_{i,j=1} x_{i,j}\, f_i \odot f_j$, $x_{i,j} = x_{j,i}$, est ≥ 0 si et seulement la matrice des $x_{i,j}$ est (symétrique) ≥ 0. Donc $P^*(V,v)$ a une structure d'ordre ; les éléments ≥ 0 de $P^*(V,v)$ sont exactement les $\sum\limits_\alpha D\varphi_\alpha(v) \odot D\varphi_\alpha(v)$, $\varphi_\alpha \in C^2(V;\mathbf{R})$, ou encore les $\sum\limits_\alpha (D^2\, \varphi_\alpha^2)(v)$, où les φ_k sont des fonctions C^2 nulles en v.

Résumons quelques-uns des résultats précédents :

<u>(1.3)</u> $T^{*2}(V,v)$ <u>est de dimension</u> $N + \frac{N(N+1)}{2}$, <u>le sous-espace</u> $P^*(V,v)$ <u>des classes des fonctions</u> 1-<u>plates en</u> v <u>est de dimension</u> $\frac{N(N+1)}{2}$, <u>égal à</u> $T^{*1}(V,v) \odot T^*(V,v)$ <u>par</u> (1.2), <u>et</u> $T^{*2}(V,v)/P^*(V,v) = T^{*1}(V,v)$; <u>l'image de</u> $D^2\varphi(v) \in T^{*2}(V,v)$ <u>dans le quotient</u> $T^{*1}(V,v)$ <u>est</u> $D\varphi(v)$.

Si V est un espace vectoriel E de dimension N, $\varphi \in C^2$ admet une dérivée $\varphi'(v)$, forme linéaire sur E donc $\in E^*$, et une dérivée seconde $\varphi''(v)$, forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, $\varphi'(v)(X) = \partial_X\varphi(v)$, $\varphi''(v)(X,Y) = \partial_X\partial_Y(v)$; alors $\varphi''(v)$ est une forme linéaire sur $E \odot E$; donc $\varphi''(v) \in (E \odot E)^* = E^* \odot E^*$, si l'on met $E \odot E$ et $E^* \odot E^*$ en dualité par le produit scalaire

$$(1.4)\quad (\alpha \odot \beta | X \odot Y)_{E^* \odot E^*, E \odot E} = (\alpha|X)_{E^*,E}\,(\beta|Y)_{E^*,E} + (\alpha|Y)_{E^*,E}\,(\beta|Y)_{E^*,E}\,. \quad (1)$$

Alors $\varphi \mapsto (\varphi'(v), \varphi''(v))$ est une application linéaire de $C^2(E;\mathbf{R})$ dans $E^* \oplus (E^* \odot E^*)$, égale à 0 sur les fonctions nulles en v et 2-plates en v, donc $D^2\varphi(v) \mapsto (\varphi'(v), \varphi''(v))$, que nous écrirons plutôt $(\varphi'(v)\ \varphi''(v))$, matrice horizontale à 1 ligne et 2 colonnes, est une application linéaire de $T^{*2}(E,v)$ dans

$E^* \oplus (E^* \odot E^*) = T^{*1}(E,v) \oplus (T^{*1}(E,v) \odot T^{*1}(E,v))$, qui est bijective ; on identifiera donc $T^{*2}(E,v)$ à $E^* \oplus (E^* \odot E^*)$ en posant

$$(1.4\text{bis}) \qquad D^2\varphi(v) = (\varphi'(v) \quad \varphi''(v)) \quad .$$

On voit aussitôt que le 2ème sous-espace, $E^* \odot E^*$ est exactement $P^*(V,v)$, avec la structure tensorielle de (1.3) ; mais ici la structure sous-espace et quotient de (1.3) devient une structure de somme directe : un élément $(0 \quad \varphi''(v))$ de $E^* \odot E^*$ est la différentielle D^2 d'une fonction plate en v (ce qui garde son sens, déjà vu, sur une variété), un élément $(\varphi'(v) \quad 0)$ de E^* est égal à la différentielle D^2 d'une fonction affine, ce qui n'a pas de sens sur une variété.

Si E est muni d'une base $(e_k)_{k=1,2,\ldots,N}$, donc E^* de la base duale $(\varepsilon^k)_{k=1,2,\ldots,N}$, ε^k est la forme linéaire coordonnée x^k, donc aussi $Dx^k(v) = D^2x^k(v) = x^k = \varepsilon^k \in E^*$, donc $Dx^i(v) \odot Dx^j(v) = \varepsilon^i \odot \varepsilon^j = (0 \quad \varepsilon^i \odot \varepsilon^j) = D^2((x^i - x^i(v))(x^j - x^j(v)))(v) \in E^* \odot E^*$.

Comme $\varphi - \varphi(v) - \sum_{k=1}^{N} \partial_k \varphi(v)(x^k - x^k(v))$ est 1-plate en v, et

$\varphi - \varphi(v) - \sum_{k=1}^{N} \partial_k \varphi(v)(x^k - x^k(v)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\partial_j \varphi(v)(x^i - x^i(v))(x^j - x^j(v))$

2-plate en v (formule de Taylor), on aura

$$(1.5) \qquad \begin{cases} D\varphi(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \partial_k \varphi(v) \varepsilon^k \quad , \\ D^2\varphi(v) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \partial_k \varphi(v) \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\partial_j \varphi(v) \varepsilon^i \odot \varepsilon^j \right) \quad . \end{cases}$$

La fonction φ est 1-plate en $v \in E$ ssi les $\partial\varphi_k(v)$ sont nulles, et alors $D^2\varphi(v) \in E^* \odot E^*$ est ≥ 0 (suivant 1.2bis) ssi la matrice des $\partial_i\partial_j \varphi(v)$ est (symétrique) ≥ 0.

Passons aux structures duales. L'espace k-tangent en v, $k = 1,2$, dual de $T^{*k}(V,v)$, est l'espace des distributions sur V (formes linéaires continues sur $C^2_{comp}(V)$), d'ordre $\leq k$, de support $\subset \{v\}$, sans terme en δ (i.e. nulles sur les fonctions constantes). Un champ de vecteurs k-tangents est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$, sans terme d'ordre 0. Si L est un tel opérateur différen-

tiel, φ une fonction réelle C^2 sur V, on aura
$(L\varphi)(v) = (L_v \mid D^2\varphi(v))_{T^2(V,v),T^{*2}(V,v)}$. La formule (1.2) donne

$$(1.6) \qquad (L(\varphi\psi) - \varphi L\psi - \psi L\varphi)(v) = (L_v \mid D\varphi(v) \odot D\psi(v))_{T^2,T^{*2}} .$$

L'orthogonal de $P^*(V,v)$ dans $T^2(V,v)$ est le sous-espace $T^1(V,v)$ (une distribution en v, d'ordre ≤ 1, est une distribution d'ordre ≤ 2, nulle sur les fonctions 1-plates !). La structure (1.3) montre alors que le dual de $T^{*2}(V,v)/P^*(V,v) = T^{*1}(V,v)$ est $T^1(V,v)$, ce que nous savions déjà, mais aussi que le dual de $P^*(V,v) = T^{*1}(V) \odot T^{*1}(V,v)$ est $P(V,v) = T^2(V,v)/T^1(V,v)$ et doit être canoniquement isomorphe à $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$. On peut retrouver cette structure d'une autre manière. Soient ξ_v, η_v, deux vecteurs 1-tangents en v. Prolongeons-les n'importe comment en champs de vecteurs de classe C^1, ξ, η, qui sont donc des opérateurs différentiels d'ordre 1. Alors leur produit $\xi\eta$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 ; $(\xi\eta\varphi)(v)$ dépend des prolongements choisis, et d'ailleurs $\xi\eta \neq \eta\xi$. Mais, si φ est 1-plate, $(\xi\eta\varphi)(v) = (\eta\xi\varphi)(v)$ ne dépendent que de $D^2\varphi(v)$, ξ_v, η_v ; ou encore $(\xi\eta)_v$ et $(\eta\xi)_v$ sont égaux mod $T^1(V,v)$ et ne dépendent, modulo $T^1(V,v)$, que de ξ_v, η_v. On définit donc une application bilinéaire symétrique $(\xi_v,\eta_v) \mapsto (\xi\eta)_v = (\eta\xi)_v$ de $T^1(V,v) \times T^1(V,v)$ dans $P(V,v)$, donc linéaire de $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ dans $P(V,v) = T^2(V,v)/T^1(V,v)$, et on voit que c'est une bijection. Cela donne bien une identification de $P(V,v)$ avec $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$, et on vérifie aisément qu'elle est compatible avec sa structure de dual de $P^*(V,v) = T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$.

La proposition duale de (1.3) est donc :

<u>(1.7)</u> $T^1(V,v)$ <u>est un sous-espace vectoriel de</u> $T^2(V,v)$, <u>c'est l'orthogonal de</u> $P^*(V,v) = T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$; <u>le quotient</u> $T^2(V,v)/T^1(V,v)$ <u>est le dual</u> $P(V,v)$ <u>de</u> $P^*(V,v)$, <u>et il est canoniquement isomorphe à</u> $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$.

En liaison avec (1.2bis), en identifiant suivant (1.4) le dual de $F \odot F$ à $F^* \odot F^*$, les structures d'ordre de ces deux espaces sont duales : un élément de $F^* \odot F^*$ est ≥ 0 si et seulement si son produit scalaire avec tout élément ≥ 0 de $F \odot F$

est ≥ 0, ou encore ssi son produit scalaire avec tous les carrés $f \odot f$, $f \in F$, est ≥ 0, ou encore ssi il définit une forme bilinéaire (symétrique) ≥ 0 sur $F \times F$. Donc $T^1(V,v) \odot T^1(V,v) = T^2(V,v)/T^1(V,v)$ est muni d'une structure d'ordre, et par conséquent $T^2(V,v)$ d'une structure de préordre, en appelant ≥ 0 un élément de $T^2(V,v)$ donc l'image dans le quotient est ≥ 0. Le cône ≥ 0 de $T^2(V,v)$ est alors engendré par $T^1(V,v)$ et les $(\xi^2)_v$, ξ champ de vecteurs de classe C^1 ou opérateur différentiel d'ordre 1 sans terme d'ordre 0, ou encore c'est l'ensemble des traces en v d'opérateurs différentiels continus, sans terme d'ordre 0, semi-elliptiques ≥ 0.
Si $V = E$, espace vectoriel de dimension N, $T^1(V,v) = E$, $T^2(V,v) = E \oplus (E \odot E)$, la structure sous-espace et quotient devient une structure de somme directe.
D'ailleurs un opérateur différentiel L d'ordre 2 sans terme d'ordre 0 s'écrit comme somme $L = \xi + \Delta$ d'un opérateur différentiel homogène d'ordre 1, ξ, et d'un opérateur différentiel homogène d'ordre 2, Δ, ce qui n'a pas de sens sur une variété ; on écrira $L_v = \begin{pmatrix} \xi_v \\ \Delta_v \end{pmatrix}$, $\xi_v \in E$, $\Delta_v \in E \odot E$, matrice verticale, à 2 lignes et une colonne ; si φ est de classe C^2, le produit scalaire entre $D^2\varphi(v) = (\varphi'(v) \quad \varphi''(v))$ et $L_v = \begin{pmatrix} \xi_v \\ \Delta_v \end{pmatrix}$ est le produit de matrices, soit $\varphi'(v)(\xi_v) + \varphi''(v)(\Delta_v) = ((\xi+\Delta)\varphi)(v)$; $L_v \in E$, i.e. $L_v = \begin{pmatrix} \xi_v \\ 0 \end{pmatrix}$, ssi il annule les fonctions plates en v (c'est aussi vrai sur une variété), et $L_v \in E \odot E$, $L_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_v \end{pmatrix}$, ssi il annule les fonctions affines (ce qui n'a pas de sens sur une variété).
Si ξ et η sont deux opérateurs différentiels homogènes d'ordre 1, de classe C^1, $\xi\eta$ n'est pas homogène d'ordre 2, mais on voit aisément que sa composante homogène d'ordre 1 est $\partial_\xi \eta$; donc

(1.7bis)
$$\xi_v \odot \eta_v \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_v \odot \eta_v \end{pmatrix} = (\xi\eta - \partial_\xi \eta)_v = (\eta\xi - \partial_\eta \xi)_v \quad ,$$
$$\text{ou aussi} \quad (\xi\eta)_v = \begin{pmatrix} (\partial_{\xi_v} \eta)_v \\ \xi_v \odot \eta_v \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ou} \quad \xi\eta = \begin{pmatrix} \partial_\xi \eta \\ \xi \odot \eta \end{pmatrix} \quad .$$

Bien sûr $\xi\eta - \partial_\xi \eta = \eta\xi - \partial_\eta \xi$ $(= \xi \odot \eta)$, car $\xi\eta - \eta\xi = [\xi,\eta] = \partial_\xi \eta - \partial_\eta \xi$.
Remarquons aussi que $(\partial_{\xi_v} \eta) = \eta'(v)(\xi_v)$; $\xi_v \in E$, $\eta' \in \mathcal{L}(E;E)$, $\eta'(v)(\xi_v) \in E$.
Si ξ et η sont des opérateurs différentiels à coefficients constants,

(1.7ter) $$\xi \odot \eta = \xi\eta = \eta\xi \quad .$$

Si E est muni d'une base $(e_k)_{k=1,2,...,N}$, donc E^* de la base duale $(\varepsilon^k)_{k=1,2,...,N}$, on pourra écrire un opérateur différentiel d'ordre 2 sans terme d'ordre 0 comme

(1.7quarto) $$L = \sum_{k=1}^{N} b^k \, \partial_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} a^{i,j} \, \partial_i \, \partial_j \quad ,$$

[le facteur $\frac{1}{2}$ devant $a^{i,j}$ n'a ici aucune importance ; on le retrouve plus loin, on ne le retrouverait pas si on ne l'avait pas mis. C'est pour avoir $L(x^i x^j) - x^i L x^j - x^j L x^i = a^{i,j}$, voir S[1], page 102] ; alors

$$L_v = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} b^k(v) \; e_k \\ \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a^{i,j}(v) \; e_i \odot e_j \end{pmatrix} .$$

Compte-tenu de $(\varepsilon^k | e_{k'}) = \delta^k_{k'}$, $(\varepsilon^i \odot \varepsilon^j \mid e_{i'} \odot e_{j'}) = \delta^i_{i'} \delta^j_{j'} + \delta^i_{j'} \delta^j_{i'}$, on trouve bien, à partir de (1.5), $(L\varphi)(v) = (L_v \mid D^2\varphi(v))_{T^2(E,v), T^{*2}(E,v)}$. Pour la structure de préordre de $T^2(V,v)$, vue à (1.7), $L_v \geq 0$ ssi la matrice des $a^{i,j}(v)$ est (symétrique) ≥ 0.

A partir des $T^{*k}(V,v)$, $T^k(V,v)$, $P^*(V,v)$, $P(V,v)$, $T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$, $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ on forme, en prenant les réunions pour $v \in V$, des fibrés vectoriels $T^{*k}(V)$, $T^k(V)$, $P^*(V)$, $P(V)$, $T^{*1}(V) \odot T^{*1}(V)$, $T^1(V) \odot T^1(V)$.

(1.8) Images par une application C^2.

Soit Φ une application C^2 de V dans une autre variété W. Pour tout $v \in V$, elle définit une image réciproque $^t\Phi(v)$ ou $\Phi^*(v)$ de $T^{*k}(W, \Phi(v))$ dans $T^{*k}(V,v)$, $k = 1,2$, par

(1.8bis) $$\Phi^*(v)(D^k\varphi(\Phi(v))) = D^k(\varphi \circ \Phi)(v) \quad ,$$

pour $\varphi \in C^2(W;\mathbb{R})$. Si Ψ est une application C^2 de W dans une autre variété Z, il y a transitivité :

(1.9) $$\underline{(\Psi \circ \Phi)^*(v)} = \underline{\Phi^*(v)} \circ \underline{\Psi^*(\Phi(v))} \quad .$$

De même il existe une image directe (image directe d'une distribution d'ordre ≤ 2 par une application C^2 !) de $T^k(V,v)$ dans $T^k(W,\Phi(v))$, $k = 1,2$, transposée de la précédente, avec

(1.10) $$\underline{(\Psi \circ \Phi)(v)} = \underline{\Psi(\Phi(v))} \circ \underline{\Phi(v)} \quad .$$

La relation de transposition se traduit comme suit : si $\varphi \in C^2(W;\mathbb{R})$ et si L est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 2 sur V,

(1.11) $$(\underline{\Phi(v)}\, L_v \mid D^2\varphi(\Phi(v))) = (L(\varphi \circ \Phi))(v) \quad .$$

Il peut être préférable de noter $\underline{\overset{1}{\Phi}(v)}$, $\underline{\overset{2}{\Phi}(v)}$, $\underline{\overset{1}{\Phi}{}^*(v)}$, $\underline{\overset{2}{\Phi}{}^*(v)}$, selon qu'elles opèrent sur les espaces d'ordre 1 ou d'ordre 2. Tout est fonctoriel, c-à-d. respecte les structures de sous-espace, quotient, produit tensoriel, positivité : $\overset{2}{\Phi}{}^*(v)$ envoie $P^*(W,\Phi(v))$ dans $P^*(V,v)$, et c'est l'application $\underline{\overset{1}{\Phi}{}^*(v)} \circledcirc \underline{\overset{1}{\Phi}{}^*(v)}$ de $T^{*1}(W,\Phi(v)) \odot T^{*1}(W,\Phi(v))$ dans $T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$; donc elle passe aux quotients, et donne l'application $\underline{\overset{1}{\Phi}{}^*(v)}$ de $T^{*1}(W,\Phi(v))$ dans $T^{*1}(V,v)$; $\underline{\overset{2}{\Phi}(v)}$ induit $\overset{1}{\Phi}(v) : T^1(V,v) \to T^1(W,\Phi(v))$, donc passe aux quotients $P(V,v) \to P(W,\Phi(v))$, et donne $\underline{\overset{1}{\Phi}(v)} \circledcirc \underline{\overset{1}{\Phi}(v)}$ de $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ dans $T^1(W,\Phi(v)) \odot T^1(W,\Phi(v))$ [2].

Un cas particulièrement simple et important est le suivant : si V' est une sous-variété (non nécessairement fermée) de V, Φ l'injection de V' dans V, $\underline{\Phi}$ est une injection : en tout point $v \in V'$, $T^k(V',v)$ est un sous-espace vectoriel de $T^k(V,v)$, et $P(V',v) = T^2(V',v)/T^1(V',v) = T^1(V',v) \odot T^1(V',v)$ s'injecte dans $P(V,v) = T^2(V,v)/T^1(V,v) = T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ comme le carré $\circledcirc$ de l'injection de $T^1(V',v)$ dans $T^1(V,v)$. Et $\underline{\Phi}^*$ est une surjection : $T^{*k}(V',v)$ est un quotient de $T^{*k}(V,v)$, et $P^*(V',v) = T^{*1}(V',v) \odot T^*(V',v)$ un quotient de $T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$, la surjection canonique est le carré ◎ de celle de $T^{*1}(V,v)$ sur $T^{*1}(V',v)$. Tout ceci se voit immédiatement dans une carte où V devient un ouvert d'un espace vectoriel et V' un ouvert d'un sous-espace vectoriel. Nous n'allons pas détailler toutes les formules qu'on peut en déduire lorsque V ou W ou les deux sont des espaces vectoriels de dimension finie. Nous nous bornerons au cas V est quelconque et $W = \mathbb{R}$, puis au cas $V = E$, $W = F$, et pour les espaces tangents seulement. Si V est quelconque, $W = \mathbb{R}$, alors $T^1(W,\Phi(v)) = \mathbb{R}$, $T^2(W,\Phi(v)) = \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \odot \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Alors

$$\underline{\overset{1}{\Phi}(v)} = D\Phi(v) \in \mathcal{L}(T^1(V,v);\mathbb{R}) = T^{*1}(V,v) \quad ,$$

(1.12)
$$\underline{\overset{2}{\Phi}(v)} = \begin{pmatrix} D^2\Phi(v) \\ \\ D\Phi(v) \circledcirc D\Phi(v) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(T^2(V,v) \; ; \; \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \odot \mathbb{R})) \quad ,$$

où un élément de $\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \odot \mathbb{R})$ est mis sous forme d'une matrice verticale ; les deux éléments de matrice sont des éléments, le premier de $\mathcal{L}(T^2(V,v);\mathbb{R}) = T^{*2}(V,v)$, le deuxième de $\mathcal{L}(P(V,v);\mathbb{R}) = P^*(V,v)) = T^{*1}(V,v) \odot T^{*1}(V,v)$; $D\Phi(v) \circledcirc D\Phi(v) = \frac{1}{2} D\Phi(v) \odot D\Phi(v)$. Ensuite, si $V = E$, $W = F$, $T^2(V,v) = E \oplus (E \odot E)$, $T^2(W,\Phi(v)) = F \oplus (F \odot F)$, et on trouve

$$\underline{\overset{1}{\Phi}(v)} = \Phi'(v) \in \mathcal{L}(E;F)$$

(1.13)
$$\underline{\overset{2}{\Phi}(v)} = \begin{pmatrix} \Phi'(v) & \Phi''(v) \\ \\ 0 & \Phi'(v) \circledcirc \Phi'(v) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E \oplus (E \odot E) \; ; \; F \oplus (F \odot F)) \quad ,$$

où un élément de $E \oplus (E \odot E)$ ou $F \oplus (F \odot F)$ est mis sous forme d'une matrice verticale. Cela veut dire que, si $L_v = \begin{pmatrix} \xi_v \\ \Delta_v \end{pmatrix} \in E \oplus (E \odot E)$, son image dans $F \oplus (F \odot F)$ est

(1.14)
$$\begin{pmatrix} \Phi\ (v) & \Phi''(v) \\ \\ 0 & \Phi'(v) \circledcirc \Phi'(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_v \\ \\ \Delta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi'(v)(\xi_v) + \Phi''(v)(\Delta_v) \\ \\ (\Phi'(v) \circledcirc \Phi'(v))(\Delta_v) \end{pmatrix} \quad .$$

On peut mettre ces formules sous une autre forme. Soit $t \mapsto x = \psi(t)$ une trajectoire C^2, application de la droite $\mathbb{R}$ des temps dans un espace E. Sa vitesse en un point t est $x'(t)$, son accélération $x''(t)$. Soit ensuite Φ une application C^2 de E dans F, ce qui donne $t \mapsto y = \Phi(x(t))$, trajectoire à valeurs dans F. On exprime immédiatement $y'(t)$ à partir de $x'(t)$, c'est

$$y'(t) = \overset{1}{\underline{\Phi}}(x(t))x'(t) = \Phi'(x(t))x'(t) \quad .$$

Mais on ne peut pas exprimer $y''(t)$ seulement à partir de $x''(t)$, il faut connaître à la fois $x'(t)$ et $x''(t)$ pour trouver $y''(t)$, on a

$$(1.14\text{bis}) \qquad y''(t) = \Phi'(x(t))x''(t) + \Phi''(x(t))(x'(t)) \odot x'(t)) \quad .$$

Convenons d'appeler accélération complète de x au temps t, $\underline{x''(t)}$, le vecteur $\begin{pmatrix} x''(t) \\ x'(t) \odot x'(t) \end{pmatrix} \in E \oplus (E \odot E)$, et de même $\underline{y''((t)} = \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \odot y'(t) \end{pmatrix} \in F \oplus (F \odot F)$.
On remarquera que $x'(t)$ est aussi $\overset{1}{\underline{x}}(t)(1)$, $1 \in \mathbb{R}$, et que l'accélération complète $\underline{x''(t)}$ est $\overset{2}{\underline{x}}(t)(1 \odot 1)$, $1 \odot 1 \in \mathbb{R} \odot \mathbb{R} = \mathbb{R}$. L'accélération complète est un élément ≥ 0 suivant (1.7). Alors

$$(1.15) \qquad y''(t) = \overset{2}{\underline{\Phi}}(x(t))\overset{2}{\underline{x}}(t)(1 \odot 1) \qquad \text{(formule (1.10)), ou}$$

$$(1.15\text{bis}) \qquad \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \odot y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi'(x(t)) & \Phi''(x(t)) \\ 0 & \Phi'(x(t)) \circledcirc \Phi'(x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''(t) \\ x'(t) \odot x'(t) \end{pmatrix} ,$$

ce qui redonne bien (1.14bis). Il n'est pas mauvais de définir $\underline{x}''(t)$ comme vecteur 2-tangent au point $x(t)$: si $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$, on a

$$(1.16) \qquad (D^2\varphi(x(t)) | \underline{x''(t)})_{T^{*2}(E,x(t)),T^2(E,x(t))}$$

$$= (\varphi'(x(t)) \quad \varphi''(x(t))) \begin{pmatrix} x'(t) \\ x'(t) \odot x'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \varphi'(x(t))\, x''(t) + \varphi''(x(t))(x'(t) \odot x'(t)) = (\varphi \circ x)''(t) \quad .$$

Les calculs sont peut-être plus simples à faire directement pour ces vecteurs vitesse et accélération complète ; mais la vitesse et l'accélération complète des diverses trajectoires à valeurs dans E engendrent $T^2(E,v)$ en tout point v, et cela redonne la matrice carrée ci-dessus si on ne l'avait pas obtenue autrement. Par ailleurs, si la trajectoire x est à valeurs dans une variété V, la vitesse reste $\overset{1}{\underline{x}}(t)(1)\in T^1(V,x(t))$ et l'accélération complète $\overset{2}{\underline{x}}(t)(1\odot 1)\in T^2(V,x(t))$; on pourra, si l'on veut, toujours les appeler $x'(t)$, $\underline{x''(t)}$, et on aura toujours $y'(t)=\overset{1}{\underline{\Phi(t)}}x'(t)$, $\underline{y''(t)}=\overset{2}{\underline{\Phi(x(t))x''(t)}}$ et (1.15ter) ; l'image de $\underline{x''(t)}$ dans $T^2(V,x(t))/T^1(V,x(t))=T^1(V,x(t))\odot T^1(V,x(t))$ est le carré de la vitesse $x'(t)\odot x'(t)$.

§ 2. TRANSFORMATIONS DES SEMI-MARTINGALES CONTINUES PAR DES APPLICATIONS C^2. INTEGRALES STOCHASTIQUES DE PROCESSUS 2-COTANGENTS OPTIONNELS PAR RAPPORT A DES SEMI-MARTINGALES SUR DES VARIETES

Résumé du § 2. (2.1) donne les variántes de la formule d'Itô pour l'image d'une semi-martingale par une application C^2, qui permettront l'énoncé du principe fondamental (2.6) : la différentielle de semi-martingale dX_t est un petit vecteur 2-tangent au point X_t. C'est ce qui pourra être transporté sur une variété.

Si alors X est une semi-martingale à valeurs dans une variété V, si J est processus optionnel 2-cotangent à V le long de X, on peut définir une intégrale stochastique $J\bullet\underline{X}$, semi-martingale (formelle) réelle, $(J\bullet\underline{X})_t=\int_{]0,t]}(J_s|d\underline{X}_s)$, puisque J_s est 2-cotangent au point X_s, et dX_s 2-tangent au point X_s ; c'est la proposition (2.7). La proposition (2.12) est un retour à l'intégrale $J\bullet X^c$ de S[1] (p. 66 et suivantes), mais avec les méthodes plus fortes utilisées ici. On est en fait amené à calculer des intégrales par rapport à $d\underline{X}$, dX^c, $d\underline{\tilde{X}}$, $d\,\frac{1}{2}[X,X]$. A (2.16) on étudie l'image par une application C^2 d'une variété dans une autre ; et à (2.17), le cas d'une sous-variété de V. (2.20) localise à un ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$.

Dans ce paragraphe, il n'est pas question d'imposer à une semi-martingale X à valeurs dans une <u>variété</u> la valeur $X_0 = 0$; X_0 est arbitraire, $\in \mathcal{C}_0$. Mais les intégrales stochastiques $J \cdot \underline{X}$ seront dans $\mathcal{O}pt\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, nulles au temps 0. [Pour les notations telles que $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, etc., voir S[2], §§ 3, 4, 5 ; $\mathcal{O}pt\mathcal{S}\mathcal{M}^c$ est l'$\mathcal{O}$pt-module des semi-martingales continues formelles, nulles au temps 0.]

[Si on travaille sur $[S,T]$, S et T temps d'arrêt, au lieu de $[0,+\infty]$, X_S est arbitraire, X est la restriction à $[S,T]$ d'une semi-martingale, et elle est continue sur $[S,T]$. Mais les intégrales stochastiques seront prises à partir de S, nous les noterons $J\, 1_{]S,+\infty]} \cdot \underline{X} \in \mathcal{O}pt\mathcal{S}\mathcal{M}^c[S,T]$, semi-martingale réelle continue formelle sur $[0,T]$, nulle dans $[0,S]$;

$$(J\, 1_{]S,+\infty]} \cdot \underline{X})_t = \int_{]S,t]} J_s \, \underline{dX_s} \quad , \quad (t,\omega) \in [S,T] \quad .$$

Si V est un espace vectoriel, c'est aussi $J \cdot (\underline{X^T - X^S})$, $X^T - X^S$ semi-martingale continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, nulle sur $[0,S]$, arrêtée en T ; les signes $\sim$ sont toujours $\sim$ sur $[S,T]$. Là où, dans les formules, nous trouverons $\varphi(X) - \varphi(X_0)$, il faut remplacer par $\varphi(X) - \varphi(X_s)$:

$$D^2\varphi(X)\, 1_{]S,+\infty]} \cdot \underline{X} = \varphi(X) - \varphi(X_s) \text{ sur } [S,T], \in \mathcal{S}\mathcal{M}^c[S,T] \quad .]$$

<u>(2.1)</u> <u>Le principe fondamental</u> : <u>l'accroissement d'une semi-martingale vectorielle se comporte comme un vecteur 2-tangent</u>.

Soient E, F, des espaces vectoriels, X une semi-martingale à valeurs dans E (non nécessairement nulle au temps 0). Soit Φ une application C^2 de E dans F. D'après Itô, on a, si nous prenons des coordonnées dans E, $E = \mathbb{R}^N$, pour une base $(e_k)_{k=1,\dots,N}$:

$$\Phi(X) - \Phi(X_0) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k \Phi(X) \cdot X^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \partial_j \Phi(X) \cdot [X^i, X^j] \quad ,$$

à valeurs dans F ;

$$= \Phi'(X) \cdot \sum_{k=1}^{N} X^k e_k + \frac{1}{2} \Phi''(X) \cdot \sum_{i,j=1}^{N} [X^i, X^j]\, e_i \otimes e_j$$

$$= \Phi'(X) \cdot X + \Phi''(X) \cdot \frac{1}{2} [X,X] \quad ,$$

avec $[X,X] = \sum_{i,j=1}^{N} [X^i,X^j]\, e_i \odot e_j$ à valeurs dans $E \odot E$, $\Phi'(v) \in \mathcal{L}^2_{sym}(E\times E;F)=\mathcal{L}(E\odot E;F)$.
Le processus $\frac{1}{2}[X,X]$ à valeurs dans $E\odot E$ est croissant (pour la structure d'ordre vue à (1.2bis)). En effet, si $(\theta_i)_{i=1,2,\dots,N} \in E^* = \mathbb{R}^N$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \theta_i\, \theta_j\, \frac{1}{2}[X^i,X^j] = \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{N} \theta_i\, X^i\, ,\, \sum_{j=1}^{N} \theta_j\, X^j\Big]$$

est croissant.

En prenant le compensateur et le compensé :

$$\Phi(X)^c = \Phi'(X)\cdot X^c \quad ,$$

$$\widetilde{\Phi(X)}^{(\bullet)} - \Phi(X_o) = \widetilde{\Phi(X)} - \widetilde{\Phi(X_o)}$$

$$= \Phi(X) - \Phi(X_o) - \Phi(X)^c = \Phi'(X)\cdot\widetilde{X} + \Phi''(X)\circ\frac{1}{2}[X,X]$$

Enfin

$$\frac{1}{2}\left([\Phi(X),\Phi(X)] - [\Phi(X),\Phi(X)]_o\right) = \frac{1}{2}[\Phi(X)-\Phi(X_o),\Phi(X)-\Phi(X_o)]$$

$$= \frac{1}{2}\langle\Phi(X)^c,\Phi(X)^c\rangle = (\Phi'(X) \circledcirc \Phi'(X))\cdot\frac{1}{2}[X,X] \quad ,$$

à valeurs dans $F\odot F$. Résumons toutes ces formules :

$$(2.1)' \quad \left\{\begin{aligned} \Phi(X) - \Phi(X_o) &= \Phi'(X)\cdot X + \Phi''(X)\cdot\frac{1}{2}[X,X] \\ \Phi(X)^c &= \Phi'(X)\cdot X^c \\ \widetilde{\Phi(X)} - \widetilde{\Phi(X)}_o &= \Phi'(X)\cdot\widetilde{X} + \Phi''(X)\cdot\frac{1}{2}[X,X] \\ \frac{1}{2}\left([\Phi(X),\Phi(X)] - [\Phi(X),\Phi(X)]_o\right) &= (\Phi'(X)\circledcirc\Phi'(X))\cdot\frac{1}{2}[X,X] \quad . \end{aligned}\right.$$

(•) Dans S[1], la décomposition d'une semi-martingale était notée $X = X^c + X^d$.
Nous adopterons ici la notation, semble-t-il, plus courante, $X = X^c + \widetilde{X}$;
X^c est la composante martingale continue, $\widetilde{X}$ la "caractéristique locale".

En posant, pour une semi-martingale X à valeurs dans E :

$$(2.2)\qquad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{1}{2}[X,X] \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \frac{1}{2}[X,X] \end{pmatrix}, \quad \underline{X}^c = \begin{pmatrix} X^c \\ 0 \end{pmatrix},$$

(matrices verticales), semi-martingales à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$, la deuxième à variation finie, on trouve quatre formules :

$$(2.3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \underline{\Phi(X)} - \underline{\Phi(X)}_o &= \begin{pmatrix} \Phi'(X) & \Phi''(X) \\ 0 & \Phi'(X) \circledcirc \Phi'(X) \end{pmatrix} \cdot \underline{X} \\ \Phi(X)^c &= \Phi'(X) \cdot X^c \\ \underline{\widetilde{\Phi(X)}} - \underline{\widetilde{\Phi(X)}}_o &= \begin{pmatrix} \Phi'(X) & \Phi''(X) \\ 0 & \Phi'(X) \circledcirc \Phi'(X) \end{pmatrix} \cdot \underline{\tilde{X}} \\ \frac{1}{2}\left([\Phi(X),\Phi(X)] - [\Phi(X),\Phi(X)]_o\right) &= (\Phi'(X) \circledcirc \Phi'(X)) \cdot \frac{1}{2}[X,X] \end{aligned} \right.$$

En utilisant (1.13) :

$$(2.4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \underline{\Phi(X)} - \underline{\Phi(X)}_o &= \overset{2}{\underline{\Phi}}(X) \cdot \underline{X} \\ \Phi(X)^c &= \overset{1}{\underline{\Phi}}(X) \cdot X^c \\ \underline{\widetilde{\Phi(X)}} - \underline{\widetilde{\Phi(X)}}_o &= \overset{2}{\underline{\Phi}}(X) \cdot \underline{\tilde{X}} \\ \frac{1}{2}\left([\Phi(X),\Phi(X)] - [\Phi(X),\Phi(X)]_o\right) &= (\overset{1}{\underline{\Phi}}(X) \circledcirc \overset{1}{\underline{\Phi}}(X)) \cdot \frac{1}{2}[X,X] \end{aligned} \right.$$

En notation différentielle :

$$(2.5)\qquad \left\{ \begin{aligned} d\underline{\Phi(X)} &= \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, d\underline{X} \\ d\Phi(X)^c &= \overset{1}{\underline{\Phi}}(X)\, dX^c \\ d\underline{\widetilde{\Phi(X)}} &= \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, \widetilde{d\underline{X}} \\ d\,\frac{1}{2}[\Phi(X),\Phi(X)] &= (\overset{1}{\underline{\Phi}}(X) \circledcirc \overset{1}{\underline{\Phi}}(X))\, d\,\frac{1}{2}[X,X] \end{aligned} \right.$$

Nous exprimerons tout cela sous la forme suivante :

(2.6) Principe fondamental.

Dans une application $C^2 : E \to F$, $d\underline{X}_t$ et $d\underset{\sim}{\underline{X}}_t$ se comportent comme des vecteurs 2-tangents ≥ 0 au point X_t, dX_t^c comme un vecteur 1-tangent au point X_t, $\frac{1}{2}\, d[X,X]_t$ comme un vecteur ≥ 0 du quotient $P(E) = T^2(E)/T^1(E) = T^1(E) \odot T^1(E) = E \odot E$ au point X_t ; $\frac{1}{2}\, d[X,X]_t$ est l'image de $d\underline{X}_t$ ou $d\underset{\sim}{\underline{X}}_t$ dans le quotient.

Il est bien évident que ce principe aura des applications essentielles aux semi-martingales sur les variétés.

C'est ce qui va suivre maintenant.

Remarque (2.6bis) : Pour une semi-martingale (continue !) X, il est habituel caractéristique locale $\tilde{X}$; il vaut mieux dire que la caractéristique locale est $\underset{\sim}{\underline{X}}$, processus à variation finie à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$,

$$\underset{\sim}{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \\ \frac{1}{2}\,[X,X] \end{pmatrix} .$$

Nous allons maintenant généraliser S[1], propositions (6.3), (6.4), (6.5), avec une démonstration beaucoup plus simple grâce à l'emploi des semi-martingales formelles, qui permettent de ne pas regarder l'intégrabilité. Soit X une semi-martingale à valeurs dans V, variété différentielle de classe C^2 (évidemment aucune condition du type $X_o = 0$, 0 n'existe pas sur une variété !). Soit $T^{*k}(X)$ l'$\mathcal{O}$pt-module des processus optionnels k-cotangents à V le long de X ; si $J \in T^{*k}(X)$, $J(t,\omega) \in T^{*k}(V, X(t,\omega))$, et J est optionnel à valeurs dans $T^{*k}(V)$; rappelons que $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$ est l'$\mathcal{O}$pt-module des semi-martingales réelles (continues) formelles, nulles au temps 0, et nous avons défini ses sous-modules $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{V}^c$, $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{M}^c$. Alors :

Proposition (2.7) : Il existe une application $\mathcal{O}$pt-linéaire unique de $T^{*2}(X)$ dans $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, notée $J \mapsto J \cdot \underline{X}$, telle que l'image de $D^2\varphi(X)$, si φ est une fonction réelle C^2 sur V, soit

$$D^2\varphi(X) \bullet \underline{X} = \varphi(X) - \varphi(X_o) \quad . \tag{2.8}$$

Cette application est séquentiellement continue, quand on munit $T^{*2}(X)$ de la topologie de la convergence simple. L'image $T^{*2}(X) \bullet X$ de cette application est le sous-$\mathcal{O}pt$-module $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X)$ de $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, engendré par les $\varphi(X)$, φ réelle C^2 sur V, il est stable et crochet-stable [voir S[2], définition (7.6), pages 68-480] ; si V est plongée dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^d$, c'est le sous-module engendré par les coordonnées X^k, $k = 1,2,\ldots,d$, et leurs crochets $[X^i,X^j]$, $i,j = 1,2,\ldots,d$, ou par les X^k et les produits X^iX^j. Si $J \bullet X$ est une vraie semi-martingale, on dit que J est $d\underline{X}$-intégrable. Une partie A-optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est dite $d\underline{X}$-négligeable ssi, pour tout $J \in T^{*2}(X)$ porté par A, $J \bullet \underline{X} = 0$.

Remarque : Si V est un espace vectoriel E, $J \bullet \underline{X}$ est ce qu'on sait : si $J = (\alpha \quad \beta)$, $J \bullet \underline{X} = \alpha \bullet X + \beta \bullet \frac{1}{2}[X,X]$. Si donc $J = D^2\varphi(X) = (\varphi'(X) \quad \varphi''(X))$,

$$J \bullet \underline{X} = \varphi'(X) \bullet X + \varphi''(X) \bullet \frac{1}{2}[X,X] = \varphi(X) - \varphi(X_o) \quad \text{par Itô} \quad . \tag{2.8bis}$$

Démonstration : 1) Unicité. Il suffit de montrer que $T^{*2}(X)$, comme $\mathcal{O}pt$-module, est engendré par les $D^2\varphi(X)$. Sur un espace vectoriel E de dimension d, une base de $T^{*2}(E,v) = E^* \oplus (E^* \odot E^*)$ est formée des $\varepsilon^k = D^2x^k(v)$, $k = 1,2,\ldots,N$, et $\varepsilon^i \odot \varepsilon^j = D^2(x^ix^j)(v) - x^i(v)D^2x^j(v) - x^j(v)D^2x^i(v)$, $i,j = 1,2,\ldots,N$, $i \le j$. Mais les vecteurs $D^2x^k(v)$, $D^2(x^ix^j)(v)$ les engendrent, donc engendrent $E^* \oplus (E^* \odot E^*)$, et sont aussi nombreux, donc forment aussi une base de $E^* \oplus (E^* \odot E^*)$. Si V est de dimension N, elle peut être plongée dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2N$ (•) ; en tout point v de V, $T^{*2}(V,v)$ est un quotient de $E^* \oplus (E^* \odot E^*)$, parce que toute fonction réelle C^2 sur V est la restriction d'une fonction C^2 sur E ; donc il existe un système $(\varphi_\ell)_{\ell \in L}$ de fonctions C^2 sur V, les x^k et le x^ix^j, $i \le j$, telles que les $D^2\varphi_\ell(v)$

(•) J'avoue que j'en étais resté à $d = 2N+1$, comme on le remarquera dans S[1]. C'est d'ailleurs sans importance.

engendrent en tout point v de V l'espace $T^{*2}(V,v)$;

card $L = d + \frac{d(d+1)}{2} = 2N + N(2N+1) = N(2N+3)$. En tout point v de V, $N + \frac{N(N+1)}{2}$ d'entre elles sont indépendantes, donc elles le sont aussi dans un voisinage de v. Donc V admet un recouvrement ouvert $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, un sous-système $(D^2\varphi_\ell(v))_{\ell\in L'_n}$, card $L'_n = N + \frac{N(N+1)}{2}$, soit une base de $T^{*2}(V,v)$ pour $v' \in V'_n$. Donc dans l'ouvert optionnel $X^{-1}(V'_n)$, c-à-d. pour tout $(t,\omega) \in X^{-1}(V'_n)$, les $(D^2\varphi_\ell)(X(t,\omega))$, $\ell \in L'_n$, forment une base $T^{*2}(V,X(t,\omega))$, et $D^2\varphi_\ell(X)$ est optionnel sur $T^{*2}(V)$. Pour tout $J \in T^*(X)$, il existe des fonctions réelles optionnelles $\alpha_{\ell,n}$ telles que $J = \sum_{\ell\in L'} \alpha_{\ell,n} D^2\varphi_\ell(X)$ sur $X^{-1}(V'_n)$; nous poserons $\alpha_{\ell,n} = 0$ si $\ell \notin L'_n$. Il suffit maintenant de définir α_ℓ sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ par $\alpha_\ell = \alpha_{\ell,0}$ dans $X^{-1}(V'_0), \dots, \alpha_\ell = \alpha_{\ell,n}$ dans $X^{-1}(V'_n \setminus \dots \setminus V'_0)$, α_ℓ est réelle optionnelle, et $J = \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell D^2\varphi_\ell(X)$. Donc $T^{*2}(X)$ est $\mathcal{O}$pt-engendré par $N(2N+3)$ processus $D^2\varphi_\ell(X)$.

2) Existence. Chaque J admet une expression $\sum_\ell \alpha_\ell D^2\varphi_\ell(X)$, somme finie, $\varphi_\ell \in C^2$; nous pouvons poser

$$J \bullet \underline{X} = \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell D^2\varphi_\ell(X) \bullet \underline{X} = \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell \bullet (\varphi_\ell(X) - \varphi_\ell(X_0)) \quad .$$

Si nous montrons que c'est indépendant de la représentation de J, on aura défini une application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*2}(X)$ dans $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$; si $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$, $D^2\varphi(X)$ aura la décomposition $D^2(X) = 1\,D^2\varphi(X)$, d'où $D^2\varphi(X) \bullet \underline{X} = \varphi(X) - \varphi(X_0)$.

Pour montrer que le résultat est indépendant de la représentation, nous devons simplement montrer que, si l'on a une relation

$$(2.9) \qquad \sum_\ell \alpha_\ell D^2\varphi_\ell(X) = 0 \quad , \quad \alpha_\ell \text{ optionnels}, \quad \sum_\ell \text{ somme finie} \quad ,$$

on a aussi la relation

$$(2.10) \qquad \sum_\ell \alpha_\ell \bullet (\varphi_\ell(X) - \varphi_\ell(X_0)) = \sum_\ell \alpha_\ell \bullet \varphi_\ell(X) = 0 \quad .$$

Prenons un atlas de V, $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et soit $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas subordonné ; Φ_n est un C^2-difféomorphisme d'un ouvert U'_n d'un espace vectoriel E_n, sur V'_n ; soit $U''_n = \Phi_n^{-1}(V''_n)$; nous pouvons supposer $\overline{V''_n}$ compact dans V'_n, donc $\overline{U''_n}$ compact dans U'_n. Il existe une fonction $\overline{\Phi_n^{-1}}$ sur V, de classe C^2, qui est égale à Φ_n^{-1} sur V''_n ;

alors $\overline{Y}_n = \overline{\Phi_n^{-1}}(X)$ est une semi-martingale, qui coïncide avec $\Phi_n^{-1}(X) = Y_n$ sur $X^{-1}(V_n'')$. Ensuite il existe $\overline{\psi}_{\ell,n}$, fonction réelle C^2 sur E, qui coïncide avec $\psi_{\ell,n} = \varphi_\ell \circ \Phi_n$ sur U_n'' ; sur $X^{-1}(V_n'')$, $\overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) = \psi_{\ell,n}(Y_n) = \varphi_\ell \circ \Phi_n \circ \Phi_n^{-1}(X) = \varphi_\ell(X)$. Donc on a la relation $\sum_\ell \alpha_\ell D^2 \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) = 0$ sur $X^{-1}(V_n'')$. Mais (2.8bis) donne $\overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \sim D^2 \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \cdot \underline{\overline{Y}_n}$ partout. Donc $\sum_\ell \alpha_\ell \cdot \varphi_\ell(X) \sim \sum_\ell \alpha_\ell \cdot \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \sim \sum_\ell \alpha_\ell \cdot (D^2 \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \cdot \underline{\overline{Y}_n}) = \sum_\ell \alpha_\ell D^2 \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \cdot \overline{Y}_n \sim 0$ sur $X^{-1}(V_n'')$. Ceci étant vrai pour tout n, $\sum_\ell \alpha_\ell \cdot \varphi_\ell(X) \sim 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, donc $= 0$. Dans la démonstration de l'unicité, nous avons vu que $T^{*2}(X)$ est $\mathcal{O}$pt-engendré par les $D^2\varphi(X)$, $\varphi \in C^2(V,\mathbb{R})$, donc $T^{*2}(X) \cdot \underline{X}$ est engendré par les $\varphi(X) - \varphi(X_0)$, c'est $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X)$. On peut plonger V dans un $\mathbb{R}^d$. Itô montre que $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X)$ est $\mathcal{O}$pt-engendré par les $X^k - X_0^k$ et les $[X^i,X^j] - [X^i,X^j]_0$, ou par les $X^k - X_0^k$ et les $X^iX^j - X_0^iX_0^j$ $(X^iX^j = X^i \cdot X^j + X^j \cdot X^i + [X^i,X^j])$; il est donc de type fini, donc stable (c-à-d. fermé) et crochet-stable par la remarque qui suit (7.6) de S[2].

Enfin la continuité de l'intégrale est évidente. Soit $(J^k)_{k=1,\dots,N'}$, $N' = N + \frac{N(N+1)}{2}$, une $\mathcal{O}$pt-base de $T^{*2}(X)$. Alors $J_n = \sum_{k=1}^{N'} \alpha_{k,n} J^k$ converge vers 0 ssi chaque $\alpha_{k,n}$, $k = 1,\dots,N'$, converge simplement vers 0 pour $n \to +\infty$; alors $J_n \cdot X = \sum_{k=1}^{N'} \alpha_{k,n} \cdot (J^k \cdot \underline{X})$ converge vers 0 dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$ (voir (2.5) de S[2]).

<u>Remarques</u> : 1) Tout le procédé de localisation par cartes a été déjà fait maintes fois dans S[1] ; je l'ai refait ici, vu l'intérêt du théorème, mais on ne devrait plus le refaire à ce stade, et on devrait se contenter de dire : par des cartes, on se ramène à $V = E$, espace vectoriel. Voir d'ailleurs (2.20).

2) Ce théorème d'existence et d'unicité est un théorème général d'algèbre, d'ailleurs évident : soit $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Q}$-module, $\mathcal{U}'$ un sous-ensemble de $\mathcal{U}$; soit ρ une application de $\mathcal{U}'$ dans un $\mathcal{Q}$-module $\mathcal{V}$; il existe une application $\mathcal{Q}$-linéaire unique $\overline{\rho}$ du sous-$\mathcal{Q}$-module de $\mathcal{U}$ engendré par $\mathcal{U}'$, dans $\mathcal{V}$, égale à ρ sur $\mathcal{U}'$, pourvu que, pour toute relation $\sum_\ell \alpha_\ell u_\ell' = 0$ entre éléments de $\mathcal{U}'$ ($\sum_\ell$ somme finie, $\alpha_\ell \in \mathcal{Q}$, $u_\ell' \in \mathcal{U}'$), on ait la même relation entre leurs images, $\sum_\ell \alpha_\ell \rho(u_\ell') = 0$. La partie "unicité" de la démonstration a consisté à montrer que l'$\mathcal{O}$pt-module engendré par les $D^2\varphi(X)$, $\varphi \in C^2(V)$, est $T^{*2}(X)$; la partie "existence" à montrer la

conservation des relations.

Faisons maintenant pour $k=1$ et X^c ce que nous venons de faire pour $k=2$ et $\underline{X}$:

<u>Proposition (2.11)</u> : <u>Il existe une application</u> $\mathcal{O}$pt-<u>linéaire unique de</u> $T^{*1}(X)$ <u>dans</u> $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$ ($\mathcal{O}$pt-<u>module des martingales</u> (<u>locales continues</u>) <u>formelles nulles au temps</u> 0), <u>notée</u> $J \mapsto J \cdot X^c$, <u>telle que</u>, <u>pour toute</u> $\varphi \in C^2(V;\mathbf{R})$:

$$D\varphi(X) \cdot X^c = (\varphi(X))^c \quad . \tag{2.12}$$

<u>On dit que</u> J <u>est</u> dX^c-<u>intégrable</u>, <u>si</u> $J \cdot X^c$ <u>est une martingale locale vraie</u>. <u>On dit que</u> A <u>optionnel</u> $\subset \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ <u>est</u> dX^c-<u>négligeable</u>, <u>si</u>, <u>pour tout</u> $J \in T^{*1}(X)$ <u>porté par</u> A, $J \cdot X^c = 0$. <u>Si on note</u> $\overset{2}{J} \mapsto \overset{1}{J}$ <u>l'application canonique de</u> $T^{*2}(X)$ <u>sur son quotient</u> $T^{*1}(X)$, <u>on a</u>

$$(\overset{2}{J} \cdot \underline{X})^c = \overset{1}{J} \cdot X^c \quad ; \tag{2.13}$$

<u>en particulier</u>, <u>si</u> $\overset{2}{J}$ <u>est</u> $d\underline{X}$-<u>intégrable</u>, $\overset{1}{J}$ <u>est</u> dX^c-<u>intégrable</u> ; <u>si</u> $A \subset \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ <u>est</u> $d\underline{X}$-<u>négligeable</u>, <u>il est</u> dX^c-<u>négligeable</u>.

<u>Démonstration</u> : C'est la même en plus simple, nous ne la répétons pas. Ces résultats ont déjà été montrés à (6.3), (6.4), (6.5) de S[1], avec deux différences : on était en martingales locales vraies, on est ici en martingales locales formelles, ce qui simplifie tout, puisqu'on n'a jamais à se soucier de l'intégrabilité ; d'autre part, la démonstration de S[1] reposait sur une représentation (6.2) par des processus tangents, ici nous donnons une démonstration directe ; nous en <u>déduirons</u> des représentations tangentielles.

La fin, c-à-d. (2.13), est évidente par $\mathcal{O}$pt-linéarité, car il suffit de la voir pour $\overset{2}{J} = D^2\varphi(X)$, et c'est la deuxième formule de (2.3), l'image de $D^2\varphi$ dans le quotient étant $D\varphi$, c.q.f.d.

<u>(2.13bis)</u> On n'est pas toujours obligé d'écrire l'indice 1 ou 2 ; si

$J = \overset{2}{J} \in T^{*2}(X)$, $J \bullet X^c$ voudra automatiquement dire $\overset{1}{J} \bullet X^c$, et (2.13) s'écrit

(2.13ter) $$(J \bullet \underline{X})^c = J \bullet X^c$$

On voit que $J \bullet \underline{X}$ est une intégrale par rapport à $d\underline{X}_t$, vecteur 2-tangent au point X_t, et $J \bullet X^c$ par rapport à dX_t^c, vecteur 1-tangent au point X_t (principe fondamental (2.6)). Par différence, <u>on conviendra</u> que

(2.13quarto) $$J \bullet \underline{\tilde{X}} = J \bullet \underline{X} - J \bullet X^c = J \bullet \underline{X} - (J \bullet \underline{X})^c = \widetilde{J \bullet \underline{X}} \;;$$

c'est une intégrale par rapport à la caractéristique locale $d\underline{\tilde{X}}_t$, vecteur 2-tangent au point X_t. Alors $J \mapsto J \bullet \underline{\tilde{X}} = J \bullet \underline{X}$ est une application $\mathcal{O}$pt-linéaire $T^{*2}(X)$ dans $\mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c$, et sont image est $\mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c(X) = \widetilde{\mathcal{O}\text{pt}\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(X)}$, sous-$\mathcal{O}$pt-module ou sous-espace stable engendré par les $\widetilde{\varphi(X) - \varphi(X_0)}$, $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$. Si V est plongée dans $\mathbb{R}^d$, il est $\mathcal{O}$pt-engendré par les composantes $\widetilde{X^k}$ et les crochets $[X^i, X^j]$, ou par les $\widetilde{X^k}$ et les $\widetilde{X^i X^j}$.

<u>(2.13quinto)</u> On dira que $J \in T^{*2}(X)$ est $d\underline{\tilde{X}}$-intégrable, si $J \bullet \underline{\tilde{X}}$ est un vrai processus à variation finie ; que A optionnel $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est $d\underline{\tilde{X}}$-négligeable, si, pour tout $J \in T^{*2}(X)$ porté par A, $J \bullet \underline{\tilde{X}} = 0$. Si J est $d\underline{X}$-intégrable, il est $d\underline{\tilde{X}}$-intégrable ; si $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est $d\underline{X}$-négligeable, il est $d\underline{\tilde{X}}$-négligeable. <u>Mais en fait, les parties $d\underline{\tilde{X}}$-négligeables sont exactement les parties $d\underline{X}$-négligeables</u>. Pour le voir, on peut, par localisation dans des cartes, se ramener à $V = E$, espace vectoriel. Alors, si A est $d\underline{\tilde{X}}$-négligeable, il est $d\tilde{X}$-négligeable et $d\,\frac{1}{2}[X,X]$-négligeable, donc dX^c-négligeable, donc dX-négligeable, donc $d\underline{X}$-négligeable.

<u>(2.13sexto)</u> Il y a lieu maintenant d'intégrer par rapport à $d\,\frac{1}{2}[X,X]_t$, vecteur de $P(V,X_t)$ suivant le principe fondamental, image de $d\underline{X}_t$ ou $d\underline{\tilde{X}}_t \in T^2(V,X_t)$ dans le quotient $P(V,X_t) = T^1(V,X_t) \circledcirc T^1(V,X_t)$. Puisqu'il est à valeurs dans le quotient, on peut intégrer des processus J à valeurs dans le sous-espace $P^*(V)$ de $T^{*2}(V)$.

<u>Proposition (2.14)</u> : <u>Soit</u> $J \in T^{*2}(X)$, <u>à valeurs dans le sous-espace fibré</u> $P^*(V)$, <u>ce que nous écrirons</u> $J \in P^*(X)$. <u>Alors</u> $J \cdot \underline{X} = J \cdot \underline{\tilde{X}} = \widetilde{J \cdot \underline{X}} \in \mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c$, <u>et il est croissant si</u> $J \geq 0$. <u>Si</u> J_1, $J_2 \in T^{*1}(X)$, <u>auquel cas</u> $J_1 \odot J_2 \in P^*(X)$,

$$(J_1 \odot J_2) \cdot \underline{X} = [J_1 \cdot X^c, J_2 \cdot X^c] \quad , \tag{2.15}$$

<u>croissant si</u> $J_1 = J_2$.
<u>Si</u> $\overset{2}{J_1}$, $\overset{2}{J_2} \in T^{*2}(X)$, <u>d'images</u> $\overset{1}{J_1}$, $\overset{1}{J_2}$ <u>dans</u> $T^{*1}(X)$,

$$(\overset{1}{J_1} \odot \overset{1}{J_2}) \cdot \underline{X} = [\overset{2}{J_1} \cdot \underline{X}, \overset{2}{J_2} \cdot \underline{X}] \quad , \tag{2.15bis}$$

<u>ce que l'on conviendra d'écrire, en omettant les indices</u> 1 <u>et</u> 2 <u>supérieurs</u> :

$$(J_1 \odot J_2) \cdot \underline{X} = [J_1 \cdot \underline{X}, J_2 \cdot \underline{X}] = [J_1 \cdot X^c, J_2 \cdot X^c] \ . \tag{2.15ter}$$

<u>Pour</u> $J \in P^*(V)$, <u>on conviendra d'écrire aussi</u> $J \cdot \underline{X} = J \cdot \frac{1}{2}[X,X]$, <u>croissant si</u> $J \geq 0$ <u>dans</u> $P^*(V)$ (<u>c'est justifié si l'on considère</u> $d\ \frac{1}{2}[X,X]_t$ <u>comme l'image de</u> $d\underline{X}_t$ <u>dans le quotient</u> $P(V,X_t)$, <u>et si on remarque que</u>, <u>pour</u> $V = E$, <u>espace vectoriel</u>, $J = (0\ \ \beta)$, β <u>à valeurs dans</u> $E^* \odot E^*$, $J \cdot \underline{X} = \beta \cdot \frac{1}{2}[X,X]$). <u>On dira que</u> J <u>est</u> $d\ \frac{1}{2}[X,X]$-<u>intégrable</u>, <u>si</u> $J \cdot \frac{1}{2}\ d[X,X]$ <u>est un vrai processus à variation finie</u>; J <u>est</u> $d\underline{X}$-<u>intégrable ou</u> $d\underline{\tilde{X}}$-<u>intégrable</u>, <u>ssi il est</u> $\frac{1}{2}\ d[X,X]$-<u>intégrable</u>. <u>On dira que</u> A <u>optionnel</u> $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ <u>est</u> $\frac{1}{2}\ d[X,X]$-<u>négligeable</u>, <u>si</u>, <u>pour tout</u> $J \in P^*(X)$ <u>porté par</u> A, $J \cdot \frac{1}{2}[X,X] = 0$. <u>Si</u> A <u>est</u> $d\underline{X}$-<u>négligeable</u>, i.e. $d\underline{\tilde{X}}$-<u>négligeable</u>, <u>il est</u> $d\ \frac{1}{2}[X,X]$-<u>négligeable</u> ; A <u>est</u> $\frac{1}{2}\ d[X,X]$-<u>négligeable ssi il est</u> dX^c-<u>négligeable</u>.

<u>Démonstration</u> : Par localisation, on peut montrer (2.15) pour $V = E$, espace vectoriel. Comme l'indique la remarque suivant (2.15ter), le premier membre vaut alors $(J_1 \odot J_2) \cdot \frac{1}{2}[X,X]$, donc, par la formule de dualité (1.4), $\frac{1}{2}[J_1 \cdot X, J_2 \cdot X] + \frac{1}{2}[J_2 \cdot X, J_1 \cdot X] = [J_1 \cdot X, J_2 \cdot X] = [J_1 \cdot X^c, J_2 \cdot X^c]$. Ensuite de (2.15) on déduit (2.15bis) par (2.13). Comme $P^*(V)$ est $\mathcal{O}pt$-engendré par les $J_1 \odot J_2$, et que (2.15) montre que $(J_1 \odot J_2) \cdot \underline{X} \in \mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c$, on a aussi $J \cdot \underline{X} \in \mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c$ pour $J \in P^*(X)$. Alors $J \cdot \underline{X} = \widetilde{J \cdot \underline{X}}$ donc $= J \cdot \underline{\tilde{X}}$ par (2.13quarto). Comme un élément ≥ 0 de $P^*(X)$ est une combinaison $\mathcal{O}pt$-linéaire à coefficients ≥ 0 de carrés $\overset{1}{J} \odot \overset{1}{J}$, il est évident

que $\overset{2}{J} \cdot \frac{1}{2}[X,X]$ est croissant pour $\overset{2}{J}$ élément ≥ 0 de $P^*(V)$.

Remarque (2.15quarto) : Soit $J \in T^{*2}(\underline{X})$, on a :

$$\underline{J \cdot \underline{X}} = \begin{pmatrix} J \cdot \underline{X} \\ \\ \frac{1}{2}[J \cdot \underline{X}, J \cdot \underline{X}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ \\ \frac{1}{2}\, J \odot J \end{pmatrix} \cdot \underline{X} \quad ,$$

semi-martingale à valeurs dans $\mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \odot \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, de sorte que, si l'on pose

$$\underline{\overset{2}{J}} = \begin{pmatrix} \overset{2}{J} \\ \\ \frac{1}{2}\, J^1 \odot J^1 \end{pmatrix}$$

, matrice d'éléments de $T^*(X)$, on aura :

(2.15quinto) $$\underline{J \cdot \underline{X}} = \underline{J} \cdot \underline{X} \quad , \quad \text{et} \quad \widetilde{\underline{J \cdot \underline{X}}} = \underline{J} \cdot \underline{\tilde{X}} \quad .$$

Proposition (2.16) : Soit Φ une application C^2 de V dans une autre variété W, X une semi-martingale à valeurs dans V, $\Phi(X)$ son image, semi-martingale à valeurs dans W. Soit J un processus optionnel 2-cotangent (resp. 1-cotangent) à W le long de $\Phi(X)$. Soit $\underline{\Phi}^* J$ défini par

(2.16bis) $$\underline{\Phi}^* J(t,\omega) = \underline{\Phi^*(X(t,\omega))} J(t,\omega) \quad .$$

(C'est une abréviation de $\underline{\Phi^*(X) J}$.) On a

(2.17) $$\begin{cases} \underline{\Phi}^* J \cdot \underline{X} = J \cdot \underline{\Phi(X)} \quad , \\ \underline{\Phi}^* J \cdot X^c = J \cdot \Phi(X)^c \quad , \\ \underline{\Phi}^* J \cdot \tilde{X} = J \cdot \widetilde{\underline{\Phi(X)}} \\ \underline{\underline{\Phi}^* J \cdot \underline{X}} = \underline{\Phi}^* \underline{J} \cdot \underline{X} = \underline{J} \cdot \underline{\Phi(X)} \quad ; \end{cases}$$

si J est à valeurs dans $P^*(\Phi(X))$, $\Phi^* J$ est à valeurs dans $P^*(X)$, et

(2.17bis) $$\Phi^* J \cdot \frac{1}{2}[X,X] = J \cdot \frac{1}{2}[\Phi(X),\Phi(X)] \quad .$$

Démonstration : Montrons par exemple la 1ère formule. Par $\mathcal{O}$pt-linéarité, on se ramène à $J = D^2\varphi(\Phi(X))$, $\varphi \in C^2(W;\mathbb{R})$. Cela revient alors à

$D^2(\varphi\circ\Phi)(X)\bullet \underline{X} = D^2\varphi(\Phi(X))\bullet \underline{\Phi(X)}$, et les deux membres valent $\varphi(\Phi(X))-\varphi(\Phi(X_o))$.

Corollaire (2.17ter) : *Soit* V *une variété*, V' *une sous-variété de* V *(non nécessairement fermée)*, X *une semi-martingale à valeurs dans* V'. *En tout point* $v'\in V'$, $T^k(V',v')$ *est un sous-espace vectoriel de* $T^k(V,v')$, $k=1,2$ *et* $T^{*k}(V',v')$ *est un quotient de* $T^{*k}(V,v')$. *Si alors* J *est un processus optionnel* k-*cotangent à* V *le long de* X, *c-à-d. à valeurs dans* $T^{*k}(V)$, *et si* J' *est son image dans le quotient* $T^{*k}(V')$, *on a*

$$
(2.18)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
J\bullet \underline{X} = J'\bullet \underline{X} & ,\ \text{pour } k=2\ ,\\
J\bullet X^c = J'\bullet X^c & ,\ \text{pour } k=1\ ,\\
J\bullet \underline{\tilde{X}} = J'\bullet \underline{\tilde{X}} & ,\ \text{pour } k=2\ ,\\
\underline{J}\bullet \underline{X} = \underline{J'}\bullet \underline{X} & ,\ \text{pour } k=2\ ;
\end{array}
\right.
$$

(*dans la dernière formule*, $J'\odot J'$ *est l'image de* $J\odot J$) ; *si* J *est à valeurs dans* $P^*(V,X)$, J' *est à valeurs dans* $P^*(V',X)$, *et*

$$
J\bullet \tfrac{1}{2}[X,X] = J'\bullet \tfrac{1}{2}[X,X]\ ,\quad \text{pour } k=2\ .
$$

(*Les membres de gauche sont des intégrales stochastiques relatives à* X *dans* V, *les membres de droite à* X *dans* V').

En conséquence, les intégrales de gauche ne dépendent que de l'image J' de J dans $T^{*2}(V')$.

Démonstration : On applique (2.16) à l'injection Φ de V' dans V.

Proposition (2.19) : *Soient* X, X', *deux semi-martingales à valeurs dans* V, J, J' *deux processus optionnels* k-*cotangents le long de* X, X', *respectivement*, $k=1,2$. *Soit* A *un ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$. *Si, dans* A, $X=X'$, $J=J'$, *alors, dans* A, $J\bullet \underline{X}\sim J'\bullet \underline{X'}$, *etc*.

Démonstration : Plongeons V dans un espace vectoriel E. Il existe des relèvements $\overline{J}$, $\overline{J}'$ de J, J', en processus cotangents à E le long de X, X'. C'est une propriété générale d'un fibré et d'un fibré quotient. En effet, par un atlas et une partition de l'unité sur V, on trouve un relèvement θ de classe C^{2-k} de $T^{*k}(V)$ dans $T^{*k}(E)$ le long de V : pour tout $v \in V$, $\theta(v) \in \mathcal{L}(T^{*k}(V,v);T^{*k}(E,v))$, et, si $\pi(v)$ est la projection canonique de $T^{*k}(E,v)$ sur $T^{*k}(V,v)$, $\pi(v)\theta(v)=I(v)$; alors $\overline{J}(t,\omega) = \theta(X(t,\omega))J(t,\omega)$, ou $\overline{J} = \theta(X)J$, et de même $\overline{J}' = \theta(X)J'$. Alors, par (2.18), $J \bullet \underline{X} = \overline{J} \bullet \underline{X}$, $J' \bullet \underline{X} = \overline{J}' \bullet \underline{X}$; et, par (3.2) de S[1], on connaît la propriété pour des semi-martingales vectorielles, $\overline{J} = \overline{J}'$ sur A, $X = X'$ sur A, donc $\overline{J} \bullet \underline{X} \sim \overline{J}' \bullet \underline{X}'$ sur A.

Remarque : On démontre ensuite le même type de théorèmes que dans S[1], par exemple :

Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, si X et Y sont deux semi-martingales à valeurs dans V qui coïncident sur A, $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(X)$ et $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(Y)$ sont équivalents sur A ;
si Φ est une application C^2 de V dans W, $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(\Phi(X)) \subset \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(X)$, et ils sont égaux si Φ est une immersion. En particulier, si $\tilde{X}$ est un relèvement de X dans un revêtement $\tilde{V}$ de V, $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(\tilde{X}) = \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(X)$. Etc.
On peut aussi, pour tout cela, utiliser les méthodes qui suivent, avec des cartes.

(2.20) Cas d'une semi-martingale à valeurs dans V définie seulement sur un ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Soit X une semi-martingale dans A, à valeurs dans V (3) ; elle est en particulier restriction d'un processus optionnel $\overline{X}$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans V ; voir (6.5quinto) de S[2]. Soit J un processus 2-cotangent le long de X défini sur A. Supposons J optionnel à valeurs dans $T^*(V)$, donc restriction d'un processus optionnel $\overline{J}$ à valeurs dans $T^{*2}(V)$. Il n'y a aucune raison de supposer $\overline{J}$ 2-cotangent le long de $\overline{X}$, mais on peut toujours s'y ramener. Soit en effet π la projection de $T^{*2}(V)$ sur V ; alors $\pi(\overline{J})$ est optionnel. Donc l'ensemble de coïncidence de $\pi(\overline{J})$ et de $\overline{X}$ est un ensemble optionnel $\overline{A} \supset A$. Si alors on remplace $\overline{J}$ par un autre processus, par exemple 0, sur $\complement \overline{A}$, on peut le rendre 2-cotangent le long de $\overline{X}$, ce que nous supposerons donc. On peut alors définir $J \bullet X$ comme à (2.7), mais c'est seulement une classe d'équivalence sur A de semi-martingales réelles formelles (pour les équivalences, voir S[1] et S[2]) ce que nous noterons par $J \bullet \underline{X} \in \mathcal{O}pt\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(A)$. [On pose en effet, pour $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$, $D^2\varphi(X) \bullet \underline{X} =$ classe de $\varphi(X)$; $\varphi(X)$ est une semi-martingale réelle dans A, donc d'après (6.7) de S[2], équivalente sur A à une semi-martingale formelle. Si on a une relation $\sum_\ell \alpha_\ell\, D^2\varphi_\ell(X) = 0$ sur A, α_ℓ optionnelles réelles sur A, la même méthode que dans la démonstration d'existence de (2.7) montre que l'intégrale stochastique (au sens de (6.8) de S[2], compte-tenu de (6.9), (6.10) de S[2]) $\sum_\ell \alpha_\ell \bullet \varphi_\ell(X)$ est la classe nulle . Par ailleurs, la démonstration d'unicité de (2.7) subsiste aussi : $\overline{J}$ est une combinaison $\mathcal{O}pt$-linéaire de processus $D^2\varphi(\overline{X})$. Le résultat ne dépend pas de $\overline{J}$, $\overline{X}$, à une équivalence près sur A.] L'ensemble des intégrales $J \bullet \underline{X}$ est exactement $\mathcal{O}pt\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X,A)$, sous-$\mathcal{O}pt$-module de $\mathcal{O}pt\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c(A)$ engendré par les $\varphi(X)$, $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$. Etc.

Il faut, en fait, toujours savoir utiliser ces localisations. Par exemple, dans la démonstration d'existence de la proposition (2.7), si on avait traité les localisations d'abord, on aurait pu dire, en gardant les mêmes notations : sur $A_n = X^{-1}(V'_n)$, X est une semi-martingale à valeurs dans V, mais $X(X^{-1}(V'_n)) \subset V'_n$, donc c'est une semi-martingale à valeurs dans V'_n (d'après (6.5quinto) de S[2]) ; ensuite Φ^{-1} est C^2 de V'_n dans $U'_n \subset E$, donc $\Phi^{-1}(X)$ est, sur A_n , une semi-martingale Y_n à valeurs dans U'_n (et dans E). Alors $\psi_{\ell,n}(Y_n) = \varphi_\ell(X)$ sur A_n. Au sens des intégrales stochastiques de (6.8) de S[2],

$$\sum_\ell \alpha_\ell \bullet \varphi_\ell(X) \underset{A_n}{\sim} \sum_\ell \alpha_\ell \bullet \psi_{\ell,n}(Y_n) \underset{A_n}{\sim} \sum_\ell \alpha_\ell \bullet (D^2\psi_{n,\ell}(Y_n) \bullet (\underline{Y}_n)(\text{par } 2.8\text{bis}) \underset{A_n}{\sim}$$
$$= (\sum_\ell \alpha_\ell\, D^2\, \psi_{n,\ell}(Y_n)) \bullet \underline{Y}_n \underset{A_n}{\sim} (\sum_\ell \alpha_\ell\, D^2\, \varphi_\ell(X)) \bullet \underline{Y}_n \underset{A_n}{\sim} = 0 \quad .$$

Un bon usage des localisations permet d'éviter les atlas subordonnés $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que $\overline{Y}_n$ et $\overline{\psi}_{n,\ell}$.

§ 3. REPRESENTATIONS TANGENTIELLES D'UNE SEMI-MARTINGALE SUR UNE VARIETE. SOUS-ESPACE VECTORIEL TANGENT A UNE SEMI-MARTINGALE.

Résumé du § 3. (3.0) étend au calcul différentiel du second ordre ce qui avait été fait dans S[1] pour le premier, à la proposition (6.6), page 81. Pour une application u définie à (3.0), on définit une représentation tangentielle (3.1). La proposition (3.4) définit la mesure ν associée à une application u, telle que $u(J)=0$ ssi J est ν-pp. nul, et donne la liaison entre ν, les représentations tangentielles, et le sous-espace tangent $\tau(u)$. La proposition (3.4bis) détaille, pour une application u crochet-stable, les relations entre les sous-espaces tangents à u, u^c, $\tilde{u}$, $\frac{1}{2}[u,u]$. La proposition (3.5) donne les représentations tangentielles de u par (3.6), avec une étude détaillée du vecteur 2-tangent H. (3.11) applique à $u=d\underline{X}$, utilisant toujours le fait que $d\underline{X}$ est un vecteur 2-tangent , et le réinterprétant justement par ses représentations tangentielles. (3.15) donne l'image par une application C^2. (3.16) applique à une diffusion brownienne sur une variété. Puis (3.17) étend les résultats précédents, en remplaçant les fibrés cotangents par des fibrés vectoriels arbitraires de base V. (3.18) localise à un ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Ce paragraphe est long, et sans aucun doute ennuyeux à maints endroits ! On peut soutenir qu'il aurait été préférable de se borner aux représentations de $d\underline{X}$, mais il y a aussi dX^c, $d\underline{\tilde{X}}$, $d\,\frac{1}{2}[X,X]$, d'où naturellement l'étude des u arbitraires. En tout cas la notion de représentation tangentielle, au moins dans les cas simples, me paraît vraiment importante.

(3.0) Soit u une application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*2}(X)$, dans $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$. On l'écrira aussi sous forme d'intégrale stochastique, $J \bullet u = u(J)$, puisque, si α est réelle optionnelle, $\alpha \bullet (J \bullet u) = \alpha J \bullet u$. On dira que $J=T^{*2}(X)$ est u-intégrable si $J \bullet u$ est une vraie semi-martingale, et que A optionnel $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est u-négligeable, si, pour tout $J \in T^{*2}(X)$ porté par A, $J \bullet u = 0$. En particulier, d'après le § 2, la semi-martingale elle-même définit de telles applications u, avec $J \bullet \underline{X}$, $J \bullet X^c$, $J \bullet \underline{\tilde{X}}$. De telles applications u sont toujours séquentiellement continues, comme c'est le cas de $J \mapsto \underline{X}$ (voir (2.7)), comme d'ailleurs le montrera l'expression de (3.1) par (3.2).

Introduisons l'$\mathcal{O}$pt-module $T^k(X)$ des processus optionnels k-tangents le long de X ; $H \in T^k(X)$ si H est optionnel $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to T^k(V)$, et si, pour tout (t,ω), $H(t,\omega) \in T^k(V, X(t,\omega))$.

Soit alors u $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*2}(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$. On dit qu'elle admet la représentation tangentielle

$$(3.1) \qquad u = \sum_{k=1}^{m} H_k \cdot Z^k \quad , \quad \text{ou} \quad du = \sum_{k=1}^{m} H_k \, dZ^k \quad ,$$

où les H_k sont des éléments de $T^2(X)$, les Z^k des semi-martingales réelles, si, pour tout $J \in T^{*2}(X)$,

$$(3.2) \qquad u(J) = \sum_{k=1}^{m} (J|H_k)_{T^*,T} \cdot Z^k \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c \quad .$$

(Ici $(J|H_k)$ est la fonction optionnelle réelle $(t,\omega) \mapsto (J(t,\omega)|H_k(t,\omega))_{T^*(V,X(t,\omega)),T(V,X(t,\omega))}$).

<u>(3.2bis)</u> Il existe toujours des représentations tangentielles, et on peut choisir arbitrairement, pour $m = N + \frac{N(N+1)}{2} = N'$, les H_k formant une base optionnelle de l'$\mathcal{O}$pt-module $T^2(X)$. En effet, si alors $(J^k)_{k=1,2,\dots,N'}$ est la base duale de $T^{*2}(X)$, on aura $J = \sum_{k=1}^{N'} (J|H_k)J^k$, donc

$$u(J) = \sum_{k=1}^{N'} (J|H_k) \cdot u(J^k) = \sum_{k=1}^{N'} (J|H_k) \cdot Z^k \quad .$$

<u>(3.2ter)</u> Il y a évidemment un résultat analogue avec $T^{*1}(X)$ au lieu de $T^{*2}(X)$, et, si l'on veut, $\mathcal{O}pt\,\mathcal{M}^c$ au lieu de $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, c'est ce que nous avons vu à la proposition (6.6) de S[1].

<u>(3.3)</u> On dit que u est [,]-stable, ou crochet-stable, si, pour tout $\overset{2}{J} \in T^{*2}(X)$, d'image $\overset{1}{J}$ dans $T^{*1}(X)$, on a

$$(3.3\text{bis}) \qquad u(\overset{1}{J} \odot \overset{1}{J}) = [u(\overset{2}{J}), u(\overset{2}{J})] \quad , \quad \text{écrit} \quad u(J \odot J) = [u(J), u(J)] \quad .$$

Dans ce cas, (2.15quinto) donne $u(\underline{J}) = \underline{u(J)}$. On appellera alors u^c l'application composée $T^*(X) \xrightarrow{u} \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c \xrightarrow{\text{projection}} \mathcal{O}pt\,\mathcal{M}^c$, $u^c(J)$ sera notée $J \cdot u^c$; comme $P^*(X)$ est $\mathcal{O}$pt-engendré par les $J_1 \odot J_2$, et que $u(J_1 \odot J_2) \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{V}^c$, u envoie $P^*(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{V}^c$, donc $u^c(J)$ ne dépend que de l'image $\overset{1}{J}$ de $\overset{2}{J}$ dans $T^{*1}(X)$, et $J \mapsto J \cdot u^c$ est une application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*1}(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{M}^c$. Ensuite $\tilde{u}$ sera l'application composée $T^{*2}(X) \xrightarrow{u} \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c \xrightarrow{\text{projection}} \mathcal{O}pt\,\mathcal{V}^c$ et on notera $\tilde{u}(J) = J \cdot \tilde{u}$. Pour $J \in P^*(X)$, $J \cdot u = \widetilde{J \cdot u} = J \cdot \tilde{u}$, et on pourra l'écrire $J \cdot \frac{1}{2}[u,u]$, comme si $\frac{1}{2}\, d[u,u]_t$ était un vecteur de $P^*(V,X_t)$, puisque $(J_1 \odot J_2) \cdot \frac{1}{2}[u,u] = [J_1 \cdot u, J_2 \cdot u] = [J_1 \cdot u^c, J_2 \cdot u^c]$ (voir remarque après (2.14)). Et finalement $u(\underline{J})$ sera noté $\underline{J} \cdot u$. Comme tout élément ≥ 0 de $P^*(X)$ est combinaison $\mathcal{O}$pt-linéaire à coefficients ≥ 0 d'éléments $\overset{1}{J} \odot \overset{1}{J}$, $\overset{1}{J} \in T^{*1}(X)$, on voit que, si u est crochet-stable, $\overset{2}{J} \cdot \frac{1}{2}[u,u]$ est croissant pour $\overset{2}{J}$ élément ≥ 0 de $P^*(X)$. Bien entendu, si J est u-intégrable, il est u^c-, et $\tilde{u}$-intégrable ; si A optionnel $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est u-négligeable, il est u^c-, $\tilde{u}$- et $\frac{1}{2}[u,u]$-négligeable. Mais en outre (voir (2.13quinto) et (2.14)), les parties $\tilde{u}$-négligeables sont exactement les parties u-négligeables, et les parties $\frac{1}{2}[u,u]$-négligeables sont exactement les parties $\tilde{u}^c$-négligeables. Soit en effet d'abord A $\tilde{u}$-négligeable ; pour tout $J \in T^*(X)$ porté par A,

$$0 = \tilde{u}(J \odot J) = u(J \odot J) = [u(J), u(J)] \quad , \quad \text{donc} \quad u^c(J) = 0 \quad ,$$

donc A est u^c- et $\tilde{u}$-négligeable, donc u-négligeable. Ensuite la relation $\frac{1}{2}[u,u](J \odot J) = \frac{1}{2}[u^c(J), u^c(J)]$ montre aussitôt que A est u^c-négligeable ssi il est $\frac{1}{2}[u,u]$-négligeable, parce que les $J \odot J$ $\mathcal{O}$pt-engendrent $P^*(X)$.

Proposition (3.4) : Soit u une application $\mathcal{O}$pt-linêaire de $T^{*\ell}(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, $\ell = 1,2$. Elle possède une mesure $\nu \geq 0$ équivalente (sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega , \mathcal{O}pt)$), i.e. ayant les mêmes parties négligeables. Il existe un sous-$\mathcal{O}$pt-module $\mathfrak{N}^*$ de $T^{*\ell}(X)$, et une famille τ^* optionnelle de sous-espaces k-cotangents à V le long de X ($\tau^*(t,\omega) \in T^{*\ell}(V, X(t,\omega))$), uniques à des ensembles u-négligeables près, tels que : pour $J \in T^{*k}(X)$, $J \cdot u = 0$ ssi J est u-pp. égale à un élément de $\mathfrak{N}^*$, ou J prend u-pp. ses valeurs dans τ^*. Il existe une infinité de couples $(\overline{\nu}, \overline{\tau}^*)$ d'une mesure $\bar{\nu} \geq 0$ sur $(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega , \mathcal{O}pt)$ et d'une famille optionnelle $\bar{\tau}^*$ de sous-espaces ℓ-cotangents à V le long de X, tels que : $J \bullet u = 0$ ssi J prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}^*$; à une équivalence près ν est la plus petite des $\bar{\nu}$; $\bar{\nu}$ est équivalente à ν ssi elle est $\bar{\tau}^*$-minimale, i.e. ne charge pas $\{\bar{\tau}^* = T^{*\ell}\}$. On peut prendre pour $\bar{\nu}$ n'importe quelle mesure dominant ν ; $\bar{\tau}^*$ est toujours unique à un ensemble $\bar{\nu}$-négligeable près ; si $\bar{\nu}$ domine ν, $(\bar{\nu},\bar{\tau}^*)$ convient ssi $\bar{\tau}^* = \tau^*$ ν-pp., et si, sur tout ensemble ν-négligeable, $\bar{\tau}^* = T^{*\ell}$ $\bar{\nu}$-pp. ; donc $\bar{\nu}$-pp., $\bar{\tau}^* = \tau^*$ ou $\bar{\tau}^* = T^{*\ell}$. Soit $\bar{\tau}(u)$ la famille orthogonale de $\bar{\tau}^*$; c'est une famille optionnelle de sous-espaces ℓ-tangents à V le long de X ; $\bar{\tau}(u)(t,\omega) \in T^{\ell}(V,X(t,\omega))$ est appelé le sous-espace tangent à u au point (t,ω), associé à $\bar{\nu}$; $\bar{\tau}(u)$ est défini à un ensemble $\bar{\nu}$-négligeable près ; si $\bar{\nu}$ domine ν, $(\bar{\tau}(u),\bar{\nu})$ convient ssi $\bar{\tau}(u) = \tau(u)$ ν-pp., et si, sur tout ensemble ν-négligeable, $\bar{\tau}(u) = \{0\}$ $\bar{\nu}$-pp. Si, pour une représentation tangentielle de u suivant (3.1), on appelle $[H_1,H_2,\ldots,H_m]$ la famille optionnelle de sous-espaces ℓ-tangents engendrée par $H_1,H_2,\ldots,H_m$ (en (t,ω) il est le sous-espace engendré par les $H_1(t,\omega),\ldots,H_m(t,\omega)$), l'orthogonal $\bar{\tau}(u)$ de $\bar{\tau}^*$, défini à un ensemble $\bar{\nu}$-négligeable près, est "$\bar{\nu}$-essentiellement" le plus petit $[H_1,H_2,\ldots,H_m]$ correspondant à toutes les représentations tangentielles possibles : pour toute représentation tangentielle, $\bar{\tau}(u) \subset [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ $\bar{\nu}$-pp., et il existe alors des représentations tangentielles pour lesquelles $\bar{\tau}(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ partout, et pour lesquelles les parties u-négligeables sont exactement les parties Z^k-négligeables pour tout $k = 1,2,\ldots,m$.

Démonstration : Prenons par exemple le cas de $T^{*2}(X)$. Soit $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$, $N' = N + \frac{N(N+1)}{2}$, une base optionnelle de $T^{*2}(X)$. Alors $(\alpha_k)_{k=1,2,\ldots,N'} \mapsto \sum_{k=1}^{N'} \alpha_k J_k$ est un isomorphisme d'$\mathcal{O}pt$-modules de $\mathcal{O}pt^{N'}$ sur $T^{*2}(X)$; et on a des mesures $Z^k = u(J^k)$ sur $(\Omega,\mathcal{O}) = (\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega , \mathcal{O}pt)$, à valeurs dans $E = L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$. On est donc exactement ramené à la situation (2.8), (2.9) de S[2] (elle a été écrite exprès pour çà !). Nous pouvons appliquer S[2] parce que :

a) $(Z^k = u(J^k))_{k=1,2,\ldots,N'}$ est engendré par un nombre fini de semi-martingales formelles, orthogonales au sens de (2.9) de S[2] ; c'est même vrai en un sens plus fort, § 7 de S[2].

b) Toute semi-martingale formelle admet une mesure ≥ 0 équivalente, (3 6bis) de S[2]. On trouve aussitôt toutes les conclusions relatives aux $(\overline{\nu},\overline{\tau})$. Si μ est la mesure qui intervient dans S[2], c'est $(Z^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ à valeurs dans $E^{N'}$; A optionnel $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est μ-négligeable ssi, pour tout $J \in T^{*2}(X)$ porté par A, $J = \sum_{k=1}^{N'} \alpha_k J^k$, on a $\sum_{k=1}^{N'} \alpha_k u(J^k) = 0$, i.e. $u(J) = 0$, c-à-d. si A est u-négligeable.

Si τ est la famille optionnelle de sous-espaces engendrée par les H_k, pour une représentation tangentielle <u>arbitraire</u>, on a certainement $u(J) = 0$ si J est orthogonale à tous les H_k, c-à-d. à τ, c-à-d. s'il est à valeurs dans τ^+. Si $A = \{\tau^+ \not\subset \overline{\tau}^*\}$, il existe un élément J de $T^{*2}(X)$, porté par A, à valeurs dans $\tau^+ \setminus \overline{\tau}^*$ sur A ; $u(J) = 0$ puisque J est à valeurs dans τ^+, donc J est $\overline{\nu}$-pp. dans $\overline{\tau}^*$; or il n'est pas dans $\overline{\tau}^*$ sur A, donc $\overline{\nu}(A) = 0$, donc $\{\tau^+ \not\subset \overline{\tau}^*\} = \{\overline{\tau}^{*+} \not\subset \tau\} = \{\overline{\tau}(u) \not\subset [H_1,H_2,\ldots,H_m]\}$ est $\overline{\nu}$-négligeable.

Montrons maintenant qu'il existe une représentation tangentielle pour laquelle $\overline{\tau}(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ partout. Choisissons une base $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ de $T^{*2}(X)$, optionnelle, dont les $N'' \leq N'$ premiers vecteurs forment une base de $\overline{\tau}^*$. Le nombre N" est un processus ; on peut partager $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ en parties optionnelles A_j, dans chacune desquelles $N'' = N''_j$ est constant. Soit $(H_k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ la base duale ; on a une représentation tangentielle avec les $Z^k = u(J^k)$, et les H_k. L'orthogonal $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}^{*+}$ de $\overline{\tau}^*$ est engendré par les H_k, pour les $N' - N''$ dernières valeurs de k. Si α est une fonction optionnelle réelle portée par A_j, et si $k \leq N''_j$, αJ_k est à valeurs dans $\overline{\tau}^*$, donc $u(\alpha J_k) = \alpha \cdot Z^k = 0$; donc A_j est dZ^k-négligeable. On peut alors, sur A_j, remplacer H_k par 0 (les H_k ne forment alors plus une base duale des J^k ; c'est sans importance !), sans changer la propriété de $\sum_{k=1}^{N'} H_k \, dZ^k$ d'être une représentation tangentielle de U. Mais alors H_k ainsi modifié est à valeurs partout dans $\overline{\tau}^{*+} = \overline{\tau}(u)$. On a donc trouvé une représentation tangentielle pour laquelle $\overline{\tau}(u) \supset [H_1,H_2,\ldots,H_m]$. Comme $\subset$ $\overline{\nu}$-pp., $\overline{\tau}(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ $\overline{\nu}$-pp. Nous n'avons pas du tout là une représentation tangentielle quelconque : $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ est une base optionnelle de $T^{*2}(X)$, et les mesures sont $Z^k = u(J^k)$. Alors A optionnel $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est u-négligeable ssi tous les $1_A J^k \cdot u$ sont nulles, i.e. toutes les $1_A \cdot Z^k$ sont nulles, i.e. ssi A est dZ^k-<u>négligeable pour tout</u> k (ce qui ne serait pas vrai pour une représentation tangentielle quelconque !). Remplaçons alors $\overline{\tau}(u)$ par $\{0\}$ et les H_k par 0 sur $\{\overline{\tau}(u) \neq [H_1,H_2,\ldots,H_m]\}$. C'est permis pour $\overline{\tau}$, parce que cet ensemble est $\overline{\nu}$-négligeable. Mais il est a fortiori u-négligeable, donc Z^k-négligeable pour tout k, c'est donc aussi permis pour les H^k. Alors $\overline{\tau}(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ partout

Remarques : 1) Il est en général plus simple de prendre ν équivalente à u. Toutefois, si on a à comparer plusieurs applications $u^{(1)},u^{(2)},\ldots,u^{(n)}$ (c'est ce que nous ferons à (3.4bis)), il est indispensable de prendre une même mesure $\overline{\nu}$ dominant toutes les $u^{(i)}$ si l'on veut pouvoir comparer les $\overline{\tau}(u^{(i)})$ associées. Toute partie optionnelle A λ-négligeable (i.e. λ-évanescente) de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est nécessairement u-négligeable ; en effet, si J est porté par A, $J \bullet u = 1_A\, J \bullet u = 1_A \bullet (J \bullet u) = 0$. Donc en fait il sera meilleur de supposer que $\overline{\nu}$ ne charge pas les ensembles évanescents. De même u ne charge pas les graphes de temps d'arrêt, donc on peut raisonnablement supposer que $\overline{\nu}$ ne les charge pas non plus. Alors $\overline{\nu}$ sera de la forme $\varphi \to \mathbb{E}\int_{]0,+\infty]} \varphi_s\, dW_s$, W processus ≥ 0 croissant adapté continu intégrable. Mais ces hypothèses raisonnables ne sont nullement indispensables, donc nous ne le faisons pas, elles ne feraient qu'embarrasser encore plus des énoncés qui le sont déjà suffisamment.

2) Il peut paraître étonnant que, quel que soit le choix de $\overline{\nu}$, $\overline{\tau}(u)$ soit toujours l'intersection $\overline{\nu}$-essentielle des $[H_1,H_2,\ldots,H_m]$, alors que ces derniers se déterminent indépendamment de toute mesure $\overline{\nu}$. Supposons seulement montré que, ν- ou u-pp., $\tau(u) \subset [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ pour une représentation tangentielle donnée. Les ensembles optionnels $\{\tau(u) \not\subset [H_1,H_2,\ldots,H_m]\}$ et $\{\tau(u) \neq \overline{\tau}(u)\}$ sont ν-négligeables ; mais, sur tout ensemble ν-négligeable, $\overline{\tau}* = T^{*2}$, donc $\overline{\tau}(u) = \{0\}$, donc $\overline{\tau}(u) \subset [H_1,H_2,\ldots,H_m]$ $\overline{\nu}$-pp. Supposons ensuite démontré qu'il existe une représentation tangentielle pour laquelle $\tau(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_{N'}]$ partout, et pour laquelle $Z^k = u(J^k)$, $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$, base optionnelle de $T^{*2}(X)$. Pour avoir $\overline{\tau}(u) = [H_1,H_2,\ldots,H_{N'}]$ partout, il suffira de remplacer $\overline{\tau}(u)$ par $\{0\}$ et $H_1,H_2,\ldots,H_{N'}$, par 0, sur $\{\overline{\tau}(u) \neq \tau(u)\}$. Mais $\{\overline{\tau}(u) \neq \tau(u)\}$ est ν-négligeable, donc sur lui on a déjà $\overline{\tau}(u) = \{0\}$ $\overline{\nu}$-pp , donc on ne modifie $\overline{\tau}(u)$ que sur un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable, ce qui est permis. Et $\{\overline{\tau}(u) \neq \tau(u)\}$, ν-négligeable, est

dZ^k-négligeable pour $k = 1,2,\dots,N'$, et on a le droit d'y remplacer les H_k par 0 sans leur ôter le caractère de représentation tangentielle associée aux Z^k. On aura alors $\bar{\tau}(u) = [H_1,H_2,\dots,H_{N'}]$, partout.

Si donc $\tau(u)$ est l'intersection ν-essentielle de tous les $[H_1,H_2,\dots,H_m]$, pour toutes les représentations tangentielles, $\bar{\tau}(u)$ est leur intersection $\bar{\nu}$-essentielle.

Proposition (3.4bis) : Soit $u : T^{*2}(X) \to \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, $\mathcal{O}pt$-linéaire et crochet-stable. Soit $\bar{\nu}$ une mesure ≥ 0 dominant u. Il existe des familles $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}'^*$, $\bar{\tau}''^*$ optionnelles de sous-espaces 2-cotangents à V le long de X, uniques à des ensembles $\bar{\nu}$-négligeables près, ayant les propriétés suivantes :

a) $u(J) = 0$ ssi J prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}^*$;

b) $u(J) \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{M}^c$ ssi J prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}'^*$;

c) $u(J) \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{V}^c$ ssi J prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}''^*$.

On a alors aussi la propriété :

d) $\bar{\tau}''^* \supset P^*(X)$, $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}'^* \cap \bar{\tau}''^*$, et $\bar{\tau}'^* + \bar{\tau}''^* = T^{*2}(X)$, $\bar{\nu}$-pp.

(Si donc $\hat{\bar{\tau}}'^*$ est une famille optionnelle supplémentaire de $\bar{\tau}^*$ dans $\bar{\tau}'^*$, et $\hat{\bar{\tau}}''^*$ une famille optionnelle supplémentaire de $\bar{\tau}^*$ dans $\bar{\tau}''^*$, $T^{*2}(X)$ est la somme directe $\bar{\tau}^* \oplus \hat{\bar{\tau}}'^* \oplus \hat{\bar{\tau}}''^*$). (On pourra évidemment faire en sorte que les relations d) soient vérifiées partout, en remplaçant $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}'^*$, $\bar{\tau}''^*$ par $T^{*2}(V)$ sur l'ensemble $\bar{\nu}$-négligeable où elles ne sont pas toutes vérifiées.)

Si on appelle $\bar{\tau}(u)$, $\bar{\tau}(u^c)$, $\bar{\tau}(\tilde{u})$ les sous-espaces tangents à u, u^c, $\tilde{u}$, le long de X, associés à $\bar{\nu}$, ce sont les orthogonaux de $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}''^*$, $\bar{\tau}'^*$ respectivement, et et d) se traduit par :

e) $\bar{\tau}(u^c) \subset T^1$, $\bar{\tau}(u^c) \cap \bar{\tau}(\tilde{u}) = \{0\}$, $\bar{\tau}(u) = \bar{\tau}(u^c) \oplus \bar{\tau}(\tilde{u})$, somme directe, $\bar{\nu}$-pp., et partout si on le désire.

Démonstration : On définit $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}'^*$, $\bar{\tau}''^*$ par la proposition (3.4), relativement à u, $\tilde{u}$, u^c, indépendamment, mais relativement à une même mesure $\bar{\nu}$ dominant u, $\tilde{u}$, u^c, c-à-d. simplement dominant u. C'est dans cet exemple précisément qu'on voit l'intérêt de pouvoir choisir $\bar{\nu}$ et non nécessairement une mesure minimale (voir remarque 1 après (3.4)). Comme $J \bullet u = 0$ implique $J \bullet u^c = J \bullet \tilde{u} = 0$, $\bar{\tau}'^*$ et $\bar{\tau}''^* \supset \bar{\tau}^*$ $\bar{\nu}$-ps. (nous ne répétons pas les raisonnements déjà souvent faits !) Comme inversement $J \bullet u^c = 0$, $J \bullet \tilde{u} = 0$, entraîne $J \bullet u = 0$, $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}'^* \cap \bar{\tau}''^*$ $\bar{\nu}$-pp. (Refaisons ici une fois le raisonnement. Soit J optionnel porté par $\{\bar{\tau}^* \neq \bar{\tau}'^* \cap \bar{\tau}''^*\}$, à valeurs dans $(\bar{\tau}'^* \cap \bar{\tau}''^*) \setminus \bar{\tau}^*$; comme J est porté par $\bar{\tau}'^*$ et $\bar{\tau}''^*$, $J \bullet u^c = 0$, $J \bullet \tilde{u} = 0$, donc $J \bullet u = 0$; donc J prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}^*$; or $J \notin \tau^*$ sur $\{\bar{\tau}^* \cap \bar{\tau}''^* \neq \bar{\tau}^*\}$, donc cet ensemble est $\bar{\nu}$-négligeable.) Comme u est crochet-stable, $u(J \circledcirc J) \in \mathcal{O}pt\, \mathcal{V}^c$, donc u^c est nulle sur $P^*(X)$, donc $\bar{\tau}''^* \supset P^*$ $\bar{\nu}$-pp. Enfin soit $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ une base optionnelle de $T^{*2}(X)$. Puisque $u(T^{*2}(X))$ est un $\mathcal{O}pt$-sous-module stable et crochet-stable de $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, il est stable pour les projections sur $\mathcal{O}pt\,\mathcal{M}^c$ et $\mathcal{O}pt\,\mathcal{V}^c$, par (7.6) de S[2], donc il existe J'^k et J''^k tels que $u(J'^k) = u^c(J^k)$, $u(J''^k) = \tilde{u}(J^k)$; alors J'^k prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}'^*$, J''^k dans $\bar{\tau}''^*$, et comme $u(J^k - J'^k - J''^k) = 0$, $J^k - J'^k - J''^k \in \bar{\tau}^*$ $\bar{\nu}$-pp., donc $J^k \in \bar{\tau}'^* + \bar{\tau}''^*$ $\bar{\nu}$-pp. ; donc $\bar{\tau}'^* + \bar{\tau}''^* = T^{*2}$ $\bar{\nu}$-pp. En remplant $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}'^*$, $\bar{\tau}''^*$ par T^{*2} sur l'ensemble $\bar{\nu}$-négligeable où les relations d) ne sont pas vérifiées, elles seront vérifiées partout.

<u>Remarque</u> : Si l'on étudie <u>une seule</u> application u, on peut avoir intérêt à prendre $\bar{\nu}$ minimale pour u ; elle le sera aussi pour $\tilde{u}$, puisque les parties u- et $\tilde{u}$-négligeables sont les mêmes, <u>mais elle ne sera pas minimale pour</u> u^c. Alors $\bar{\nu}$ disparaît, et $\bar{\nu}$-négligeable pourra se remplacer partout par u-négligeable. On pourra, sans inconvénient, dans ce cas, remplacer la notation $\bar{\tau}^*$, $\bar{\tau}'^*$, $\bar{\tau}''^*$, $\bar{\tau}(u)$, $\bar{\tau}(u^c)$, $\bar{\tau}(\tilde{u})$ par la notation τ^*, τ'^*, τ''^*, $\tau(u)$, $\tau(u^c)$, $\tau(\tilde{u})$, bien que $\bar{\nu}$ ne soit pas minimale pour u, et il n'y aura guère de confusion possible. Mais nous conserverons la possibilité d'utiliser $\bar{\nu}$ dominant u, pour pouvoir évetuellement comparer plusieurs applications $u^{(i)}$, voir remarque 1) après (3.4).

<u>Proposition (3.5)</u> : <u>Soit</u> $u : T^{*2}(X) \to \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, <u>$\mathcal{O}pt$-linéaire et crochet-stable. Elle admet des représentations tangentielles</u>

$$(3.6) \qquad u = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k \bullet Z^k + \overset{2}{H} \bullet V \quad ,$$

où les $\overset{1}{H}_k$ sont des processus optionnels 1-tangents, $H_k \in T^{*1}(X)$, les Z_k des semi-martingales, V un processus croissant (continu adapté ≥ 0) arbitraire dominant u et les $[Z^i, Z^j]$. Si alors on pose $[Z^i, Z^j] = \beta_{i,j} \bullet V$, la projection $\overset{1,1}{H}$ de $\overset{2}{H}$ sur le quotient $T^2/T^2 = T^1 \odot T^1$ est nécessairement

$$(3.7) \qquad \overset{1,1}{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta^{i,j} H_i \odot H_j \quad , \quad dV\text{-pp.},$$

(et on peut donc le supposer vrai partout, en modifiant H sur un ensemble dV-négligeable). On en déduit que $\overset{1,1}{H}$ est dV-pp. ≥ 0 pour la structure d'ordre de $T^1(V) \odot T^1(V)$ (voir (1.2bis)), ou que $\overset{2}{H}$ est dV-pp. ≥ 0 pour le préordre de $T^2(V)$ vu à (2.7).

2) On peut toujours choisir les $Z^k = M^k$ martingales (et même martingales orthogonales). Dans ce cas,

$$(3.8) \qquad u^c = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k \bullet M^k \quad , \quad \tilde{u} = \overset{2}{H} \bullet V \quad ,$$

$$\frac{1}{2}[u,u] = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{i,j} H_i \odot H_j\right) \bullet V = \overset{1,1}{H} \bullet V \quad .$$

Il existe une infinité de couples $\overset{2}{\overline{H}}$, $\overline{V}$, jouant le rôle de $\overset{2}{H}$, V mais $\overline{H} \bullet \overline{V}$ est unique au sens suivant : à une équivalence près, il existe une dV unique minimale ; dV est minimale ssi elle ne charge pas $\{H = 0\}$; dV minimale est équivalente à u ou $\tilde{u}$, (i.e. a les mêmes parties négligeables) on peut prendre $d\overline{V}$ arbitraire dominant les minimales ; alors $\overline{H}$ est unique à un ensemble $d\overline{V}$-négligeable près ; si $d\overline{V}$ domine dV, $\overline{H}$ convient ssi $dV = \alpha\, d\overline{V}$, $\alpha \in \mathcal{O}pt$, $\overline{H} = \alpha H$ $d\overline{V}$-pp. Donc sur tout ensemble dV-négligeable, $\overline{H} = 0$ $d\overline{V}$-pp. Si $[\overline{H}]$ est le sous-espace vectoriel, de dimension 0 ou 1, engendré par H, il est caractérisé par : $[\overline{H}] = [H]$ dV-pp., et, sur tout ensemble dV-négligeable, $[\overline{H}] = \{0\}$ $d\overline{V}$-pp.

3) Quels que soient les choix de $\overline{\nu}$, $\overline{\tau}(u)$, $\overline{\tau}(u^c)$, $\overline{\tau}(\tilde{u})$ suivant (3.4bis), et de $M^1, \ldots, M^m$, et de $H_1, H_2, \ldots, H_m$, $\overline{H}$, $\overline{V}$ suivant (3.8), $\overline{\nu}$ et $d\overline{V}$ dominant u mais choisies indépendamment l'une de l'autre, on a d'une part $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u^c) \oplus \overline{\tau}(\tilde{u})$, somme directe $\overline{\nu}$-pp., d'autre part $\overline{\tau}(u^c) \subset [H_1, H_2, \ldots, H_m]$ ($[\ldots]$ est le sous-espace

vectoriel engendré par) $\bar{\nu}$-pp., $\bar{\tau}(\tilde{u})\subset[\overset{\overline{2}}{H}]$ $\bar{\nu}$-pp. (*mais pas forcément* $d\bar{V}$-pp.), $\bar{\tau}(\tilde{u})\supset[\overset{\overline{2}}{H}]$ $d\bar{V}$-pp. (*mais pas forcément* $\bar{\nu}$-pp.). *On peut*, $\bar{\nu}$ *et* $d\bar{V}$ *étant choisies* (*dominant* u, *mais indépendamment l'une de l'autre*) *choisir* $\bar{\tau}(u)$, $\bar{\tau}(u^c)$, $\bar{\tau}(\tilde{u})$, $H_1,H_2,\dots,H_m$, $\bar{H}$, $M_1,M_2,\dots,M$, $\bar{V}$, *de sorte que* $\bar{\tau}(u)=\bar{\tau}(u^c)\oplus\bar{\tau}(\tilde{u})$ *partout*, $\bar{\tau}(u^c)=[H_1,H_2,\dots,H_m]$ *partout*, $\bar{\tau}(\tilde{u})=[\bar{H}]$ *partout et que les parties* u^c-*négligeables de* $\bar{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ *soient les parties* dM^k-*négligeables pour tout* k. *Donc* $\bar{\tau}(u^c)$ *est l'intersection* $\bar{\nu}$-*essentielle de tous les* $[H_1,H_2,\dots,H_m]$, $\bar{\tau}(\tilde{u})$ *l'intersection* $\bar{\nu}$-*essentielle de tous les* $[\overset{\overline{2}}{H}]$, *et* $[\overset{\overline{2}}{H}]$ *la réunion* $d\bar{V}$-*essentielle de tous les* $\bar{\tau}(\tilde{u})$, *pour* $\bar{\nu}$ *et* $\bar{V}$ *données*.

Démonstration : 1) L'application u^c de $T^{*1}(X)$ dans $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$ admet des représentations tangentielles :

$$u^c=\sum_{k=1}^{m}H_k\cdot M^k\ , \tag{3.9}$$

où les H_k sont 1-tangents, et les M^k des martingales ; on peut supposer les H_k indépendants ($\mathcal{O}pt$-base de $T^1(X)$) ; au lieu de cela, on peut supposer les M^k orthogonales, car des M^k quelconques s'expriment comme $\mathcal{O}pt$-combinaisons de martingales orthogonales. Ensuite $\tilde{u}$ admet des représentations tangentielles

$$\tilde{u}=\sum_{\ell=1}^{n}\overset{2}{H'_\ell}\cdot V^\ell\quad,\quad V^\ell\in\mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c\ . \tag{3.10}$$

Mais les V^ℓ sont $\mathcal{O}pt$-multiples d'un seul V, processus croissant, dont on peut supposer qu'il domine les $[M_i,M_j]$, d'où (3.6).

Si l'on a (3.6), on a forcément

$$u^c=\sum_{k=1}^{m}\overset{1}{H_k}\cdot Z^{k,c}\quad;\quad\tilde{u}=\sum_{k=1}^{m}\overset{1}{H_k}\cdot\tilde{Z}^k+\overset{2}{H}\cdot V\ .$$

Soit $J\in T^{*2}(X)$. On a

$$u(J\odot J)=[u(J),u(J)]=\sum_{i,j=1}^{m}(J|H_i)(J|H_j)\cdot[Z^i,Z^j]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{i,j}(J\odot J|H_i\odot H_j)_{T^{*1}\odot T^{*1},T^1\odot T^1}\cdot V=(J\odot J|\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\beta_{i,j}\,H_i\odot H_j)\cdot V\ ;$$

les H_k étant orthogonales à $J \odot J$, ceci doit aussi être :

$$= (J \odot J | \overset{2}{H}) \bullet V \quad .$$

Donc, pour tout J, $(J \odot J | \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{i,j} H_i \odot H_j) = (J \odot J | \overset{2}{H}) = (J \odot J | \overset{1,1}{H}),$ dV-pp.

Mais il existe un nombre fini de $J \odot J$ qui engendrent, en tout (t,ω), $P^*(V, X(t,\omega))$, donc

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} H_i \odot H_j = \overset{1,1}{H} \quad dV\text{-pp.}$$

On a vu à (2.1) que la matrice des $[Z^i, Z^j]$ était croissante, donc, V étant croissante, la matrice des $\beta_{i,j}$ est dV-pp. ≥ 0, donc $\overset{1,1}{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{i,j} H_i \odot H_j$ est dV-pp. ≥ 0.

2) Soit (3.6) avec des $Z^k = M^k$ martingales. Alors (3.8) en résulte aussitôt, pour les deux premières formules ; la 3ème est exactement (3.7). Et l'unicité de $\overline{H} \bullet \overline{V}$ est évidente. En effet, A optionnel est u- ou $\tilde{u}$-négligeable, ssi il est $\overline{H}$ $d\overline{V}$-négligeable, c-à-d., en supposant que $d\overline{V}$ ne charge pas $\{\overline{H} = 0\}$, ssi il est $d\overline{V}$-négligeable. Donc il y a bien des dV minimales, équivalentes à u et $\tilde{u}$. Pour $d\overline{V}$ donnée, $\overline{H}$ est bien unique à un ensemble $d\overline{V}$-négligeable près, car, si $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ est un base optionnelle de $T^{*2}(X)$, chaque $(J^k | H)$ est unique à un ensemble $d\overline{V}$-négligeable près. Prenons $d\overline{V}$ dominant dV, $dV = \alpha\, d\overline{V}$, alors $\overline{H} = \alpha H$ répond à la question ; tout autre est de la forme $\alpha H + H'$, et $H' \bullet \overline{V}$ doit représenter 0, donc H' est $d\overline{V}$-pp. nulle. Sur un ensemble dV-négligeable, c-à-d. u-négligeable, $dV = \alpha\, d\overline{V}$ montre que $\alpha = 0$ $d\overline{V}$-pp., donc $\overline{H} = \alpha H = 0$ $d\overline{V}$-pp. La relation $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{i,j} H_i \odot H_j = \overset{1,1}{H}$ est toujours vraie $d\overline{V}$-pp.

3) Puisque les H_k, M^k sont choisies en appliquant (3.4) à u^c, ainsi que $\overline{\tau}(u^c)$ relativement à $\overline{\nu}$, on a nécessairement $\overline{\tau}(u^c) \subset [H_1, H_2, \ldots, H_m]$ $\overline{\nu}$-pp. Et on peut les choisir de manière que ce soit vrai partout, et que les parties u^c-négligeables soient exactement les parties dM^k-négligeables pour tout $k = 1,2,\ldots,m$. On sait ensuite, d'après (3.4bis), que l'on a nécessairement $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u^c) \oplus \overline{\tau}(\tilde{u})$, somme directe, $\overline{\nu}$-pp. ; en les remplaçant par 0 là où ce n'est

pas vrai, on aura cette relation partout ; comme un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable est u-négligeable, il sera dM^k-négligeable pour tout k, et on pourra aussi y remplacer $H_1, H_2, \ldots, H_m$ par 0, de sorte que maintenant on aura partout à la fois $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u^c) \oplus \overline{\tau}(\tilde{u})$ et $\overline{\tau}(u^c) = [H_1, H_2, \ldots, H_m]$.

Pour $\overline{\tau}(\tilde{u})$, $\overline{H}$, $d\overline{V}$, c'est plus compliqué. On a d'abord choisi des V^ℓ, puis fait subir certaines transformations, alors que $\overline{\tau}(\tilde{u})$ est bien choisi suivant (3.4) relative à $\tilde{u}$ et la mesure $\overline{\nu}$. Il faut donc démontrer directement que $\overline{\tau}(\tilde{u})$ est l'intersection $\overline{\nu}$-essentielle de tous les $[\overset{2}{H}]$, quel que soit le choix de $d\overline{V}$ dominant les V^ℓ et les $[M_i, M_j]$, et de $\overline{H}$ associée à $\overline{V}$. Soit $J \in T^{*2}(X)$ orthogonal à $\overline{H}$; alors sûrement $\tilde{u}(J) = 0$, donc $\tilde{J} \in \overline{\tau}'^{*}$ $\overline{\nu}$-pp. Donc $[\overline{H}]^+ \subset \overline{\tau}'^{*}$ $\overline{\nu}$-pp., ou $\overline{\tau}(\tilde{u}) \subset [\overline{H}]$ $\overline{\nu}$-pp. [Par contre, on n'a pas nécessairement $\overline{\tau}(\tilde{u}) \subset [\overline{H}]$ $d\overline{V}$-pp. Prenons par exemple $\overline{\nu} = \nu$ équivalente à $\tilde{u}$, $d\overline{V}$ non équivalente à dV, obtenue en lui ajoutant une $d\overline{V}'$ sur une partie $A' \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ dV-négligeable. Nécessairement $\overline{H} = 0$ $d\overline{V}'$-pp. sur A', par exemple partout. Mais, cette partie étant u-négligeable, $\tau(\tilde{u})$ y reste complètement libre, donc on n'a pas nécessairement $\tau(\tilde{u}) = \{0\}$ ou $\subset [H]$ $d\overline{V}$-pp.] Par ailleurs, si $J \in T^{*2}(X)$ est orthogonal à $\overline{\tau}(\tilde{u})$, $\tilde{u}(J) = 0$, ou $(J|\overline{H}) \cdot \overline{V} = 0$, donc J est orthogonal à $[\overline{H}]$ $d\overline{V}$-pp., donc $\overline{\tau}'^{*} \subset [\overline{H}]^+$ $d\overline{V}$-pp. ou $[\overline{H}] \subset \overline{\tau}(\tilde{u})$ $d\overline{V}$-pp. [Par contre, on n'a pas nécessairement $[\overline{H}] \subset \overline{\tau}(\tilde{u})$ $\overline{\nu}$-pp. Prenons en effet $\overline{V} = V$ équivalente à $\tilde{u}$, $\overline{\nu}$ non équivalente à ν, obtenue en lui ajoutant une $\overline{\nu}'$ portée par une partie $A' \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ν-négligeable. Nécessairement $\overline{\tau}(\tilde{u}) = \{0\}$, $\overline{\nu}$-pp. sur A', par exemple partout. Mais, cette partie étant dV-négligeable, H y reste arbitraire, donc on n'a pas nécessairement $[H] = \{0\}$, ou $[H] \subset \overline{\tau}(\tilde{u})$ $\overline{\nu}$-pp.]

L'ensemble $\{\overline{\tau}(\tilde{u}) \not\subset [\overline{H}]\}$ est $\overline{\nu}$-négligeable, on peut y remplacer $\overline{\tau}(\tilde{u})$ par $\{0\}$; l'ensemble $\{[\overline{H}] \not\subset \overline{\tau}(\tilde{u})\}$ est $d\overline{V}$-négligeable, on peut y remplacer $\overline{H}$ par 0. Ces substitutions faites, on a $\overline{\tau}(\tilde{u}) = [\overline{H}]$ partout. La modification de $\overline{\tau}(\tilde{u})$ aura peut-être modifié la relation $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u^c) \oplus \overline{\tau}(\tilde{u})$; il suffira de remplacer aussi $\overline{\tau}(u^c)$ et $\overline{\tau}(u)$ par $\{0\}$ sur $\{\overline{\tau}(\tilde{u}) \not\subset H\}$ $\overline{\nu}$-négligeable ; un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable est aussi u^c-négligeable donc M^k-négligeable pour tout k, donc on peut y remplacer $H_1, H_2, \ldots, H_m$ par 0 et on aura encore $\overline{\tau}(u^c) = [H_1, H_2, \ldots, H_m]$ partout. On aura alors partout toutes les relations $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u^c) \oplus \overline{\tau}(\tilde{u})$, $\overline{\tau}(u^c) = [H_1, H_2, \ldots, H_m]$, $\overline{\tau}[\tilde{u}] = [\overline{H}]$.

<u>Remarque (3.10bis)</u> : 1) Puisque dim $\overline{\tau}(u^c) \leq N$ et dim $\overline{\tau}(\tilde{u}) \leq 1$, dim $\overline{\tau}(u) \leq N+1$, donc dim $\overline{\tau}^* \geq N + \frac{N(N+1)}{2} - N - 1 = \frac{N(N+1)}{2} - 1$, ≥ 2 dès que $N \geq 2$.

2) En gardant $\overline{\nu}$ et $d\overline{V}$ on se complique la tâche ; $\nu = dV$ équivalentes à u serait plus simples ! Mais nous avons vu l'intérêt de conserver $\overline{\nu}$, $d\overline{V}$, voir remarque 1) après (3.4) et remarque après (3.4bis). Toutefois, en choisissant indépendamment l'une de l'autre $\overline{\nu}$ et $d\overline{V}$, et en montrant que les formules marchent, <u>on réalise une acrobatie dans doute bien inutile</u> ; <u>on peut au moins se contenter de prendre</u> $\overline{\nu}$ <u>et</u> $d\overline{V}$, <u>mais équivalentes</u> !

3) Soit $A = \{\overline{\tau}(u^c) = 0\}$; on a le droit de dire que, sur A, u est à variation finie. Il est alors possible de choisir $H_1 = H_2 = \ldots = H_m = 0$ sur A. Puisque u est crochet-stable, elle est, sur A, nulle sur les $J_1 \odot J_2$ (puisque $u(J_1 \odot J_2) = [u^c(J_1), u^c(J_2)]$), donc sur $P^*(X)$; donc $\overline{\tau}^* \supset P^*(X)$ $\overline{\nu}$-pp. sur A, ou $\overline{\tau}(u) \subset T^1$ $\overline{\nu}$-pp., et aussi $\overline{\tau}(\tilde{u}) = \overline{\tau}(u)$. On peut toujours remplacer $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(\tilde{u})$ par $\{0\}$ sur $\{\overline{\tau}(u) \not\subset T^1\} \cap A$, $\overline{\nu}$-négligeable ; comme un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable est u-négligeable, $\overline{H}$ est $d\overline{V}$-pp. nulle sur lui, et on peut y remplacer $\overline{H}$ par 0 ; si on avait la situation de 3) de (3.5) partout, on l'aurait encore, avec maintenant sur A :

$$\overline{\tau}(u^c) = \{0\} \quad , \quad \overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(\tilde{u}) = [H] \subset T^1 \quad , \quad H_1 = H_2 = \ldots H_m = 0 \quad .$$

C'est la situation classique pour un processus à variation finie !

[Si l'on n'est pas partout dans la situation 3) de (3.5), on a quand même, sur A, $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(\tilde{u}) \subset T^1$ $\overline{\nu}$-pp., $\overline{H} \in T^1$ $d\overline{V}$-pp., $\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(\tilde{u}) \subset [\overline{H}]$ $\overline{\nu}$-pp., mais $[H_1, H_2, \ldots, H_m]$ est arbitraire.]

Considérons au contraire $\complement A = \{\overline{\tau}(u^c) \neq 0\} = \{\overline{\tau}''^* \neq T^{*2}\}$. On a le droit de dire que, sur $\complement A$, "u a une composante martingale". Il existe $J \in T^{*2}(X)$, porté par $\complement A$, à valeurs dans $\complement \overline{\tau}''^*$ sur $\complement A$. Montrons que, sur $\complement A$, $\overline{\tau}(\tilde{u}) \not\subset T^1$ $\overline{\nu}$-pp. Soit en effet $B = \{\overline{\tau}(\tilde{u}) \subset T^1\} \cap \complement A$. Alors $1_B J \odot 1_B J \in P^*(X)$ est orthogonale à T^1, donc à $\overline{\tau}(\tilde{u})$, mais aussi à $\overline{\tau}(u^c) \subset T^1$, donc à $\overline{\tau}(u)$, donc $u(1_B J \odot 1_B J) = 0$. Par crochet-stabilité, $u^c(1_B J) = 0$, donc $1_B J \in \overline{\tau}''^*$ $\overline{\nu}$-pp. ; mais il n'est jamais à valeurs dans $\overline{\tau}''^*$ sur $\complement A$, donc B est $\overline{\nu}$-négligeable, et on a bien $\overline{\tau}(\tilde{u}) \not\subset T^1$ $\overline{\nu}$-pp. ; comme $\overline{\tau}(\tilde{u}) \subset [\overline{H}]$ $\overline{\nu}$-pp., on a $\overline{\overline{H}} \notin T^1$ et $\overline{\tau}(\tilde{u}) = [\overline{H}]$ $\overline{\nu}$-pp. (mais non nécessairement $d\overline{V}$-pp., voir démonstration de (3.5), 3)). Remplaçons $\overline{\tau}(u)$, $\overline{\tau}(u^c)$, $\overline{\tau}(\tilde{u})$, $[H_1,H_2,\dots,H_m]$, $[\overline{H}]$ par $\{0\}$ sur $\complement A\cap\{\overline{\tau}(\tilde{u})\subset T^1\}$ et sur $\complement A\cap\{\overline{\tau}(\tilde{u})\not\subset[\overline{H}]\}$, qui sont $\overline{\nu}$-négligeables ; <u>cela fait passer une partie de</u> $\complement A$ <u>dans</u> A ! Sur ce qui reste dans $\complement A$, on aura $\overline{\tau}(\tilde{u})\not\subset T^1$, $\overline{H}\notin T^1$, $\overline{\tau}(\tilde{u})=[\overline{H}]$ partout. Donc :

<u>Proposition (3.10ter)</u> : <u>Soit</u> $A=\{\overline{\tau}(u^c)=0\}$. <u>Sur</u> $\complement A$, $\overline{\tau}(\tilde{u})=[H]\not\subset T^1$ $\overline{\nu}$-pp. <u>On peut trouver les objets indiqués</u> à (3.5), 3), <u>de telle manière que</u>, <u>sur</u> $A=\{\overline{\tau}(u^c)=0\}$, <u>on ait partout</u> $H_1=H_2=\dots=H_m=0$, $\overline{H}\in T^1$, $\overline{\tau}(u^c)=0$, $\overline{\tau}(u)=\overline{\tau}(\tilde{u})\subset T^1$, <u>et que</u>, <u>sur</u> $\complement A=\{\overline{\tau}(u^c)\neq 0\}$, <u>on ait partout</u> $\overline{H}\notin T^1$, $\overline{\tau}(\tilde{u})=[\overline{H}]\not\subset T^1$; <u>autrement dit</u>, u <u>admet une composante martingale ou non selon que</u> $\overline{H}\notin T^1$ <u>ou</u> $\overline{H}\in T^1$.

<u>Remarques (3.10quarto)</u> : 1) Si $A=\emptyset$, c-à-d. si u a partout une composante martingale, on peut trouver un supplémentaire Θ^* de $P^*(X)$, optionnel le long de X, donc de dimension N, tel que, pour $J\in P^*(X)$ (de dimension $\frac{N(N+1)}{2}$) $J\bullet u$ soit à variation finie, et pour $J\in\Theta^*$ (de dimension N) $J\bullet u$ soit une martingale. Il suffit de prendre une décomposition en somme directe $T^2=T^1\oplus\Theta$ le long de X, telle que $\overline{H}\in\Theta$, et $\Theta^*=\Theta^+$.

2) Nous ne nous sommes pas occupés de $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])$, mais il est fort simple. En effet, $\frac{1}{2}[u,u]$, tangent à $P(X)=T^1\odot T^1$ (quotient T^2/T^1), est la restriction commune de u et $\tilde{u}$ à P^* ; alors $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])$ sera, par définition, l'orthogonal dans P(X) de $\overline{\tau}^*\cap P^*(X)=\overline{\tau}'^*\cap P^*(X)$. Comme $\overline{\tau}^*$ est l'orthogonal de $\overline{\tau}(u)$, $\overline{\tau}'^*$ l'orthogonal de $\overline{\tau}(u)$, $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])$ est l'image dans $P(X)=T^2/T^1$ de $\overline{\tau}(u)$ ou $\overline{\tau}(\tilde{u})$. Sur $A=\{\tau(u^c)=0\}$, $\overline{\tau}(u)\subset T^1$, donc $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])=\{0\}$. Sur $\complement A=\{\overline{\tau}(u^c)\neq 0\}$, $\overline{\tau}(\tilde{u})=[\overline{H}]$ et $\not\subset T_1$ $\overline{\nu}$-pp., donc $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])=[\overline{\overset{1,1}{H}}]\neq\{0\}$ $\overline{\nu}$-pp. ($\overline{\overset{1,1}{H}}$ est l'image de $\overline{\overset{2}{H}}$ dans $P=T^2/T^1$). Quitte à modifier $\overline{\tau}(u)$, $\overline{\tau}(u^c)$, $\overline{\tau}(\tilde{u})$, $\overline{\overset{2}{H}}$, on peut avoir $\overline{\tau}(\frac{1}{2}[u,u])=[\overline{\overset{1,1}{H}}]$ partout, $=\{0\}$ sur $\{\overline{\tau}(u^c)=0\}$, $\neq\{0\}$ sur $\{\overline{\tau}(u^c)\neq 0\}$.

<u>(3.10quinto)</u> Si A est une partie optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, et $u:T^{*2}(X)\to\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$ $\mathcal{O}pt$-linéaire et crochet-stable, on peut définir $1_A\bullet u$ comme une nouvelle application $T^{*2}(X)\to\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, $\mathcal{O}pt$-linéaire et crochet-stable, par $J\bullet(1_A\bullet u)=J\,1_A\bullet u$.

Convenons de dire d'une application u crochet-stable qu'elle a partout une composante martingale si $\tau(u^c) \not\subset \{0\}$ u-pp. Alors, si u est quelconque, et si $A = \{\tau(u^c) = 0\}$, on voit que (3.10ter) s'exprime aussi : $1_A \cdot u$ est à variation finie (i.e. à valeurs dans $\mathcal{O}pt\, \mathcal{V}^c$), et $1_{\complement A} \cdot u$ a partout une composante martingale. Alors u a partout une composante martingale, ssi H est u-pp. dans $\complement T^1$, ou $\tau(\tilde{u})$ est u-presque nulle part dans T_1.

(3.10sexto) Nous avons défini $\bar{\tau}(u)$ comme le sous-espace tangent à u, associé à $\bar{\nu}$ dominant u ; il dépend de $\bar{\nu}$. Mais, si τ est une famille optionnelle de sous-espaces tangents à V le long de X, on dira que u est tangent à τ $\bar{\nu}$-pp., si $\bar{\tau}(u) \subset \tau$, $\bar{\nu}$-pp. Mais c'est indépendant de $\bar{\nu}$; car, si u est tangente à τ ν-pp., $\tau(u) \subset \tau$ ν-pp. ; comme $\bar{\tau}(u) = \tau(u)$ ν-pp., $\bar{\tau}(u) \subset \tau$ ν-pp. ; alors $\{\bar{\tau}(u) \not\subset \tau\}$ est ν-négligeable, donc sur lui $\bar{\tau}(u) = \{0\} \subset \tau$ $\bar{\nu}$-pp., donc $\{\bar{\tau}(u) \not\subset \tau\}$ est $\bar{\nu}$-négligeable, u est tangente à τ $\bar{\nu}$-pp. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une représentation tangentielle (3.1) où $H_1, H_2, \dots, H_m$ soient dans τ, ν-pp. ou partout.

(3.11) Le fait que $d\underline{X}_t$ se comporte comme un vecteur 2-tangent au point X_t, principe fondamental (2.6), a donné lieu au théorème (2.7) : $d\underline{X}$ définit une application $\mathcal{O}pt$-linéaire crochet-stable u_X de $T^{*2}(X)$ dans $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$. Donc X a des représentations tangentielles suivant la proposition (3.5). On dira que X a la représentation tangentielle

$$\text{(3.11bis)} \qquad \underline{X} \overset{(\bullet)}{\sim} \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{H_k} \cdot Z^k \quad , \quad \text{ou} \quad d\underline{X} = \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{H_k}\, dZ^k \quad ,$$

Z^k semi-martingales réelles, $H_k \in T^2(X)$, si, pour tout $J \in T^{*2}(X)$, on a

$$\text{(3.11ter)} \qquad J \cdot \underline{X} = \sum_{k=1}^{m} (J | \overset{2}{H_k}) \cdot Z^k \quad .$$

(•) On verra plus loin, remarque après (3.13), pourquoi nous écrivons $\sim$ plutôt que $=$.

Et on pourra appliquer (3.7) et (3.8) :

(3.11quarto) $$\underline{X} \sim \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k \bullet M_k + \frac{1}{2} \overline{\overset{2}{H}} \bullet \overline{V} ,$$

$$X^c = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k \bullet M_k , \quad \underset{\sim}{\underline{X}} = \frac{1}{2} \overline{\overset{2}{H}} \bullet \overline{V} ,$$

$$\frac{1}{2}[X,X] = (\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{i,j} H_i \odot H_j) \bullet \overline{V} = \frac{1}{2} \overline{\overset{1,1}{H}} \bullet V .$$

Pour que (3.10ter) soit vraie, il faut et il suffit qu'elle le soit pour des J engendrant $T^{*2}(X)$; par exemple, si Vest plongée dans un espace $\mathbb{R}^d$, de coordonnées x^ℓ, $\ell = 1,2,\ldots,d$, pour les D^2x^ℓ et les $Dx^i \odot Dx^j$, $i,j,\ell = 1,2,\ldots,d$, que nous écrirons de préférence ε^ℓ, $\varepsilon^i \odot \varepsilon^j$, les ε^ℓ formant une base de $(\mathbb{R}^d)^*$, duale de la base $(e_\ell)_{\ell = 1,2,\ldots,d}$ de $\mathbb{R}^d$. Nous écrirons

(3.12) $$\overset{2}{H}_k = \sum_{\ell=1}^{d} H_k^\ell e_\ell + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} H_k^{i,j} e_i \odot e_j , \quad H_k^{j,i} = H_k^{i,j} ,$$

donc $$(\varepsilon^\ell | H_k) = H_k^\ell , \quad (\varepsilon^i \odot \varepsilon^j | H_k) = H_k^{i,j} .$$

Il suffira donc que l'on ait

(3.12bis) $$\begin{cases} X^\ell - X_o^\ell = \varepsilon^\ell \bullet \underline{X} = \sum_{k=1}^{m} H_k^\ell \bullet Z^k , \quad \ell = 1,2,\ldots,d , \\ \frac{1}{2}([X^i,X^j] - [X^i,X^j]_o) = \frac{1}{2} (\varepsilon^i \odot \varepsilon^j) \bullet \underline{X} \\ \qquad = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} H_k^{i,j} \bullet Z^k , \quad i,j = 1,2,\ldots,d ; \end{cases}$$

l'ensemble de ces formules signifie, dans E :

$$\underline{X} - \underline{X}_o = \begin{pmatrix} X - X_o \\ \\ \frac{1}{2}([X,X] - [X,X]_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} H_k^\ell e_\ell \bullet Z^k \\ \\ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} H_k^{i,j} (e_i \odot e_j) \bullet Z^k \end{pmatrix}$$

ou

(3.12ter) $$\underline{X}-\underline{X}_o = \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{H_k} \cdot Z^k \quad .$$

On peut donc énoncer :

Proposition (3.13) : $\underline{X}$ admet la représentation tangentielle (3.11bis), si et seulement si, pour un (et alors pour tout) plongement de V dans un espaces vectoriel E :

(3.13)' $$\underline{X}-\underline{X}_o = \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{H_k} \cdot Z^k \quad , \quad \text{ou} \quad d\underline{X} = \sum_{k=1}^{m} H_k \, dZ^k \quad .$$

Remarques : 1) Les égalités (3.11ter) sont relatives à des semi-martingales ordinaires, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Mais (3.13)' est relative à $\underline{X}-\underline{X}_o$ et pas seulement $X-X_o$, elle est à valeurs dans $E \oplus (E \odot E)$.

2) On voit pourquoi, dans (3.11bis) nous avons écrit $\sim$ et pas $=$. Dans (3.11ter), il n'y a que des intégrales stochastiques, nulles au temps 0. Mais, si V est plongée dans E, il n'y aucune raison d'imposer à X, semi-martingale à valeurs dans V, d'être nulle au temps 0 ! Alors on trouve, dans (3.13)' une égalité = à condition d'écrire $\underline{X}-\underline{X}_o$; avec $\underline{X}$ on aura seulement une équivalence $\sim$. La formule (3.11bis) n'est que symbolique, mais il faut, si $V \subset E$, qu'elle s'applique correctement ! Pour X^c, c'est sans importance, parce que, si X est à valeurs vectorielles, X^c est toujours nulle au temps 0.

(3.13bis) Tout ce qui a été dit de (3.4) à (3.10quinto) s'applique donc à $u_X = d\underline{X}$. En particulier, on pourra parler de sous-espaces tangents $\overline{\tau}(\underline{X})$, $\overline{\tau}(X^c)$, $\overline{\tau}(\underline{\tilde{X}})$ associés à une mesure $\overline{\nu} \geq 0$ dominant $d\underline{X}$. Retenons simplement les formules en association avec (3.5) : il existe des représentations tangentielles associées à $\overline{\nu}$, $d\overline{V}$, pour lesquelles :

(3.14) $$\overline{\tau}(\underline{X}) = \overline{\tau}(X^c) \oplus \overline{\tau}(\underline{\tilde{X}}), \quad \overline{\tau}(X^c) = [H_1, H_2, \ldots, H_m], \quad \overline{\tau}(\underline{\tilde{X}}) = \overline{H} \quad \text{partout} \quad .$$

Proposition (3.15) : Soit X une semi-martingale à valeurs dans V, et soit Φ une application C^2 de V dans une autre variété W. Alors, si $\overline{\nu}$ domine $d\underline{X}$, elle domine $d(\underline{\Phi(X)})$, et

$$\text{(3.15bis)} \qquad \begin{aligned} \overline{\tau}(\underline{\Phi(X)}) &\subset \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, \overline{\tau}(\underline{X}) \quad , \\ \overline{\tau}(\Phi(X)^c) &\subset \overset{1}{\underline{\Phi}}(X)\, \overline{\tau}(X^c) \quad , \\ \overline{\tau}(\underline{\Phi(X)}) &\subset \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, \overline{\tau}(\underline{\widetilde{X}}) \quad , \quad \overline{\nu}\text{-pp.} \end{aligned}$$

Si $\underline{X}$ admet la représentation tangentielle (3.11bis), ou (3.11quarto), $\underline{\Phi(X)}$ aura les représentations respectives :

$$\text{(3.15ter)} \qquad \underline{\Phi(X)} \sim \sum_{k=1}^{m} \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, H_k \bullet \underline{Z}^k \quad ,$$

$$\text{(3.15quarto)} \qquad \Phi(X)^c = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{\underline{\Phi}}(X)\, H_k \bullet M^k$$

$$\underline{\Phi(X)} \sim \overset{2}{\underline{\Phi}}(X)\, \overline{H} \bullet \overline{V} \quad .$$

On est d'ailleurs amené à écrire cela sous la forme :

$$\underline{\Phi(X)} \sim \overset{2}{\underline{\Phi}}(X) \bullet \underline{X} \quad , \quad \Phi(X^c) \sim \overset{1}{\underline{\Phi}}(X) \bullet X^c \quad , \quad \underline{\Phi(X)} \sim \overset{2}{\underline{\Phi}}(X) \bullet \underline{\widetilde{X}} \quad .$$

Démonstration évidente par (2.16) :

(3.15quinto) On peut localiser. Si A est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on dira que (3.11bis) est une représentation tangentielle de X dans A si, pour tout $J \in T^{*2}(X)$, $J \bullet X \underset{A}{\sim} \sum_{k=1}^{m} (J|H_k) \bullet Z^k$. Cela revient à dire, si A est optionnel, que (3.11bis) est vraie pour tout $J = J\, 1_A$ porté par A. Il suffit de le vérifier pour un nombre fini convenable de J, ou de vérifier (3.11bis) pour un plongement de V. On en déduit que, étant donné des H_k, Z^k, il existe un plus grand ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ sur lequel $\sum_{k=1}^{m} H_k\, dZ^k$ soit une représentation tangentielle de $d\underline{X}$, et il est optionnel.

(3.16) Exemple d'une diffusion brownienne sur une variété riemannienne.

Proposition (10.16) : Plaçons-nous dans les conditions du § 8 de S[1], avec les mêmes notations. Pour qu'une mesure $\lambda = \mathbb{P}^{\mu}$ sur Ω, μ probabilité sur V, soit solution du problème des martingales, relativement à l'opérateur différentiel elliptique L, et à la loi de probabilité μ de X_o, il faut et il suffit que X soit une semi-martingale pour $(\Omega,\mathcal{O},(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+},\lambda)$, dans $[0,\zeta[$ (ζ temps de mort), vérifiant $X_o(\mathbb{P}^{\mu}) = \mu$, et ayant la représentation tangentielle

$$(3.16\text{bis}) \qquad d\underset{-}{\tilde{X}}_t = L(X_t)dt \quad \text{ou} \quad \underset{-}{\tilde{X}} \sim L(X)\cdot(t), \ ,$$

au sens de (3.11quarto) : $d\overline{V} = dt$, $\overline{H} = L(X)$. Alors dt est minimale (puisque $\{L(X) = 0\}$ est vide !) donc équivalente à dX.

Soit $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N}$ une base orthonormée des espaces cotangents, optionnelle, le long de X ($J^k(t,\omega) \in T^{*1}(V,X(t,\omega))$), soit $(H_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ la base duale. On sait qu'aux J^k on peut associer des B^k, mouvements browniens dans $[0,\zeta[$, deux à deux indépendants, et qu'on a la représentation tangentielle (S[1], proposition (8.5), page 107)

$$(3.16\text{ter})\begin{cases} d\underset{-}{X}^c_t = \sum_{k=1}^{N} H_{k,t}\, dB^k_t \ , \quad \text{ou} \quad X^c = \sum_{k=1}^{N} H_k \cdot B^k \ , \quad \text{donc} \\ d\underset{-}{X}_t = \sum_{k=1}^{N} H_{k,t}\, dB^k_t + L(X_t)\, dt \ , \quad \text{ou} \quad \underset{-}{X} \sim \sum_{k=1}^{N} H_k \cdot B^k + L(X)\cdot(t) \ . \end{cases}$$

Ces formules montrent que $d\underset{-}{X}$, $d\underset{-}{\tilde{X}}$, dX^c, dt sont équivalentes (i.e. ont les mêmes parties négligeables). En prenant $\overline{\nu} = \nu$ équivalente à dt, on a $\tau(X^c) = T^1(V,X)$, $\tau(\underset{-}{\tilde{X}}) = [L(X)]$, $\tau(X) = \tau(X^c)\oplus\tau(\underset{-}{\tilde{X}})$, on est dans la situation de 3) de (3.5). On notera, comme il était nécessaire, que L est partout ≥ 0 pour la structure de préordre de $T^2(V)$.

Remarque : La relation entre l'opérateur L et le processus de Markov est bien connue, L est le générateur infinitésimal du semi-groupe de Markov. C'est ce que Stroock et Varadhan ont exprimé par le problème des martingales. Il est encore plus sympathique de la voir sous la forme ci-dessus : si X est une semi-martingale pour $\lambda = \mathbb{P}^{\mu}$, elle a en chaque point (t,ω) des vecteurs tangents $d\underline{X}_t$, dX_t^c, $d\underline{\tilde{X}}_t$, et $d\underline{\tilde{X}}_t$ est un vecteur 2-tangent au point $X(t,\omega)$: eh bien c'est exactement $L(X_t)dt$; puisque L est un opérateur différentiel du 2ème ordre sans terme d'ordre 0, en tout point v de V, $L(v) \in T^{*2}(V,v)$.

On peut se sentir ici autorisé à écrire $\dfrac{d\underline{\tilde{X}}_t}{dt} = L(X_t)$.

<u>Démonstration</u> : Pour que l'on ait la représentation tangentielle (3.16bis), il faut et il suffit que, pour tout $J \in T^{*2}(X)$, on ait $(J \bullet X) - (J \bullet X^c) = J \bullet \underline{\tilde{X}} = (J|L(X)) \bullet (t)$; et pour cela, il faut et il suffit que ce soit vrai pour tout $J = D^2\varphi$, $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$, soit $D^2\varphi(X) \bullet \underline{X} - D\varphi(X) \bullet X^c = L\varphi(X) \bullet (t)$ dans $[0,\zeta[$, ou $\varphi(X) - \varphi(X_0) - (\varphi(X))^c - L\varphi(X) \bullet (t) = 0$. Cela revient exactement à écrire que, pour toute φ de classe C^2, $\varphi(X) - \varphi(X_0) - L\varphi(X) \bullet (t)$ est une martingale, donc que $\lambda = \mathbb{P}^{\mu}$ vérifie le problème des martingales. On en déduit bien que $d\underline{X}_t$, $d\underline{\tilde{X}}_t$, dt, sont équivalentes. Ensuite (3.16ter) a été montré à (8.5) de S[1]. Comme alors les parties dX^c-négligeables sont celles qui sont dB^k-négligeables pour tout k, ce sont encore les parties dt-négligeables : on est dans un cas où $d\underline{X}$ et dX^c sont équivalentes. La propriété $[H_1,H_2,\dots,H_m] = T^1$ ne donne <u>aucune</u> indication permettant de conclure que $\tau(u^c) = T^1$. Si l'on regarde la proposition (3.5), on voit qu'on prend une base $(J^k)_{k=1,2,\dots,N}$ de $T^{*1}(X)$, $(H_k)_{k=1,2,\dots,N}$ la base duale, $u^c(J^k) = M^k$, et qu'on trouve ainsi la représentation tangentielle (3.8), $u^c = \sum_{k=1}^{N} H_k \bullet M^k$, où les parties u-négligeables sont les parties dM^k-négligeables pour tout k ; pour ce choix, on a <u>toujours</u> $[H_1,H_2,\dots,H_N] = T^1$, et cela ne donne <u>aucune idée</u> sur $\tau(u^c)$; $\tau(u^c) \subset [H_1,H_2,\dots,H_m] = T^1$ u^c-pp., cela n'a aucune valeur ! Mais il existe un processus $J \in \overset{1}{T^{*1}}(X)$ orthogonal à $\tau(u^c)$ et $\neq 0$ sur $C = \{\tau(u^c) \neq T^1\}$; on peut le supposer partout de longueur 1 (pour la métrique riemannienne définie par L) sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Alors $1_C\, J \bullet X^c = 0$; mais $J \bullet X^c$ est un mouvement brownien B, donc $1_C \bullet B = 0$, C est dB-négligeable, ou dt- ou dX-négligeable. On a donc bien $\tau(X^c) = T^1$ $d\underline{X}$-pp. et on peut le supposer partout ; X a partout une composante martingale au sens de (3.10ter). Par contre, pour

$\tau(\underline{\tilde{X}})$, la situation est simple : $A = \{\tau(X^c) = \{0\}\}$ est vide, donc $\tau(\underline{\tilde{X}}) \not\subset T^1$ dX-pp., et $\subset [L(X)]$ d$\underline{X}$-pp., donc $\tau(\underline{\tilde{X}}) = [L(X)]$ d$\underline{X}$-pp. En prenant $\tau(X^c) = T^1(X)$, $\tau(\underline{\tilde{X}}) = [L(X)]$, $\tau(\underline{X}) = T^1(X) \oplus [L(X)]$, on est dans la situation de (3.5), 3).

<u>(3.17)</u> Ce que nous avons fait avec $T^{*2}(X)$ et $T^2(X)$ s'étend évidemment à des fibrés arbitraires. Si $G(V) = G$ est un fibré borélien de base V, $G^*(V) = G^*$ son fibré dual, on pourra appeler $G(X)$, $G^*(X)$ l'espace des processus optionnels à valeurs dans G, G^*, le long de X ; si $J \in G^*(X)$, c'est un processus optionnel à valeurs dans G^*, $J(t,\omega) \in G^*(V, X(t,\omega))$. On pourra alors considérer u, application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $G^*(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, et ses représentations tangentielles

$$\text{(3.17bis)} \qquad u \sim \sum_{k=1}^{m} H_k \cdot Z^k \quad , \quad Z^k \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c \quad , \quad H_k \in G(X) \quad .$$

L'intérêt particulier de $T^{*2}(X)$ et $T^2(X)$ était de pouvoir considérer $\underline{X}$ elle-même comme définissant une telle application.

On peut introduire l'espace $\mathcal{L}(G_1, G_2)$, aussi fibré borélien de base V si G_1 et G_2 sont fibrés boréliens de base V. Soit alors $L \in \mathcal{L}(G_1,G_2)(X)$; L est un processus optionnel à valeurs dans $\mathcal{L}(G_1,G_2)$, $L(t,\omega) \in \mathcal{L}(G_1(V,X(t,\omega)); G_2(V,X(t,\omega)))$. Si alors u est une application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $G_1^*(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$, et si ${}^tL$ ou L^* est la transposée de L, processus optionnel à valeurs dans $\mathcal{L}(G_2^*, G_1^*)$, le composé uL^* (qu'on notera éventuellement $L(u)$ ou $L \cdot u$) est $\mathcal{O}$pt-linéaire de $G_2^*(X)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\,\mathcal{M}^c$; bien entendu u domine $L(u)$; si u admet la représentation tangentielle (3.17bis), $H_k \in G_1(X)$, $L(u) = uL^*$ aura la représentation tangentielle

$$\text{(3.17ter)} \qquad L(u) \sim \sum_{k=1}^{m} L(H_k) \cdot Z^k \quad ;$$

si u est tangente à τ suivant (3.10sexto), $L(u)$ est tangente à $L(\tau)$. L'image de L, c-à-d. $LG^1(X)$, est un $\mathcal{O}$pt-module libre (il est de type fini !), et engendre une famille optionnelle de sous-espaces vectoriels du fibré G_2, soit $\operatorname{Im} L$; par orthogonalité, son noyau est aussi un $\mathcal{O}$pt-module libre, et engendre une famille optionnelle de sous-espaces vectoriels du fibré G_1, notée Ker L. Pour que $L(u) = 0$, il faut et il suffit que, pour tout $J \in \mathcal{G}_2^*(X)$, $u(L^*J) = 0$, donc $L^*J \in \bar{\tau}^*$ $\bar{\nu}$-pp., $\bar{\tau}^*$ et $\bar{\nu}$ associés à u par (3.4) ; cela veut dire que Im $L^* \subset \bar{\tau}^*$ $\bar{\nu}$-pp., ou Ker $L \supset \bar{\tau}^{*+} = \bar{\tau}(u)$, $\bar{\nu}$-pp., ou que u soit tangente à Ker L. C'est évidemment vrai si les H_k sont dans Ker L, et (3.4) dit qu'inversement, si $L(u) = 0$, il existe des représentations tangentielles pour lesquelles les H_k sont partout dans Ker L.

Si en particulier $G_1 = T^2(V)$, on pourra appliquer ce qui précède à $u = d\underline{X}$. Alors L(u) s'écrira, si l'on veut, $L \bullet \underline{X}$, ou $L\, d\underline{X}$; ν-pp. est alors $d\underline{X}$-pp.

<u>(3.17quarto)</u> On peut encore généraliser. Soient V, W deux variétés, X une semi-martingale à valeurs dans V, Y une semi-martingale à valeurs dans W. Si $G_1(V)$, $G_2(W)$ sont des fibrés boréliens de bases V, W, $\mathcal{L}(G_1,G_2)$ est un fibré borélien de base $V \times W$. Soit alors L un processus optionnel à valeurs dans $\mathcal{L}(G_1,G_2)$, le long de (X,Y) : $L(t,\omega) \in \mathcal{L}(G_1(X(t,\omega))\ ;\ G_2(Y(t,\omega)))$. Si u est $\mathcal{O}$pt-linéaire de $G_1^*(X)$ dans $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, Lu sera $\mathcal{O}$pt-linéaire de $G_2^*(Y)$ dans $\mathcal{O}\mathrm{pt}\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, où $Lu(J) = u(L^*J)$, $J \in G_2^*(Y)$. Et on aura toutes les mêmes propriétés. Le cas de la proposition (3.15) correspond à $G_1 = T^2(V)$, $G_2 = T^2(W)$, $Y = \Phi(X)$, $u = d\underline{X}$, $L = \underline{\overset{2}{\Phi}}(X)$. Toutes les fois que $u = d\underline{X}$, on écrira facilement $L \bullet \underline{X}$ pour L(u) ou $L \bullet u$; nous avons d'ailleurs écrit à (3.15) : $\Phi(X) \sim \underline{\overset{2}{\Phi}}(X) \bullet \underline{X}$.

<u>(3.18)</u> <u>Localisation sur un ouvert</u> A <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Reprenons les conditions de (2.20). On dira que X admet la représentation tangentielle (3.11bis) sur A, $(Z^k)_{k=1,2,\ldots,m}$ étant un système de classes d'équivalence sur A de semi-martingales (continues) formelles sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $(H_k)_{k=1,2,\ldots,m}$ un système de vecteurs 2-tangents à V le long de X sur A, optionnels sur $\underline{A}$ (voir le début de (2.20) pour la relation entre les H_k et $\overline{X}$) si, pour tout J 2-cotangent optionnel le long de X sur A, on a $J \bullet \underline{X} \underset{A}{\sim} \sum_{k=1}^{m} (J|H_k)_{T^{*2},T^2} \bullet Z^k$. De telles représentations existent (si $(J^k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ est une $\mathcal{O}$pt-base de $T^{*2}(X)$ dans A, $(H_k)_{k=1,2,\ldots,N'}$ sera sa base duale comme à (3.2bis), et Z^k sera la classe de $J^k \bullet \underline{X}$). Et on aura tous les mêmes énoncés que sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

(3.19) Il importe de montrer que les notions introduites dans ce paragraphe avaient un caractère local. Soit A un ouvert, et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de réunion A. Soient $\overline{\tau}^*$ une famille optionnelle de sous-espaces vectoriels 2-cotangents le long de X sur A, $\overline{\nu}$ une mesure ≥ 0 sur A muni de sa tribu optionnelle (intersection avec A de la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts recouvrant A ; $\overline{\tau}^*$ définit évidemment une famille $\overline{\tau}^*_n$ sur A_n, et $\overline{\nu}$ une mesure induite $\overline{\nu}_n$ sur A_n (par $\overline{\nu}_n(B) = \overline{\nu}^*(B)$, mesure extérieure, pour B partie relativement optionnelle de A_n ; une partie de A_n est $\overline{\nu}_n$-négligeable ssi elle est $\overline{\nu}$-négligeable). Ensuite soit u $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*2}(X,A)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c(A)$ (espace des classes d'équivalence sur A de semi-martingales formelles sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$) ; pour tout n, elle définit u_n, $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*2}(X,A_n)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$. En effet, soit $J_n \in T^{*2}(X,A_n)$; il est restriction à A_n de $J \in T^{*2}(X,A)$; et la classe d'équivalence sur A_n de u(J) est indépendante du choix de J, donc définit $u(J_n)$; si en effet, par différence, $J \in T^{*2}(X,A)$ est nul sur A_n, $J = 1_{\{J\neq 0\}}J$, où $\{J \neq 0\}$ est une partie relativement optionnelle de A, donc $u(J) = 1_{\{J\neq 0\}} \cdot u(J) \underset{A_n}{\sim} 0$. [Nous venons en fait de montrer une équivalence indispensable à connaître : si A' est un sous-ouvert de A, et si $J \in T^{*2}(X,A)$ est nul sur A', $u(J) \underset{A'}{\sim} 0$.] Alors $\overline{\tau}^*$, $\overline{\nu}$ sont associés à u par (3.4), ssi, pour tout n, $\overline{\tau}^*_n$ et $\overline{\nu}_n$ le sont à u_n. Supposons en effet d'abord que $\overline{\tau}^*_n$, $\overline{\nu}_n$ soient associés à u_n pour tout n ; soit $J \in T^{*2}(X,A)$, qui définit $J_n \in T^{*2}(X,A_n)$; pour que $u(J) \underset{A}{\sim} 0$, il faut et il suffit que $u(J_n) \underset{A_n}{\sim} 0$ pour tout n, donc que $J_n \in \overline{\tau}^*_n$ $\overline{\nu}_n$-pp., c-à-d. $J \in \overline{\tau}^*$ $\overline{\nu}$-pp sur A_n pour tout n, donc $\overline{\nu}$-pp. sur A ; le passage du local au global est évident. C'est l'opposé qui est moins simple. Supposons $\overline{\tau}^*$, $\overline{\nu}$ associés à u sur A ; soit $J_n \in T^{*2}(X,A_n)$, donc restriction à A_n de $J \in T^{*2}(X,A)$; supposons $u(J_n)$ ou $u(J) \underset{A}{\sim} 0$; soit A'_n le plus grand ouvert d'équivalence à 0 de u(J), il est relativement optionnel dans A et contient A_n ; alors $1_{A'_n} \cdot u(J) = 0$ (S[1], proposition (3.7)), mais c'est $u(1_{A'_n} J)$, donc $1_{A'_n} J \in \overline{\tau}^*$ $\overline{\nu}$-pp., donc $J \in \overline{\tau}^*$ $\overline{\nu}$-pp. sur A'_n donc sur A_n, ou $J \in \overline{\tau}^*_n$ $\overline{\nu}$-pp. Inversement, supposons $J_n \in \overline{\tau}^*_n$ $\overline{\nu}$-pp., ou $J \in \overline{\tau}^*$ $\overline{\nu}$-pp. sur A_n ; alors

$\{J \in \overline{\tau}^*\}$ est optionnel dans A, et il contient A_n à un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable près ; comme on peut modifier J sur un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable sans modifier u(J), on peut supposer $J \in \overline{\tau}^*$ partout sur A_n ; alors

$u(J) = u(1_{J\in\overline{\tau}^*}J) + u(1_{J\notin\overline{\tau}^*}J) = u(1_{J\notin\overline{\tau}^*}J) = 1_{J\notin\overline{\tau}^*} \cdot u(J) \underset{A_n}{\sim} 0$, donc $u(J_n) \underset{A_n}{\sim} 0$.

[Nous venons en fait d'étendre l'équivalence indispensable signalée ci-dessus : si A' est un sous-ouvert de A, et si $J \in T^{*2}(X,A)$, $J \in \overline{\tau}^*$ $\overline{\nu}$-pp. sur A', alors $u(J) \underset{A'}{\sim} 0$.]

Nous ne jugerons pas utile de faire des raisonnements analogues pour toutes les autres propriétés. Si $\overline{\tau}(u)$ est le sous-espace tangent à u, associé à $\overline{\nu}$ par (3.4), c'est l'orthogonal de $\overline{\tau}^*$; donc, à u_n et $\overline{\nu}_n$, sera associé $\overline{\tau}_n(u)$, restriction de $\overline{\tau}(u)$ à A_n. Soient $(Z^k)_{k=1,2,\dots,m}$ un système de semi-martingales, $(H_k)_{k=1,2,\dots,m}$ un système de vecteurs 2-tangents à u le long de X sur A. Alors $\sum_{k=1}^{m} H_k \cdot Z^k$ sera une représentation tangentielle de u sur A ssi elle l'est, pour tout n, pour u_n sur A_n. Etc.

§ 4. LES PROCESSUS ET LES INTEGRALES DE STRATONOVITCH

Résumé du § 4. C'est le point de vue de Stratonovitch. Il devient de plus en plus utilisé, car il évite justement le calcul différentiel d'ordre 2. (4.0) définit les processus de Stratonovitch (continus), et leurs principales propriétés. Pour f de Stratonovitch, on peut définir f^c, sa composante martingale locale continue. (4.1bis) étend alors le § 6 de S[1] aux variétés seulement C^1. (4.1ter) définit et étudie les principales propriétés de l'intégrale de Stratonovitch. On aura alors, si V est une variété C^2, une intégrale de Stratonovitch $J \underset{(S)}{\cdot} X$, si J est Stratonovitch 1-contangent à V le long de la semi-martingale X : c'est (4.6), et les propositions suivantes ; (4.12) donne l'image par une application C^2, (4.15), le cas d'une sous-variété. Puis (4.18) donne les représentations tangentielles au sens de Stratonovitch. (4.21) localise à un ouvert A

de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. (4.22) étudie les applications u, au sens de Stratonovitch, analogues à celles de (3.0). Ici encore, on a des développements assez longs, et ennuyeux. (4.24) est le point de vue de P.A. Meyer sur les intégrales de Stratonovitch, avec la différentielle $D\varpi$ d'une forme différentielle ϖ ; (4.31) est l'image par une application C^2, et (4.32) la définition de Meyer de l'intégrale de Stratonovitch de ϖ à partir de $D\varpi$.

(4.0) Processus de Stratonovitch.

Nous devons modifier sensiblement la définition habituelle des proeessus de Stratonovitch ; d'abord celle-ci n'est pas suffisamment localisable, ensuite nous ne voulons ici que des processus continus, il faudra donc d'un côté généraliser, de l'autre côté restreindre la définition habituelle. Nous l'avons déjà partiellement fait dans S[1] (aux pages 72, 73, 74, 92, 93) ; mais sans désir d'une utilisation systématique, donc trop rapidement et avec mauvaise conscience, ce qui a fait que l'énoncé de la remarque page 92 est faux (voir ici même un erratum en fin de l'article). Nous donnerons ici au contraire des définitions et propriétés très précises.

Un processus X réel sur A, ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, est dit globalement de Stratonovitch s'il existe des semi-martingales réelles $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, continues dans A (mais non nécessairement dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, voir note (3)), et une fonction f réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\ell$, telles que $X = f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell)$ sur A ; X est alors optionnel continu. Et alors X sera dit de Stratonovitch sur A (sous-entendu localement),s'il est optionnel et s'il existe une suite d'ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant A, tels que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit globalement de Stratonovitch ; X est alors continu (et on peut supposer les A_n optionnels, en remplaçant chaque A_n par le plus grand ouvert où $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,\ell_n}$ sont continues, et où $f_n(Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,\ell_n})$ est égal à un prolongement optionnel de X à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$). Une semi-martingale réelle continue dans A (S[2], définition (6.5)) est de Stratonovitch ; une fonction C^1 réelle d'un nombre fini de processus réels de Stratonovitch est de Stratonovitch ; si A est réunion d'une suite d'ouverts A_n, si X est optionnel sur A et Stratonovitch sur chaque A_n, il l'est aussi sur A. Nous avons donc bien ici des processus continus, et leur caractère est local. Enfin, si X est un processus sur A à valeurs dans une variété de classe C^1, il est dit de Stratonovitch si, pour toute fonction φ réelle C^1 sur V, $\varphi(X)$ est réel de Stratonovitch ; il est alors optionnel continu, et la définition est de caractère local ; si $V=\mathbb{R}^N$, X est Stratonovitch ssi ses coordonnées le sont.

Si X est Stratonovitch à valeurs dans V, si $\Phi : V \to W$ est de classe C^1, $\Phi(X)$ est Stratonovitch à valeurs dans W. Si V' est une sous-variété C^1 (non nécessairement fermée) de V, si X est un processus sur A à valeurs dans V', qui est Stratonovitch à valeurs dans V, il l'est aussi à valeurs dans V' ; en effet X est optionnel à valeurs dans V', et V' est réunion d'ouverts $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, si φ est réelle C^1 sur Y', sa restriction à V'_n est restriction d'une fonction $\overline{\varphi}_n$ réelle C^1 sur V, de sorte que $\varphi(X)=\overline{\varphi}_n(X)$ sur $X^{-1}(V'_n)$ est Stratonovitch sur $X^{-1}(V'_n)$, donc sur A. Si X est Stratonovitch sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans V, si $\widetilde{V}$ est un revêtement de V, si $\widetilde{X}$ est une relèvement continu de X dans $\widetilde{V}$ tel que $\widetilde{X}_o$ soit $\mathcal{T}_o$-mesurable, $\widetilde{X}$ est Stratonovitch à valeurs dans $\widetilde{V}$; en effet (par proposition (2.6) de S[1]) il est d'abord continu adapté donc optionnel ; ensuite il existe une suite d'ouverts $(\widetilde{V}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant $\widetilde{V}$, tels que, sur chaque V'_n, la projection π_n de $\widetilde{V}'_n$ sur son image V'_n dans V soit un C^1-difféomorphisme ; la projection $X=\pi(\widetilde{X})$ est Stratonovitch à valeurs dans V, donc à valeurs dans V'_n sur $\widetilde{X}^{-1}(\widetilde{V}'_n)$, et alors $\widetilde{X}=\pi_n^{-1}(X)$ l'est à valeurs dans $\widetilde{V}$ sur $\widetilde{X}^{-1}(\widetilde{V}'_n)$, donc partout.

<u>(4.0bis)</u> Soit X Stratonovitch sur A ouvert, à valeurs dans V. Alors il existe une suite d'ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant A tels que, pour chaque n, il existe des semi-martingales $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,\ell_n}$ réelles, continues sur A_n, ou plus simplement une semi-martingale Y_n à valeurs dans $\mathbb{R}^{\ell_n}$, continue sur A_n, et une fonction f_n sur $\mathbb{R}^{\ell_n}$ <u>à valeurs dans</u> V, telles que $X=f_n(Y_{n,1},Y_{n,2},\ldots,Y_{n,\ell_n})=f_n(Y_n)$ sur $A\cap A_n$. Soit en effet $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de V, $\overline{V}'_n$ compact, Φ_n un C^1-difféomorphisme d'une boule ouverte U'_n de $\mathbb{R}^N$ sur V'_n, de centre origine ; soit $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert subordonné, $\overline{V}''_n$ compact $\subset V'_n$, $U''_n=\Phi_n^{-1}(V''_n)$, $\overline{U}''_n$ compact $\subset U'_n$. Il existe $\overline{\Phi_n^{-1}}$,

application C^1 de V dans $\mathbb{R}^N$, égale à Φ_n^{-1} sur V_n''. Il existe aussi $\overline{\Phi}_n$, application C^1 de $\mathbb{R}^N$ dans V_n', égale à Φ_n sur U_n''. [Soit en effet α_n réelle C^1 sur $\mathbb{R}^N$, $0 \leq \alpha_n \leq 1$, égale à 1 sur $\overline{U_n''}$, à support dans U_n' ; on prend $\overline{\Phi}_n(x) = \Phi_n(x\, \alpha_n(x))$; $x\, \alpha_n(x)$ est dans U_n' pour tout x de $\mathbb{R}^N$, et vaut x pour $x \in U_n''$] ; alors $\overline{\Phi}_n\ \overline{\Phi_n^{-1}}$ est l'identité sur V_n''. Par hypothèse, $Y_n = \overline{\Phi_n^{-1}}(X)$ est Stratonovitch sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; en raisonnant alors sur chacune de ses coordonnées, on voit qu'il existe une suite $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, de réunion A, telle que, dans chaque $A_{n,m}$, $Y_n = f_{n,m}(Z_{n,m})$, où $Z_{n,m}$ est une semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, continue sur $A_{n,m}$, à valeurs dans un $\mathbb{R}^{\ell_{n,m}}$, et où $f_{n,m}$ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^{\ell_{n,m}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Donc, sur $X^{-1}(V_n'') \cap A_{n,m}$, $X = \overline{\Phi}_n\ \overline{\Phi_n^{-1}}(X) = \overline{\Phi}_n(Y_n) = (\overline{\Phi}_n \circ f_{n,m})(Z_{n,m})$, ce qui est le résultat cherché (avec deux indices n, m, au lieu d'un).

<u>Remarque</u> : Le type de démonstration de (4.0bis) est plus court que celui de (6.5quinto) de S[2], et peut le remplacer si X est continu sur A, mais pas dans le cas général (nous voulons que $X^{-1}(V_n'')$ soit ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, cela nécessite X continue !).

<u>(4.1)</u> Si X est une fonction vectorielle C^1 d'un nombre fini de semi-martingales réelles sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, il est classique qu'on peut définir X^c comme une martingale (cf. M[1], pages 354 et suivantes). Si alors X est Stratonovitch sur A à valeurs vectorielles, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts optionnels recouvrant A, et si, sur chaque $A \cap A_n$, $X = X_n$, fonction C^1 d'un nombre fini de semi-martingales, on peut définir $X_n^c \in \mathcal{M}^c$; $X_m^c \sim X_m^c$ sur $A \cap A_m \cap A_n$; alors (6.3ter) de S[2] dit qu'il existe une semi-martingale (continue !) formelle Y, $\sim X_n^c$ sur chaque $A \cap A_n$. Alors Y est équivalente sur A à une martingale formelle, par (3.4) de S[1] ; on l'appellera X^c, composante martingale de X ; elle est une classe d'équivalence sur A de martingales formelles. Si $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, il résulte de (6.4) de S[2], que X^c est même une vraie martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, si on la prend nulle au temps 0.

Ceci permet d'abord d'étendre le calcul des $J \cdot X^c$, du § 6 de S[1], ou de

(2.11), au cas où X est seulement de Stratonovitch.

Proposition (4.1bis) : *Soient* V *une variété de classe* C^1, *et* $X : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to V$, *de Stratonovitch. Il existe une application* $\mathcal{O}pt$-*linéaire unique de* $T^{*1}(X)$ *dans* $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$ *notée* $J \mapsto J \cdot X^c$, *telle que, pour toute* $\varphi \in C^1(V;\mathbb{R})$:

$$(4.1\text{ter}) \qquad D\varphi(X) \cdot X^c = \varphi(X)^c .$$

Elle est séquentiellement continue pour la convergence simple sur $T^{*1}(X)$. *On dit que* J *est* dX-*intégrable si* $J \cdot X^c$ *est une vraie martingale. On dit que* A *optionnel* $\subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ *est* dX^c-*négligeable, si, pour tout* $J \in T^{*1}(X)$ *porté par* A, $J \cdot X^c = 0$. *L'ensemble* $T^{*1}(X) \cdot X^c$ *des* $J \cdot X^c$, $J \in T^{*1}(X)$, *est l'*$\mathcal{O}pt$-*module engendré par les* $(\varphi(X))^c, \varphi \in C^1(V;\mathbb{R})$; *si* X *est plongé dans* $\mathbb{R}^d$, *il est engendré par les* $X^{c,k}$, *où les* X^k *sont les coordonnées de* X.

Démonstration : C'est la même que pour (2.7) ou (2.11).

(4.1ter) Si alors f est une fonction réelle de Stratonovitch, X une semi-martingale réelle, on définit l'intégrale de Stratonovitch $f \underset{(S)}{\cdot} X$ par

$$(4.2) \qquad f \underset{(S)}{\cdot} X = f \cdot S + \frac{1}{2}[f,X] \quad (\text{où } [f,X] = [f^c,X^c]) .$$

Bien sûr, on peut prendre pour X une semi-martingale formelle, alors $f \underset{(S)}{\cdot} X$ l'est aussi. On a toujours, pour f et g de Stratonovitch, $f \underset{(S)}{\cdot} (g \underset{(S)}{\cdot} X) = fg \underset{(S)}{\cdot} X$. Mais, si X est une martingale, $f \underset{(S)}{\cdot} X$ *n'est pas en général une martingale* ; et, si X et Y sont des semi-martingales, f et g des fonctions de Stratonovitch,

$$(4.3) \qquad (f \underset{(S)}{\cdot} X)^c = f \cdot X^c \quad ; \quad [f \underset{(S)}{\cdot} X, g \underset{(S)}{\cdot} Y] = fg \cdot [X,Y] .$$

La formule de changement de variables d'Itô est remplacée par la formule usuelle : si Φ est une fonction C^2, donc $\Phi'(X)$ une fonction de Stratonovitch,

$$\Phi(X) - \Phi(X_o) = \Phi'(X) \underset{(S)}{\bullet} X \quad . \tag{4.4}$$

Comparons cette formule à (2.5). Nous dirons donc, comme à (2.6) :

(4.5) Principe fondamental.

Soit X une semi-martingale à valeurs vectorielles. Au sens de Stratonovitch, dX_t se comporte, pour les applications C^2, comme un vecteur 1-tangent au point X_t.

(4.5) Intégrales de Stratonovitch sur une variété C^2.

Soit X une semi-martingale à valeurs dans V (de nouveau de classe C^2). Soit $\mathcal{S}tr$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions réelles de Stratonovitch ; soit $T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$ le $\mathcal{S}tr$-module des processus de Stratonovitch 1-cotangents à V le long de X : $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$ est une fonction de Stratonovitch à valeurs dans $T^{*1}(V)$, et $J(t,\omega) \in T^{*1}(V,X(t,\omega))$. Alors ce qui est énoncé dans S[1], page 73, s'énonce mieux comme suit, et nous allons le démontrer :

Proposition (4.6) : Il existe une application $\mathcal{S}tr$-linéaire et une seule de $T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$ dans $\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X)$ (•), notée $J \mapsto J \underset{(S)}{\bullet} X$, telle que, pour tout $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$:

$$D\varphi(X) \underset{(S)}{\bullet} X = \varphi(X) - \varphi(X_o) \quad . \tag{4.7}$$

Nous démontrerons d'abord un lemme :

Lemme (4.8) : Supposons V plongée dans $\mathbb{R}^d$, et soient $(x^k)_{k=1,2,\dots,d}$ les fonctions coordonnées, $\overline{x}^k$ leurs restrictions à V, $(e_k)_{k=1,2,\dots,d}$ la base de $\mathbb{R}^d$. Soit $\eta_k(v)$ la projection orthogonale de e_k sur $T(V,v)$ (pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$). On a, pour un vecteur 1-cotangent $J_v \in T^{*1}(V,v)$ et un vecteur tangent $\xi_v \in T^1(V,v)$, les formules :

(•) On obtient toujours une vraie semi-martingale, parce que J est localement bornée.

$$(4.9) \qquad J_v = \sum_{k=1}^{d} (J_v | \eta_k(v))_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} \, \overline{Dx}^k(v) \quad ,$$

$$(4.10) \qquad \xi_v = \sum_{k=1}^{d} (\overline{Dx}^k(v) | \xi_v)_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} \, \eta_k(v) \quad .$$

Démonstration du lemme : Chaque $\xi_v \in T^1(V,v)$ peut s'écrire, comme tout vecteur de E :

$$\xi_v = \sum_{k=1}^{d} (Dx^k(v) | \xi)_{E^*,E} \, e_k \quad ,$$

donc

$$= \sum_{k=1}^{d} (\overline{Dx}^k(v) | \xi_v)_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} \, e_k \quad ;$$

mais $\xi \in T^1(V,v)$ coïncide avec sa projection orthogonale sur $T^1(V,v)$, d'où (4.10) en projetant les deux membres Alors, si $J_v \in T^{*1}(V,v)$, (4.10) donne :

$$(J_v | \xi_v)_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} =$$

$$\sum_{k=1}^{d} (\overline{Dx}^k(v) | \xi_v)_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} (J_v | \eta_k(v))_{T^{*1}(V,v),T^1(V,v)} \quad ;$$

compte-tenu de ce que c'est vrai pour tout $\xi_v \in T^1(V,v)$, cela donne (4.9).

Remarque : Ce lemme exprime que les applications identiques de $T^1(V,v)$ et et $T^{*1}(V,v)$, transposées l'une de l'autre, s'expriment comme $\sum_{k=1}^{d} \overline{Dx}^k(v) \otimes \eta_k(v)$.

Démonstration de la proposition (4.6) : Nous allons copier la démonstration de (2.7), compte-tenu des remarques 1 et 2 qui la suivent.

1) Unicité. Il suffit de montrer que $T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$ est $\mathcal{S}tr$-engendré par les $D\varphi(X) \in C^2$. Or c'est ce que montre la formule (4.9) du lemme : si $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$, les $(J|\eta_k(X))_{T^{*1},T^1}$ sont des fonctions de Stratonovitch [(4)], et on a bien $J = \sum_{k=d}^{d} (J|\eta_k(X))\overline{Dx}^k(X)$.

2) Existence Supposons qu'on ait une relation $\sum_{\ell} \alpha_\ell\, D\varphi_\ell(X) = 0$, $\alpha_\ell \in \mathcal{S}tr$, $\varphi_\ell \in C^2$. En gardant les notations de la démonstration de (2.7), pour l'existence, $\sum_{\ell} \alpha_\ell\, D\overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) = 0$ sur $X^{-1}(V''_n)$, puis, par (4.7),
$\sum_{\ell} \alpha_\ell \underset{(S)}{\bullet} \varphi_\ell(X) \sim \sum_{\ell} \alpha_\ell \underset{(S)}{\bullet} \overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \sim \sum_{\ell} \alpha_\ell \underset{(S)}{\bullet} (D\overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \underset{(S)}{\bullet} \overline{Y}_n) = \sum_{\ell} \alpha_\ell\, D\overline{\psi}_{\ell,n}(\overline{Y}_n) \underset{(S)}{\bullet} \overline{Y}_n \sim 0$
sur $X^{-1}(V''_n)$; donc $\sum_{\ell} \alpha_\ell \underset{(S)}{\bullet} \varphi_\ell(X)$ est équivalente à 0 sur chaque $X^{-1}(V''_n)$, donc partout, donc $= 0$. (On peut éviter les prolongements $\overline{Y}_n$, $\overline{\psi}_{\ell,n}$, par les remarques de (2.20)).

Proposition (4.11) : Si $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$,

$$(J \underset{(S)}{\bullet} X)^c = J \bullet X^c \quad .$$

Démonstration : C'est vrai pour $J = D\varphi(X)$, donc toujours par $\mathcal{S}tr$-linéarité.

Proposition (4.12) : Soit Φ une application C^2 de V dans une autre variété W, X semi-martingale à valeurs dans V, $\Phi(X)$ son image dans W. Pour $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(\Phi(X))$, soit $\Phi^* J$ son image réciproque

$$(4.13) \qquad \Phi^* J(t,\omega) = \overset{1}{\Phi^*}(X(t,\omega))\, J(t,\omega) \quad , \quad \Phi^* J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X) \quad .$$

On a :

$$(4.14) \qquad \Phi^* J \underset{(S)}{\bullet} X = J \underset{(S)}{\bullet} \Phi(X) \quad .$$

Démonstration : Par $\mathcal{S}tr$-linéarité, on se ramène à $J = D\varphi(\Phi(X))$, les deux membres valent alors $\varphi(\Phi(X)) - \varphi(\Phi(X_0))$.

Conséquence (4.14bis) : Un résultat de Marc Yor.

Soit ϖ une forme différentielle fermée de degré 1, de classe C^1, sur V. On peut classiquement calculer son intégrale sur une trajectoire continue $x : [0,+\infty[\to V$, $\int_{]0,t]} \varpi(x_s)\, dx_s$, bien que x ne soit pas différentiable. On peut la définir comme suit. Soit $\widetilde{V}$ un revêtement universel de V, $\widetilde{\varpi}$ le relèvement de ϖ, $\tilde{x}$ un relèvement continu de x, arbitraire (il est unique dès qu'on s'est fixé $\tilde{x}_o$). Sur $\tilde{V}$, $\tilde{\varpi} = D\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ fonction de classe C^1. Soit π la projection de $\tilde{V}$ sur V ; $x = \pi \circ \tilde{x}$. Si x est de classe C^1,

$$\int_{]0,t]} \varpi(x_s)\, dx_s = (\varpi(x) \cdot x)_t = (\varpi(x) \cdot \pi\tilde{x})_t = ((\pi^*\varpi)(\tilde{x}) \cdot \tilde{x})_t$$

$$= (\tilde{\varpi}(\tilde{x}) \cdot \tilde{x})_t = (D\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \cdot \tilde{x})_t = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) - \tilde{\varphi}(\tilde{x}_o) \quad ,$$

et on prend le dernier membre comme définition du premier si x est seulement continue ; le résultat est indépendant du choix du revêtement $\tilde{V}$, et de $\tilde{x}_o$, $\tilde{\varphi}$. (Ceci serait même valable pour ϖ seulement continue et non C^1, fermée au sens des distributions, mais ce ne serait pas comparable à l'intégrale de Stratonovitch, comme nous le ferons plus loin.)

Soit maintenant X une semi-martingale à valeurs dans V, $\tilde{X}$ un relèvement semi-martingale à valeurs dans $\tilde{V}$, unique après choix de $\tilde{X}_o$ $\mathcal{C}_o$-mesurable (S[1], proposition (2.6), page 11). Il existe alors deux calculs possibles de $\int_{]0,t]} \varpi(X_s)\, dX_s$; l'un, c'est le précédent, le long de chaque trajectoire (continue !) $X(\omega)$; l'autre, c'est l'intégrale de Stratonovitch, $(\varpi(X) \underset{(S)}{\cdot} X)_t$ (ϖ étant C^1, $\varpi(X)$ est Stratonovitch). Le théorème de Yor dit qu'elles coïncident. C'est une conséquence immédiate de ce qui précède :

$$(\varpi(X) \underset{(S)}{\cdot} X)_t = (\varpi(X) \underset{(S)}{\cdot} \pi\tilde{X})_t = (\text{par } (4.14))\ ((\pi^*\varpi(\tilde{X}) \underset{(S)}{\cdot} \tilde{X})_t = (\tilde{\varpi}(\tilde{X}) \underset{(S)}{\cdot} \tilde{X})_t$$

$$= (\text{par définition de } \tilde{\varphi})\ (D\tilde{\varphi}(\tilde{X}) \underset{(S)}{\cdot} \tilde{X})_t = (\text{par } (4.7)\ \tilde{\varphi}(\tilde{X}_t) - \tilde{\varphi}(\tilde{X}_o) \quad .$$

<u>Corollaire (4.15)</u> : <u>Soit</u> V <u>une variété</u>, V' <u>une sous-variété</u> (<u>non nécessairement fermée</u>), X <u>une semi-martingale à valeurs dans</u> V'. <u>Soit</u> J <u>un processus de Stratonovitch</u> 1-<u>cotangent à</u> V <u>le long de</u> X, J' <u>son image dans le quotient</u> $T^{*1}(V')$. <u>On a</u> :

(4.16.) $$J \underset{(S)}{\cdot} X = J' \underset{S}{\cdot} X \quad .$$

<u>En particulier</u> $J \underset{S}{\cdot} X$ <u>ne dépend que de l'image</u> J' .

Remarque (4.17) : On a aussi une proposition analogue à (2.19), que je n'énoncerai pas. D'autre part, l'ensemble des $J \underset{(S)}{\bullet} X$, pour $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$, est exactement le sous-$\mathcal{S}tr$-module de $\mathcal{S}\mathcal{M}^c(X)$ engendré par les $\varphi(X)-\varphi(X_o)$, $\varphi \in C^2$.

Enfin il existe des représentation tangentielles :

Proposition (4.18) : Il existe des représentations tangentielles

(4.18bis)
$$X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k \underset{(S)}{\bullet} Z^k ,$$

où les H_k sont des processus de Stratonovitch 1-tangents à V le long de X, $H_k \in T^1\mathcal{S}tr(X)$, les Z^k des semi-martingales. Cela veut dire que, pour tout $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$:

(4.19)
$$J \underset{(S)}{\bullet} X = \sum_{k=1}^{m} (J|H_k) \underset{(S)}{\bullet} Z^k .$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour un (et c'est alors vrai pour tout) plongement de V dans un espace vectoriel, on ait (4.18bis) au sens usuel. En particulier, si V est plongée dans $\mathbb{R}^d$, de fonctions coordonnées $(x^k)_{k=1,2,...,d}$, de base $(e_k)_{k=1,2,...,d}$, et si $\eta_k(v)$ est la projection orthogonale de e_k sur $T^1(V,v)$ (voir lemme (4.8)), on a la représentation tangentielle

(4.20)
$$X \sim \sum_{k=1}^{d} \eta_k(X) \underset{(S)}{\bullet} Z^k , \quad \text{où } Z^k = X^k = x^k(X) .$$

Démonstration : Pour tout $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$, on a (4.9), d'où

$$\begin{aligned} J \underset{(S)}{\bullet} X &= \sum_{k=1}^{d} (J|\eta_k(X))\, D\overline{x}^k(X) \underset{(S)}{\bullet} X \\ &= \sum_{k=1}^{d} (J|\eta_k(X)) \underset{(S)}{\bullet} (D\overline{x}^k(X) \underset{(S)}{\bullet} X) \\ &= \sum_{k=1}^{d} (J|\eta_k(X)) \underset{(S)}{\bullet} X^k \end{aligned}$$

. (Voir note (4).)

Remarque : La formule (4.10) montre que tout $H \in T^{1}\mathcal{S}tr(X)$ est une combinaison $\mathcal{S}tr$-linéaire des $\eta_k(X)$, donc toute représentation tangentielle se ramène à une représentation avec les $\eta_k(X)$; mais celles-ci sont très nombreuses, k varie de 1 à $d \leq 2N$ et non de 1 à N !

(4.21) Localisation des formules de Stratonovitch.

Les fonctions de Stratonovitch, sur A ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, forment une algèbre sur $\mathcal{S}tr(A)$. Si alors f est un processus vectoriel de Stratonovitch sur A, on peut définir f^c comme une classe d'équivalence sur A de martingales formelles. Si donc f est une fonction réelle de Stratonovitch sur A, X une classe d'équivalence sur A de semi-martingales,formelles, on définit $f \underset{(S)}{\bullet} X$ par $f \underset{(S)}{\bullet} X = f \bullet X + \frac{1}{2}\langle f^c, X^c\rangle$ comme classe d'équivalence sur A de semi-martingales formelles, et on a les mêmes formules que ci-dessus. Si V est une variété C^2, X une semi-martingale sur A à valeurs dans V, $T^{*1}\mathcal{S}tr(X,A)$ se définit aussitôt comme à (2.20) : $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X,A)$ est un processus défini sur A, de Stratonovitch à valeurs dans $T^{*1}(V)$, tangent à V le long de X sur A. [Il existera bien une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, sur chaque $A \cap A_n$, X soit restriction d'une semi-martingale $\overline{X}_n$ à valeurs dans V, et $\mathcal{S}$ restriction à A_n d'un processus $\overline{J}_n$ de Stratonovitch 2-cotangent à la variété, défini partout, mais pas partout cotangent le long de $\overline{X}_n$. Mais c'est sans importance et on n'utilise rien de tel.] On refera la démonstration d'existence et d'unicité (4.16) sur A, en utilisant (4.9), et on trouvera $J \underset{(S)}{\bullet} X \in \mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c(A)$, classe d'équivalence sur A de semi-martingales réelles formelles, avec, pour φ réelle C^2 sur V, $D\varphi(X) \underset{(S)}{\bullet} X =$ classe de $\varphi(X)$. Alors tout le reste se généralise aisément.

(4.22) On peut alors appliquer une petite partie de qui a été dit au début du § 3,et à (2.8) de S[2], au cas de Stratonovitch, et considérer les applications u $\mathcal{S}tr$-linéaires de $T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$ dans $\mathcal{O}pt\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, c-à-d. telles que, pour $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$, et α réelle $\in \mathcal{S}tr$, $u(\alpha J) = \alpha \underset{(S)}{\bullet} u(J)$. On pourra noter u(J) par $J \underset{(S)}{\bullet} u$. Et la semi-martingale X elle-même définit une telle application. Il existe des représentations tangentielles $u = \sum_{k=1}^{m} H_k \underset{(S)}{\bullet} Z^k$, Z^k semi-martingales,

$H_k \in T^1 \mathcal{S}tr(X)$, avec la même démonstration que (4.18) : les H_k seront les même $\eta_k(X)$, les Z^k seront les $\overline{Dx}^k(X) \underset{(S)}{\bullet} u$. Mais c'est à peu près tout ce qu'on peut faire ici ; rien d'analogue au $\tau(u)$, ou $\tau(\underline{X})$.

Voici cependant des choses importantes qu'on pourra faire. On ne peut pas parler de $\tau(u)$ au sens de Stratonovitch, mais, si τ est un processus de Stratonovitch à valeurs dans la grassmannienne du fibré $T^{*1}(V)$, c-à-d. $\tau(t,\omega)$ sous-espace vectoriel de $T^1(V,X(t,\omega))$ <u>de dimension constante</u> d, on peut dire que u est tangent à τ au sens de Stratonovitch, si, pour tout $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr(X)$, orthogonal à τ, $J \underset{(S)}{\bullet} u = 0$; l'orthogonal τ^+ de τ est aussi Stratonovitch à valeurs dans la grassmannienne de $T^{*1}(V)$, et cela voudra dire que $J \in \tau'$ entraîne $J \underset{(S)}{\bullet} X = 0$. On pourra plus généralement introduire $G_1\mathcal{S}tr(X)$, $G_2\mathcal{S}tr(Y)$, $G_1^*\mathcal{S}tr(X)$, $G_2^*\mathcal{S}tr(Y)$ ($G_1\mathcal{S}tr(X)$ est l'espace des processus de Stratonovitch à valeurs dans G(V) le long de X) comme à (3.15quinto), avec une application L à valeurs dans $\mathcal{L}_1(G_1;G_2)$ le long de X et Y, elle-même de Stratonovitch [$\mathcal{L}(G_1;G_2)$ est un fibré C^1 de base $V \times W$, la fibre au-dessus de $(v,w) \in V \times W$ est $\mathcal{L}(G_1(V;v);G_2(W,v))$; L est Stratonovitch à valeurs dans $\mathcal{L}(G_1;G_2)$, et $L(t,\omega) \in \mathcal{L}(G_1(V;X(t,\omega));G_2(W,Y(t,\omega)))$]. Mais, si E, F sont des espaces vectoriels et $\mathcal{L}_k(E;F)$ est l'espace des applications linéaires de rang k de E dans F, c'est une sous-variété algébrique sans singularité de $\mathcal{L}(E;F)$, donc C^∞ (c'est une orbite de $GL(E) \times GL(F)$, opérant sur $\mathcal{L}(E;F)$ par $(A,B,u) \mapsto AuB$, $GL(E) \times GL(F) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;F)$). On en déduit que $L \to L^*$, $L \mapsto \mathrm{Ker}\, L$, $L \mapsto \mathrm{Im}\, L$, sont des applications C^∞ de $\mathcal{L}_k(E;F)$ dans $\mathcal{L}_k(F^*;E^*)$, la grassmannienne Gr(E) et la grassmannienne Gr(F) respectivement. Munissons E et F de structures euclidiennes. Alors, si on désigne par $(\ )_+$ l'orthogonal de ( ) pour cette structure, $\tau \to \tau_+$ est C^∞ de Gr(E) dans elle-même, et la projection de E dans E, de noyau τ et d'image τ_+ dépend C^∞ de τ (à valeurs dans $\mathcal{L}(E;E)$). Il existe un nombre fini d'ouverts recouvrant Gr(E), tels que, dans chacun d'eux, $\tau \in Gr(E)$ ait une base dépendant C^∞ de τ ; et le sous-espace engendré par un nombre fini constant de vecteurs de E, <u>indépendants</u>, est fonction C^∞ de ces vecteurs, à valeurs dans Gr E.

Soit $u \in \mathcal{L}_k(E;F)$; c'est une bijection u_o de $(\mathrm{Ker}\ u)_+$ sur Im u ; si u_{-1}

est l'opérateur égal à u_0^{-1} : $\mathrm{Im}\, u \to (\mathrm{Ker}\, u)_+$ sur $\mathrm{Im}\, u$, à 0 sur $(\mathrm{Im}\, u)_+$, $u_{-1} \in \mathcal{L}_k(F;E)$, et $u \mapsto u_{-1}$ est C^∞ de $\mathcal{L}_k(E;F)$ sur $\mathcal{L}_k(F;E)$. Tout ce que nous venons de voir sur E,F, fixes, subsiste pour deux fibrés vectoriels C^1, $G_1(V)$, $G_2(W)$, de bases V, W, avec leurs fibrés en grassmanniennes et le fibré $\mathcal{L}(G_1;G_2)$ sur $V \times W$ (la fibre au-dessus de $(v,w) \in (V,W)$ est $\mathcal{L}(G_1(V,v);Gr(W,v))$, car on peut munir les fibres de structures euclidiennes C^1, et les applications précédentes deviennent C^1, par démonstrations locales.

Proposition (4.23) : *Soit A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, X une semi-martingale dans A à valeurs dans V. Soit G(V) un fibré vectoriel C^1 sur V. Soit τ un processus sur A, à valeurs dans Gr G(V) le long de X : $\tau(t,\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $G(V,X(t,\omega))$, de dimension constante d. S'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, recouvrant A, et pour chacun d'eux un système fini de sections $(e_{k,n})_{k=1,2,\ldots,m}$ de τ, de Stratonovitch sur A_n, engendrant τ en tout point de A_n , et si τ est optionnel, il est Stratonovitch. Inversement, soit τ Stratonovitch. Il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, et pour chacun d'eux un système $(e_{k,n})_{k=1,2,\ldots,g}$, $g = \dim G(V)$, $e_{k,n}$ restriction à A_n d'une fonction de Stratonovitch sur A à valeurs dans G(V) le long de X (i.e. $e_{k,n}(t,\omega) \in G(V,X(t,\omega))$), tels que les $e_{k,n}$, $k = 1,2,\ldots,g$, forment une base de G(V) sur A_n , et que les $e_{k,n}$, $k \le d$, soient partout sur A à valeurs dans τ et forment une base de τ sur A_n ; et un système $(\varepsilon_n^k)_{k=1,2,\ldots,g}$, ε_n^k restriction à A_n d'une fonction de Stratonovitch sur A à valeurs dans G(V) le long de X, tel que les ε_n^k, $k = 1,2,\ldots,g$, forment la base duale de $G^*(V)$ sur A_n , et que les ε_n^k, $k \ge d+1$, soient partout dans τ^+ et forment une base de τ^+ sur A_n . Si $\mathfrak{N}$ est le sous-$\mathcal{S}$tr-module des sections Stratonovitch de τ, une section e Stratonovitch de G(V) le long de X sur A est dans $\mathfrak{N}$ si et seulement si, sur chaque A_n , $e = \sum_{k=1}^{d} \alpha^{k,n} e_{k,n}$, $\alpha_{k,n}$ réelles Stratonovitch sur A_n ; on peut choisir les $\alpha^{k,n}$ restrictions à A_n de fonctions Stratonovitch sur A. [Mais évidemment e n'est égale à $\sum_{k=1}^{d} \alpha^{k,n} e_{k,n}$ que sur A_n .] Si τ_1, τ_2 sont des processus de Stratonovitch à valeurs dans Gr G(V) le long de X, leurs orthogonaux (à valeurs* dans Gr $G^*(V)$) aussi ; et si τ_1, τ_2, $\tau_1+\tau_2$, $\tau_1\cap\tau_2$ sont de dimension constante, $\tau_1+\tau_2$ et $\tau_1\cap\tau_2$ sont de Stratonovitch.

Démonstration : L'application qui, à un système de vecteurs indépendants, fait correspondre l'espace qu'ils engendrent, est fonction C^1 de ces vecteurs ; donc, si τ a une base $(e_k)_{k=1,2,\dots,d}$ sur A_n, où les e_k sont des sections Stratonovitch de τ sur A_n, τ est Stratonovitch sur A_n, donc, étant optionnel sur A, Stratonovitch sur A. Si l'on suppose, non une base Stratonovitch de τ sur A_n, mais un système fini de générateurs, on partagera chaque A_n en un nombre fini de sous-ouverts dans chacun desquels un sous-système déterminé de ces vecteurs est une base (c'est là qu'intervient fondamentalement le fait que dim τ est constante), et on est ramené au cas d'une base. Inversement, soit τ une section Stratonovitch de la grassmannienne Gr G(V), de dimension constante d. Soit $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas C^1 de V trivialisant le fibré G(V) ; au-dessus de V'_n, on pourra supposer que V' est un ouvert d'un espace vectoriel E et que $G(V) = V'_n\times G$, G de dimension g, Gr $G(V) = V'_n \times$ Gr G. Il existe un nombre fini d'ouverts $(\mathcal{O}_{n,m})_{m=1,2,\dots,L}$ de Gr G tel que, pour $\theta\in\mathcal{O}_{n,m}$, de dimension d, on ait une base $(e'_{k,n,m}(\theta))_{k=1,2,\dots,g}$ de G, fonction C^1 de θ, dont les d premiers vecteurs forment une base de θ. Soit $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas subordonné. Soit α_n une fonction réelle C^1 sur V, à support dans V'_n, égale à 1 sur V''_n. Nous prendrons $A_{n,m} = X^{-1}(V''_n\times\mathcal{O}_{n,m})$; ce sont des ouverts de A, et $\bigcup_{n,m} A_{n,m} = A$; alors $e'_{k,n,m}$ est Stratonovitch sur $X^{-1}(V'_n\times\mathcal{O}_{n,m})$, et, si on prend $e'_{k,n,m}\,\alpha_n$ nulle sur $\complement$ supp α_n, elle est une section de G(V) définie partout sur V, égale à $e'_{k,n,m}$ sur $V''_n\times\mathcal{O}_{n,m}$, et $e_{k,n,m} = e'_{k,n,m}(\tau)\,\alpha_n(X)$ est Stratonovitch sur A, section de G(V) le long de X ; les $e_{k,n,m}$ satisfont à toutes les conditions requises. Soit $(\varepsilon'^k_{n,m})$ la base duale de $(e'_{k,n,m})$; posons $\varepsilon^k_{n,m} = \varepsilon'^k_{n,m}(\tau)\,\alpha_n(X)$, il est de Stratonovitch sur A. Posons $\alpha^k_{n,m} = (e|\varepsilon^k_{n,m})$ pour $e\in \mathcal{G}\mathcal{S}tr(X)$; c'est une fonction réelle de Stratonovitch sur A ; et $e\in\tau$ sur A ssi, sur chaque $A_{n,m}$, $e = \sum_{k=1}^{d} \alpha^k_{n,m}\,e_{k,n,m}$. La conclusion relative à $\tau_1+\tau_2$ est évidente, puisqu'il a sur chaque $A_{n,m}$ un nombre fini de générateurs (et que $\tau_1+\tau_2$ est supposé de dimension constante) ; on passe à $\tau_1\cap\tau_2$ par orthogonalité.

Proposition (4.23bis) : Soit u une application $\mathcal{S}$tr-linéaire de $G^* \mathcal{S}tr(X,A)$ (espace des processus de Stratonovitch à valeurs dans le fibré $G^*(V)$, le long de X, sur l'ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$). Soit $J \in G^* \mathcal{S}tr(X,A)$, nul sur le sous-ouvert A' de A. Alors $u(J) \underset{A'}{\sim} 0$.

Démonstration : Je fais de ce résultat (l'analogue d'une équivalence rapidement signalée dans (4.18)) une proposition, parce qu'il ne m'a pas paru évident[•]. Soit $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas de V, localement fini, V' relativement compacts, trivialisant le fibré G(V). Soit (α_n) une partition de l'unité C^1 subordonnée. Alors $J = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n(X)\, J$. Montrons d'abord que $u(\alpha_n(X)J) \underset{A'}{\sim} 0$. Au-dessus de V'_n, G(V) est trivial, il existe une base C^1 : $(e_k)_{k=1,2,\dots,g}$ de G, une base duale $(\varepsilon^k)_{k=1,2,\dots,g}$ de G^* ; et $J = \sum_{k=1}^{g} (J\,|\,e_k(X))\, \varepsilon^k(X)$ dans $X^{-1}(V'_n)$ donc $\alpha_n(X)\, J = \sum_{k=1}^{g} (J|e_k(X))\,\alpha_n(X)\, \varepsilon^k(X)$ dans $X^{-1}(V'_n)$; mais aussi dans $X^{-1}(\complement\, \text{support}\, \alpha_n)$, donc partout sur A. Mais $(J|e_k(X))\, \alpha_n(X)$ est Stratonovitch dans $X^{-1}(V'_n)$, nul donc Stratonovitch dans $X^{-1}(\complement\, \text{support}\ \alpha_n)$, ces deux ouverts relatifs de A sont relativement optionnels sur A, donc il est de Stratonovitch sur A ; alors $u(\alpha_n(X)J) = \sum_{k=1}^{g} (J|e_k(X))\, \alpha_n(X) \underset{(S)}{\cdot} u(\varepsilon^k(X))$; et $(J|e_k(X))\, \alpha_n(X)$ est nul sur A', donc, par la localisation de l'intégrale de Stratonovitch, $u(\alpha_n(X)J) \underset{A'}{\sim} 0$.

Soit $K_N = \{\sum_{n\le N} \alpha_n = 1\}$; c'est un compact de V, croissant avec N, et $\bigcup_N \mathring{K}_N = V$. On peut trouver une suite de compacts H_N de V, $H_N \subset \mathring{K}_N$, telle que les $\mathring{H}_N$ croissent encore avec N, et aient pour réunion V. Soit β_N une fonction C^1, $0 \le \beta_N \le 1$, $\beta_N = 0$ sur H_N, $= 1$ sur $\complement \mathring{K}_N$. Alors $J'_N = J - \sum_{n\le N} \alpha_n(X)\, J = 0$ sur $X^{-1}(K_N)$, donc $J'_N = \beta_N(X)\, J'_N$ (puisque $\beta_N(X) \neq 1$ entraîne $X \in \mathring{K}_N \subset K_N$ donc $J'_N = 0$). Donc $u(J'_N) = \beta_N(X) \underset{(S)}{\cdot} u(J'_N)$ est équivalent à 0 sur $X^{-1}(\mathring{H}_N)$, sur lequel $\beta_N(X) = 0$, donc $u(J) \sim \sum_{n\le N} u(\alpha_n(X)J)$ sur $X^{-1}(\mathring{H}_n)$. Finalement, $u(J) \sim 0$ sur $A' \cap X^{-1}(\mathring{H}_N)$; ceci est

---

(•) Il est évident pour $J \to J \underset{(S)}{\cdot} X$, parce qu'on a des représentations tangentielles globales (4.18).

vrai pour tout N, et $\bigcup_N X^{-1}(\overset{o}{H_N}) = A$, donc $u(J) \underset{A'}{\sim} 0$.

<u>Proposition (4.23ter)</u> : <u>Soit</u> A <u>ouvert</u>, A' <u>sous-ouvert dans</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. <u>Soit</u> u $\mathcal{S}$tr-<u>linéaire de</u> $G^* \mathcal{S}tr(X,A)$ <u>dans</u> $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$. <u>Il existe une application unique</u> u', $\mathcal{S}$tr-<u>linéaire de</u> $G^* \mathcal{S}tr(X,A')$ <u>dans</u> $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$, <u>qui prolonge</u> u.

<u>Démonstration</u> : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts recouvrant A, ayant les propriétés indiquées à (4.23) (mais sans famille τ). Soit $J' \in G^* \mathcal{S}tr(X,A')$. Pour tout n, il existe $J_n \in G^* \mathcal{S}tr(X,A)$ qui coïncide avec J' sur $A' \cap A_n$ (de la forme $J_n = \sum_{k=1}^{g} (J' | e_{k,n}) \varepsilon_n^k$). Sur $A_m \cap A_n \cap A'$, $J_m = J' = J_n$, donc (4.23bis) montre que $u(J_m) \sim u(J_n)$. Alors (6.3ter) de S[2] montre l'existence d'une semi-martingale formelle u'(J') sur A', équivalente à chaque $u(J_n)$ sur $A' \cap A_n$. En outre, le même raisonnement montre que $u(J_n)$ est défini à une équivalence près sur $A' \cap A_n$, et finalement u'(J') à une équivalence près sur A'. L'application u' ainsi définie est trivalement $\mathcal{S}$tr-linéaire, et elle prolonge u ; c-à-d., si $J \in G^* \mathcal{S}tr(X,A)$, $u'(J) = u(J)$. Il reste à montrer l'unicité de u', c-à-d. à montrer que, si u' est $\mathcal{S}$tr-linéaire de $G^* \mathcal{S}tr(X,A')$ dans $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$ vaut 0 sur $G^* \mathcal{S}tr(X,A)$, elle est nulle. Soit en effet $J' \in G^* \mathcal{S}tr(X,A')$; pour tout n, il existe $J_n \in G^* \mathcal{S}tr(X,A)$ égal à J' sur $A' \cap A_n$; alors $J_n - J' \in G^* \mathcal{S}tr(X,A')$ et vaut 0 sur $A' \cap A_n$, donc, d'après (4.23bis), $u'(J - J') \sim 0$ sur $A' \cap A_n$, donc $u'(J') = 0$ sur $A' \cap A_n$, donc sur A'.

<u>Proposition (4.23quarto)</u> : <u>Soit</u> A <u>ouvert</u>, <u>réunion d'une suite</u> $(A'_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ <u>d'ouverts</u>. <u>Soit</u> u $\mathcal{S}$tr-<u>linéaire de</u> $G^* \mathcal{S}tr(X,A)$ <u>dans</u> $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c(A)$, u'_ℓ <u>les applications définies à</u> (4.23ter) <u>relatives aux</u> A'_ℓ. <u>Soit</u> τ <u>un processus de Stratonovitch à valeurs dans la grassmannienne</u> Gr G(V), <u>le long de</u> X <u>sur</u> A, dim $\tau = d$ constante. <u>Pour que</u> u <u>soit tangente à</u> τ <u>sur</u> A, <u>il faut et il suffit que</u>, <u>pour tout</u> ℓ, u'_ℓ <u>soit tangente à</u> τ <u>sur</u> A'_ℓ. <u>Pour que</u> $\sum_{k=1}^{m} H_k \underset{(S)}{\cdot} Z^k$ <u>soit une représentation tangentielle de</u> u <u>sur</u> A, <u>il faut et il suffit qu'elle le soit pour tout</u> u'_ℓ <u>sur</u> A'_ℓ. <u>Pour que</u> u <u>soit tangente à</u> τ <u>sur</u> A, <u>il faut et il suffit qu'il existe une suite</u>

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, pour tout n, u admette une représentation tangentielle sur A_n, $u = \sum_{k=1}^{m} H_{k,n} \bullet Z_n^k$, avec des $H_{k,n} \in \tau$.

Démonstration : Reprenons les A_n ayant, par rapport à τ, les propriétés énoncées à (4.23). Bien évidemment, si u est tangente à τ sur chaque A_ℓ', elle l'est sur A. Inversement, soit u tangente à τ sur A. Soit $J_\ell' \in G^* \mathcal{S}tr(X, A_\ell')$, $J_\ell' \in \tau^+$ sur A_ℓ'. Sur $A_\ell' \cap A_n$, J_ℓ' coïncide avec $\sum_{k=1}^{g} (J_\ell' | e_{k,n}) \varepsilon_n^k$, donc par (4.23bis),
$J_\ell' \underset{A_\ell' \cap A_n}{\sim} \sum_{k=1}^{g} (J_\ell' | e_{k,n}) \underset{(S)}{\bullet} u(\varepsilon_n^k)$. Mais ε_n^k est à valeurs dans τ^+ pour $k \geq d+1$, sur A tout entier, donc $u(\varepsilon_n^k) \underset{A}{\sim} 0$ pour $k \geq d+1$; et J_ℓ' est orthogonal à τ sur A_ℓ', $e_{k,n}$ est à valeurs dans τ sur A tout entier, donc $(J_\ell' | e_{k,n}) = 0$ sur A_ℓ' pour $k \leq d$.
Finalement $J_\ell' \underset{A_\ell' \cap A_n}{\sim} 0$ donc $\underset{A_\ell'}{\sim} 0$.
Si une représentation tangentielle est valable pour tout A_ℓ', elle l'est trivialement pour A. Inversement, supposons que $u = \sum_{k=1}^{m} H_k \underset{(S)}{\bullet} Z^k$ sur A. Cela veut dire que, pour $J \in G^* \mathcal{S}tr(A)$, $u(J) = \sum_{k=1}^{m} (J | H_k) \underset{(S)}{\bullet} Z^k$. Utilisons la même formule pour $J_\ell' \in G^* \mathcal{S}tr(X, A_\ell')$; on définit ainsi une application $\mathcal{S}tr$-linéaire de $G^* \mathcal{S}tr(X, A_\ell')$ dans $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$, égale à u sur $G^* \mathcal{S}tr(X, A)$; donc c'est u_ℓ' d'après l'unicité de (4.23ter). Donc on a bien une représentation tangentielle de u_ℓ'.

Enfin, avec la construction des A_n, $e_{k,n}$, ε_n^k, u admet, sur A_n la représentation tangentielle $u = \sum_{k=1}^{g} e_{k,n} \underset{(S)}{\bullet} u(\varepsilon_n^k)$; si u est tangente à τ, $u(\varepsilon_n^k) = 0$ pour $k \geq d+1$, donc c'est une représentation tangentielle $\sum_{k=1}^{m}$, avec des $e_{k,n} \in \tau$; inversement, s'il existe une représentation tangentielle dans A_n,
$u = \sum_{k=1}^{m} H_{k,n} \underset{(S)}{\bullet} Z_n^k$, avec des $H_{k,n} \in \tau$, trivialement u est tangente à τ dans A_n donc dans A.

Proposition (4.23quinto) : Soient $G_1(V)$, $G_2(W)$, deux fibrés C^1 sur les variétés C^2 : V, W et X, Y des semi-martingales sur A à valeurs dans V, W, respectivement. Soit u une application $\mathcal{S}tr$-linéaire de $G_1^* \mathcal{S}tr(X)$ dans $\mathcal{O}pt\, \mathcal{S}\mathcal{M}^c$, et soit L un processus de Stratonovitch d'applications de rang fixe k, de $G_1(V)$

dans $G_2(W)$, le long de X, Y, respectivement (L est Stratonovitch à valeurs dans $\mathcal{L}(G_1;G_2)$ fibré sur $V \times W$, et $L(t,\omega) \in \mathcal{L}(G_1(V,X(t,\omega))\ ;\ G_2(W,Y(t,\omega))))$. Alors L^* (adjoint de L) est de Stratonovitch. Ensuite $\operatorname{Ker} L$ et $\operatorname{Im} L$ sont de Stratonovitch à valeurs dans les grassmaniennes. Puis $Lu : J \mapsto u(L^*J)$ est $\mathcal{S}$tr-linéaire de $G_2^*\mathcal{S}tr(Y)$ dans $\mathcal{O}pt\,\mathcal{S}\mathcal{M}^c$; et $Lu = 0$ ssi u est tangente à $\operatorname{Ker} L$; ou si et seulement s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, tels que, dans chaque $A \cap A_n$, u ait une représentation tangentielle $u = \sum_{k=1}^{m} H_k \underset{(S)}{\bullet} Z^k$, où les H^k sont tangentes à $\operatorname{Ker} L$.

Démonstration : Puisque L est de Stratonovitch, et que $L \mapsto \operatorname{Ker} L$ et $L \mapsto \operatorname{Im} L$ sont C^1, $\operatorname{Ker} L$ et $\operatorname{Im} L$ sont Stratonovitch. Ensuite $Lu = 0$ signifie que $u(L^*J) = 0$ pour tout $J \in G_2^*\mathcal{S}tr(Y)$. Mais l'ensemble des L^*J, $J \in G_2^*\mathcal{S}tr(Y)$, est exactement l'ensemble des $J' \in G_1^*\mathcal{S}tr(X)$ prenant leurs valeurs dans $\operatorname{Im} L^*$; si en effet J' est à valeurs dans $\operatorname{Im} L^*$, et si $(L^*)_{-1}$ est affecté à L^* comme indiqué à (4.22), $L^* \mapsto (L^*)_{-1}$ est C^1 donc $(L^*)_{-1}$ est Stratonovitch, donc $J = (L^*)_{-1} J'$ est Stratonovitch, et $L^*J = L^*(L^*)_{-1} J' = J'$ puisque $J' \in \operatorname{Im} L^*$. Donc $Lu = 0$ veut dire que $u(J') = 0$ pour J' à valeurs dans $\operatorname{Im} L^* = (\operatorname{Ker} u)^+$, donc que u est tangente à $\operatorname{Ker} L$. La représentation tangentielle résulte de (4.23quarto).

(4.24) Le point de vue de P.A. Meyer sur les intégrales de Stratonovitch [cf. P.A. Meyer [2], § 4, pp. 56 et suivantes].

Ce point de vue ne s'applique que pour le clacul de $J \underset{(S)}{\bullet} X$, $J \in T^{*1}\mathcal{S}tr\, X$, de la forme particulière $\varpi(X)$, où ϖ est une forme différentielle C^1 de degré 1 sur V, ϖ section C^1 du fibré $T^{*1}(V)$. Comme Meyer développe abondamment ce point de vue, je n'en donnerai qu'une esquisse, tout ce qui suit dans le § 4 vient de lui.

Proposition (4.25) : Sur une variété V de classe C^2, il existe un opérateur D unique, de l'espace des sections C^1 de $T^{*1}(V)$ dans l'espace des sections C^0 de $T^{*2}(V)$, tel que :

$$(4.26)\qquad \begin{aligned} D(D\varphi) &= D^2\varphi \quad , \quad \underline{\text{pour}}\ \varphi \in C^2(V;\mathbb{R}) \ ; \\ D(\alpha\varpi) &= \alpha D\varpi + \frac{1}{2}\, D\alpha \odot D\varpi \quad , \quad \underline{\text{pour}}\ \alpha\ \underline{\text{réelle}}\ C^1,\ \varpi\ \underline{\text{section}}\ C^1\ \underline{\text{de}}\ T^{*1}(V)\ . \end{aligned}$$

<u>L'image de</u> $D\varpi$ <u>dans le quotient</u> T^{*1} <u>est</u> ϖ.

<u>Démonstration</u> : On suit la méthode indiquée à la remarque 1 qui suit la démonstration de (2.7). L'unicité résulte de ce que les $D\varphi$, $\varphi \in C^2(V;\mathbb{R})$, engendrent $T^{*1}(V)$ en tant que module sur $C^1(V;\mathbb{R})$, d'après (4.9). Pour démontrer l'existence, on doit montrer que, si l'on a une relation $\sum_\ell \alpha_\ell\ D\varphi_\ell = 0$, $\sum_\ell (\alpha_\ell\ D^2\varphi_\ell + \frac{1}{2} D\alpha_\ell \odot D\varphi_\ell) = 0$. Comme tout vecteur 2-tangent en $v \in \mathbf{V}$ est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire de traces en v de champ 1-tangents et de produits de champs 1-tangents de classe C^1, il suffira de montrer que si ξ et η sont des champs 1-tangents de classe C^1, les deux quantités

$$(4.27)\qquad (\sum_\ell (\alpha_\ell\ D^2\varphi_\ell + \frac{1}{2}\, D\alpha_\ell \odot D\varphi_\ell)\,|\,\xi) \quad \text{et}$$

$$(4.28)\qquad (\sum_\ell (\alpha_\ell\ D^2\varphi_\ell + \frac{1}{2}\, D\alpha_\ell \odot D\varphi_\ell)\,|\,\xi\eta)$$

sont nulles ; le produit scalaire $(.|.)$ est entre $T^{*2}(V)$ et $T^2(V)$, et $\xi\eta$, le produit a le sens suivant : ξ, η, étant des opérateurs différentiels d'ordre 1, de classe C^1, $\xi\eta$, leur composé, est un opérateur différentiel d'ordre 2, de classe C^o. Voir (1.7bis). Comme $\xi \in T^1$ est nul sur $P^* = T^{*1} \odot T^{*1}$, (4.27) s'écrit

$$(\sum_\ell \alpha_\ell\ D^2\varphi_\ell\,|\,\xi)_{T^{*2},T^2} \quad , \quad \text{c-à-d.} \quad (\sum_\ell \alpha_\ell\ D\varphi_\ell\,|\,\xi)_{T^{*1},T^1} = 0 \quad ,$$

d'après l'hypothèse.

D'après la fin de (1.6), (4.28) s'écrit

$$(4.29)\qquad \sum_\ell \alpha_\ell((\xi\eta)\varphi_\ell) + \frac{1}{2}\sum_\ell (D\alpha_\ell \odot D\varphi_\ell\,|\,\xi \odot \eta)_{T^{*1}\odot T^{*1},T^1\odot T^1}$$

$$= \sum_\ell (\alpha_\ell((\xi\eta)(\varphi_\ell)) + \frac{1}{2}\,\xi(\alpha_\ell)\ \eta(\varphi_\ell) + \frac{1}{2}\,\xi(\varphi_\ell)\ \eta(\alpha_\ell)) \quad .$$

Mais, par hypothèse, $\sum_\ell \alpha_\ell\ D\varphi_\ell = 0$, donc $\sum_\ell \alpha_\ell\ \xi(\varphi_\ell) = 0$, $\sum_\ell \alpha_\ell\ \eta(\varphi_\ell) = 0$. Par dérivation de la deuxième par rapport à ξ :

$$\sum_{\ell} \xi(\alpha_\ell)\ \eta(\varphi_\ell) + \sum_{\ell} \alpha_\ell((\xi\eta)(\varphi_\ell)) = 0 \quad .$$

Donc (4.29) est

$$(4.30) \qquad \frac{1}{2}\sum_{\ell} (\xi(\varphi_\ell)\ \eta(\alpha_\ell) - \xi(\alpha_\ell)\ \eta(\varphi_\ell)) = \frac{1}{2}\,(\xi \wedge \eta \mid \sum_{\ell} d\varphi_\ell \wedge d\alpha_\ell)_{\Lambda^2 T^{*1}, \Lambda^2 T^1} \quad ,$$

où $\wedge$ est le produit extérieur des vecteurs ou des formes, ΛT^1 et ΛT^{*1} sont les algèbres extérieures de T^1 et T^{*1}. Mais, puisque la forme de degré 1 : $\sum_{\ell} \alpha_\ell\ d\varphi_\ell$ est nulle, son cobord $\sum_{\ell} d\alpha_\ell \wedge d\varphi_\ell$ l'est aussi, et on trouve bien 0. Ceci montre que, si, pour $\varpi = \sum_{\ell} \alpha_\ell\ D\varphi_\ell$, on définit $D\varpi = \sum_{\ell} (\alpha_\ell\ D^2\varphi_\ell + \frac{1}{2}\ D\alpha_\ell \odot D\varphi_\ell)$, c'est indépendant de l'expression de ϖ. Ayant ainsi formé $D\varpi$, on doit vérifier que l'on a (4.26). Il suffit de le vérifier pour $\varpi = \beta D_\varphi$, où c'est trivial, les deux membres de la 2ème relation (4.26) étant égaux à

$$\alpha\beta\ D^2\varphi + \frac{1}{2}\ \alpha\ D\beta \odot D\varphi + \frac{1}{2}\ \beta\ D\alpha \odot D\varphi \quad .$$

Quant au fait que l'image de $D\varpi$ dans $T^{*1} = T^{*2}$ soit ϖ, c'est évident, car, si $\varpi = \alpha\ D\varphi$, $D\varpi = \alpha\ D^2\varphi + \frac{1}{2} D\alpha \odot D\varpi$, l'image de $D\alpha \odot D\varphi$, qui est à valeurs dans P^*, est nulle, donc l'image de ϖ est celle de $\alpha\ D^2\varphi$, c-à-d. $\alpha\ D\varphi = \varpi$.

<u>(4.30bis)</u> Dans une carte, si $\varpi = \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ Dx^k$, on a, par (4.26) :

$$D\varpi = \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ D^2x^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \varpi_j\ Dx^i \odot Dx^j$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ D^2x^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2}\,(\partial_i \varpi_j + \partial_j \varpi_i)\ Dx^i \odot Dx^j \quad .$$

Ou encore, si $\varpi = \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ \varepsilon^k$,

$$(4.30\text{ter}) \qquad D\varpi = \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \varpi_j\ \varepsilon^i \odot \varepsilon^j$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varpi_k\ \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2}\,(\partial_i \varpi_j + \partial_j \varpi_i)\ \varepsilon^i \odot \varepsilon^j \quad .$$

<u>Proposition (4.31)</u> : <u>Soit</u> Φ <u>une application</u> C^2 <u>de</u> V <u>dans</u> W, ϖ <u>une section</u> C^1 <u>de</u> $T^{*1}(W)$. <u>Alors</u>

$$D(\overset{1}{\underline{\Phi}}\,\varpi) = \overset{2}{\underline{\Phi}}{}^{*}(D\varpi) \quad ,$$

i.e. D <u>est fonctorielle</u>.

<u>Démonstration</u> : Evident en prenant $\varpi = \alpha\, D\varphi$.

<u>(4.31)</u> On définit alors l'intégrale de Stratonovitch $\varpi(X) \underset{(S)}{\bullet} X$, où ϖ est une section C^1 de T^{*1}, donc $\varpi(X)$ de Stratonovitch par :

(4.32) $$\varpi(X) \underset{(S)}{\bullet} X = D\varpi(X) \bullet \underline{X} \quad ,$$

qui ramène l'intégrale de Stratonovitch à l'intégrale ordinaire. Il faut évidemment montrer qu'on retrouve le $J \underset{(S)}{\bullet} (X)$ défini à la proposition (4.6). Par additivité, il suffit de le faire pour $\varpi = \alpha\, D\varphi$, α de classe C^1 et φ de classe C^2. Notons par (S_1) l'intégrale de Stratonovitch de (4.6) et par (S_2) celle de (4.32).

$$(\alpha\, D\varphi)(X) \underset{(S_2)}{\bullet} X = D(\alpha\, D\varphi)(X) \bullet \underline{X} = (\alpha\, D^2\varphi + \frac{1}{2} D\alpha \odot D\varphi)(X) \bullet \underline{X}$$

$$= \alpha(X) \bullet \varphi(X) + \frac{1}{2}[\alpha(X)^c, \varphi(X)^c]$$ (par la crochet-stabilité, (2.15), et (4.1 ter) appliquée à α, φ)

$$= \alpha(X) \underset{(S)}{\bullet} \varphi(X)$$ (intégrale de Stratonovitch réelle)

$$= \alpha(X) \underset{(S)}{\bullet} (D\varphi(X) \underset{(S_1)}{\bullet} X)$$

$$= (\alpha\, D\varphi)(X) \underset{(S_1)}{\bullet} X$$ (par la $\mathcal{S}$tr-linéarité de $\underset{(S_1)}{\bullet}$) .

§ 5. SYSTEMES DIFFERENTIELS POUR LES SEMI-MARTINGALES SUR DES VARIETES

Résumé du § 5. La donnée d'un système différentiel ordinaire est celle d'un champ $\overset{1}{\Theta}$ de sous-espaces vectoriels 1-tangents ; on cherche les trajectoires qui, en chaque point, sont tangentes au sous-espace de ce point. Un système différentiel stochastique sera la donnée d'un champ $\overset{2}{\Theta}$ de sous-espaces vectoriels 2-tangents, et on cherche une semi-martingale X qui lui soit 2-tangente dX-pp. C'est la définition (5.2). On peut poser le même problème au sens de Stratonovitch, alors il s'agit de nouveau de plans 1-tangents, c'est (5.4). L'essentiel du paragraphe est consacré à trouver une relation entre les deux ; ce sera utilisé plus tard pour le relèvement d'une semi-martingale par une connexion (le sous-espace tangent est alors le sous-espace horizontal pour la connexion). Le théorème essentiel est le suivant (5.16) : si $\overset{1}{\Theta}$ est un champ de sous-espaces 1-tangents, il existe un champ unique associé (5.16), $\overset{2}{\Theta}$, de sous-espaces 2-tangents, tel qu'une semi-martingale X soit 1-tangente à $\overset{1}{\Theta}$, au sens de Stratonovitch, ssi elle est 2-tangente à $\overset{2}{\Theta}$ au sens ordinaire. La définition de $\overset{2}{\Theta}$ en fonction de $\overset{1}{\Theta}$ peut se faire par les accélarations complètes, (5.5), par les champs de vecteurs tangents ou opérateurs différentiels, (5.14), par la différentielle de P.A. Meyer des formes différentielles, (5.15). La proposition (5.17) étudie le cas où le champ Θ est complètement intégrable.

(5.1) Dans les équations différentielles déterministes, on se donne un vecteur tangent H, fonction sur $V \times \mathbb{R}_+$, à valeurs dans $T^1(V)$, $H(v,t) \in T^1(V,v)$, et on cherche une courbe $t \mapsto X_t$, $\mathbb{R}_+ \to V$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{dX}{dt} = H(X_t,t)$; nous verrons plus loin quelle généralisation en donner pour les équations différentielles stochastiques. Ce qu'on appelle système différentiel ou système de Pfaff déterministe est autre chose ; on se donne un champ de sous-espace tangent Θ, fonction sur $V \times \overline{\mathbb{R}}_+$ (nous préférons toujours ici $\overline{\mathbb{R}}_+$ à $\mathbb{R}_+$) à valeurs dans le fibré des grassmanniennes de $T^1(V)$; $\Theta(v,t)$ est un sous-espace vectoriel de $T^1(V,v)$, ou un élément de la grassmannienne Gr $T^1(V,v)$; et on cherche une courbe $t \mapsto X_t$, $\overline{\mathbb{R}}_+ \to V$, telle que, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, la tangente à la courbe, $\tau(X_t)$, soit contenue dans $\Theta(X_t,t)$. C'est cela que nous allons interpréter dans ce paragraphe, pour des semi-martingales (sans d'ailleurs donner aucun théorème d'existence ni d'unicité).

(5.2) Pour des semi-martingales, il sera normal de considérer des sous-espaces tangents d'ordre 2. On se donnera une fonction $\overset{2}{\Theta} = \Theta$ sur $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans le fibré des grassmanniennes de $T^2(V)$; $\Theta(v,t,\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $T^2(V,v)$, ou un élément de la grassmannienne Gr $T^2(V,v)$. Et on cherche alors une semi-martingale X à valeurs dans V tel que, pour $d\underline{X}$-presque tout (t,ω), le sous-espace tangent à la semi-martingale $\tau(\underline{X})(t,\omega)$ (défini $d\underline{X}$-pp. à (3.13bis)) soit contenu dans $\Theta(X_t(\omega),t,\omega)$; dit plus simplement, telle que $\tau(\underline{X})$ soit dans $\Theta(X,.,.)$ $d\underline{X}$-pp. Dans le langage de (3.10sexto), X est solution ssi $d\underline{X}$ est tangente à $\Theta(X,.,.)$ $d\underline{X}$-pp.

(5.3) Il est pour le moins indispensable de supposer que $\Theta(v,.,.)$ est optionnelle sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ pour tout $v \in V$ (à valeurs dans le fibré en grassmanniennes Gr $T^2(V)$), et que, pour tout $(t,\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $\Theta(.,t,\omega)$ est continue sur V (à valeurs dans ce même fibré). Alors, si X est optionnel, a fortiori si c'est une semi-martingale, $\Theta(X,.,.)$ est optionnel, c'est donc une famille optionnelle de sous-espaces 2-tangents à V le long de X, ce qui est le cadre dans lequel nous nous sommes toujours placés. [En effet, soit $R = (B_i)_{i\in I}$ un recouvrement dénombrable de V par des parties boréliennes disjointes, et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de points de V, $v_i \in B_i$ pour tout i ; soit Θ_R la fonction définie par $\Theta_R(v,t,\omega) = \Theta(v_i,t,\omega)$ pour $v \in B_i$; Θ_R est mesurable sur $V \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega)$ pour le produit tensoriel de la tribu borélienne de V par la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, puisque $\Theta(v_i,.,.)$ est optionnelle. Soit alors $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de tels recouvrements, les parties constituant R_n ayant un diamètre $\leq \frac{1}{n}$, pour une métrique choisie sur V, définissant sa topologie. Lorsque $n \to +\infty$, la continuité de $\Theta(.,t,\omega)$ sur V entraîne que Θ_{R_n} tende vers Θ en tout point v, t, ω, donc Θ elle aussi est mesurable sur $V \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega)$, pour le produit tensoriel de la tribu borélienne de V par la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. On en déduit bien que $\Theta(X,.,.)$ est optionnelle si X est optionnelle.]

Bien évidemment un cas particulièrement intéressant sera celui où Θ ne dépend pas de (t,ω), Θ est une fonction continue sur V à valeurs dans Gr $T^2(V)$, $\Theta(v) \in$ Gr $T^2(V,v)$, c-à-d. une section continue du fibré Gr $T^2(V)$ sur V ; pour V connexe, cela imposera que dim $\Theta(v)$ soit une constante. C'est aussi là le cas le plus intéressant pour les systèmes différentiels déterministes.

(5.4) On peut poser le même problème en termes d'intégrales de Stratonovitch. Nous ne l'examinerons que pour Θ indépendante de (t,ω). Soit $\overset{1}{\Theta} = \Theta$ une fonction C^1 sur V à valeurs dans Gr $T^1(V)$, $\Theta(v) \in$ Gr $T^1(V,v)$, c-à-d. une section C^1 du fibré Gr $T^1(V)$ sur V, ou encore un champ C^1 de sous-espaces vectoriels 1-tangents. On cherche alors une semi-martingale X à valeurs dans V, telle que dX, au sens de Stratonovitch (4.22), soit tangente à $\Theta(X)$, qui est bien un processus de Stratonovitch à valeurs dans la grassmannienne. On retrouve là les systèmes différentiels familiers, si X est une courbe déterministe. Ce qu'il est intéressant de voir ici, c'est que, si $\overset{1}{\Theta}$ est un tel système, on peut lui associer un système $\overset{2}{\Theta}$ de sous-espaces 2-tangents, de manière qu'une semi-martingale X soit tangente à $\overset{1}{\Theta}$ au sens de Stratonovitch, ssi elle est tangente, au sens ordinaire, à $\overset{2}{\Theta}$.

Proposition (5.5) : Soit $\overset{1}{\Theta}$ un champ C^1 de sous-espaces vectoriels 1-tangents à V, de dimension constante d. Soit $\overset{2}{\Theta}(v)$ le plus petit sous-espace vectoriel de $T^2(V,v)$, ayant la propriété suivante :

pour toute courbe de classe C^2, $\mathbb{R} \to V$, solution du système $\overset{1}{\Theta}$, c-à-d. pour laquelle, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la vitesse Z'_t de Z au temps t soit dans $\overset{1}{\Theta}(Z_t)$, et telle que $Z_0 = v$, l'accélaration complète de Z au temps 0, (1.14bis), Z''_0, est dans $\overset{2}{\Theta}(v)$. La famille $\overset{2}{\Theta}$ ainsi définie, section du fibré Gr $T^2(V)$ sur V, est continue ; la dimension de $\overset{2}{\Theta}(v)$ est $d + \frac{d(d+1)}{2}$. Si V est C^m, et $\overset{1}{\Theta}$ de classe C^{m-1}, $\overset{2}{\Theta}$ est de classe C^{m-2}.

Démonstration : Tout est local. On peut donc supposer que V est un produit

$B\times F$ d'espaces vectoriels, et qu'on se trouve dans un ouvert de $B\times F$ où $\overset{1}{\textcircled{H}}(b,f)$ est toujours supplémentaire de F, donc $\dim B = d$, $\dim F = N-d$ [(5)]. On peut donc représenter $\overset{1}{\textcircled{H}}(b,f) \in T^1(B\times F,(b,f)) = B\times F$, comme le graphe d'une application $\overset{1}{\Gamma}$ de B dans F, $\overset{1}{\textcircled{H}}(b,f) =$ graphe de $\overset{1}{\Gamma}(b,f)$, $\overset{1}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;F)$; alors $\overset{1}{\textcircled{H}}(b,f)$ est aussi l'image de B par une application linéaire $\overset{1}{\sigma}(b,f)$ de F dans $B\oplus F$, $\overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;B\oplus F)$, telle que, si $\overset{1}{\pi}$ est la projection de $B\times F$ sur B, $\overset{1}{\pi}\circ\overset{1}{\sigma}(b,f) = I_B$, application identique de B ; $\overset{1}{\sigma}(b,f) = I_B + \overset{1}{\Gamma}(b,f)$. Alors

$$(B\oplus F)\oplus((B\oplus F)\odot(B\oplus F)) = B\oplus F\oplus(B\odot B)\oplus(B\otimes F)\oplus(F\odot F) \quad ;$$

si $\xi\in B\oplus F$, $\xi = \xi' + \xi''$, $\eta\in B\oplus F$, $\eta = \eta' + \eta''$, alors $\xi\odot\eta \in (B\oplus F)\odot(B\oplus F)$ est $\xi'\odot\eta' + (\xi'\otimes\eta'' + \eta'\otimes\xi'') + \xi''\odot\eta'' \in (B\odot B) + (B\otimes F) + (F\odot F)$. La courbe Z est donnée par (X,Y), X trajectoire dans B, Y trajectoire dans F. La vitesse à l'instant t est $Z'(t) = (X'(t),Y'(t))$; puisqu'elle doit être dans $\overset{1}{\textcircled{H}}(Z_t)$, on a

$$(5.6) \qquad Y'(t) = \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))\,X'(t) \quad , \quad \text{ou} \quad Z'(t) = \overset{1}{\sigma}(X(t),Y(t))\,X'(t) \quad ;$$

$\overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t)) \in \mathcal{L}(B;F)$, $X'(t)\in B$, on trouve bien $Y'(t)\in F$.

L'accélération complète a nécessairement pour composante sur $(B\oplus F)\odot(B\oplus F)$ le carré tensoriel de la vitesse, $Z'(t)\odot Z'(t) = (X'(t)\odot X'(t)) + 2(X'(t)\otimes Y'(t)) + (Y'(t)\odot Y'(t)) \in (B\odot B)\oplus(B\otimes F)\oplus(F\odot F)$; il faut chercher sa composante dans $B\oplus F$, par dérivation de (X',Y'). On trouve $X''(t)$ sur B ; et sur F, $Y''(t)$, défini par :

$$(5.7) \qquad Y''(t) = \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))(X'(t))X'(t) + \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))(Y'(t))X'(t)$$
$$+ \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))X''(t) \in F \quad .$$

Pour que les notations soient claires : Γ est une fonction sur $B\times F$ à valeurs dans $\mathcal{L}(B;F)$, donc $\partial_1\Gamma(b,f)$ est une application linéaire de B dans $\mathcal{L}(B;F)$, sa valeur sur $X'(t)$ est donc un élément de $\mathcal{L}(B,F)$, qui, opérant sur $X'(t)$, donne un élément de F ; $\partial_2\Gamma(b,f)$ est une application linéaire de F dans $\mathcal{L}(B;F)$ (donc bilinéaire de $F\times B$ dans F), sa valeur sur $Y'(t)\in F$ est donc un élément de $\mathcal{L}(B;F)$, qui, opérant sur $X'(t)$, donne un élément de F ; $\Gamma(b,f)$ est une application linéaire de B dans F, qui, opérant sur $X''(t) \in B$, donne un élément de F. Compte-tenu de (5.6), c'est

$$(5.8) \quad Y''(t) = \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))(X'(t))X'(t) + \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))(\overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))X'(t))X'(t)$$
$$+ \overset{1}{\Gamma}(X(t),Y(t))X''(t) \quad .$$

On voit que $\underline{Z''(t)} = \underline{(X,Y)''(t)}$ est dans l'image d'une application $\overset{2}{\sigma}(X(t),Y(t))$ de $B\oplus(B\odot B)$ dans $(B\oplus F)\oplus((B\oplus F)\odot(B\oplus F))$, définie par :

$$(5.9) \quad \overset{2}{\sigma}(b,f) = \begin{pmatrix} \overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;B\oplus F) & 0 + \overset{2}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B\odot B;B\oplus F) \\ 0 \in \mathcal{L}(B;(B\oplus F)\odot(B\oplus F)) & \overset{1}{\sigma}(b,f) \circledcirc \overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B\odot B;(B\oplus F)\odot(B\oplus F)) \end{pmatrix}$$

On a mis une matrice à cause de la décomposition en somme directe $B\oplus(B\odot B)$, $(B\oplus F)\oplus(B\oplus F)\odot(B\oplus F))$, avec $\overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;B\oplus F) = I + \overset{1}{\Gamma}(b,f)$, $\overset{1}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;F)$, $0 + \overset{2}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B\odot B;B\oplus F)$, avec $0 \in \mathcal{L}(B\odot B;B)$, $\overset{2}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B\odot B;F)$, et $\overset{1}{\sigma}(b,f) \circledcirc \overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B\odot B;((B\oplus F)\odot(B\oplus F))$. D'après (5.7) :

<u>(5.10)</u> $\overset{2}{\Gamma}(b,f) =$ (application linéaire de $B\odot B$ dans F qui, sur $\xi\odot\xi \in B\odot B$, prend la valeur $\partial_1\Gamma(b,f)(\xi)\xi$, donc, sur $\xi\odot\eta$, la valeur $\frac{1}{2}(\partial_1 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\xi)\eta + \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\eta)\xi))$ + (application linéaire de $B\odot B$ dans F qui, sur $\xi\odot\xi \in B\odot B$, prend la valeur $\partial_2 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\Gamma(b,f)\xi)\xi$, donc, sur $\xi\odot\eta$, la valeur $\frac{1}{2}(\partial_2 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\overset{1}{\Gamma}(b,f)\xi)\eta + \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\overset{1}{\Gamma}(b,f)\eta)\xi))$.
On ne saurait trop expliciter : pour ξ, $\eta \in T^1(B,b)$:

$$(5.11) \quad \overset{2}{\Gamma}(b,f)(\xi\odot\eta) = \frac{1}{2}(\partial_1 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\xi)\eta + \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\eta)\xi)$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_2 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\overset{1}{\Gamma}(b,f)\xi)\eta + \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(b,f)(\overset{1}{\Gamma}(b,f)\eta,\xi) \quad .$$

Si $\overset{2}{\pi} = \overset{1}{\pi}\oplus(\overset{1}{\pi} \circledcirc \overset{1}{\pi})$ est la projection de $(B\oplus F)\oplus((B\oplus F)\odot(B\oplus F))$ sur $B\oplus(B\odot B)$, $\overset{2}{\pi}\,\overset{2}{\sigma}(b,f) = I_{B\oplus(B\odot B)}$. Donc l'image de $\overset{2}{\sigma}(b,f)$ est aussi le graphe d'une application linéaire de $B\oplus(B\odot B)$ dans $F\oplus((B\otimes F)\oplus(F\odot F))$, qui est elle-même définie par la matrice suivante (5.12) :

$$\overset{2}{\boldsymbol{\Gamma}}(b,f) = \begin{pmatrix} \overset{1}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;F) & \overset{2}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B \odot B;F) \\ 0 \in \mathcal{L}(B;(B\otimes F)+(F \odot F)) & (\xi \odot \eta \to (\xi\otimes\Gamma(b,f)\eta+\eta\otimes\Gamma(b,f)\xi)+\overset{1}{\Gamma}(b,f)\xi \odot \overset{1}{\Gamma}(b,f)\eta) \\ & \in \mathcal{L}(B\odot B;(B\otimes F) \oplus (F\odot F)) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

et $\overset{2}{\sigma}(b,f) = I_{B\oplus(B \odot B)} \oplus \overset{2}{\Gamma}(b,f)$. Posons $\overset{2}{\theta}(b,f) = \mathrm{Im}\ \overset{2}{\sigma}(b,f) =$ graphe de $\overset{2}{\boldsymbol{\Gamma}}(b,f)$. L'espace $\theta(b,f)$ ainsi déterminé contient bien toutes les accélérations complètes, au point $v = (b,f)$, des trajectoires C^2 solutions du système différentiel défini par le champ $\overset{1}{\Theta}$. Puisque $B + (B\odot B)$ a la dimension $d + \frac{d(d+1)}{2}$, le graphe $\overset{2}{\theta}(v)$ de $\overset{2}{\boldsymbol{\Gamma}}(v)$ aussi ; et la continuité du champ $\overset{2}{\theta}$ est évidente. Il reste à montrer, sachant déjà que $\overset{2}{\Theta}(v) \subset \overset{2}{\theta}(v)$, qu'ils sont égaux. Donnons-nous une trajectoire C^2 arbitraire dans B, soit $X = \varphi(t)$, $\varphi(0) = b$. Elle est solution dans B de l'équation différentielle $\frac{dX}{dt} = \varphi'(t)$; celle-ci se "relève" en une équation différentielle dans $B \oplus F$, $\frac{dX}{dt} = \varphi'(t)$, $\frac{dY}{dt} = \overset{1}{\Gamma}(\varphi(t),Y)\varphi'(t)$, de classe C^1 ; tous ses vecteurs tangents sont tangents à $\overset{1}{\Theta}(v)$ en chaque point v de $V = B \times F$. Elle a une solution unique (C^1 entraîne Lipschitz !), de classe C^2, passant en $v = (b,f)$ à l'instant 0. Donc son accélération complète au temps 0 doit être contenue dans l'espace vectoriel $\overset{2}{\Theta}(v)$ cherché en v ; or c'est $\overset{2}{\sigma}(b,f)$ $\underline{\varphi''(0)}$. Les $\underline{\varphi''(0)}$, accélérations complètes au temps 0 de toutes les trajectoires C^2 dans B, qui sont en b l'instant 0, engendrent $T^2(B,b) = B\oplus (B \odot B)$, donc l'espace vectoriel cherché $\overset{2}{\Theta}(v)$ doit contenir l'image de $\overset{2}{\sigma}(b,f)$, donc c'est l'espace $\overset{2}{\theta}(v)$ que nous venons de déterminer ; $\overset{2}{\Theta}(v) = \overset{2}{\theta}(v) = \mathrm{Im}\ \overset{2}{\sigma}(v) =$ graphe de $\overset{2}{\boldsymbol{\Gamma}}(v)$.

La forme trouvée pour $\overset{2}{\Theta}(v)$ donne en outre :

<u>Corollaire (5.13)</u> : <u>En tout point</u> (b,f) <u>de</u> $B \times F$ <u>avec la notation</u> (5.9), $\overset{2}{\sigma}(b,f)$ <u>induit</u> $\overset{1}{\sigma}(b,f)$ <u>sur</u> B, <u>donc</u> $\overset{2}{\sigma}$ <u>envoie</u> $T^2(B,b)/T^1(B,b) = T^1(B,b) \odot T^1(B,b)$ <u>dans</u> $\overset{2}{T}(V,(b,f))/\overset{1}{T}(V,(b,f)) = T^1(V,(b,f)) \odot T^1(V,(b,f)) = (B\oplus F) \odot (B\oplus F)$, <u>par l'application</u> $\overset{1}{\sigma}(b,f) \circledcirc \overset{1}{\sigma}(b,f)$. <u>Intrinsèquement</u> : <u>pour tout</u> $v \in V$, $\overset{2}{\Theta}(v) \supset \overset{1}{\Theta}(v)$, <u>et</u> $\overset{2}{\Theta}(v)/\overset{1}{\Theta}(v)$ <u>s'envoie bijectivement sur le sous-espace</u> $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$ <u>de</u>

$T^2(V,v)/T^1(V,v) = T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$.

[Ce n'est pas étonnant : l'image dans $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ de l'accélération complète est le carré tensoriel de la vitesse ; l'image de $\overset{2}{\Theta}(v)$ est l'espace engendré par les carrés tensoriels des vitesses, c-à-d. $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$.]

(5.13bis) Description de $\overset{2}{\Theta}(v)$ en coordonnées quelconques (•)

Nous avons utilisé une décomposition $V = B \times F$; regardons maintenant les équations de $\overset{2}{\Theta}(v)$ en coordonnées quelconques. Nous supposerons simplement $V = E = \mathbb{R}^N$ espace vectoriel, et $\overset{1}{\Theta}$ défini localement (comme dans la théorie usuelle de Frobenius des systèmes différentiels) par l'annulation de N-d formes différentielles de degré 1 indépendantes, $(\overset{\ell}{\varpi})_{\ell=1,2,\ldots,N-d}$; soit $\overset{\ell}{\varpi} = \sum_{k=1}^{N-d} \overset{\ell}{\varpi}_k \, dX^k$.
On sait que $T^2(E,v) = E \oplus (E \odot E)$. Le sous-espace $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$ a la dimension $\frac{d(d+1)}{2}$, il est donc défini par $\frac{N(N+1)}{2} - \frac{d(d+1)}{2}$ équations linéaires indépendantes ; nous en prendrons en nombre excédentaire, en écrivant que l'orthogonal de $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$ dans $E^* \odot E^*$ est engendré par les $\overset{\ell}{\varpi} \odot \varpi'$, où $\ell = 1,2,\ldots,N-d$, ϖ' arbitraire, ou, ce qui revient au même les $\overset{\ell}{\varpi} \odot \varepsilon^k$, où $\ell = 1,2,\ldots,N-d$, $k = 1,2,\ldots,N$; $(\varepsilon^k)_{k=1,2,\ldots,N}$ est la base de $(\mathbb{R}^N)^*$, duale de la base $(e_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ de $\mathbb{R}^N$. Cela fait (N-d)N générateurs, ce qui est excédentaire, mais peu importe. Si donc L' est un élément de $E \odot E$, il est dans $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$ si et seulement si, en posant $L' = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2} L'^{i,j} e_i \odot e_j$, $L'^{i,j} = L'^{j,i}$, on a, pour tout $\ell = 1,2,\ldots,N-d$ et tout $j = 1,2,\ldots,N$:

$$(5.13\text{ter}) \quad \begin{cases} 0 = (\overset{\ell}{\varpi}(v) \odot \varepsilon^j | L')_{E^* \odot E^*, E \odot E} = (\sum_{i=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_i(v) \, \varepsilon^i \odot \varepsilon^j | L') \\ \quad = \sum_{i=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_i(v) \, L'^{i,j} \quad ; \quad \ell = 1,2,\ldots,N-d \ , \quad j = 1,2,\ldots,N \ . \end{cases}$$

Pour $L \in \overset{2}{\Theta}(v)$, sa composante L' sur $E \odot E$ est un élément arbitraire de $\overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)$, donc vérifiant (5.13ter). Alors sa composante ξ dans E est

(•) Cette description est due à P.A. Meyer [2], § 6, pages 70 et suivantes.

déterminée modulo $\overset{1}{\Theta}(v)$, puisque le noyau de $\overset{2}{\Theta}(v) \to \overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v) \subset E \odot E$ est $\overset{1}{\Theta}(v)$ (5.13). Donc ξ doit, une fois L' connu, satisfaire à N-d équations linéaires indépendantes. Or écrivons que X est une trajectoire $\mathbb{R} \to E$ tangente partout à $\overset{1}{\Theta}$:

$$\text{(5.13quarto)} \qquad (\varpi^{\ell}(X) | X'(t)) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{N} \varpi^{\ell}_{k}(X) X'^{k}(t) = 0 \quad , \quad \ell = 1,2,\ldots,N\text{-}d \ .$$

En dérivant en t, pour $t = 0$, avec $X(0) = v$:

$$\text{(5.13quinto)} \qquad \sum_{k=1}^{N} \varpi^{\ell}_{k}(v)\, X''^{k}(0) + \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\, \varpi^{\ell}_{j}(v)\, X'^{i}(0)\, X'^{j}(0) = 0 \ .$$

Si donc $L = \begin{pmatrix} \xi \\ L' \end{pmatrix}$ est un élément de $\overset{2}{\Theta}(v)$, il est une somme finie d'accélérations complètes, donc une somme finie de $\begin{pmatrix} X''(0) \\ X'(0) \odot X'(0) \end{pmatrix}$, chacun de la forme $\sum_{k=1}^{N} X''^{k}(0)\, \varepsilon^{k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} 2X'^{i}(0)\, X'^{j}(0)\, \varepsilon^{i} \odot \varepsilon^{j}$, donc il vérifie, en vertu de (5.13quinto)

$$\text{(5.13sexto)} \qquad \sum_{k=1}^{N} \varpi^{\ell}_{k}(v)\, \xi^{k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\, \varpi^{\ell}_{j}(v)\, L'^{i,j} = 0 \quad , \quad \ell = 1,2,\ldots,N\text{-}d \ .$$

Comme les $\varpi^{\ell}(v)$ sont des formes linéaires indépendantes, on a là, pour déterminer ξ en fonction de L', N-d équations indépendantes, ce sont donc les équations cherchées. Donc :

<u>Proposition (5.13sexto)</u> : <u>Pour que</u> $L = \begin{pmatrix} \xi \\ L' \end{pmatrix} \in \overset{2}{\Theta}(v)$, $\xi = \sum_{k=1}^{N} \xi^{k} e_{k}$, $L' = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L'^{i,j} e_i \odot e_j$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$\text{(5.13septimo)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \varpi^{\ell}_{i}(v)\, L'^{i,j} = 0 \text{ (équations en nombre éxcédentaire exprimant que } L' \in \overset{1}{\Theta}(v) \odot \overset{1}{\Theta}(v)),\ \ell = 1,2,\ldots,N\text{-}d,\ j = 1,2,\ldots,N, \text{ et} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varpi^{\ell}_{k}(v)\, \xi^{k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\, \varpi^{\ell}_{j}(v)\, L'^{i,j} = 0 \text{ (N-d équations indépendantes déterminant } \xi \text{ en fonction de L', modulo } \overset{1}{\Theta}(v), \\ \ell = 1,2,\ldots,N\text{-}d. \end{array} \right.$$

La deuxième équation peut être symétrisée :

$$(5.13\text{octavo}) \qquad \sum_{k=1}^{N} \varpi_k^{\ell}(v)\, \xi^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2} (\partial_i \varpi_j^{\ell}(v) + \partial_j \varpi_i^{\ell}(v))\, L'^{i,j} = 0 \ .$$

En regardant (4.30bis), on voit que :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ L' \end{pmatrix} \in \overset{2}{\Theta} (v) \text{ ssi } L' \in \overset{1}{\Theta}(v) \circ \overset{1}{\Theta}(v) \quad , \text{ et si}$$

$$(5.13\text{noveno}) \qquad (D\varpi^{\ell} | L)_{T^{*2},T^2} = 0 \quad , \quad k = 1,2,\ldots,N-d \ .$$

<u>Proposition (5.14)</u> : <u>Dans les conditions de</u> (5.5), $\overset{2}{\Theta}(v)$ <u>est le plus petit sous-espace vectoriel de</u> $T^2(V,v)$ <u>ayant la propriété suivante</u> : <u>si</u> ξ, η, <u>sont des champs</u> C^1 <u>de vecteurs</u> 1-<u>tangents sur</u> V (i.e. <u>des opérateurs différentiels homogènes d'ordre</u> 1, <u>de classe</u> C^1), <u>si</u> $\xi\eta$, $\eta\xi$ <u>sont leurs produits</u>, <u>champs</u> C^o <u>de vecteurs</u> 2-<u>tangents</u> (<u>ou opérateurs différentiels d'ordre</u> 2, <u>sans terme d'ordre</u> 0, <u>de classe</u> C^o), <u>et si</u> $\xi(w)$, $\eta(w)$ <u>sont dans</u> $\overset{1}{\Theta}(w)$ <u>pour tout</u> $w \in V$, $(\xi\eta + \eta\xi)(v) \in \overset{2}{\Theta}(v)$.

<u>Remarque</u> : Il serait faux, par contre, que $(\xi\eta)(v)$ et $(\eta\xi)(v)$ soient toujours dans $\overset{2}{\Theta}(v)$; sans quoi le crochet $[\xi,\eta](v)$ serait dans $\overset{2}{\Theta}(v) \cap T^1(V,v) = \overset{1}{\Theta}(v)$, et cela voudrait dire que le champ $\overset{1}{\Theta}$ est complèment intégrable, ce qui n'est pas le cas en général.

<u>Démonstration</u> : C'est un excellent exercice de calcul que de voir cela direc- sur la formule (5.9) ! Mais il existe un moyen plus rapide Il suffit évidemment de le faire en remplaçant $\xi\eta + \eta\xi$ par $\xi\xi = \xi^2$, et ensuite de polariser : $(\xi + \eta)^2 = \xi^2 + (\xi\eta + \eta\xi) + \eta^2$. Nous démontrerons d'abord un lemme :

<u>Lemme (5.14bis)</u> : <u>Soit</u> ξ <u>un champ de vecteurs</u> 1-<u>tangents de classe</u> C^1 <u>sur</u> V, <u>et soit</u> X <u>une solution de l'équation différentielle qu'il définit</u>, <u>de sorte que</u> $X'(t) = \xi(X(t))$. <u>Alors l'accélération complète est</u> $\underline{X}''(t) = \xi^2(X(t))$.

Démonstration du lemme : Tout est local. On peut donc supposer que ξ est identiquement nul en dehors d'un compact K de V, de sorte que ξ définit un groupe à un paramètre de C^2 difféomorphismes de V, $\Phi_t : V \to V$, avec $\Phi_o =$ identité, $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$, $\Phi_t =$ identité sur $\complement K$, pour tout t ; on écrira aussi $\Phi(t,v) = \Phi_t(v)$. Le lien entre Φ et ξ est $\frac{d}{dt}\Phi(.,v) = \xi(\Phi(.,v))$. Chaque isomorphisme agit aussi sur l'espace CB(V) des fonctions continues bornées sur V (♦), par $(\Phi_t(\varphi))(v) = \varphi(\Phi_{-t}(v))$, et Φ définit un groupe à un paramètre d'opérateurs de CB dans lui-même. Le générateur infinitésimal de ce groupe est $-\xi$, opérant sur le sous-espace dense Dom (ξ) des fonctions $\varphi \in CB$ pour lesquelles $\xi\varphi \in CB$; si $\varphi \in$ Dom (ξ), la trajectoire $t \mapsto \Phi_t \varphi$ est C^1, et $\frac{d}{dt}(\Phi_t\varphi) = -\xi\,\Phi_t\,\varphi = -\Phi_t(\xi\varphi)$. Alors $\varphi \in$ Dom (ξ^2), c-à-d. $t \mapsto \Phi_t \varphi$ est C^2, ssi $\xi^2\varphi = \xi(\xi(\varphi))$ est continue bornée, et alors $\frac{d^2}{dt^2}\Phi_t\,\varphi = \xi^2\,\Phi_t\,\varphi = \xi\,\Phi_t\xi\varphi = \Phi_t\,\xi^2\,\varphi$. Toute φ bornée et C^2 est dans Dom (ξ^2). Une solution X de l'équation différentielle est $t \mapsto \Phi_t v$, $v \in V$. Son accélération complète $\underline{X}''(0)$ est définie par la propriété (1.16) : pour $\varphi \in C^2(V) \subset$ Dom (ξ^2),

$$(\underline{X}''(0)\,|\,D^2\varphi(v))_{T^2(V,v),T^{*2}(V,v)} = (\varphi \circ X)''(0) = (\frac{d^2}{dt^2}(\varphi(\Phi_t(v)))_{t=0}$$

$$(\frac{d^2}{dt^2}(\Phi_{-t}\varphi))_{t=0}(v) = (\xi^2\varphi)(v) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

Voici une autre démonstration du lemme.

Le lemme est évident en un point où $\xi(v) = 0$; car la solution de l'équation différentielle est $X(t) \equiv v$, donc $\underline{X''(0)} = 0$, et $\xi^2(v) = 0$ d'après (1.7bis). Soit donc $\xi(v) \neq 0$. Au voisinage du point v, on peut prendre une carte sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$; soit $\mathbb{R}^{N-1}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^N$, transversal à $\xi(v)$. Alors $(t,u) \mapsto \Phi_t(u)$ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$ par le théorème des fonctions implicites ; on peut

(♦) On peut prendre bien d'autres espaces ; on veut se retrouver dans la situation familière d'un semi-groupe opérant sur un Banach et de son générateur infinitésimal.

donc prendre $(t,u)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N-1}=\mathbb{R}^N$ comme coordonnées locales au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$. Pour ces coordonnées, et s, t assez petits, $\Phi_t(s,u)=(s+t,u)$. Le groupe de difféomorphisme est devenu le groupe des translations parallèles au vecteur de base e_1 de $\mathbb{R}^N$. Alors le champ ξ est devenu l'opérateur différentiel à coefficients constants ∂_1 ; $\xi^2=\partial_1^2$, le vecteur vitesse sur toute trajectoire est e_1, et l'accélération complète est $e_1\odot e_1=\partial_1^2$, ce qui démontre le lemme.

<u>Démonstration de la proposition (5.14)</u> : Soit ξ un champ C^1, tel que $\xi(v)\in\overset{1}{\Theta}(v)$ pour tout v. Soit X la solution de l'équation différentielle $\frac{dX}{dt}=\xi(X(t))$, valant v à l'instant 0 ; alors $\xi^2(v)=\frac{X''(0)}{2}$, et on sait, par la définition de $\overset{1}{\Theta}(v)$, que $X''(0)\in\overset{2}{\Theta}(v)$, donc $\xi^2(v)\in\overset{2}{\Theta}(v)$.

Inversement, montrons que, si G est le plus petit sous-espace vectoriel de $T^2(V,v)$ tel que, pour tout champ ξ de classe C^1 tangent à $\overset{1}{\Theta}$, $\xi^2(v)\in G$, alors (nous savons déjà que $G\subset\overset{2}{\Theta}(v)$) nécessairement $G\supset\overset{2}{\Theta}(v)$. Reprenons les notations de la démonstration de (5.5), avec $V=B\times F$, $v=(0,0)$. Soit $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\odot\beta\end{pmatrix}\in B\oplus(B\odot B)$, $\beta\neq 0$. Il existe un champ ζ de vecteurs 1-tangents sur B, de classe C^1, tel que $\zeta^2(0)\equiv\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\odot\beta\end{pmatrix}$ [par un changement de coordonnées, on peut supposer que β est vecteur d'une base de B ; prenons pour ζ l'opérateur différentiel sur B : $(1+\alpha^1x^1)\partial_1+\alpha^2x^1\partial_2+\dots+\alpha^dx^1\partial_d$; alors

$$\begin{aligned}\zeta^2(0) &= (((1+\alpha^1x^1)\partial_1+\alpha^2x^1\partial_2+\dots+\alpha^dx^1\partial_d)\\ &\quad((1+\alpha^1x^1)\partial_1+\alpha^2x^1\partial_2+\dots+\alpha^dx^1\partial_d))_{x=0}\\ &= \partial_1^2+\alpha^1\partial_1+\alpha^2\partial_2+\dots+\alpha^d\partial_d=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\odot\beta\end{pmatrix}\end{aligned} \quad ,$$

si $\beta=\partial_1$ et si $\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^d$ sont les coordonnées de α suivant la base B.] Relevons ζ en ξ, $\xi(b,f)=\overset{1}{\sigma}(b,f)\;\zeta(b)$; on obtient un champ ξ de classe C^1, $\xi(v)\in\overset{1}{\Theta}(v)$, $\zeta=\overset{1}{\pi}\xi$. On a donc $\xi^2(0)\in\overset{2}{\Theta}(0)$. On voit aisément, du fait que ζ est un champ sur B de vecteurs $\in B$, que $\zeta^2=\overset{2}{\pi}\xi^2$, donc $\xi^2(b,f)=\overset{2}{\sigma}(b,f)\;\zeta^2(b)$. Donc G doit contenir tous les $\overset{2}{\sigma}(0,0)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\odot\beta\end{pmatrix}$, $\beta\neq 0$; les $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\odot\beta\end{pmatrix}$, $\beta\neq 0$, engendrent

$B\oplus(B\odot B)$; donc G contient $\overset{2}{\sigma}(0,0)(B\oplus(B\odot B)) = \overset{2}{\Theta}(0,0)$.

Remarque : En reprenant la fin de la démonstration, on peut dire ceci : soient ξ, η, deux champs de 1-vecteurs sur B, de classe C^1, et considérons leurs relèvements $\overset{1}{\sigma}\xi$, $\overset{1}{\sigma}\eta$, $(\overset{1}{\sigma}\xi)(b,f) = \overset{1}{\sigma}(b,f)\,\xi(b)$. Alors, comme on le voit en faisant opérer sur des fonctions qui ne dépendent que de b, non de f, le champ de 2-vecteurs $(\overset{1}{\sigma}\xi)(\overset{1}{\sigma}\eta)$ a pour projection sur B le champ de 2 vecteurs $\xi\eta$, et de même pour $\eta\xi$, donc le champ de 2-vecteurs $\overset{1}{\sigma}(\xi)\,\overset{1}{\sigma}(\eta) + \overset{1}{\sigma}(\eta)\,\overset{1}{\sigma}(\xi)$ a pour projection le champ de 2-vecteurs $\xi\eta+\eta\xi$. Mais on vient de voir que $\overset{1}{\sigma}(\xi)\,\overset{1}{\sigma}(\eta) + \overset{1}{\sigma}(\eta)\,\overset{1}{\sigma}(\xi) \in \overset{2}{\Theta}$, donc il est l'image par $\overset{2}{\sigma}$ de sa projection :

(5.14ter) $$\overset{1}{\sigma}(\xi)\,\overset{1}{\sigma}(\eta) + \overset{1}{\sigma}(\eta)\,\overset{1}{\sigma}(\xi) = \overset{2}{\sigma}(\xi\eta+\eta\xi) .$$

Voici maintenant un résultat de P.A. Meyer suivant (4.25) [cf. P.A. Meyer [2], § 6, pages 70 et suivantes].

Proposition (5.15) : Avec les notations de (5.5) et (4.25), $\overset{2}{\Theta}(v)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $T^2(V,v)$ tel que, si ϖ est un champ de vecteurs 1-cotangents de classe C^1, partout orthogonal à $\overset{1}{\Theta}$, $D\varpi(v)$ soit orthogonal à $\overset{2}{\Theta}(v)$ (en d'autres termes, $\overset{2}{\Theta}(v)$ est l'orthogonal de tous les $D\varpi(v)$, ϖ de classe C^1 partout orthogonale à $\overset{1}{\Theta}$). Cette définition de $\overset{2}{\Theta}(v)$ a l'avantage d'être d'emblée vectorielle : l'ensemble des $D\varpi(v)$, pour ϖ partout orthogonal à $\overset{1}{\Theta}$, est un sous-espace vectoriel de $T^{*2}(V,v)$, et $\overset{2}{\Theta}(v)$ est son orthogonal.

Démonstration : Il est évident que, si X est une trajectoire orthogonale à ϖ à tout instant, son accélération complète est orthogonale à $D\varpi$ à tout instant. En effet : $D\varpi(X)(\overset{2}{\underline{X}}(1\odot 1)) = \overset{2}{\underline{X}}{}^{*}(D\varpi)(1\odot 1)$ (au sens de 1.9) $= D(\overset{1}{\underline{X}}{}^{*}\varpi)(1\odot 1)$ (par (4.31)) $= 0$ puisque l'orthogonalité $(\varpi(X)|X') = 0$ peut se traduire par $\overset{1}{\underline{X}}{}^{*}(\varpi) \equiv 0$. Mais la réciproque est moins simple. Mais on pourra utiliser (5.13septimo), en suivant la définition de Meyer. Il sera plus commode de ne pas symétriser en i, j. Une forme ϖ partout orthogonale à $\overset{1}{\Theta}$ a l'expression

$$\varpi = \sum_{\ell=1}^{N-d} \alpha_\ell \overset{\ell}{\varpi} = \sum_{\ell=1}^{N-d} \sum_{k=1}^{N} \alpha_\ell \overset{\ell}{\varpi}_k \varepsilon^k .$$

D'après (4.30bis) :

$$D\varpi = \sum_{\ell=1}^{N-d} \alpha_\ell \overset{\ell}{\varpi}_k \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{N-d} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i (\alpha_\ell \overset{\ell}{\varpi}_j) \varepsilon^i \odot \varepsilon^j$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N-d} \alpha_\ell \left(\sum_{k=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_k \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \overset{\ell}{\varpi}_j \varepsilon^i \odot \varepsilon^j \right)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{N-d} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2} (\partial_i \alpha_\ell) \overset{\ell}{\varpi}_j \varepsilon^i \odot \varepsilon^j .$$

Ecrivons que $L = \begin{pmatrix} \xi \\ L' \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \varepsilon^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} L'^{i,j} \varepsilon^i \odot \varepsilon^j$, $L'^{i,j} = L'^{i,j}$, est orthogonal à toutes les $D\varpi(v)$:

$$\sum_{\ell=1}^{N-d} \alpha_\ell(v) \left(\sum_{k=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_k(v) \xi^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \overset{\ell}{\varpi}_j(v) L'^{i,j} \right)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{N-d} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2} (\partial_i \alpha_\ell)(v) \overset{\ell}{\varpi}_j(v) L'^{i,j} = 0 .$$

Mais les $\alpha_\ell(v)$ et les $\partial_i \alpha_\ell(v)$ sont arbitraires. On obtiendra donc, pour $L = \begin{pmatrix} \xi \\ L' \end{pmatrix}$, les équations :

$$\begin{cases} \displaystyle \sum_{k=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_k(v) \xi^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i \overset{\ell}{\varpi}_j(v) L'^{i,j} = 0 , \quad \ell = 1,2,\dots,N-d ; \\[2ex] \displaystyle \sum_{j=1}^{N} \overset{\ell}{\varpi}_j(v) L'^{i,j} = 0 , \quad i = 1,2,\dots,N ; \ \ell = 1,2,\dots,N-d . \end{cases}$$

Ce sont les équations (5.13septimo) de $\overset{2}{\Theta}(v)$.

Cette construction de $\overset{2}{\Theta}$ à partir de $\overset{1}{\Theta}$ a pour but, comme nous l'avons dit à (5.4), de relier les systèmes différentiels ordinaires et les systèmes différentiels de Stratonovitch pour les semi-martingales :

<u>Proposition (5.16)</u> : <u>Soit</u> $\overset{1}{\Theta}$ <u>un champ</u> C^1 <u>de sous-espaces</u> 1-<u>tangents à</u> V, <u>de dimension constante</u> d. <u>Soit</u> $\overset{2}{\Theta}$ <u>le champ</u> C^o <u>de sous-espaces</u> 2-<u>tangents associé</u>

à $\overset{1}{\Theta}$ par les théorèmes qui précèdent. Soit X une semi-martingale dans A ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans V. Alors dX est tangente à $\overset{1}{\Theta}(X)$ au sens de Stratonovitch, ssi si $d\underline{X}$ est tangent à $\overset{2}{\Theta}(X)$ au sens ordinaire.

Démonstration : 1) Supposons X tangente à $\overset{1}{\Theta}$ (de dimension d). Pour toute forme différentielle ϖ de degré 1, de classe C^1 sur V, orthogonale à $\overset{1}{\Theta}$, $D\varpi$ est orthogonale à $\overset{2}{\Theta}$ par (5.15), et la relation $\varpi(X) \underset{(S)}{\bullet} X = 0$ équivaut à $D\varpi(X) \bullet \underline{X} = 0$, d'après (4.32). Si nous prouvons qu'il existe une suite d'ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant A, telle que, dans chaque $A \cap A_n$, un nombre fini de $D\varpi(X)$ engendre, en tout point (t,ω), le sous-espace $\overset{2}{\Theta}(X(t,\omega))^+$, alors ce nombre fini de $D\varpi(X)$ $\mathcal{O}$pt-engendrera le sous-$\mathcal{O}$pt-module des sections optionnelles de $\overset{2}{\Theta}(X)^+$, et alors, X étant aussi $\mathcal{S}$tr-tangent à $\overset{1}{\Theta}(X)$ sur $A \cap A_n$ par (4.23), $d\underline{X}$ sera bien orthogonal à $\overset{2}{\Theta}(X)^+$ sur A_n, donc sur A, donc $d\underline{X}$ sera tangente à $\overset{2}{\Theta}(X)$. On choisira $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, recouvrement ouvert de V par des domaines de cartes, tel que, dans chaque V'_n, $\overset{1}{\Theta}$ soit défini par l'annulation de N-d formes différentielles indépendantes $(\overset{\ell}{\varpi})_{\ell=1,2,\ldots,N-d}$, et $A_n = X^{-1}(V'_n)$. On est donc, en localisant sur chaque A_n, amené à $V = \mathbb{R}^N$, ce que nous supposerons. Pour que ϖ de classe C^1 soit en tout point v orthogonal à $\overset{1}{\Theta}(v)$, il faut et il suffit qu'elle soit une combinaison linéaire à coefficients C^1 des $\overset{\ell}{\varpi}$, $\varpi = \sum_{\ell=1,2,\ldots,N-d} \alpha_\ell \overset{\ell}{\varpi}$. Mais, pour tout $v \in V$, il existe une unique fonction affine $\overline{\alpha}_\ell$ sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\alpha_\ell - \overline{\alpha}_\ell$ soit 1-plate en v ; alors $D\varpi(v) = \sum_{\ell=1,2,\ldots,N-d} (D(\overline{\alpha}_\ell \overset{\ell}{\varpi}))(v)$. Donc les $D(\overline{\alpha}_\ell \overset{\ell}{\varpi})$, $\ell = 1,2,\ldots,N-d$, $\overline{\alpha}_\ell$ affines, engendrent, en tout point v de V, $\overset{2}{\Theta}(v)$. Les fonctions $D(\alpha_m \overset{\ell}{\varpi})$, $\ell = 1,2,\ldots,N-d$, $m = 0,1,2,\ldots,N$, $\alpha_0 = 1$, α_k = coordonnée x_k pour $k = 1,2,\ldots,N$, répondent à la question : en tout point $v \in V$, elles engendrent $\overset{2}{\Theta}(v)$.

2) Supposons $\underline{X}$ tangente à $\overset{2}{\Theta}(X)$ sur A. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ recouvrant A tels que, sur A_n, X prenne ses valeurs dans un ouvert de V où $\overset{1}{\Theta}$ soit défini par l'annulation de N-d formes différentielles indépendantes $\overset{\ell}{\varpi}$, $\ell = 1,2,\ldots,N-d$. Alors $D\overset{\ell}{\varpi}(X)$ est dans $\overset{2}{\Theta}(X)^+$ sur A_n, par (5.15), donc $\overset{\ell}{\varpi}(X) \underset{(S)}{\bullet} X = D\overset{\ell}{\varpi}(X) \bullet \underline{X} \sim 0$. Mais (4.23) dit que, sur A_n, tout

$J \in T^{*1} \mathcal{S}tr(X)$ qui est dans $\overset{1}{\Theta}(X)^+$ est combinaison $\mathcal{S}$tr-linéaire des $\varpi^{\ell}(X)$, donc X est $\mathcal{S}$tr-orthogonal à $\overset{1}{\Theta}(X)^+$ sur A_n, donc sur A, donc tangente à $\overset{1}{\Theta}(X)$ au sens de Stratonovitch.

<u>Proposition (5.17)</u> : <u>Soit $\overset{1}{\Theta}$ un champ de sous-espaces vectoriels 1-tangents de classe C^1 sur V, complètement intégrable, donc définissant un feuilletage de V, de dimension d. Soit $\overset{2}{\Theta}$ le champ 2-tangent de classe C^o associé par (5.5). Si X est $\mathcal{S}$tr-tangente à $\overset{1}{\Theta}$ (ou tangente à $\overset{2}{\Theta}$) en chacun de ses points, presque sûrement toute trajectoire est tout entière dans la feuille de son point de départ (qui n'est pas le même pour toutes les trajectoires : X_o est une variable aléatoire, la feuille de $X_o(\omega)$ dépend de ω.)</u>

<u>Démonstration</u> : Appelons T le temps de sortie de X de la feuille de X_o ; montrons que c'est un temps d'arrêt. L'ensemble C des (x,y) de $V \times V$ qui sont dans la même feuille est un borélien (un F_σ) de $V \times V$. [On considère d'abord, pour une structure riemannienne sur V, l'ensemble C(L) des couples (x,y) qu'on peut joindre par une courbe rectifiable à feuille constante de longueur $\leq L$; en utilisant la compacité de l'ensemble des applications f de $[0,L]$ dans V, lipschitziennes : $|f(t) - f(s)| \leq |t - s|$, pour lesquelles f(0) varie dans un compact de V, on voit que C(L) est fermé dans $V \times V$; et $C = \bigcup_L C(L)$.] Si on munit $V \times V$ de sa tribu borélienne, produit tensoriel des tribus boréliennes, $(t,\omega) \mapsto (X_o(\omega), X_t(\omega))$ est optionnelle à valeurs dans $V \times V$; donc l'ensemble des (t,ω) pour lesquels $(X_o(\omega), X_t(\omega)) \in C$ est optionnelle, et T, son temps de sortie, est bien un temps d'arrêt.

Soit $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de V, tel que, dans chaque V'_n, le feuilletage soit un produit. Soit T_n le temps de sortie $\geq T$. Dans $[T,T_n[$, X est dans V'_n. Dans V'_n, il existe N-d fonctions C^2 indépendantes, $(F_k)_{k=1,2,\ldots,N-d}$, telles que les feuilles aient, dans V'_n, les équations F_k = constante. Chaque $D^2F_k(v)$ est dans le sous-espace orthogonal dans $T^{*2}(V,v)$ au sous-espace 2-tangent $\overset{2}{\Theta}(V,v)$ à la feuille de V en v ; puisque $d\underline{X}$ est 2-tangente à la feuille, $D^2F_k(X) \cdot \underline{X} \sim 0$ dans $[T,T_n[$, définition (3.10sexto), ou $F_k(X)$ = constante dans $[T,T_n[$; donc X reste dans la même feuille dans $[T,T_n[$, donc $T_n = T$. Ceci étant vrai pour tout n, $T = +\infty$, X reste toujours dans la feuille de X_o.

§ 6. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES, DEFINITIONS ESSENTIELLES

Résumé du § 6. Il s'agit des définitions essentielles pour les équations différentielles stochastiques.
On introduit d'abord des ensembles $A \subset \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ plus généraux que des ouverts : ce sont des ouverts relatifs d'un intervalle $[S,T]$, S temps d'arrêt, T temps $\geq S$, (6.1). On doit étendre à ces A les propriétés de localisation connues pour les ouverts. On définit à (6.4) une équation différentielle stochastique sur un espace vectoriel, et à (6.5) une solution.

(6.1) Nous aurons besoin de considérer des semi-martingales et des équivalences sur des ensembles $A \subset \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ plus généraux que les ouverts. Dans la suite, S sera un temps d'arrêt, T un temps (non nécessairement mesurable) $\geq S$; $[S,T|$ voudra dire un ensemble donné $\bigcup_{\omega \in \Omega} [S(\omega),T(\omega)| \times \{\omega\}$, où $T(\omega)|$ est parfois $T(\omega)]$, parfois $T(\omega)[$, pas nécessairement la même chose pour tous les ω. Alors A sera un ouvert relatif donné de $[S,T|$; il sera commode de l'écrire $(\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,T| \cap A$, où $\Omega' \subset \Omega$ et où A sera un ouvert de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$. Tous les théorèmes d'équivalence énoncés à (3.2) de S[1] pour des ouverts de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ subsistent évidemment pour de tels ensembles A, parce qu'on passe immédiatement de $A \cap]S,T[$, ouvert, à A. Et l'équivalence de deux processus continus sur A est la même sur A et sur $A \cap]S,T[$.

(6.1bis) Soit X une semi-martingale vectorielle. Il existe un plus grand ouvert relatif A' de A où $X \sim 0$, et il est optionnel si A est optionnel et T temps d'arrêt.
Son existence est évidente : $A' \cap]S,T[$ est l'intersection avec $]S,T[$ du plus grand ouvert d'équivalence à 0 de X ; A' est l'adhérence dans A de $A' \cap]S,T[$

par continuité. Mais $X \underset{B}{\sim} 0$ dans un ouvert relatif B de A, pour T temps d'arrêt, ssi $X^T - X^S \sim 0$ dans $B \cup [0,S[\cup]T,+\infty]$, ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Donc A' est l'intersection avec A du plus grand ouvert absolu d'équivalence à 0 de $X^T - X^S$, il est donc optionnel pour A optionnel.

Ceci s'étend immédiatement à X semi-martingale formelle.

<u>(6.2)</u> Nous avons défini dans S[2] (6.5), les semi-martingales dans A pour A ouvert ; nous conservons cette définition pour les ensembles A comme ci-dessus. On ne peut pas nécessairement choisir les A_n optionnels ; on le peut si A <u>est ouvert</u>, <u>ou si</u> $[S,T| = [S,T[$ <u>là où</u> $T < +\infty$, <u>ou si</u> T <u>est lui aussi un temps d'arrêt</u> ; c'est ce que nous appellerons la condition (6.2).
En effet, c'est évident si A est ouvert, on remplace A_n par A'_n, le plus grand ouvert où $\overline{X} = X$; il est optionnel et $\supset A \cap A_n$. On peut toujours remplacer $\overline{X}$ et X_n par une même constante dans $[0,S[$, sans changer leur caractère de processus optionnels et de semi-martingales ; mais alors $\overline{X} = X_n$ dans $((A \cap A_n) \cup [0,S[) \cap [0,T[$ qui est ouvert, de sorte que le plus grand ouvert A'_n d'égalité de $\overline{X}$ et X_n le contient, alors $\bigcup_n A'_n \supset A \cap [S,T[$, ce qui règle le cas où $[S,T| = [S,T[$, et bien évidemment aussi le cas où $[S,T| = [S,T[$ seulement là où $T < +\infty$. Si T est un temps d'arrêt, on peut aussi remplacer $\overline{X}$ et X_n par le processus constant $\overline{X}_T$ dans $[T,+\infty[$, alors $\overline{X} = X_n$ dans $(A \cap A_n) \cup [0,S[\cup [T,+\infty]$ ouvert, donc A'_n contient cet ensemble et $\bigcup_n A'_n = A$, d'où le résultat.

<u>(6.2bis)</u> Les propriétés suivantes de S[2], § 6, énoncées pour A ouvert, sont encore vraies ici : (6.1), (6.2), (6.3) (pour A optionnel), (6.3bis), (6.3ter) (A comme ici, A_n ouverts optionnels de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$; on trouve $\overline{X}$ semi-martingale continue formelle, $X_n \sim \overline{X}$ sur $A \cap]S,T[\cap A_n$ ouvert, donc aussi sur $A \cap A_n$ par continuité), (6.4bis) (A comme ici, les A_n ouverts optionnels ; alors on trouve une semi-martingale formelle $\overline{X}$, $X \sim \overline{X}$ sur $A \cap]S,T[$, donc sur A par continuité), (6.4ter), (6.5quinto). [Pour (6.5quinto), on doit modifier complètement la démonstration, parce que T n'est plus un temps d'arrêt, et qu'on ne peut donc plus supposer X_n arrêté en T. Par contre ici X est continue dans A. On définira

$X_{n,m}$ comme suit : c'est une constante $\in K_m$ dans $[0,s[$, c'est $\overline{X}_s$ dans $[s,+\infty] \times \{S_{n,m} = s\}$, où $\overline{X}$ est un prolongement optionnel de X, à valeurs dans V', c'est $X_s^{(S_{n,m})-}$ dans $[s,+\infty] \times \{S_{n,m} > s\}$. C'est une semi-martingale, elle prend ses valeurs dans V' (à cause de $X_n^{(S_{n,m})-}$) et, pour tout ω, $\overline{X_{n,m}(\omega)} \subset V'$; donc (voir S[1], (1.2) page 6) c'est une semi-martingale à valeurs dans V'. Ensuite $X = X_{n,m}$ dans l'intérieur relatif $|s,S_{n,m}|$ de $[s,S_{n,m}]$ dans $A \cap A_n$ (c'est évident pour $S_{n,m} = s$; pour $S_{n,m} > s$, il y a égalité dans $[s,S_{n,m}[$, mais on a pris $X_n^{(S_{n,m})-}$ et X est continue). Il reste à voir que les intérieurs relatifs des $[s,S_{n,m}]$ dans $A \cap A_n$ recouvrent A. Tous les raisonnements de (6.5quinto) sont valables sauf ceux pour lesquels $t = T(\omega)$. Mais alors, une fois trouvé s comme dans (6.5quinto) de S[2], $S_{n,m}(s)(\omega) \geq T(\omega)$, donc l'intérieur relatif de $[s,S_{n,m}(s)\omega]$ contient le point $t = T(\omega)$, d'où le résultat.

Il existe un tout autre raisonnement possible, analogue à celui de (4.0bis), en remplaçant Stratonovitch par semi-martingale (continue) (ce qui est plus simple) ; $X^{-1}(V''_n)$ n'est plus un ouvert puisque A n'est pas ouvert, mais c'est un ouvert relatif de A, ce qui suffit. Nous laisserons au lecteur le soin de faire cette autre démonstration, s'il le désire], puis (6.6bis) (toutefois, pour le plus grand ouvert A où $X \sim Y$, nous ne nous inquièterons pas de savoir à quelle condition il est optionnel), (6.6ter). (Ici aussi, il y a quelque-chose à modifier. On prendra S_n à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, et on appellera $|s,S_n|$ l'intérieur relatif de $[s,S_n]$ dans $A \cap A_n$. On appellera ensuite S'_n le temps de sortie $\geq S$ de $A \cap A_n$, à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, et on appellera $|S,S'_n|$ l'intérieur de $[S,S'_n]$ dans $A \cap A_n$. Alors, dans chaque $|s,S_n|$ et dans chaque $|S,S'_n|$, X est restriction d'une semi-martingale, et les $|s,S_n|$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $n \in \mathbb{N}$, et $|S,S'_n|$, $n \in \mathbb{N}$, sont des ouverts relatifs de A recouvrant A], (6.7), (6.8), (6.11), (6.12) ; et aussi les résultats antérieurs du présent article : (2.18), (2.20), (3.15quinto), (3.18), (3.19), (4.21), (4.23) à (4.23quinto).

C'est désormais sur de tels ensembles $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ qu'on travaillera.

(6.3.0) Systèmes différentiels et équations différentielles.

Il faut bien distinguer ces deux notions. Pour un système différentiel déterministe, défini au § 5, on se donne un champ $\overset{1}{\Theta}$ de sous-espaces vectoriels 1-tangents, $\overset{1}{\Theta}(v)$ sous-espace vectoriel de $T^1(V,v)$, et on cherche une solution, c-à-d. une courbe $X : t \mapsto X_t$, telle qu'à chaque instant t, la courbe soit tangente à $\overset{1}{\Theta}$, $X'(t) \in \overset{1}{\Theta}(X(t))$. En général dim $\overset{1}{\Theta} = d > 1$; mais, même si dim $\overset{1}{\Theta} = d = 1$, on ne se donne pas la vitesse $X'(t)$, mais seulement la tangente $\overset{1}{\Theta}(X(t))$. Une équation différentielle déterministe consiste à se donner un champ de vecteurs 1-tangents H sur V, et on cherche une solution, c-à-d. une courbe telle que $X'(t) = H(X(t))$; à chaque instant, non seulement sa tangente, mais sa vitesse est donnée. Bien évidemment une équation différentielle définira un système différentiel, en appelant $\overset{1}{\Theta}(v)$ le sous-espace vectoriel $[H(v)]$ engendré par $H(v)$. Et chaque système différentiel donne lieu à une infinité d'équations différentielles, en choisissant un champ H tel que, pour tout $v \in V$, $H(v) \in \overset{1}{\Theta}(v)$. Ceci est le point de vue déterministe indépendant du temps, mais on peut supposer que Θ et H dépendent du temps. Les théorèmes d'existence et d'unicité sont relatifs aux équations différentielles. Nous avons traité au § 1 les systèmes différentiels indépendants du temps, en regardant comment des semi-martingales pouvaient en être solutions. Nous étudierons maintenant les équations différentielles stochastiques, d'abord dans des espaces vectoriels, puis sur des variétés, et elles dépendront de t et ω.

<u>(6.3)</u> On appellera alors équation différentielle stochastique sur E une formule

$$dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\, dZ^k \quad , \text{ou} \quad X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,\ ) \cdot Z^k \quad ;$$

H est une fonction optionnelle sur $A \times E \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times E$ à valeurs dans E (ce qui voudra dire : $H_k(x,.,.)$ est optionnelle sur A pour tout $x \in E$), continue en x ($H_k(.,t,\omega)$ est continue sur E pour tout $(t,\omega) \in A$), et où les Z^k sont des classes d'équivalence sur A de semi-martingales (continues) formelles. L'inconnue et le processus X sur A sont à valeurs dans E. X doit être optionnel, et alors $H_k(X,.,.) : (t,\omega) \mapsto H_k(X(t,\omega),t,\omega)$ est optionnel sur A à valeurs dans E (voir démonstration de (5.3)), donc on peut l'intégrer par rapport à Z^k, (6.8) de S[2]. On demande que l'intégrale du 2nd membre, soit I(X), classe d'équivalence sur A de semi-martingales formelles, soit équivalente à X. Il faut donc pouvoir dire si le processus optionnel X est équivalent sur A à une semi-martingale (continue) formelle. Nous supposerons donc X semi-martingale (continue) sur A, et pas seulement optionnel, et alors il définira bien une classe d'équivalence sur A de semi-martingales (continues) formelles, par (6.7) de S[2], et on pourra exiger l'équivalence $X \sim I(X)$ pour dire que X est solution de l'équation différentielle.

Ces hypothèses sur H_k, Z^k, X sont suffisantes pour que les expressions employées aient un sens, mais pas pour avoir des théorèmes. Nous supposerons donc beaucoup plus ; en particulier tout en cherchant X sur A, nous supposerons les H_k et Z_k définies sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

<u>(6.3bis)</u> Soit E un espace vectoriel de dimension N, et soit H une fonction sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans E. Supposons qu'il existe une suite $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de E, et une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles (donc finies) ≥ 0 telles que $|H| \leq M_n$, i.e. $|H(x,t,\omega)| \leq M_n(\omega)$ sur $U'_n \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$; on dira que H est localement bornée (localement a ici un sens topologique, sur E) ; on dira que H est globalement bornée si l'un des U'_n est E. Supposons qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles ≥ 0 telles que

$$|H(x',t,\omega) - H(x'',t,\omega)| \leq K_n(\omega)\ |x' - x''| \quad ,$$

pour $x', x'' \in U'_n$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\omega \in \Omega$.

On dira que H est localement lipschitzienne (sous-entendu : en x) ; on dira qu'elle est globalement lipschitzienne si l'un des U'_n est E.

On dira enfin que H est optionnelle si, pour tout $x \in E$, $H(x,.,.)$ est optionnelle sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans E. Si K est un compact de E, et si H est localement bornée et lipschitzienne, elle l'est globalement sur $K \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. S'il existe un point x_o de E tel que $|H(x_o,.,.) \leq M$, et si H est localement lipschitzienne, elle est localement bornée.

Définition (6.4) : Soit E un espace vectoriel. On appelle équation différentielle stochastique EDS sur E une formule

$$dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\, dZ^k \quad , \quad \text{ou} \quad X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.) \cdot Z^k \quad ,$$

où les Z^k sont des semi-martingales réelles continues sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et les H_k des fonctions sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans E, optionnelles localement bornées et localement lipchitziennes au sens de (1.3bis).

Définition (6.5) : Soit X une semi-martingale (continue) dans A, donc définissant une classe d'équivalence dans A de semi-martingales (continues) formelles à valeurs dans E. En portant X dans les H_k, on obtient des processus $H_k(X,.,.)$ optionnels dans A, donc le 2ème membre $\sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.) \cdot Z^k = I(X)$ est aussi une classe d'équivalence dans A de semi-martingales formelles. On dit que X est solution dans A de EDS si $X \underset{A}{\sim} I(X)$. En supposant X défini dans A, comme ci-dessus, il est dit solution dans un ouvert relatif A' de A si $X \underset{A'}{\sim} I(X)$; et X est solution dans A ssi il est solution dans $A \cap]S,T[$, ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (par continuité). On remarquera que, si Z^k est définie seulement sur $[S,T]$, S et T temps d'arrêt, $T \geq S$, et semi-martingale continue sur $[S,T]$, on se ramène aussitôt à la situation précédente, en remplaçant Z^k par la semi-martingale $(Z^k)^T - (Z^k)^S$, nulle sur $[0,S[$, égale à $Z^k - Z^k_S$ dans $[S,T[$, $Z^k_T - Z^k_S$ dans $[T,+\infty]$, qui lui est équivalente sur $[S,T]$.

Proposition (6.6) : Soit X une semi-martingale dans A, à valeurs dans E. Il existe un plus grand ouvert relatif A' de A où X est solution de EDS ; il est optionnel si A est optionnel et T temps d'arrêt.

Démonstration : C'est le plus grand ouvert relatif d'équivalence de deux semi-martingales ; on applique (6.1bis).

§ 7. EXISTENCE ET PROPRIETES DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Résumé du § 7. On rappelle le théorème fondamental (connu) d'existence et d'unicité pour une équation sur un espace vectoriel E, pour des coefficients bornés et lipschitziens, (7.1). Puis on démontre le même théorème pour des coefficients seulement localement bornés et lispchitziens, (7.2). La proposition (7.3) définit le temps de mort ζ de la solution et son intervalle d'exitence $[S,\zeta|$; ζ est un temps d'arrêt prévisible. La proposition (7.4) donne des résultats très généraux, mais qui semblent nouveaux : ou bien $[S,\zeta| = [S,\zeta]$ (alors nécessairement $\zeta = +\infty$), ou bien $[S,\zeta| = [S,\zeta[$, mais alors X_t tend vers l'infini quand $t < \zeta$ tend vers ζ. La proposition (7.6) étudie le cas des coefficients globalement bornés.

Proposition (7.1) : Supposons les H_k de EDS (localement bornés mais) globalement lipschitziens : il existe une variable aléatoire $K \geq 0$ tel que, $\forall\, x', x'' \in E$, $\forall\, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall\, \omega \in \Omega$,

$$|H_k(x',t,\omega) - H_k(x'',t,\omega)| \leq K(\omega)\ |x' - x''| \quad .$$

Soient S un temps d'arrêt, a une fonction sur Ω à valeurs dans E, $\mathcal{T}_S$-mesurable. Il existe un processus unique X sur $[S,+\infty]$, solution de EDS dans $[S,+\infty]$, égal à a au temps S ; il est restriction de semi-martingale. [Dans de telles conditions, X est à trajectoires bornées, donc $H(X,\cdot,\cdot)$ aussi, donc chaque intégrale stochastique $H_k \cdot Z^k$ est une vraie semi-martingale. Sur $[S,T]$, en outre, toute semi-martingale est restriction de semi-martingales par S[1], proposition (2.4).]

Principe de la démonstration : Le fait qu'il soit restriction de semi-martingale résulte de S[1], proposition (2.4). On cherche alors une semi-martingale répondant à la question, en écrivant que, si on la prolonge par 0 sur $[0,S[$, elle vérifie l'équation intégrale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$

(7.1bis) $$X = 1_{[S,+\infty]}\, a + \sum_k H_k(X,.,.) \circ (Z^k - (Z^k)^S) \quad ,$$

et on résout par approximations successives, convergentes suivant Picart, comme des quotients de puissances par des factorielles. Ce théorème est connu, nous l'admettrons. [On trouvera une démonstration très moderne par M. Emery, dans Séminaire de Probabilités, Strasbourg, 1977-1978, Lecture Notes in Maths., Springer-Verlag, No 721 (1979), p. 281-293.]

Proposition (7.2) : Reprenons les hypothèses générales de (6.4).

1) Existence. Pour S temps d'arrêt, a fonction $\mathcal{C}_S$-mesurable sur Ω à valeurs dans E, il existe un temps d'arrêt $T \geq S$, $> S$ là où $S < +\infty$, et un processus X sur $[S,T]$, restriction de semi-martingale, solution de EDS dans $[S,T]$, égal à a au temps S.

2) Unicité. Si T est un temps d'arrêt, T un temps (non nécessairement mesurable) $\geq S$, $\Omega' \subset \Omega$, si X^1 et X^2 sont deux processus sur $A = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,T|$, solutions de EDS et égaux en S là où $A \cap$ (graphe de S) n'est pas vide, ils coïncident.

Démonstration. 1) Existence. Soit $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de E, tel que les H_k soient bornés et lispchitziens dans $U'_n \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Soit $(U''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un recouvrement subordonné. Il existe une fonction $\overline{H}_{k,n}$ sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, optionnelle, globalement bornée et lipschitzienne à valeurs dans E, qui coïncide avec H_k sur $\overline{U}''_n \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (il suffit d'appeler α_n une fonction C^∞ sur E, à support dans U'_n, égale à 1 sur $\overline{U}''_n$, et de prendre $\overline{H}_{k,n} = \alpha_n H_k$). Soit $\Omega''_n = a^{-1}(U''_n)$, ensemble de $\mathcal{C}_S$. On résoud l'équation $(\overline{EDS})_n$, obtenue en remplaçant H_k par $\overline{H}_{k,n}$, avec la même valeur initiale a, grâce à (2.1). Soit T''_n le temps de sortie de la solution $\overline{X}_n$ de U''_n. Alors $T_n \geq S$, et $> S$ sur Ω''_n là où $S < +\infty$, à cause de la continuité à droite. Soient $\Omega_o = \Omega''_o$, $\Omega_1 = \Omega''_1 \setminus \Omega''_o, \ldots, \Omega_n = \Omega''_n \setminus \Omega''_o \setminus \ldots \setminus \Omega''_{n-1}, \ldots$. Soit X une semi-martingale égale à $\overline{X}_n$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega_n) \cap [S,+\infty]$ (on a là une réunion dénombrable stationnaire d'ensembles semi-martingales) ; soit T le temps d'arrêt égal à T''_n sur Ω_n ; X et T répondent à la question.

2) Unicité.

a) Montrons d'abord que, si X^1 et X^2 sont solutions de EDS dans $[S,T]$, T temps d'arrêt $\geq S$, et égales à $a \in \mathcal{C}_S$ au temps S, il existe un temps d'arrêt T', $S \leq T' \leq T$, $T' > S$ là où $T > S$, tel qu'elles coïncident dans $[S,T]$. Reprenons les U''_n et Ω''_n, Ω_n, de la démonstration précédente. X^1 et X^2 sont aussi solutions de $\overline{(EDS)}_n$ dans $[S,T'''_n]$, où T'''_n est le premier temps de sortie de X^1 ou X^2 de U''_n ; $S \leq T'''_n \leq T$, et $T'''_n > S$ sur $\{T > S\} \cap \Omega''_n$. Alors $(X^1)^{T'''_n}$ et $(X^2)^{T'''_n}$ sont toutes deux solutions de $\overline{\overline{(EDS)}}_n$, obtenu en remplaçant dans $\overline{(EDS)}_n$ les Z^k par $(Z^k)^{T'''_n}$, mais maintenant dans $[S,+\infty]$ et non seulement $[S,T'''_n]$, et égales partout au temps S ; d'après l'unicité de (7.1), elles coïncident dans $[S,+\infty]$, donc X^1 et X^2 coïncident dans $[S,T'''_n]$. En prenant $T' = T'''_n$ sur Ω_n, X^1 et X^2 coïncident maintenant dans $[S,T']$, et $T' > S$ là où $T > S$.

b) Montrons maintenant l'unicité pour $[S,T]$, T temps d'arrêt $\geq S$. Soit $T'' = T \wedge \operatorname{Inf}\{t \geq S\,;\, X^1_t \neq X^2_t\}$; c'est un temps d'arrêt, $S \leq T'' \leq T$. Par continuité, $X^1 = X^2$ dans $[S,T'']$. Mais, d'après les parties 1) et 2a), en résolvant l'équation avec la condition initiale $X = X^1_{T''} = X^2_{T''}$ au temps T'', on voit qu'il existe un temps d'arrêt $T' \geq T''$, $> T''$ là où $T'' < +\infty$, a fortiori là où $T'' < T$, tel que X^1 et X^2 soient encore égales dans $[T'',T']$, donc dans $[S,T']$; donc nécessairement $T'' = T$.

c) Considérons maintenant $[S,T|$, T temps d'arrêt. Supposons d'abord X^1, X^2 restrictions de semi-martingales $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$. En les remplaçant par le processus constant $\overline{X}^1_S$ sur $(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \{S = T\}) \cap [T,+\infty]$, et par les processus constants $\overline{X}^1_{T_-}$, $\overline{X}^2_{T_-}$ sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \{T > S\}) \cap [T,+\infty]$, elles prolongent toujours X^1 et X^2, sont encore des semi-martingales, continues dans $[S,+\infty]$, solutions de (EDS) dans $[S,T]$, égales en S; d'après b), elles sont égales dans $[S,T]$, donc $X^1 = X^2$ dans $[S,T|$. Dans le cas général, elles sont dans $[S,T[$ des semi-martingales ; donc, d'après Strickert (cf. S[2], (6.5ter), page 55-467), il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt $\geq S$, tendant vers T, tels que, dans $[S,T_n[$, elles soient restrictions de semi-martingales. Ce que nous de voir montre alors qu'elles coïncident dans $[S,T_n[$, donc dans $[S,T[$, donc dans $[S,T|$ par continuité.

d) T temps quelconque $\geq S$, $A = [S,T|$. Soient $\overline{X}^1$ et $\overline{X}^2$ des processus optionnels sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, prolongeant X^1 et X^2 ; on peut les supposer égaux partout au temps S. Il existe un plus grand ouvert relatif de $[S,+\infty]$ où ils sont tous deux solutions de EDS, par (6.6), et il est optionnel ; son temps de sortie $\geq S$ est un temps d'arrêt T'. Bien évidemment $T' \geq T$. Alors $\overline{X}^1 = \overline{X}^2$ dans $[S,T'[$ par c), donc $X^1 = X^2$ dans $[S,T[$, donc dans $[S,T|$ par continuité.

e) Cas général. On remplace T par $T' = T$ sur Ω', S sur $\complement\Omega'$, $[S,T'| = [S,T|$ sur Ω', $=[S,S[= \emptyset$ sur $\complement\Omega'$, et on est ramené à $[S,T'|$, cas d).

Proposition (2.3) : Pour une équation différentielle stochastique EDS, et une donnée initiale a $\mathcal{T}_S$-mesurable au temps d'arrêt S, il existe une solution maxima X, définie dans un intervalle stochastique $[S,\zeta|$, ζ temps de mort. Le temps d'arrêt ζ est prévisible, > 0, $\geq S$, $> S$ là où $S < +\infty$. La solution X est maxima au sens suivant : d'une part elle est solution de EDS, et $X_S = a$; d'autre part, si X' est une solution de EDS dans $A = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,T|$, égale à a au temps S là où A n'est pas vide, alors $A \subset [S,\zeta|$, et $X' = X$ dans A. L'intervalle $[S,\zeta|$ est $[S,\zeta]$ exactement là où $S = \zeta$ et là où $\zeta > S$ et X_{ζ_-} existe ; ζ vaut alors $+\infty$.

Démonstration : 1) On considère tous les temps d'arrêt T pour lesquels il existe une solution dans $[S,T]$, et on prend pour ζ leur borne supérieure λ-essentielle ; c'est la plus petite (aux ensembles λ-négligeables près) variable aléatoire qui soit λ-ps. $\geq$ à tous ces T. On sait que ζ est l'enveloppe supérieure d'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces temps d'arrêt, donc ζ est un temps d'arrêt. D'après (7.2), 1), $\zeta > S$ là où $S < +\infty$, donc $\zeta > 0$ partout.

2) Une solution X^i dans $[S,T_i]$ et une solution X^j dans $[S,T_j]$ coïncident dans $[S,T_i \wedge T_j]$ par l'unicité (7.2), 2), donc définissent un même processus $X^{i,j}$ dans $[S,T_i \vee T_j]$, restriction de semi-martingale (celle qui vaut X dans $[S,T_i[$, X^j dans $[T_i,T_i \vee T_j[$, et le processus constant $X^{i,j}_{T_i \vee T_j}$ dans $[T_i \vee T_j,+\infty]$), solution de EDS et valant a au temps S. Il en résulte que ζ est limite d'une suite croissante de temps d'arrêt $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que les solutions définissent un même processus X, continu, restriction de semi-martingale dans $[S,\zeta_n]$, solution de EDS dans chaque $[S,\zeta_n]$ donc dans $[S,\zeta[$.

3) Soit X' une solution dans un $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega) \cap [S,T|$, qu'on peut remplacer par un $[S,T|$ par la méthode de démonstration de (7.2), 2), e), restriction à $[S,T|$ d'un processus optionnel X' et solution de EDS, valant a en S là où $[S,T|$ n'est pas vide. Alors X et X' sont toutes deux solutions dans $[S,\zeta[\cap [S,T|$, égales en S donc égales par l'unicité (7.2) ; elles définissent donc un même processus X" dans $[S,\zeta[\cup [S,T|$, restriction d'un processus optionnel $\overline{X}''$ (valant X dans $[S,\zeta[$ et $\overline{X}'$ dans son complémentaire), et solution. On considèrera le plus grand ouvert de $[S,+\infty]$ où $\overline{X}''$ est solution (6.6), et son temps de sortie au-delà de S, soit T", temps d'arrêt ; $\overline{X}''$ est solution dans $[S,T''[$ et prend la valeur a en S. Mais il existe une suite $(T''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt $\geq S$, tendant vers T", telle que $\overline{X}''$ soit dans $[S,T''_n[$, restriction d'une semi-martingale $\overline{X}''_n$ par Strickert (cf. S[2], (6.5ter), page 55-467) ; alors $X''_{(T''_n)_-}$ existe là où $T''_n > S$, et le processus obtenu en remplaçant $\overline{X}''_n$ dans $[T''_n,+\infty]$ par le processus constant a, là où $T''_n = S$ et par $X''_{(T''_n)_-}$ là où $T''_n > S$, est une semi-martingale, solution dans $[S,T''_n]$. D'après la définition de ζ, $T''_n \leq \zeta$, donc $T'' \leq \zeta$, donc $T \leq \zeta$, et $X' = X$ dans $[S,T[$.

4) Il n'y aura possibilité de prolonger X en solution dans $[S,\zeta]$ qu'en prenant les $[S(\omega),\zeta(\omega)]$ parmi les points pour lesquels $\zeta(\omega) = S(\omega)$ $(= +\infty)$ ou pour lesquels $X(\zeta_-(\omega),\omega)$ existe. Considérons effectivement l'ensemble Ω' des points pour lesquels $S < +\infty$ et X_{ζ_-} existe ; il est dans $\mathcal{T}_\zeta$, et, sur cet ensemble, X_{ζ_-} est $\mathcal{T}_\zeta$-mesurable. Alors, d'après l'existence (7.2),1), il existe un temps d'arrêt $\zeta' \geq \zeta$, $> \zeta$ là où $\zeta < +\infty$, et une solution X' de EDS dans $[\zeta,\zeta']$, prenant la valeur X_{ζ_-} au temps ζ sur Ω', une valeur constante au temps ζ sur $\complement\Omega'$. Le recollement de X et de X' dans $[S,\zeta']$, est solution dans $[S,\zeta[$ et dans $[\zeta,\zeta']$, et continu sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,\zeta']$; alors il est solution dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,\zeta']$, ce qui entraîne $\zeta' = \zeta$ sur Ω', donc $\zeta = +\infty$. Et alors, sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,+\infty]$, X prolongé par X_{∞_-} au temps $+\infty$ là où $S < +\infty$, est bien solution de EDS. On obtient bien l'intervalle maximum indiqué $[S,\zeta|$, où c'est $[S,\zeta] = [S,+\infty]$ exactement là où $\zeta = S = +\infty$ et là où $S < \zeta$ et X_{ζ_-} existe.

5) Si $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt tendant vers ζ, tels que X soit solution dans $[S,\zeta_n]$ d'après 1), de sorte que $X_{\zeta_n -}$ existe, nécessairement $\zeta_n < \zeta$ là où $\zeta < +\infty$, comme nous venons de le voir ; donc la suite des

$\zeta_n \wedge n$ annonce ζ, qui est prévisible.

Corollaire (7.3bis) : Soient EDS, EDS' deux équations différentielles stochastiques, S, S' deux temps d'arrêt, $a \in \mathcal{T}_S$, $a' = \mathcal{T}_{S'}$. Si $\Omega^{\bullet} \subset \Omega$, et si, sur $\Omega^{\bullet}$, $a = a'$, $S = S'$, et si, sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}$, EDS = EDS', [nous entendons par là que $Z^k \sim Z'^k$, et $H_k(v,t,\omega) = H'_k(v,t,\omega)$] alors, sur $\Omega^{\bullet}$, les temps de mort ζ, ζ' coïncident, $[S,\zeta| = [S',\zeta'|$, et, dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}$, les solutions maxima X, X' coïncident.

Démonstration : X' est solution de EDS' donc de EDS dans $((\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}) \cap [S',\zeta'| = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}) \cap [S,\zeta'|$, avec $a' = a$ sur $\Omega^{\bullet}$; donc $\zeta' \leq \zeta$ sur Ω', $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}) \cap [S',\zeta'| \subset (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega^{\bullet}) \cap [S,\zeta|$, et $X' = X$ dans cet intervalle. En raisonnant en sens inverse, on obtient le résultat.

Proposition (7.4) : 1) Sur l'ensemble $\Omega'(K)$ des ω pour lesquels la trajectoire $X(\omega)$ reste tout entière dans le compact K dans $[S,\zeta[$, X_{ζ_-} existe là où $S < +\infty$, donc $\zeta = +\infty$ et $[S,\zeta| = [S,+\infty]$. Sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'(K) \cap [S,+\infty]$, X est restriction de semi-martingale. Sur $X^{-1}(K)$, séjour de X dans K, X est restriction d'une semi-martingale.

2) Soit Ω' l'ensemble des ω pour lesquels la trajectoire $X(\omega)$ est relativement compacte dans $[S,\zeta[$; c'est aussi $\bigcup_K \Omega'(K)$ pour tous les compacts K de E, et l'ensemble où $S = +\infty$ où X_{ζ_-} existe. Donc ζ y vaut $+\infty$, et $[S,\zeta|$ y vaut $[S,+\infty]$. Il existe une suite $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, croissante et tendant vers $+\infty$, stationnairement sur Ω', tels que, dans chaque $[S,\zeta_n]$, X soit restriction de semi-martingale. Si $\Omega' = \Omega$, X est, sur $[S,+\infty]$, restriction de semi-martingale.

3) Soit $\Omega'' = \complement \Omega'$ l'ensemble des ω pour lesquels la trajectoire $X(\omega)$ n'est pas relativement compacte ; ζ y est fini ou infini mais $[S,\zeta|$ est toujours $[S,\zeta[$; sur Ω'', quand $t < \zeta$ tend vers ζ, X_t tend vers l'infini dans E.

Démonstration : 1) Il existe un voisinage U' de K tel que les H_k soient bornés et lipschitziens sur $U' \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$; donc il existe $\overline{H}_k$ définie sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, partout bornée et lipschitzienne, égale à H_k sur $K \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Alors on peut résoudre l'équation $\overline{(\mathrm{EDS})}$, où H_k est remplacée par $\overline{H}_k$, avec une valeur initiale au temps S égale à a sur $a^{-1}(K) \supset \Omega'(K)$, et à une constante quelconque sur $\complement\, a^{-1}(K)$. On trouve une solution Y dans $[S,+\infty]$ par (7.1). Alors X est solution aussi de $\overline{(\mathrm{EDS})}$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'(K)) \cap [S,\zeta|$; elle ne prend pas la même valeur que Y au temps S, mais, en la remplaçant par Y sur le complémentaire de l'ensemble semi-martingale $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times a^{-1}(K)) \cap [S,+\infty]$, elle est encore solution de $\overline{\mathrm{EDS}}$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'(K)) \cap [S,\zeta|$, égale à Y au temps S. D'après l'unicité (7.2),2),appliquée à EDS, $X = Y$ dans cet ensemble. Donc X y est restriction de la semi-martingale Y, alors X_{ζ_-} existe si $S < +\infty$, donc, par (7.3), $\zeta = +\infty$ et $[S,\zeta| = [S,+\infty]$. Cela prouve 1), sauf la fin relative à $X^{-1}(K)$, qui résultera du lemme (7.5),d).

<u>2)</u> est évident. Soient $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts épuisant E, et ζ_n le temps de sortie de K. X est, dans $[S,\zeta_n]$, restriction de semi-martingale, parce que $[S,\zeta_n]$ est compact optionnel, (6.5). Si $\Omega' = \Omega$, on applique aussi (6.5), à $[S,+\infty]$.

<u>3)</u> On va d'abord établir un lemme, limitant les oscillations de X.

<u>Lemme (7.5)</u> : <u>Soient</u> K <u>un compact de</u> E, U' <u>un ouvert contenant</u> K, <u>relativement compact dans</u> E. <u>Soient</u> S_o <u>le temps d'entrée</u> $\geq$ S <u>de</u> X <u>dans</u> K, T_o <u>le temps de sortie</u> $\geq S_o$ <u>de</u> U', S_1 <u>le temps d'entrée</u> $\geq T_o$ <u>dans</u> K, T_1 <u>le temps de sortie</u> $\geq S_1$ <u>de</u> U, etc. (<u>S'il n'y a pas d'entrée ou de sortie</u>, <u>le temps d'entrée ou de sortie est pris égal à</u> ζ.)

a) <u>Dans</u> $[S_n,T_n[$, X <u>est restriction de semi-martingale</u> ;

b) <u>la suite des</u> S_n, T_n, <u>est stationnaire</u>, <u>et tend vers</u> ζ ;

c) <u>sur</u> $\Omega'_n = \{S_n < \zeta\ ,\ T_n = \zeta\}$, ζ <u>est infini</u>, <u>et</u> $[S,\zeta| = [S,+\infty]$;

d) <u>la réunion</u> (<u>stationnaire</u>) <u>des</u> $[S_n,T_n[$ <u>contient le séjour de</u> X <u>dans</u> K <u>et est contenue dans le séjour de</u> X <u>dans</u> U', <u>et</u> X <u>y est restriction de semi-martingale</u> ;

e) <u>pour tout</u> ω, <u>la trajectoire</u> $X(\omega)$ <u>est</u>, <u>ou toujours dans</u> U' <u>pour</u> t <u>assez grand</u> (<u>donc relativement compacte</u>), <u>ou toujours dans</u> $\complement$ K <u>pour</u> t <u>assez grand</u>.

<u>Démonstration du lemme</u> : Pour la suite, remarquons d'abord que, si tous les résultats sont montrés pour des processus arrêtés X^{R_ℓ}, pour des temps d'arrêt

R_ℓ croissant et tendant stationnairement vers $+\infty$, ils seront vrais pour X. Mais X^{R_ℓ} est solution de l'équation différentielle arrêtée, où les Z^k sont remplacés par $(Z^k)^{R_\ell}$, et d'ailleurs toutes les solutions de cette équation arrêtée sont exactement les arrêtées des solutions de l'équation initiale ; l'équation arrêtée a un temps de mort ζ_ℓ égal à ζ sur $\{R_\ell \geq \zeta\}$, à $+\infty$ sur $\{R_\ell < \zeta\}$, donc $\zeta_\ell \geq \zeta$ tend en décroissant et stationnairement vers ζ pour $\ell \to +\infty$, de sorte que des conclusions $\zeta_\ell = +\infty$ obtenues pour les équations arrêtées donneront aussi la conclusion $\zeta = +\infty$ pour l'équation initiale. Comme Z^k est continue, elle est localement dans H^2, donc les R_ℓ peuvent être choisis avec $(Z^k)^{R_\ell} \in H^2$; nous pourrons donc garder l'équation donnée, mais <u>supposer les</u> Z^k <u>dans</u> H^2. Si Z est une semi-martingale continue $\in H^2$ nulle au temps 0, elle s'écrit $Z = V + M$, où V est un processus adapté continu à variation finie, M une martingale locale continue, toutes deux nulles au temps 0, et

$$\|Z\|^2_{H^2} = \mathbb{E}\left(\left(\int_{]0,+\infty]} |dV_t|\right)^2 + \langle M,M\rangle_\infty\right) < +\infty \quad .$$

Il existe alors une constante D(Bürckholder-Davis-Gundy) telle que

$$\mathbb{E} \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} |Z_t|^2 \leq D^2 \|Z\|^2_{H^2} \quad .$$

Si alors H est optionnelle bornée,

$$\text{(7.5bis)} \qquad \mathbb{E} \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} |(H \cdot Z)_t|^2 \leq D^2 \sup |H|^2 \|Z\|^2_{H^2} \quad .$$

Soit Y_n la solution de l'équation différentielle $\overline{\text{(EDS)}}$ (obtenue en remplaçant H_k par $\overline{H}_k$, globalement bornée et lipschitzienne sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, égale à H_k sur $\overline{U'} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$) et égale à X_{S_n} au temps S_n là où $S_n < \zeta$; Y_n est restriction à $[S_n,+\infty]$ de semi-martingale, et $X = Y_n$ dans $[S_n,T_n[$ par l'unicité (7.2),2), donc a) est démontré. Supposons b) démontré ; la réunion des $[S_n,T_n[$ est une réunion dénombrable stationnaire d'ensembles semi-martingales, donc d) sera démontré ; e) en résultera aussitôt (en modifiant un peu K et U') car, si $S_n < \zeta$, $T_n = \zeta$, $X_t \in \overline{U'}$ pour $t \geq S_n$, et si $T_{n-1} < \zeta$, $S_n = \zeta$, $X_t \in \complement K$ pour $t \geq T_{n-1}$. Quant à c), il résulte de la partie 2) de (7.4), déjà démontrée. C'est donc b) qu'il faut démontrer. Il va falloir majorer les oscillations de X dans les $[S_n,T_n[$. Alors $X-\overline{J}(Y_n) = X - \sum_{k=1}^{m} \overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)\bullet Z^k$ est un processus constant dans $[S_n,T_n[$. Il en est de même de $X - \sum_{k=1}^{m} \overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)\bullet((Z^k)^{T_n}-(Z^k)^{S_n})$, mais ce dernier vaut X_{S_n} au temps S_n, donc $X - X_{S_n} = \sum_{k=1}^{m} \overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)\bullet((Z^k)^{T_n}-(Z^k)^{S_n})$ dans $[S_n,T_n[$. $\overline{H}_k$ est globalement majorée au sens de (6.9), c-à-d. bornée, non par une constante, mais par une variable aléatoire réelle ≥ 0. Si nous appelons alors $\tau_\ell = \mathrm{Inf}\{t\geq S_n\,;\ |\overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)|>\ell$ pour un $k=1,2,\ldots,m\}$, $(\tau_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$. Alors, dans $[0,\tau_\ell[$, $\overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot) = \overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)1_{[0,\tau_\ell[}$, donc

$$X - X_{S_n} = \sum_{k=1}^{m} \overline{H}_k(Y_n,\cdot,\cdot)\, 1_{[0,\tau_\ell[}\bullet((Z^k)^{T_n}-(Z^k)^{S_n})$$

dans $[S_n,T_n[\,\cap\,[0,\tau_\ell[$, donc aussi dans $[S_n,T_n[\,\cap\,[0,\tau_\ell]$. On peut alors appliquer (7.5bis) et on trouve

$$\text{(7.5ter)}\qquad \mathbb{E}\sup_{\substack{S_n\leq t<T_n\\ t\leq\tau_\ell}} |X_t - X_{S_n}|^2 \leq m\ell^2 D^2 \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}\Big(\Big(\int_{[S_n,T_n[} |dV_t^k|\Big)^2 + \langle M^k,M^k\rangle_{T_n} - \langle M^k,M^k\rangle_{S_n}\Big)$$

si $Z^k = V^k + M^k$.

Au second membre, pour ℓ fixé nous avons les intégrales (E ...) d'une suite de fonctions (lorsque $n\to+\infty$), qui convergent ponctuellement vers 0 et restent majorées par une fonction intégrable, puisque $Z^k\in H^2$; donc ce second membre tend vers 0 pour $n\to+\infty$. Donc aussi le premier. On peut donc extraire une suite partielle pour laquelle $\sup_{\substack{S_n\leq t<T_n\\ t\leq\tau_\ell}} |\quad|$ tend vers 0 λ-ps. ; on peut utiliser le procédé diagonal pour les $\ell\in\mathbb{N}$, donc trouver une suite partielle pour laquelle

$\sup_{S_n \leq t < T_n} |X_t - X_{S_n}|$ tend vers 0. Or, si $T_n < \zeta$, $\sup_{S_n \leq t < T_n} |X_t - X_{S_n}| \geq |X_{T_n} - X_{S_n}|$, borné inférieurement puisque $X_{S_n} \in K$ et $X_{T_n} \in \complement U'$; donc ps. $T_n = \zeta$ pour n assez grand, ce qui démontre b), donc le lemme.

<u>Fin de la démonstration de (7.4)</u> : Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts épuisant U. Si $\omega \in \Omega''$, $X(\omega)$ n'est pas relativement compacte ; donc, pour tout i, $X_t(\omega)$ est dans $\complement K_i$ pour t assez grand, donc s'éloigne à l'infini quand $t < \zeta(\omega)$ tend vers $\zeta(\omega)$.

<u>Remarques</u> : <u>1)</u> Le lemme mérite bien son nom de lemme, il sert à montrer la proposition, mais une fois celle-ci montrée, il n'en est qu'un sous-produit. En effet, les deux parties non triviales du lemme sont d) (entraînant b)), et e). Or $\bigcup_n [S_n, T_n[$ est dans le séjour de X dans U' ; si l'on connaît la proposition, on sait par 1) que, sur le séjour dans le compact $\overline{U}'$, X est restriction d'une semi-martingale ; et, si une trajectoire n'est ni dans U' pour t assez grand, ni dans $\complement K$ pour t assez grand, elle oscille une infinité de fois entre K et $\complement U'$, ce qui est impossible puisque la proposition exprime que la trajectoire ne peut qu'avoir une limite ou tendre vers l'infini quand t tend vers ζ.

<u>2)</u> Nous avons vu que, sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'(K) \cap [S, +\infty]$, X est restriction d'une semi-martingale ; on peut voir que ce n'est pas nécessairement vrai sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \tilde{\Omega}'(K)$, où $\tilde{\Omega}'$ est l'ensemble des ω dont la trajectoire $X(\omega)$ est dans K <u>à partir d'un</u> t <u>assez grand</u>. De même, sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S, +\infty]$, X n'est pas nécessairement restriction de semi-martingale [(♦)].

<u>3)</u> Il est donc impossible que la trajectoire $X(\omega)$ soit relativement compacte sans que $\zeta = +\infty$ et que $X_t(\omega)$ ait une limite pour $t \to +\infty$; et il est impossible que la trajectoire soit récurrente : si elle n'est pas relativement compacte, elle s'éloigne indéfiniment.

(Remarquons qu'au contraire le mouvement brownien sur une variété, en dimension ≤ 2, peut être récurrent ; mais l'équation différentielle stochastique est sur

---

(♦) Un contre-exemple m'a été donné par Lenglart.

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$, et non sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Si $\tau < +\infty$, et qu'on raisonne seulement sur $[0,\tau]$, on retrouve les mêmes résultats qu'ici.)

Corollaire (7.5quarto) (Lenglart) : Supposons que dim $E = N = 1$, et que toutes les Z^k soient des martingales (locales continues) M^k. Alors il n'y a pas de temps de mort, $\zeta = +\infty$, et X est, dans $[S,\zeta| = [S,+\infty]$, restriction de semi-martingale.

Démonstration : L'égalité

$$S - a\, 1_{t \geq S} = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.) \cdot (Z^k - (Z^k)^S)$$

montre que $X - a\, 1_{t\geq S}$ est une martingale locale continue sur $[0,\zeta|$. Or, sur $\mathbb{R}$, une martingale locale continue sur $[0,\zeta|$ ou bien a une limite en ζ ou bien est récurrente, elle ne peut pas tendre vers ∞ ; donc, avec les notations de (7.4), $\Omega' = \Omega$.

Remarque : Ainsi, en dimension 1, une équation différentielle stochastique avec des Z^k martingales est plus régulière que l'équation déterministe $dX = X^2\, dt$! Le résultat ne subsiste pas en dimension ≥ 2 (D. Stroock m'a communiqué un contre-exemple).

Proposition (7.6) : Si les coefficients de EDS sont (localement lipschitziens mais) globalement bornés, $|H_k| \leq M$, variable aléatoire finie ≥ 0, $\zeta = +\infty$, et X est, dans $[S,\zeta| = [S,+\infty]$, restriction de semi-martingale.

Démonstration : On se ramènera, comme dans la démonstration du lemme (7.5), à des $Z^k \in H^2$; appelons $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêt $\geq S$ tendant vers ζ, telle que X soit, dans $[S,\zeta_n]$, une semi-martingale. En posant, comme dans la démonstration du lemme (7.5), $\tau_\ell = \mathrm{Inf}\{t \geq S\,;\ |H_k(X,.,.)| > \ell$ pour un $k\}$, on appliquera (7.5bis) :

$$X = X_S + \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\, 1_{[0,\tau_\ell[} \cdot ((Z^k)^{\zeta_n} - (Z^k)^S) \quad ,$$

dans $[S,\zeta_n] \cap [0,\tau_\ell]$, d'où

$$\mathbb{E} \sup_{S\le t\le \zeta_n \wedge \tau_\ell} |X_t - X_S|^2 \le$$

$$m^2 \ell^2 D^2\, \mathbb{E}\Big(\Big(\int_{[S_n,\zeta_n \wedge \tau_\ell]} |dV_t^k|\Big)^2 + \langle M^k,M^k\rangle_{\zeta_n \wedge \tau_\ell} - \langle M^k,M^k\rangle_S\Big) \quad .$$

Pour ℓ fixé, le second membre est borné indépendamment de n, donc aussi le premier ; donc, par Fatou :

$$\mathbb{E} \sup_{S\le t<\zeta \wedge \tau_\ell} |X_t - X_S|^2 < +\infty \quad .$$

Donc λ-ps., X_t reste borné pour $t < \zeta \wedge \tau_\ell$, donc aussi pour $t<\zeta$, donc $\Omega' = \Omega$ suivant les notations de (7.4).

§ 8. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES SUR DES VARIETES DIFFERENTIELLES, DEFINITIONS, PROPRIETES ELEMENTAIRES ET RESOLUTION

Résumé du § 8. On passe aux équations différentielles stochastiques sur des variétés V. (8.4) donne la définition (intrinsèque, sans cartes) ; (8.6) donne un théroème d'existence local, le cas global sera vu plus loin.

Soit U' un ouvert d'un espace vectoriel E ; il n'y a aucune difficulté à parler d'une équation différentielle stochastique sur U', au lieu de E. Les Z^k seront toujours des semi-martingales réelles ; H_k sera une fonction sur $U' \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans E, optionnelle, localement bornée et lipschitzienne ; et on cherchera une solution X, semi-martingale dans A à valeurs dans U'.

Rappelons ((6.5quinto) de S[2]) que : "X semi-martingale à valeurs dans U' " implique qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit restriction d'une semi-martingale à valeurs dans U'. Nous aurons à passer de là à une variété dfffférentielle V. Il est bien connu que le changement de cartes fait alors intervenir les crochets $[Z^i,Z^j] = \langle Z^{i,c},Z^{j,c}\rangle$, $i,j = 1,2,\ldots,m$; si, dans une carte, ils ne figurent pas, c'est un accident, ils figurent dans les autres cartes du même ouvert de V. Autant vaut donc supposer dès le début qu'ils figurent. Nous appellerons donc désormais EDS l'équation, sur un ouvert U' de E :

$$\text{(EDS)(8.1)} \qquad dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,\cdot,\cdot)\, dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} H_{i,j}(X,\cdot,\cdot)\, d[Z^i,Z^j] \quad ,$$

où les H_k, $H_{i,j}$ ont les propriétés indiquées aux § 1, 2, $H_{i,j} = H_{j,i}$. Alors en introduisant $\underline{dX}$ suivant (2.2)

$$\underline{\text{EDS}}(8.2) \qquad \underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \\ \frac{1}{2}\, d[X,X] \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} H_k(X,\cdot,\cdot) \\ \\ 0 \end{pmatrix} dZ^k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \begin{pmatrix} H_{i,j}(X,\cdot,\cdot) \\ \\ H_i(X,\cdot,\cdot) \odot H_j(X,\cdot,\cdot) \end{pmatrix} d[Z^i,Z^j] \quad .$$

Continuons à appeler H_k ou $\overset{1}{H}_k$ le vecteur H_k, 1- donc 2-tangent, $\overset{1}{H}_k(x,t,\omega) \in E = T^1(E,x) \subset T^2(E,x) = E \oplus (E \odot E)$, $\overset{1}{H}_k = \begin{pmatrix} H_k \\ 0 \end{pmatrix}$, mais appelons $\overset{2}{H}_{i,j}$ le vecteur 2-tangent $\begin{pmatrix} H_{i,j} \\ H_i \odot H_j \end{pmatrix}$, $\overset{2}{H}_{i,j}(x,t,\omega) \in T^2(E,x) = E \oplus (E \odot E)$. Alors (8.2) s'écrit :

$$\underline{\text{EDS}}(8.3) \qquad \underline{dX} = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k(X,\cdot,\cdot)\, dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{2}{H}_{i,j}(X,\cdot,\cdot)\, d[Z^i,Z^j] \quad .$$

Et alors, il est équivalent de dire que X est solution dans A, ou de dire que le 2nd membre est, dans A, représentation tangentielle de $\underline{X}$, suivant (3.11ter) et (3.13). Nous n'aurons donc aucune difficulté à passer d'un ouvert U' de E à une variété V. On remarquera que V doit être plus que de classe C^2 : elle doit être de classe $C^{2,1}$ ou C^2-lipschitzienne ; les changements de cartes doivent avoir des dérivées d'ordre ≤ 2 lipschitziennes, pour que les $\overset{2}{H}_{i,j}$ puissent être lipschitziennes. D'autre part l'image $\overset{1,1}{H}_{i,j}$ de $\overset{2}{H}_{i,j}$ dans le quotient $E \odot E = T^1 \odot T^1 = T^2/T^1$ n'est pas arbitraire, c'est $H_i \odot H_j$; ce qui fait que, dans E, donc dans une carte de V, la 2ème équation (8.2), celle qui donne $\frac{1}{2}$ d[X,X] , est automatiquement conséquence de la première.

<u>Définitions (8.4)</u> : Soit V une variété différentielle $C^{2,1}$, ou C^2-lipschitzienne, dont les changements de cartes sont $C^{2,1}$ (dérivées d'ordre ≤ 2 lipschitziennes). On appelle équation différentielle stochastique EDS (nous avons distingué EDS et <u>EDS</u> sur V = E. Pour V quelconque, nous emploierons indifféremment EDS ou <u>EDS</u>.) la donnée de :

1) m semi-martingales (continues) réelles, $(Z^k)_{k=1,2,...,m}$;

2) m fonctions $(H_k)_{k=1,2,...,m}$, $H_k = \overset{1}{H}_k$, sur $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, 1-tangentes à V, c-à-d. à valeurs dans $T^1(V)$, $H_k(v,t,\omega) \in T^1(V,v)$; on les suppose optionnelles en (t,ω) (pour tout v, $H_k(v,.,.)$ est optionnelle sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans $T^1(V,v)$), localement bornées et localement lipschitziennes en v (si $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un atlas de V, $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas subordonné, il existe des variables aléatoires réelles ≥ 0, K_n et M_n, telles que, pour v, v', v" $\in V''_n$:

$$(8.5) \qquad |H_k(v,t,\omega)| \leq M(\omega) \ , \ |H_k(x',t,\omega) - H_k(v'',t,\omega)) \leq K(\omega) \ |v' - v''| \ .$$

Ces inégalités n'ont de sens que sur des cartes, comme indiqué, mais si elles sont vraies pour un atlas et un atlas subordonné, elles sont vraies pour tout autres atlas et atlas subordonné. Comme V est $C^{2,1}$, $T^1(V)$ est $C^{1,1}$ a fortiori $C^{0,1}$, la seule chose qui soit nécessaire pour H_k. Il n'est pas inutile d'expliciter cela au moins une fois. Si on a (8.5) sur une carte dans un ouvert de E, et si on considère une autre carte dans un ouvert de F, pour la même région, on passe de l'une à l'autre par un difféomorphisme Θ de classe $C^{1,1}$ donc $C^{0,1}$; au lieu de H_k on trouve L_k, avec des formules :

$$L_k(\Theta(x),t,\omega) = \Theta'(x)\, H_k(x,t,\omega) \quad ; \quad \text{oublions } (t,\omega) \quad ;$$

$$|L_k(\Theta(x))| \leq \operatorname*{Sup}_x \|\Theta'(x)\|_{\mathcal{L}(E;F)} \, |H_k(x)|_E \leq \text{const. } M$$

$$|L_k(\Theta(x')) - L_k(\Theta(x''))| = |\Theta'(x')\, H_k(x') - \Theta'(x'')\, H_k(x'')|$$

$$\leq \|\Theta'(x') - \Theta'(x'')\|_{\mathcal{L}(E;F)} \, |H_k(x')| + \|\Theta'(x)\|_{\mathcal{L}(E;F)} \, |H_k(x') - H_k(x'')|_E$$

$$\leq \text{const. } |x' - x''|_E \, M + \text{const. } K \, |x' - x''|_E$$

$$\leq \text{const. } (K+M) \, |\Theta(x') - \Theta(x'')|_F \quad ,$$

parce que Θ' et Θ'^{-1} sont bornées et lipschitziennes sur tout compact, et que $|x' - x''|_E \leq \text{const. } |\Theta(x') - \Theta(x'')|_F$;

3) $\frac{m(m+1)}{2}$ fonctions $(H_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,m}$, $H_{i,j} = \overset{2}{H}_{i,j}$, $H_{j,i} = H_{i,j}$, sur $V \times \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, 2-tangentes à V, c-à-d. à valeurs dans $T^2(V)$, $H_{i,j}(v,t,\omega) \in T^2(V,v)$, optionnelles, localement bornées et lipschitziennes dans le même sens, (8.5) ; V étant $C^{2,1}$, $T^2(V)$ est $C^{0,1}$, et c'est ce qui est nécessaire.

On suppose que l'image de $\overset{2}{H}_{i,j}(v,t,\omega)$ dans le quotient $T^2(V,v)/T^1(V,v) = T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ est $\overset{1}{H}_i(v,t,\omega) \odot \overset{1}{H}_j(v,t,\omega)$. L'équation <u>EDS</u> s'écrit alors sous la forme (8.3) (ou sous la forme intégrale, avec $\sim$ au lieu d'=). On dit qu'un processus sur $A \subset \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ (défini au § 6), à valeurs dans V, est solution de <u>EDS</u>, ce qu'on exprime par (8.3), si X est une semi-martingale sur A à valeurs dans V,, et s'il admet (8.3) comme représentation tangentielle. Rappelons que cela peut s'exprimer sous l'une des formes suivantes :

A) Dans une carte d'un ouvert V' de V sur un ouvert U' d'un espace vectoriel E, on a (8.3) dans $A \cap X^{-1}(V')$, ouvert relatif de A, ou (8.1) qui entraîne automatiquement (8.3) ($H_{i,j}$ étant la 1ère composante $\overset{2}{H}_{i,j}$, sur $E \subset E \oplus (E \odot E)$) ;

B) Pour tout plongement de V' dans un espace vectoriel E, on a (8.3), ou

(8.1) qui entraîne automatiquement (8.3), $\overset{1}{H}_{i,j}$ étant encore la 1ère composante de $\overset{2}{H}_{i,j}$, sur $E \subset E \oplus (E \odot E)$. Dans A comme dans B, (8.1) entraîne automatiquement (8.3) parce que la projection de $\overset{1,1}{H}_{i,j}$ de $\overset{2}{H}_i$ sur $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$ est $H^i \odot H^j$. On ne devra pas confondre $\overset{2}{H}_{i,j}$, vecteur 2-tangent, $\overset{1,1}{H}_{i,j}$ sa projection dans $T^1 \odot T^1$, et $\overset{1}{H}_{i,j}$ sa composante sur $E \subset E \oplus (E \odot E)$, qui n'existe que pour un espace vectoriel E (où alors $\overset{2}{H}_{i,j} = \begin{pmatrix} \overset{1}{H}_{i,j} \\ \overset{1}{H}_i \odot \overset{1}{H}_j \end{pmatrix}$).

C) Pour toute fonction φ réelle C^2 sur V, on a, sur A :

$$(8.6) \qquad \varphi(X) \sim \sum_{k=1}^{m} (D\varphi(X) \mid H_k(X,.,.))_{T^{*1},T^1} \cdot Z^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (D^2\varphi(X) \mid H_{i,j}(X,.,.))_{T^{*2},T^2} \cdot [Z^i,Z^j] \ .$$

D) Pour tout processus J 2-cotangent à V le long de X, optionnel sur A, on a :

$$(8.7) \qquad J \cdot \underline{X} \sim \sum_{k=1}^{m} (J \mid H_k(X,.,.))_{T^{*2},T^2} \cdot Z^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (J \mid H_{i,j}(X,.,.)) \cdot [Z^i,Z^j] \ .$$

Nous n'étudierons pas dans ce paragraphe l'extension des résultats du § 7, sauf un :

<u>Proposition (8.6)</u> (généralisant (7.2),1) : <u>Pour</u> S <u>temps d'arrêt</u>, a <u>fonction</u> $\mathcal{T}_S$-<u>mesurable sur</u> Ω <u>à valeurs dans</u> V, <u>il existe un temps d'arrêt</u> $T \geq S$, $> S$ <u>là où</u> $S < +\infty$, <u>et un processus sur</u> $[S,T]$, <u>restriction de semi-martingale</u>, <u>solution de EDS dans</u> $[S,T]$, <u>égal à</u> a <u>au temps</u> S.

<u>Démonstration</u> : Soit $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas de V, $(V''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un atlas subordonné, V''_n relativement compacts. La n-ième carte ramène V''_n, V'_n à U''_n, U'_n ouverts d'un

espace vectoriel E, U''_n relativement compact. Dans E, l'équation devient EDS, de type étudié aux paragraphes 6 et 7 (avec simplement à la fois des $\overset{1}{H}_k$, $\overset{1}{H}_{i,j}$, à valeurs dans E). On détermine alors des $\overline{H}_{k,n}$, $\overline{H}_{i,j,n}$ comme dans la démonstration de (7.2),1), des Ω''_n, une équation $\overline{(EDS)}_n$. On en déduit une solution $\overline{X}_n$, et son temps de sortie T''_n de U''_n. On construit ensuite T à partir des T''_n comme dans la démonstrattion de (7.2),1).

§ 9. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE STRATONOVITCH SUR UNE VARIETE

Résumé du § 9. Il s'agit des équations différentielles sous la forme de Stratonovitch. Il y a deux définitions qui ne donnent pas les mêmes résultats, (9.15 et 16), et (9.17bis). Le passage d'Itô à Stratonovitch et vice-versa est (9.18). (9.23) dit que toute semi-martingale est solution globale d'une équation différentielle stochastique. Plus généralement, (9.24) linéarise l'espace des équations différentielles stochastiques. On en déduira un théorème de prolongement d'équations différentielles stochastiques (9.28).

Donnons-nous toujours des semi-martingales continues réelles $(Z^k)_{k=1,2,\dots,m}$, et des H_k de classe $C^{1,1}$, ne dépendant pas de (t,ω) : H_k est une application $C^{1,1}$ de V dans $T^1(V)$, $H_k(v) \in T^1(V,v)$. Soient alors X une semi-martingale sur A à valeurs dans V, $H_k(X)$ est un processus de Stratonovitch sur A à valeurs dans $T^1(V)$, 1-tangent à V le long de X sur A. (Il suffit pour cela que H_k soit de classe C^1.) Alors on dira que X, semi-martingale continue optionnelle sur A à valeurs dans V, est solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovitch

$$(9.1)\qquad dX \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\, dZ^k \quad \text{ou} \quad X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X) \underset{(S)}{\bullet} Z^k ,$$

si le second membre est une représentation tangentielle de Stratonovitch de X, au sens de (4.18), sur A.

(9.2) Passage d'une équation différentielle de Stratonovitch à une équation différentielle ordinaire.

Détaillons le dernier membre de (9.1) :

$$(9.3) \qquad X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X) \cdot Z^k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} [H_j(X)^c, Z^{j,c}] \quad .$$

Raisonnons toujours sur une carte V' de V (ce qui revient, si tout était défini sur $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, à se placer sur $A \cap X^{-1}(V')$), considérée comme l'identité, ce qui revient à prendre $V = E$ espace vectoriel. Par Itô : $H_j(X)^c \sim H'_j(X) \cdot X^c$, si H' est la dérivée de H_j ; sa valeur en un point de E est un élément de $\mathcal{L}(E,E)$; appliquée à X^c à valeurs dans E, elle donne un processus à valeurs dans E. Alors $[H_j(X)^c, Z^{j,c}] = [H'_j(X) \cdot X^c, Z^{j,c}]$, et $X^c = \sum_{i=1}^{m} H_i(X) \cdot Z^{i,c}$, d'où

$$(9.4) \qquad X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X) \cdot Z^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} H'_j(X)(H_i(X)) \cdot [Z^i, Z^j] \quad ,$$

où $H_j(X(t,\omega))\ (H_i(X(t,\omega)))$ est la valeur dans $H'_j(X(t,\omega)) \in \mathcal{L}(E;E)$ sur $H_i(X(t,\omega)) \in E$, c'est un élément de E . Ou encore :

$$(9.5) \qquad dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} H'_j(X)\ d[Z^i, Z^j] \quad , \quad \text{et}$$

$$(9.6) \qquad \underline{dX} = \begin{pmatrix} dX \\ \frac{1}{2}\ d[X,X] \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \overset{2}{H}_{i,j}(X)\ d[Z^i, Z^j] \quad , \quad \text{avec}$$

$$(9.7) \qquad \overset{2}{H}_{i,j}(X) = \begin{pmatrix} H'_j(X)(H_i(X)) \\ H_i(X) \odot H_j(X) \end{pmatrix} \text{ à valeurs dans } E \oplus (E \odot E) \quad .$$

Ce n'est pas symétrique, on symétrisera :

$$(9.7\text{bis}) \qquad \overset{2}{H}_{i,j}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(H'_j(X)(H_i(X)) + H'_i(X)(H_j(X)) \\ \\ H_i(X) \odot H_j(X) \end{pmatrix} \quad .$$

Il existe une autre interprétation, sans cartes.

En effet, H_i, H_j sont des champs de vecteurs 1-tangents, donc des opérateurs différentiels d'ordre 1. Leur produit (ou composé) H_iH_j est un opérateur différentiel d'ordre 2 ; d'après (1.7bis), on a :

$$(9.7\text{ter}) \qquad (H_i\ H_j)_v = H'_j(v)(H_i(v)) + H_i(v) \odot H_j(v)$$

(où $(\partial_{H_i(v)}H_j)(v) + H_i(v) \odot H_j(v)) \in E \oplus (E \odot E)$,
de sorte que (9.7bis) est aussi

$$(9.8) \qquad \overset{2}{H}_{i,j}(X) = \frac{1}{2}\,(H_i\ H_j + H_j\ H_i)(X) \quad .$$

On a donc deux interprétations complètement différentes d'une équation différentielle de Stratonovitch, (9.7) et (9.8), lorsque le coefficient de Z^k est de la forme $H_k(X)$, où H_k est un champ $C^{1,1}$, de vecteurs 1-tangents à V. Une carte nous a montré l'identité de deux interprétations différentes, mais chacune s'exprime sans cartes : (9.7) est (9.1) avec une intégrale stochastique de Stratonovitch, et (9.8) donne :

$$(9.9) \qquad dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{m} \frac{1}{2}\,(H_i\ H_j + H_j\ H_i)(X)\ d[Z^i, Z^j] \quad ,$$

où H_iH_j est le produit de deux opérateurs différentiels d'ordre 1, qui est donc un opérateur différentiel d'ordre 2 ; la composante de $\frac{1}{2}\,(H_i\ H_j + H_j\ H_i)$ dans $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$ est $H_i \odot H_j$.

Nous avons expressément supposé que H_k était une application de V dans $T^1(V)$ (c-à-d. que $H_k(v) \in T^1(V,\dot{v})$), donc ne dépendait pas de t, ω. Ce n'est pas indispensable. Dans la conception de l'intégrale de Stratonovitch, H_k peut dépendre de v, t, ω, mais de telle manière que, si X est une semi-martingale,

$H_k(X,.,.)$ soit un processus de Stratonovitch ; une telle dépendance n'est pas immédiate à préciser. Cela se produira par exemple si F_k est une application $C^{1,1}$ de $V \times \mathbb{R}^{\ell}$ à valeurs dans $T^1(V)$, $F_k(v,y_i,y_2,\dots,y_\ell) \in T^1(V,v)$, si $Y_1,Y_2,\dots,Y_\ell$, sont des semi-martingales réelles continues, et si $H_k(x,t,\omega) = F_k(x,Y_1(t,\omega),\ Y_2(t,\omega),\dots,Y_\ell(t,\omega))$; mais bien d'autres possibilités existent. Dans la deuxième interprétation, on peut fixer aisément des conditions générales d'application : si H_k est une application de $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $T^1(V)$, $H_k(v,t,\omega) \in T^1(V,v)$, $H_k(v,.,.)$ optionnelle, et que H_k soit dérivable en v pour (t,ω) fixés, avec dérivées premières en v localement bornées et lipschitziennes comme dans (8.5) (qui a un sens sur chaque carte) ; alors $(H_i(.,t,\omega)$ et $H_j(.,t,\omega)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 sur V, donc $H_i(.,t,\omega)H_j(.,t,\omega)$ un opérateur différentiel d'ordre 2 sur V , donc $H^2_{i,j}$ devient une application de $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $T^2(V)$, $(H_i\ H_j)(v,t,\omega) \in T^2(V,v)$ optionnelle localement bornée et lipschitzienne, de composante $H_i \odot H_j$ dans $T^2(V)/T^1(V) = T^1(V) \odot T^1(V)$, et alors la première égalité (9.1) veut dire (9.9).

Les deux interprétations possibles d'une équation de Stratonovitch coïncident si H_k est un champ sur V, indépendant de (t,ω) ; <u>autrement, elles ne coïncident pas en général</u>. Prenons par exemple le cas $V = E = \mathbb{R}$, $N = 1$, $m = 1$, $Z = B$ mouvement brownien, donc l'équation différentielle de Stratonovitch

$$(9.10) \qquad dX \underset{(S)}{=} B\ dB \ ;$$

ici H est, au contraire de ce qui précède, indépendant de x, et ne dépend que de (t,ω) (cela n'a de sens de parler d'un champ constant que si V est un espace vectoriel). Prenons l'interprétation (9.1)-(9.7) :

$$(9.11) \qquad X \sim B \underset{(S)}{\bullet} B = B \bullet B + \frac{1}{2} \langle B,B \rangle = B \bullet B + \frac{1}{2}\,(t) \quad ,$$

où (t) est le processus $(t,\omega) \mapsto t$. La solution nulle au temps 0 est $X = \frac{1}{2} B^2$. Prenons l'interprétation (9.8)-(9.9) ; $B(t,\omega)$ est l'opérateur différentiel, à coefficients constants pour (t,ω) fixés : $B(t,\omega)\partial$; son carré est $B^2(t,\omega)\partial^2 = B(t,\omega)\partial \odot B(t,\omega)\partial$, d'où

$$(9.12) \qquad \underline{X} \sim \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \odot B \end{pmatrix} \cdot (t) \quad ,$$

d'où, en prenant seulement la composante sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R} \odot \mathbb{R})$:

$$(9.13) \qquad X \sim B \cdot B \quad ,$$

dont la solution nulle au temps 0 est $\frac{1}{2}(B^2 - (t))$.

Les deux interprétations s'appliquent à des situations différentes : l'intégrale de Stratonovitch est juste une intégrale, elle s'applique à des représentations tangentielles (4.18) et ne s'applique pas tellement bien à des équations différentielles stochastiques ; au contraire le produit de champs $H_i H_j$ ne s'applique pas à des représentations tangentielles (à moins que les H_k ne soient de la forme $H_k(X)$, H_k champ de vecteurs 1-tangents à V de classe C^1), mais très bien à des équations différentielles stochastiques. Nous ne garderons en général que la deuxième, mais pour la distinguer des notations différentielles antérieures, nous l'écrirons avec δ au lieu de d :

Définition (9.14) : Soit $(H_k)_{k=1,2,\ldots,m}$ un système de fonctions de $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $T^1(V)$, $H_k(v,t,\omega) \in T^1(V,v)$, $H_k(v,.,.)$ optionnel à valeurs dans $T^1(V,v)$, H_k de classe C^1 en v pour (t,ω) fixés, H_k et ses dérivées d'ordre 1 localement bornées et lipschitziennes. On appelle équation différentielle stochastique de Stratonovitch

$$(9.15) = (9.1) \qquad \delta X \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\, \delta Z^k$$

l'équation différentielle

$$(9.17) = (9.3) \qquad dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\, dZ^k + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} (H_i H_j + H_j H_i)(X,.,.)\, d[Z^i, Z^j] \quad .$$

Si H_k est indépendant de (t,ω), c'est équivalent à la représentation tangentielle de Stratonovitch :

(9.17) = (9.3) $$X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X) \underset{(S)}{\bullet} Z^k \; .$$

Quand, pour H_k quelconque, nous voudrons écrire que

$$X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X) \underset{(S)}{\bullet} Z^k \; ,$$

nous l'écrirons aussi comme avant, avec d :

(9.17bis) $$dX \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\, dZ^k \; .$$

Le même symbole $\underset{(S)}{=}$ sera utilisé, mais δX et δZ^k pour la signification (9.15)-(9.16), et dX, dZ^k pour la signification $X \sim \sum_{k=1}^{m} H_k(X,\cdot,\cdot) \underset{(S)}{\bullet} Z^k$. Elles coïncident si H_k est indépendant de (t,ω).

Remarque (9.17ter) : Considérons une équation $\delta X \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X,\cdot,\cdot)\alpha_k\, \delta Z^k$, où les α_k sont réelles optionnelles sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (donc indépendantes de $v \in V$) à trajectoires bornées. On peut la considérer comme $\sum_{k=1}^{m} (H_k(X,\cdot,\cdot)\alpha_k)\delta Z^k$ ou comme $\sum_{k=1}^{m} H_k(X,\cdot,\cdot)(\alpha_k\, \delta Z^k)$, où $\alpha_k\, \delta Z^k$ veut dire $\delta(\alpha_k \bullet Z^k)$ (intégrale ordinaire). Dans les deux cas, l'expression correspondante (9.16) est la même, parce que $(H_i\,\alpha_i)(H_j\,\alpha_j) + (H_j\,\alpha_j)(H_i\,\alpha_i) = (H_i\,H_j + H_j\,H_i)\alpha_i\,\alpha_j$. Par carte, pour des équations différentielles de Stratonovitch avec d, on doit supposer H_k indépendante de (t,ω), et comme α_k dépend de t, ω, on doit la supposer de Stratonovitch et pas seulement optionnelle à trajectoires bornées, et on ne se permettra que de considérer l'équation $dX \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X)\,(\alpha_k\, dZ^k)$, où $\alpha_k\, dZ^k = d(\alpha_k \underset{(S)}{\bullet} Z^k)$, intégrale de Stratonovitch.

(9.18) <u>Passage d'une équation ordinaire à une équation de Stratonovitch et vice-versa</u>.

Supposons l'équation de Stratonovitch

$$(9.19)\qquad \delta X \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\,\delta Z^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{H}_{i,j}(X,.,.)\,\delta[Z^i,Z^j]\ ,$$

(où les $\overset{1}{H}_{i,j}$ sont aussi des 1-vecteurs, $\overset{1}{H}_{i,j}$ optionnel, localement borné et lipschitzien sans plus).

Cela équivaut à l'équation différentielle ordinaire :

$$(9.20)\qquad d\underline{X} = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\,dZ^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \overset{2}{H}_{i,j}(X,.,.)\,d[Z^i,Z^j]\ ,$$

où $\overset{2}{H}_{i,j} = \overset{1}{H}_{i,j} + \frac{1}{2}(H_i\,H_j + H_j\,H_i)$, $\overset{2}{H}_{i,j} = \overset{2}{H}_{j,i}$.

Inversement, si on part d'une équation différentielle ordinaire, mais où les H_k ont aussi leurs dérivées d'ordre 1 localement bornées et lipschitziennes

$$(9.21)=(8.3)\qquad d\underline{X} = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k(X,.,.)\,dZ^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \overset{2}{H}_{i,j}(X,.,.)\,d[Z^i,Z^j]\ ,$$

où la projection de $\overset{2}{H}_{i,j}$ sur $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$ est $H_i \odot H_j$, elle peut s'écrire sous la forme de Stratonovitch :

$$(9.22)\qquad \delta X \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k(X,.,.)\,dZ^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{K}_{i,j}(X,.,.)\,d[Z^i,Z^j]\ ,$$

où $\overset{1}{K}_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{m} (\overset{2}{H}_{i,j}(X,.,.) - \frac{1}{2}(\overset{1}{H}_i\,\overset{1}{H}_j + \overset{1}{H}_j\,\overset{1}{H}_i)(X,.,.))\,d[Z^i,Z^j]$,

où la projection de $\overset{1}{K}_{i,j}$ sur $T^1 \odot T^1$ est nulle, de sorte que $\overset{1}{K}_{i,j}$ est un processus 1-tangent, $K_{i,j}$ fonction sur $V \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans $T^1(V)$, $\overset{1}{K}_{i,j}(v,t,\omega) \in T^1(V,v)$.

<u>Toute équation de Stratonovitch admet une forme ordinaire</u>, <u>et toute équation ordinaire</u>, <u>à coefficients H_k assez réguliers</u>, <u>admet une forme de Stratonovitch</u>.

On pourra même dire qu'une équation ordinaire (9.21) a la forme de Stratonovitch, si $\overset{2}{H}_{i,j} = \frac{1}{2}(H_i H_j + H_j H_i)$, de sorte que sa forme de Stratonovitch (9.22), avec $\overset{1}{K}_{i,j} = 0$, s'obtient en supprimant les $\overset{2}{H}_{i,j}$ et en mettant $\underset{(S)}{=}$.

<u>Proposition (9.23)</u> : <u>Toute semi-martingale</u> X <u>est solution d'équations différentielles stochastiques définies sur</u> A, <u>qu'on peut même choisir de Stratonovitch indépendantes de</u> (t,ω).

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer (4.20), avec $H_k(v,t,\omega) = \eta_k(v)$, $Z^k = x^k(X)$. On peut même choisir les η_k indépendants de la semi-martingale donnée X, et les Z^k se déterminent alors à partir de X.

<u>(9.24)</u> <u>Linéarisation de l'espace des équations différentielles stochastiques.</u>

Une équation différentielle stochastique sur une variété V n'est pas une section d'un fibré vectoriel. Supposons $(Z^k)_{k=1,2,\ldots,m}$ donné une fois pour toutes. Alors H_k est bien une section d'un fibré vectoriel, dont la fibre au-dessus de $v \in V$ est l'ensemble des applications optionnelles de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ dans $T^1(V,v)$. Mais, une fois choisis les H_k, $\overset{2}{H}_{i,j}$ n'est plus une section d'un espace fibré vectoriel, mais d'un espace fibré affine, puisqu'on impose à sa projection $\overset{1,1}{H}_{i,j}(v,t,\omega)$ sur le quotient $T^1(V,v) \odot T^1(V,v)$ d'être $H_i(v,t,\omega) \odot H_j(v,t,\omega)$; la différence entre deux sections de ce fibré affine est une section du fibré vectoriel dont le fibré au-dessus de v est le même, espace des applications optionnelles de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans $T^1(V,v)$ (la différence de deux éléments de $T^2(V,v)$, de même projection sur le quotient, est un élément du noyau de cette projection, c-à-d. de $T^1(V,v)$).

Ce qui fait qu'on ne peut pas parler de la somme de deux équations différentielles stochastiques (pour des Z^k donnés), ni du produit d'une équation différentielle stochastique par un nombre réel ; on peut additionner les H_k pour chaque k, mais pas les $H_{i,j}$ pour chaque i,j ($H_i \odot H_j$ ne dépend pas linéairement de H_i, H_j !).

Mais les équations différentielles stochastiques de Stratonovitch sont des sections d'un fibré vectoriel, comme les H_k plus haut, et forment donc un espace vectoriel, et même un module sur l'anneau des fonctions réelles $C^{1,1}$ sur V : si $(EDS)_\ell$, $\ell = 1,2$, est une équation différentielle de Stratonovitch, de coefficients $H_{k,\ell}$ (pour les mêmes Z^k données), et si α_ℓ est une fonction réelle $C^{1,1}$ sur V, l'équation différentielle de Stratonovitch $\alpha_1(EDS)_1 + \alpha_2(EDS)_2$ est celle qui a pour coefficients les $\alpha_1 H_{k,1} + \alpha_2 H_{k,2}$.

Mais il existe évidemment bien d'autres procédés, qui même sont valables pour les équations n'ayant pas la régularité supplémentaire $C^{1,1}$. Puisque $T^1(V) \odot T^1(V)$ est un quotient du fibré $T^2(V)$ de classe $C^{0,1}$, il en existe un relèvement θ de classe $C^{0,1}$ (propriétés générales des fibrés quotients de fibrés vectoriels) ; il suffit par exemple de le faire dans des cartes et d'utiliser une partition de l'unité ; ou de mettre sur les fibres $T^2(V;v)$ une structure euclidienne, variant $C^{0,1}$ avec v, alors le quotient $T^1(V) \odot T^1(V)$ devient canoniquement isomorphe au fibré orthogonal (donc supplémentaire) de $T^1(V)$ dans le fibré $T^2(V)$, c-à-d. à un sous-fibré de $T^2(V)$, et cet isomorphisme θ est un relèvement $C^{0,1}$. [Un tel relèvement θ est aussi équivalent à une connexion sans torsion sur le fibré tangent.]

$$(9.25) \qquad \delta X \underset{(\theta)}{=} \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k(X,.,.)\, \delta Z^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{K}_{i,j}(X,.,.)\, \delta[Z^i,Z^j] \quad ,$$

où $\underset{\theta}{=}$ veut dire

$$(9.26) \qquad d\underline{X} = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{H}_k(X,.,.)\, dZ^k + $$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \left(\theta(H_i(X,.,.) \odot H_j(X,.,.)) + \overset{1}{K}_{i,j}(X,.,.)\right) d[Z^i,Z^j] \quad ;$$

c'est bien l'équation donnée (8.3), pourvu que $\overset{1}{K}_{i,j} = \overset{2}{H}_{i,j} - \theta(\overset{1}{H}_i \odot \overset{1}{H}_j)$; son image dans le quotient $T^2/T^1 = T^1 \odot T^1$ est nulle, donc $\overset{1}{K}_{i,j}$ est bien 1-tangent, $\overset{1}{K}_{i,j}(v,t,\omega) \in T^1(V,v)$. Avec ce symbole $\underset{\theta}{=}$, les H_k et $K_{i,j}$ deviennent des sections du même fibré vectoriel, sans distinction entre les H_k et les $K_{i,j}$. On peut alors, pour des Z^k et θ donnés, considérer l'espace des équations différentielles stochastiques comme un espace vectoriel, et même un module sur l'algèbre des fonctions réelles $C^{0,1}$ sur V.

On peut aussi utiliser (voir P.A. Meyer, [2], § 4, pages 56 et suivantes) le relèvement θ pour de nouveaux calculs d'intégrales stochastiques. En effet, T^2 est décomposé en somme directe de T^1 et de $\theta(T^2/T^1)$, image par θ de T^2/T^1 dans T^2 ; si π est la projection canonique de T^2 sur son quotient T^2/T^1, $\pi\theta = I_{T^2/T^1}$, et $\theta\pi$ est un projecteur de T^2, de noyau T^1, d'image $\theta(T^2/T^1)$; soit $\rho = I - \theta\pi$, projecteur d'image T^1, et appelons $\bar\rho$ le même opérateur, considéré comme opérant $T^2 \to T^1$; donc son transposé ${}^t\bar\rho$ est un injection $T^{*1} \to T^{*2}$. Si alors $J \in T^{*1}(X)$, ${}^t\bar\rho J \in T^{*2}(X)$, et on peut calculer l'intégrale stochastique ${}^t\bar\rho\, J \cdot \underline{X}$, qu'on notera $J \underset{(\theta)}{\cdot} \underline{X}$. Cette intégration est une application $\mathcal{O}$pt-linéaire de $T^{*1}(X)$ dans $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$. Suivant Bismut, on dira que X est une θ-martingale à valeurs dans V, si cette intégration anvoie $T^{*1}(X)$ dans $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$.

<u>Corollaire (9.28)</u> : <u>Soit</u> F <u>un ensemble fermé de</u> V, <u>et soit</u> <u>$(EDS)_F$</u> <u>une équation différentielle stochastique donnée seulement sur</u> F : <u>ses coefficients</u> H_k, $H_{i,j}$ <u>ne sont donnés que sur</u> F. <u>On suppose que tout point</u> $w \in F$ <u>possède un voisinage ouvert</u> V_w <u>dans</u> V, <u>où les</u> H_k <u>et</u> $H_{i,j}$ <u>se prolongent en</u> $H_{k,w}$, $H_{i,j,w}$, <u>encore optionnels</u>, <u>localement bornés et lispchitziens</u>. <u>Alors</u> <u>$(EDS)_F$</u> <u>se prolonge en une équation différentielle stochastique</u> <u>EDS</u> <u>sur</u> V <u>tout entière</u>.

<u>Démonstration</u> : On utilise une forme = de l'équation, suivant (9.25) ; supposons-le fait. Alors on prolonge $\overset{1}{H}_k$, $\overset{1}{K}{}^{\theta}_{i,j}$, par $\sum_w \alpha_w \overset{1}{H}_{k,w}$, où $((\alpha_w)_{w\in V}, \alpha)$ est une partition de l'unité $C^{0,1}$ relative au recouvrement $((V_w)_{w\in F}, \complement F)$ de V.

§ 10. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES SUR UNE VARIETE V ET UNE SOUS-VARIETE W.

Résumé du § 10. On définit à (10.1) ce qu'est une équation différentielle stochastique sur une variété V, tangente à une sous-variété W. On démontre qu'alors toute solution qui débute sur W reste toujours dans W, (10.3) et (10.5). Ceci permet d'étendre aux équations sur une variété ce qui a été dit au sujet des équations sur un espace vectoriel, (10.4).

Définition (10.1) : Soit EDS une équation différentielle sur V. On dit qu'en un point w d'une sous-variété W (de classe $C^{2,1}$) de V, l'équation est tangente à W, si les $\overset{1}{H}_k(w,t,\omega)$ sont dans $T^1(W,w)$, et les $\overset{2}{H}_{i,j}(w,t,\omega)$ sont dans $T^2(W;w)$, pour tout $(t,\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.
On sait (voir (1.8)) que $T^1(W,w)$ est sous-espace vectoriel de $T^1(V;w)$, et $T^2(W;w)$ sous-espace de $T^2(V;w)$. Le quotient $T^2(W;w)/T^1(W;w)$ s'injecte dans le quotient $T^2(V,w)/T^1(V;w)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$(10.2) \qquad \begin{array}{ccc} T^2(W;w)/T^1(W;w) & \xrightarrow{\text{isom.}} & T^1(W;w) \odot T^1(W;w) \\ \Big\downarrow \text{injection} & & \Big\downarrow \text{injection} \\ T^2(V;w)/T^1(V;w) & \xrightarrow{\text{isom.}} & T^1(V;w) \odot T^1(V;w) \end{array} .$$

Il en résulte qu'une équation différentielle stochastique sur W est identique à une équation différentielle stochastique sur V, définie seulement sur W, tangente à W le long de W, et localement prolongeable au sens de (9.28), avec $F = W$; il existe donc, par (9.28), une équation différentielle stochastique sur V tout entière qui la prolonge. Inversement, une équation différentielle stochastique sur V, tangente à W le long de W, induit une équation différentielle stochastique sur W ; et un processus X sur A à valeurs dans W est solution dans W si et seulement s'il l'est dans V. En effet, on passe de la représentation tangentielle dans W à la représentation dans V trivialement par (3.5ter) pour l'injection Φ de W dans V, donc, si X est solution dans W, il l'est dans V. Inversement, supposons X solution dans V. Si $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un atlas relatif à (V,W) ramenant V'_n à un espace vectoriel et W'_n à un sous-espace vectoriel, on voit trivialement que X est solution dans W dans chaque $A\cap X^{-1}(V'_n)$, donc sur A.

Lemme (10.3) : Soit V une sous-variété fermée d'un espace vectoriel E. Soit EDS une équation différentielle stochastique dans E, tangente à V le long de V. Soit X une solution maxima de EDS dans E, pour une valeur initiale $a\in\mathcal{C}_S$; soit ζ son temps de mort. Pendant toute sa vie, c-à-d. dans $[S,\zeta|$, X est à valeurs dans V pour l'ensemble des trajectoires pour lesquelles $a=X_S\in V$.

Démonstration : Soit d'abord $a\in V$ partout. Soit $\zeta_V\leq\zeta$ le temps de sortie de X de V ; alors X est solution dans V, dans $[S,\zeta_V|$, où $\zeta_V|$ est $\zeta_V]$ partout où $\zeta|$ est $\zeta]$ est $\zeta_V=\zeta$, et partout où $\zeta_V<\zeta$. D'après le théorème d'existence locale (8.6), il existe un temps d'arrêt $T\geq\zeta_V$, partout $>\zeta_V$ là où $\zeta_V<+\infty$, et une solution Y de EDS dans $[\zeta_V,T]$ à valeurs dans V, égale, au temps ζ_V, à X_{ζ_V} là où $\zeta_V<\zeta$, à n'importe quelle constante $\in V$ ailleurs. Alors X et Y sont toutes deux solutions de EDS à valeurs dans E, dans $[\zeta_V,T\wedge\zeta]\cap(\overline{\mathbb{R}}_+\times\{\zeta_V<\zeta\})$, égales au temps ζ_V, donc elles coïncident dans cet intervalle. Cela prouve que X est encore dans V dans cet intervalle ; d'après la définition de ζ_V, cela prouve que $\zeta_V=\zeta$.
Si maintenant a n'est pas partout à valeurs dans V, on posera $\Omega'=\{a\in V\}$. On considèrera la solution X' correspondant à la valeur initiale, au temps S, a sur Ω', une constante arbitraire $\in V$ sur $\complement\Omega'$. Le résultat est vrai pour X', et on applique (7.3bis).

Proposition (10.4) : Les propositions suivantes des §§ 6 et 7 : (6.6), (7.2), (7.3), (7.3bis), (7.4), démontrées lorsque V est un espace vectoriel E, sont vraies pour V quelconque.

<u>Démonstration</u> : On plonge V comme sous-variété fermée $C^{2,1}$ d'un espace vectoriel E. On a vu à (10.1) que <u>EDS</u> définie sur V, se prolonge en une équation, encore notée <u>EDS</u>, sur E, tangente à V le long de V. L'existence locale de (7.2) est en fait (8.6), on a dû le faire directement pour une variété quelconque V. Mais toutes les unicités résultent de (10.3), puisque ce sont des unicités dans E. Ensuite, dans E, on a un temps de mort ζ, et il est valable aussi sur V par (10.3). Comme la relative compacité d'une trajectoire dans V ou dans E sont les mêmes, ainsi que la convergence à l'infini dans V ou E, on passe aussitôt de E à V. Il y a juste quelques points non immédiats : en appliquant brutalement (7.4), là où on dit que X est restriction de semi-martingale, X est à valeurs dans V mais restriction d'une semi-martingale a priori à valeurs dans E. Si c'est dans un intervalle $[S',T']$, S' et T' temps d'arrêt, X est aussi restriction de la semi-martingale obtenue en la prolongeant par une constante $\in V$ dans $[0,S[$ et par $X_{T'}$ dans $[T',+\infty]$; si c'est dans un intervalle $[S',T'[$, cela prouve que $X_{T'_-}$ existe là où $T' > S'$, et elle est restriction de la semi-martingale obtenue en la prolongeant par une constante $\in V$ dans $[0,S'[$, et dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \{T' = S'\}) \cap [S',+\infty]$, et par $X_{T'_-}$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \{T' > S'\}) \cap [T',+\infty]$, donc encore à valeurs dans V ; dans les autres cas, l'ensemble considéré est réunion dénombrable stationnaire d'ensembles semi-martingales, dans chacun desquels X est restriction de semi-martingales à valeurs dans V, et on applique S[1], lemme (2.2).

<u>Remarque</u> : Ainsi la définition globale sur une variété V d'une équation différentielle stochastique et de ses solutions permet, par plongement dans un espace vectoriel, de démontrer les propriétés <u>globales</u> de ses solutions, sans cartes locales de la variété. Seul le théorème d'existence locale (8.6) a dû être montré par des cartes. Cette méthode de plongement de V dans un espace vectoriel, qui permet d'éviter des cartes pour avoir des propriétés globales des solutions, a déjà été employée par Ikeda-Watanabe (article à paraître). En fait , c'est peut-être seulement un amusement : les propriétés

(6.6), (7.2), (7.3), (7.4) auraient pu être montrées directement sur une variété, sans beaucoup plus de fatigue que sur un espace vectoriel !

Nous pouvons maintenant généraliser (10.3) :

Proposition (10.5) : Soient V une variété, W une sous-variété fermée, EDS une équation différentielle stochastique sur V, tangente à W le long de W. Soit X une solution maxima de EDS à valeurs dans V, dans un intervalle stochastique $[S,\zeta|$, ζ temps mort. Pendant toute sa vie, i.e. dans $[S,\zeta|$, X est à valeurs dans W pour toutes les trajectoires pour lesquelles $a = X_S \in W$.

Démonstration : On plonge V comme sous-variété fermée d'un espace vectoriel E. On passe alors de V à E et de E à W, en appliquant (10.3) et (10.4).

Remarque : On notera que (10.5) est très différent de (5.7) ; dans (5.7), il y a foliation, Θ est complètement intégrable, et on n'applique pas l'unicité de la solution d'une équation différentielle, $\overset{1}{\Theta}$ est C^1 ou $\overset{2}{\Theta}$ est C^o, pas de condition de Lipschitz ; dans (10.5), il y a une seule sous-variété W, on s'appuie sur l'unicité, $\overset{1}{\Theta}$ est $C^{1,1}$ ou $\overset{2}{\Theta}$ est $C^{0,1}$, condition de Lipschitz (faute de laquelle le résultat est trivialement faux, déjà pour une équation déterministe).

Généralisation (10.5bis) : Soient V, W, des variétés, Φ une immersion $C^{2,1}$ de V dans W. Soit EDS une équation différentielle stochastique, tangente à $\Phi(V)$ en tout point de $\Phi(V)$. On suppose que Φ est continuement propre, au sens suivant : si une trajectoire continue $(v_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tend vers l'infini de V pour $t \to +\infty$, son image par Φ ne peut pas tendre vers une limite dans W. Si alors X est solution de EDS dans W, $a = X_S$ dans $\Phi(W)$, X est dans $\Phi(V)$ pendant toute sa vie $[S,\zeta|$.

Remarque : $\Phi(V)$ n'est pas supposé fermée, mais continuement propre (ce qui ne veut pas dire propre : Φ propre voudrait dire que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini de V, $\Phi(v_n)$ ne peut pas tendre vers une limite dans W. Nous remplaçons la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une trajectoire continue $(v_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Propre est plus fort que continuement propre. Un ouvert de W n'est pas en général continuement propre. Une géodésique du tore n'est pas propre, mais est continuement propre).

<u>Démonstration</u> : Les H_k, $H_{i,j}$ se transportent de W à V puisqu'ils sont tangents à $\Phi(V)$ le long de $\Phi(V)$ et que Φ est un $C^{2,1}$ difféomorphisme local. Donc on définit une équation différentielle stochastique Φ^{-1}(EDS) sur V. Relevons la valeur initiale $a = X_S$ en $\hat{a} = \hat{X}_S$, $\mathcal{T}_S$-mesurable, à valeurs dans V. On en déduit une solution $\hat{X}$ dans $[S,\hat{\zeta}|$, à valeurs dans V. Son image $\Phi(\hat{X}) = X$ est solution de EDS dans W dans $[S,\hat{\zeta}|$, et constamment dans $\Phi(V)$. Supposons que, dans V, elle existe dans $[S,\zeta| \supsetneq [S,\hat{\zeta}|$. Il existerait alors une trajectoire continue tendant vers l'infini de V pour $t \to \hat{\zeta}$, dont l'image ne tendrait pas vers l'infini de W, contrairement à l'hypothèse.

<u>(10.6)</u> <u>Variétés et sous-variétés dans le formalisme de Stratonovitch</u>.

Considérons une équation de Stratonovitch (9.15) sur V, qui veut donc dire (9.16). Elle est tangente à une sous-variété W le long de W, si, en tout point $w \in W$, $H_k(w,t,\omega) \in T^1(W,w)$, et $(H_i H_j)(w,t,\omega) \in T^2(W,w)$. Or il suffit que la première condition soit toujours vérifiée pour que la seconde le soit aussi. Il suffit de le voir sur une carte, où $V = E$ espace vectoriel, $W = G$ sous-espace vectoriel. On reprend la formule (9.7bis). Le vecteur $(H_i \odot H_j)_w \in E \oplus (E \odot E)$ a comme composante sur E : $(\partial_{H_i(w)} H_j)(w)$, dérivée partielle suivant un vecteur $H_i(w) \in G$ d'un champ H_j qui, sur G, est à valeurs dans G, donc c'est un vecteur $\in G$; et il a comme composante sur $E \odot E$: $H_i(w) \odot H_j(w) \in G \odot G$. Donc :

<u>(10.7)</u> Une équation de Stratonovitch (9.15) sur V est tangente à W le long de W ssi, pour tout $w \in W$, tout (t,ω), $H_k(w,t,\omega) \in T^1(W,w)$.

§ 11. SEMI-MARTINGALES HORIZONTALES PAR RAPPORT A UNE CONNEXION D'UN ESPACE FIBRE.

Résumé du § 11. (11.1) rappelle la notion de connexion sur un espace fibré, et (11.2) définit les semi-martingales horizontales pour la connexion. Des propriétés équivalentes sont données à (11.3) et (11.4). (11.11) étudie le cas des connexions linéaires sur les fibrés vectoriels.

(11.1) Soit G un espace fibré $C^{2,1}$, de base B, de fibre-type F, où π sera la projection de G sur B. Soit $g \in G$, $\pi g = b \in B$. Alors $\overset{1}{\underline{\pi}}(g)$, que nous appellerons souvent π, est une application linéaire de $T^1(G,g)$ sur $T^1(B,b)$, qui fait du deuxième un quotient du premier, par le sous-espace $T^1(F_b;g)$, où F_b est la fibre au-dessus de b. De même il y a une application linéaire $\overset{2}{\underline{\pi}}(g) = \pi$ de $T^2(G;g)$ sur $T^2(B;b)$, qui fait du deuxième un quotient du premier ; dans les cartes produits, $G = B \times F$, G, B et F vectoriels, le noyau de la surjection $(B \oplus F) \oplus ((B \oplus F) \odot (B \oplus F)) = B \oplus F \oplus (B \odot B) \oplus (B \otimes F) \oplus (F \odot F) \to B \oplus (B \odot B)$ est $F \oplus (B \otimes F) \oplus (F \odot F)$. Alors $\overset{2}{\underline{\pi}}(g)$ envoie $T^2(G;g)$ sur $T^2(B;b)$, $T^1(G;g)$ sur $T^1(B;b)$, donc le quotient $T^2(G;g)/T^1(G;g)$ sur $T^2(B;b)/T^1(B;b)$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
T^2(G;g)/T^1(G,g) & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & T^2(B;b)/T^1(B;b) \\
\Big\downarrow \text{isom.} & & \Big\downarrow \text{isom.} \\
T^1(G;g) \odot T^1(G;g) & \xrightarrow{\quad\pi \odot \pi\quad} & T^1(B;b) \odot T^1(B;b)
\end{array} \quad .$$

On appelle connexion $\overset{1}{\sigma}$ sur G un système de relèvements des quotients du premier ordre : pour tout $g \in G$, $\overset{1}{\sigma}(g)$ est une application linéaire de $T^1(B;b)$ dans $T^1(G;g)$, telle que $\pi \circ \overset{1}{\sigma}(g) = I_{T^1(B;b)}$. <u>On supposera la connexion de classe</u> C^1. La connexion définit en tout point g de G un "sous-espace tangent horizontal"

$\overset{1}{\Theta}(g)$, sous-espace vectoriel de $T^1(G,g)$, image de $\overset{1}{\sigma}$, c-à-d. $\overset{1}{\Theta}(g) = \operatorname{Im} \overset{1}{\sigma}(g)$; $\overset{1}{\Theta}$ s'appelle la famille des plans horizontaux, champ C^1 de sous-espaces tangents, de dimension dim B. Sur une carte locale autour d'un point de G, on peut représenter le fibré comme un produit d'ouverts d'espaces vectoriels, que nous écrirons comme produit d'espaces vectoriels, $G = B \times F$, et la connexion est définie par $\overset{1}{\sigma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;B \oplus F)$, $\overset{1}{\sigma} = I_B \oplus \overset{1}{\Gamma}(b,f)$, $\overset{1}{\Gamma}(b,f) \in \mathcal{L}(B;F)$; alors $\overset{1}{\Theta}(b,f)$ est, dans $B \times F$, lè graphe de $\overset{1}{\Gamma}(b,f)$. On se trouve ramené exactement à la situation de (5.4). Donc $\overset{1}{\Theta}$ définit sur G un système différentiel ; une courbe C^1 déterministe, solution de ce système, c-à-d. à tangente dans $\overset{1}{\Theta}$, $\frac{dX}{dt} \in \overset{1}{\Theta}(X(t))$, est appelée une courbe horizontale de la connexion. Donc :

<u>Définition (11.2)</u> : On appellera semi-martingale horizontale $\hat{X}$, relativement à la connexion, une semi-martingale de G, tangente à $\overset{1}{\Theta}$ au sens de Stratonovitch : $d\hat{X}_t$ est $\mathcal{S}$tr-tangente à $\overset{1}{\Theta}(\hat{X}_t)$ (5.4).

<u>(11.3)</u> On a alors déjà étudié les propriétés élémentaires de ces semi-martingales horizontales. Au champ $\overset{1}{\Theta}$ correspond un champ $\overset{2}{\Theta}$ de classe C^0 de sous-espaces 2-tangents, $\overset{2}{\Theta}(g) \in T^2(G,g)$, de dimension $\dim B + \dim B(\dim B + 1)/2$; $\overset{2}{\Theta}(g)$ est l'image de $T^2(B,\pi g)$ par une application linéaire $\overset{2}{\sigma}(g)$ de $T^2(B,\pi g)$ dans $T^2(G,g)$, avec $\overset{2}{\pi}\, \overset{2}{\sigma}(g) = \overset{2}{\pi}(g) \circ \overset{2}{\sigma}(g) = I_{T^2(B,\pi g)}$. Dans une carte produit d'espaces vectoriels, $\overset{2}{\Theta}(b,f)$ est le graphe d'une application linéaire $\overset{2}{\Gamma}(b,f)$ de $B \oplus (B \odot B)$ dans $F \oplus (B \otimes F) \oplus (F \odot F)$: voir (5.9), (5.10), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16). Cela donne :

<u>Proposition (11.3)'</u> : <u>Une semi-martingale</u> $\hat{X}$ <u>sur</u> G <u>est horizontale</u>, <u>ssi</u> $d\hat{X}_t$ <u>est tangente à</u> $\overset{2}{\Theta}(\hat{X}_t)$ <u>au sens ordinaire</u>.

<u>(11.3bis)</u> On peut utiliser les méthodes de (3.17), (3.17quinto), et de (4.23quinto) ; $\hat{X}$ est une semi-martingale sur G, $\pi\hat{X} = X$ est sa projection, une semi-martingale sur B, et $\overset{1}{\sigma}(g) \in \mathcal{L}(T^1(B,\pi g);T^1(G,g))$, $\overset{2}{\sigma}(g) \in \mathcal{L}(T^2(B,\pi g),T^2(G,g))$. L'espace $\overset{1}{\Theta}(g)$ est l'image de $\overset{1}{\sigma}(g)$; mais $\pi\, \overset{1}{\sigma}(g)$ est l'identité de $T^1(B,g)$, donc $\overset{1}{\sigma}(g)\,\pi$

est la projection de $T^1(G,g)$ sur $\overset{1}{\Theta}(g)$ parallèlement à $\overset{1}{T}(F_g,g)$, donc $\overset{1}{\Theta}(g)$ est le noyau de $I_{\overset{1}{T}(G,g)} - \overset{1}{\sigma}(g)\,\pi$; donc $d\hat{X}$ est $\mathcal{S}$tr-tangente au noyau de $I - \overset{1}{\sigma}\pi$ ssi sa transformée par cette application est nulle, i.e. ssi $d\hat{X} \underset{(S)}{=} \overset{1}{\sigma}\pi\, d\hat{X}$. On peut faire de même pour le contact ordinaire de $d\underline{X}$ avec le noyau $\overset{2}{\Theta}$ de $I_{T^2(G)} - \overset{2}{\sigma}\pi$; donc, comme $\pi\hat{X} = X$:

<u>Proposition (11.4)</u> : <u>Soit</u> $\hat{X}$ <u>une semi-martingale sur le fibré</u> G, <u>de projection</u> X <u>sur</u> B. <u>Alors</u> $\hat{X}$ <u>est horizontale ssi</u>, <u>au sens de</u> (3.17quinto) <u>et</u> (4.23quinto) :

(11.5) $$d\hat{X} \underset{(S)}{=} \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\ \pi(\hat{X})\ d\hat{X}\ ,\quad \text{ou}\quad \hat{X} \sim \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\ \pi(\hat{X}) \underset{(S)}{\bullet} X$$

$$\text{ou}\quad d\hat{X} \underset{(S)}{=} \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\ dX \quad \text{ou}\quad \hat{X} \sim \overset{1}{\sigma}(\hat{X}) \underset{(S)}{\bullet} X\ ,\quad \text{ou}$$

(11.6) $$d\hat{\underline{X}} = \overset{2}{\sigma}(\hat{X})\ \pi(\hat{X})\ d\hat{\underline{X}}\ ,\quad \text{ou}\quad \hat{\underline{X}} \sim \overset{2}{\sigma}(\hat{X})\ \pi(\hat{X}) \bullet \hat{\underline{X}}$$

$$d\hat{\underline{X}} = \overset{2}{\sigma}(\hat{X})\ d\underline{X}\ ,\quad \text{ou}\quad \hat{\underline{X}} \sim \overset{2}{\sigma}(\hat{X}) \bullet \underline{X}\ .$$

Explicitons ces relations, en supposant $G = B \times F$ par des cartes, B et F espaces vectoriels. Alors $\hat{X} = (X,Y)$, et cela donne, pour (11.5) (X à valeurs dans B, Y dans F) :

(11.7) $$dY \underset{(S)}{=} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\ dX \quad \text{ou}\quad Y \sim \overset{1}{\Gamma}(X,Y) \underset{(S)}{\bullet} X\ ,$$

et pour (11.6) ($\underline{X}$ à valeurs dans $B \oplus (B \odot B)$, $\underline{Y}$ dans $F \oplus (B \otimes F) + (F \odot F)$) :

(11.8) $$d\underline{Y} = \overset{2}{\mathbb{\Gamma}}(X,Y)\ d\underline{X} \quad \text{ou}\quad \underline{Y} \sim \overset{2}{\mathbb{\Gamma}}(X,Y) \bullet \underline{X}\ ,$$

ce qui donne pour Y, à valeurs dans F :

(11.9) $$dY = \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\ dX + \overset{2}{\Gamma}(X,Y)\ \frac{1}{2}\ d[X,X]\ ,\quad \text{ou}$$

$$Y = \overset{1}{\Gamma}(X,Y) \bullet X + \overset{2}{\Gamma}(X,Y) \bullet \frac{1}{2}[X,X] \quad .$$

Pour expliciter $\overset{2}{\Gamma}$, il est plus commode de choisir une base $(b_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ de B ; alors (11.9) devient, si $X = \sum_{k=1}^{N} b_k X^k$:

$$dY = \sum_{k=1}^{N} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\, b_k\, dX^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \overset{2}{\Gamma}(X,Y)\, (b_i \otimes b_j)\, d[X^i,X^j] \quad , \quad \text{ou}$$

(11.10)
$$dY = \sum_{k=1}^{N} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\, b_k\, dX^k + \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{1}{2}\,(\partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(b_i)b_j + \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(b_j)b_i)$$

$$+ \frac{1}{2}\,(\partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(\overset{1}{\Gamma}(X,Y)b_i)b_j + \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(\overset{1}{\Gamma}(X,Y)b_j)b_i)\Big) \frac{1}{2} d[X^i,X^j] \quad .$$

Qu'il s'agisse de (11.7) ou de (11.10), pour $X = \pi \hat{X}$ connue, Y est solution d'une équation différentielle stochastique.

(11.11) Cas des fibrés vectoriels et des connexions linéaires.

Si F est un espace vectoriel, la connexion est dite linéaire, si, pour toute carte sur un produit d'un ouvert U' de B par F tout entière, Γ est linéaire sur la fibre :

$$\Gamma(b,f) = \Gamma(b)f \quad , \quad \Gamma(b) \in \mathcal{L}(F;\mathcal{L}(B;F)) \quad .$$

Alors Γ est une fonction sur U' à valeurs dans $\mathcal{L}(F;\mathcal{L}(B;F)) = \mathcal{L}_2(F \times B;F)$, qui a donc une dérivée Γ', fonction sur U' à valeurs dans $\mathcal{L}(B;\mathcal{L}(F;\mathcal{L}(B;F))) = \mathcal{L}_3(B\times F\times B;F)$, avec $\partial_1 \Gamma(b,f) = \Gamma'(b)\, f$, $\partial_2 \Gamma(b,f) = \Gamma(b)$; alors (11.7) devient, pour $G = B \times F$, espaces vectoriels :

(11.11bis)
$$dY \underset{(S)}{=} \overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, dX \quad ,$$

tandis que (11.10) devient :

$$(11.12)\qquad dY = \sum_{k=1}^{N} \overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, b_k\, dX^k + \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\tfrac{1}{2}\,\big(\overset{1}{\Gamma}{}'(X)(b_i)\, Y\, b_j + \overset{1}{\Gamma}{}'(X)(b_j)\, Y\, b_i\big)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\big(\overset{1}{\Gamma}(X)(\overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, b_i) b_j + \overset{1}{\Gamma}(X)(\overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, b_j) b_i\big)\Big)\, \tfrac{1}{2}\, d[X^i, X^j] \quad ,$$

[ici $\overset{1}{\Gamma}(X) \in \mathcal{L}(F \times B; F)$, donc $\overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, b_k \in F$, et $\overset{1}{\Gamma}(X)(\overset{1}{\Gamma}(X)\, Y\, b_i) b_j \in F$; $\overset{1}{\Gamma}{}'(X) \in \mathcal{L}(B \times F \times B; F)$, et $\overset{1}{\Gamma}{}'(X)(b_j)\, Y\, b_i \in F$].

On peut l'écrire avec des indices : soit $(b_k)_{k=1,2,\dots,N}$ une base de B, $X = \sum_{k=1}^{N} X^k b_k$, $(f_\alpha)_{\alpha=1,2,\dots,M}$ une base de F, de sorte que $Y = \sum_{\alpha=1}^{M} Y^\alpha f_\alpha$; $\overset{1}{\Gamma}(b)$ est définie par des coefficients $\Gamma^\beta_{\alpha,k}(b)$, avec :

$$(11.13)\qquad \overset{1}{\Gamma}(b)\Big(\sum_{\alpha=1}^{M} Y^\alpha f_\alpha\, ,\ \sum_{k=1}^{N} X^k b_k\Big) = \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{M} \Gamma^\beta_{\alpha,k}(b)\, Y^\alpha\, X^k\, f_\beta \quad .$$

Alors

$$(11.14)\qquad \overset{1}{\Gamma}{}'(b)\Big(\sum_{i=1}^{N} X^i\, b_i\, ,\ \sum_{\alpha=1}^{M} X^\alpha\, b_\alpha\, ,\ \sum_{j=1}^{N} X^j\, b_j\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{M} \partial_i\, \Gamma^\beta_{\alpha,j}(b)\, X^i\, Y^\alpha\, X^j\, f_\beta \quad .$$

Alors (11.12) devient :

$$(11.15)\qquad dY^\beta = \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \Gamma^\beta_{\alpha,k}(X)\, Y^\alpha\, dX^k$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{2}\,\big(\partial_i\, \Gamma^\beta_{\alpha,j}(X) + \partial_j\, \Gamma^\beta_{\alpha,i}(X)\big)\, Y^\alpha$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\gamma=1}^{M} \tfrac{1}{2}\,\big(\Gamma^\beta_{\alpha,j}(X)\, \Gamma^\alpha_{\gamma,i}(X) + \Gamma^\beta_{\alpha,i}(X)\, \Gamma^\alpha_{\gamma,j}(X)\big)\, Y^\gamma\Big)\, \tfrac{1}{2}\, d[X^i, X^j] \quad .$$

Remarque (11.16) : Quand la connexion est linéaire, au-dessus d'un ouvert $\mathcal{B}$ de B, pour une carte vectorielle $\mathcal{B} \times F$, l'équation différentielle en Y des semi-martingales horizontales est linéaire, sous la forme (11.11bis) ou (11.12).

§ 12. RELEVEMENT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE PAR UNE CONNEXION.

Résumé du § 12. Le relèvement par une connexion d'une équation différentielle ordinaire est classique ; (12.1) définit le relèvement d'une équation différentielle stochastique. On en donne la formulation explicite à (12.4). (12.6) donne le relèvement d'une équation de Stratonovitch.

(12.0) Dans le cas d'une équation différentielle déterministe, le relèvement est évident : si $\overset{1}{\sigma}$ définit la connexion, l'équation relevée de l'équation $\frac{dX_t}{dt} = H(X_t, t)$ est $\frac{d\hat{X}_t}{dt} = \overset{1}{\sigma}(\hat{X}_t)\ H(\pi \hat{X}_t , t)$: en chaque point g de G, le vecteur tangent $H(g,t)$ est l'image par $\sigma(g)$ du vecteur tangent $H(\pi g,t)$. Ce n'est guère plus difficile pour une équation différentielle stochastique, puisque la connexion $\overset{1}{\sigma}$ définit une connexion du 2nd ordre $\overset{2}{\sigma}$, c-à-d. un relèvement des vecteurs 2-tangents :

Définition (12.1) : Soit EDS une équation différentielle stochastique sur la base B du fibré G, définie par (8.3). On appelle relèvement de cette équation par la connexion σ l'équation différentielle stochastique $\widehat{\text{EDS}}$ sur G définie par :

$$(12.2)\qquad d\underline{\hat{X}} = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\ H_k(\pi\hat{X},.,.)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{2}{\sigma}(H)\ \overset{2}{H}_{i,j}(\pi\hat{X},.,.)\ d[Z^i,Z^j] \quad .$$

Autrement dit, c'est

$$(12.3)\qquad d\underline{\hat{X}} = \sum_{k=1}^{m} \hat{H}_k(\hat{X},.,.)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \hat{\overset{2}{H}}_{i,j}(\hat{X},.,.)\ d[Z^i,Z^j] \quad ,$$

où $\hat{H}_k(g,.,.)$ (resp. $\hat{\overset{2}{H}}_{i,j}(g,.,.)$) est l'image par $\overset{1}{\sigma}(g)$ (resp. $\overset{2}{\sigma}(g)$) de $H_k(\pi G,.,.)$ (resp. $H_{i,j}(\pi g,.,.)$).

Si l'équation est déterministe, on retrouve le relèvement habituel. D'autre part, on trouve bien une équation différentielle stochastique du type (8.3) par le corollaire (5.13) : $\overset{2}{\sigma}(g)$ envoie $T^2(B,\pi g)$ dans $\overset{2}{T}(G,g)$, $T^1(B,\pi g)$ dans $T^1(G,g)$, et le quotient $T^2(B,\pi g)/T^1(B,\pi g) = T^1(B,\pi g) \odot T^1(B,\pi g)$ dans $T^2(G,g)/T^1(G,g) = T^1(G,g) \odot T^1(G,g)$ par $\overset{1}{\sigma}(g) \circledcirc \overset{1}{\sigma}(g)$; l'image de $\overset{2}{H}_{i,j}(b,t,\omega)$ dans $\overset{1}{T}(B,b) \odot T^1(B,b)$ étant $H_i(b,t,\omega) \odot H_j(b,t,\omega)$, celle de $\hat{\overset{2}{H}}_{i,j}(g,t,\omega) = \overset{2}{\sigma}(g)\ \overset{2}{H}_{i,j}(\pi g,t,\omega)$ dans $T^1(G,g) \odot T^1(G,g)$ est bien $(\overset{1}{\sigma}(g) \circledcirc \overset{1}{\sigma}(g))(H_i(\pi g,t,\omega) \odot H_j(\pi g,t,\omega)) = H_i(g,t,\omega) \odot H_j(g,t,\omega)$.

Si l'on prend une carte de G où il s'exprime comme produit d'ouverts d'espaces vectoriels, ce que nous écrirons, comme toujours, $G = B \times F$, cela s'écrit, d'après (5.9), (5.12), avec $\hat{X} = (X,Y)$:

$$dX = \sum_{k=1}^{m} H_k(X,.,.)\ dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} H_{i,j}(X,.,.)\ d[Z^i,Z^j] \quad ,$$

qui est (8.3) pour X, et

$$\begin{aligned} dY = {} & \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\ \overset{1}{H}_k(X,.,.)\ dZ^k \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\ \overset{1}{H}_{i,j}(X,.,.)\ d[Z^i,Z^j] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{2}{\Gamma}(X,Y)(H_i(X,.,.) \odot H_j(X,.,.))\ d[Z^i,Z^j] \quad , \end{aligned} \tag{12.4}$$

pour Y, où $\overset{2}{H}_{i,j} = \begin{pmatrix} \overset{1}{H}_{i,j} \\ \\ H_i \odot H_j \end{pmatrix} \in B \oplus (B \odot B)$.

Comme on l'a fait pour (11.9)-(11.10), cela donne :

$$(12.5) \qquad dY = \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\, H_k(X,.,.)\, dZ^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{1}{\Gamma}(X,Y)\, \overset{1}{H}_{i,j}(X,.,.)\, d[Z^i,Z^j]$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \Big(\frac{1}{2}(\partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(H_i(X,.,.))H_j(X,.,.) + \partial_1 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(H_j(X,.,.))H_i(X,.,.))$$

$$+ \frac{1}{2}\,(\partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(\overset{1}{\Gamma}(X,Y)H_i(X,.,.))H_j(X,.,.)$$

$$+ \partial_2 \overset{1}{\Gamma}(X,Y)(\overset{1}{\Gamma}(X,Y)H_j(X,.,.))H_i(X,.,.)))\ \frac{1}{2}\, d[Z^i,Z^j] \ .$$

La formule n'est autre, bien sûr, que (11.10), où l'on remplace $b_k\, dX^k$ par $H_k\, dZ^k$ ou $\frac{1}{2}\overset{1}{H}_{i,j}\ d[Z^i,Z^j]$, puis, dans les termes suivants, de nouveau $b_i\, b_j\, d[X^i,X^j]$ par $H_i\, H_j\, d[Z^i,Z^j]$.

Nous n'expliciterons pas le cas d'une connexion linéaire sur un fibré vectoriel, qui est analogue, avec les mêmes susbstitutions dans (11.12).

(12.6) Relèvement d'une équation différentielle de Stratonovitch.

Utilisons la formule (7.14ter). On en déduit :

Proposition (12.7) : La relevée d'une équation différentielle de Stratonovitch (9.15) par une connexion s'obtient en relevant les H_k par $\overset{1}{\sigma}$:

$$\widehat{\text{EDS}}\ (12.7\text{bis}) \qquad \delta\hat{X} \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\ H_k(\pi\hat{X},.,.)\ \delta Z^k \ .$$

Démonstration : On écrit (9.15) en équation ordinaire (9.16), qu'on relève par (12 2), et c'est (12.7bis) à cause de (5.14ter).

Remarque importante : (12.7) est une équation différentielle de Stratonovitch pour $\tilde{\tilde{X}} = (X,Y)$ à valeurs dans $B \oplus F = G$. Elle s'écrit aussi

$$(12.8) \qquad \delta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \underset{(S)}{=} \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} H_k(X,.,.) \\ \overset{1}{\Gamma}(X,Y)H_k(X,.,.) \end{pmatrix} \delta Z^k \ .$$

Mais c'est le système qui est de Stratonovitch, on ne peut pas séparer X de Y. En lui donnant la forme ordinaire, on trouve l'équation de X, puis l'équation de dY, (12.5) (sans termes en $H^1_{i,j}$). Il ne faudrait surtout pas écrire la 2ème équation (12.8) en $\underset{(S)}{=}$, ce serait séparer X de Y, on ne peut pas. On obtiendrait

$$\delta Y \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} \Gamma(X,Y)\ H_k(X,.,.)\ \delta Z^k \ , \tag{12.9}$$

X remplacé par sa valeur , qui serait fausse. Développons-la. On trouvera, d'après (9.20), (9.7), (9.7bis), (9.8)

$$\begin{aligned} dY &= \sum_{k=1}^{m} \Gamma(X,Y)\ H_k(X,.,.)\ dZ^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \big((\partial_{\Gamma(X,Y)H_i(X,.,.)}\ \Gamma(X,.)H_j(X,.,.))(Y) \\ &+ (\partial_{\Gamma(X,Y)H_j(X,.,.)}\ \Gamma(X,.)H_i(X,.,.))(Y)\big)\ d[Z^i,Z^j] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \Gamma(X,Y)\ H_k(X,.,.)\ dZ^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \big(\partial_2\ \Gamma(X,Y)((\Gamma(X,Y)H_i(X,.,.)),H_j(X,.,.)) \\ &+ \partial_2\ \Gamma(X,Y)((\Gamma(X,Y)H_j(X,.,.),H_i(X,.,.))\big)\ \frac{1}{2}\ d[Z^i,Z^j] \ . \end{aligned} \tag{12.10}$$

Au lieu de retrouver (12.5) (sans les $H^1_{i,j}$ que nous avons pris nuls), on ne retrouve que les termes en $\partial_2 \Gamma$, mais pas les termes en $\partial_1 \Gamma$. Ainsi (12.9) est fausse. Au contraire, en développant (12.8) comme système de Stratonovitch, on retrouve (12.5) au complet.

Ceci montre que les équations différentielles stochastiques de Stratonovitch, avantageuses dans bien des cas, doivent se manier avec précaution. Mais supposons que les H_k ne dépendent que de X, pas de (t,ω). Alors (12.9) s'écrit sous la forme d'équation intégrale stochastique matricielle

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} \sim \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} H_k(X) \\ \\ \Gamma(X,Y)H_k(X) \end{pmatrix} \underset{(S)}{\bullet} Z^k \quad ;$$

et là, bien sûr, on peut séparer, et écrire :

$$(12.11) \qquad Y \sim \sum_{k=1}^{m} \Gamma(X,Y)H_k(X) \underset{(S)}{\bullet} Z^k \quad .$$

Mais de (12.11) on ne pourra pas retourner à (12.9) (heureusement, puisque (12.11) est vraie et (12.9) fausse !), parce que $\Gamma(X,Y)H_k(X)$ ne dépend pas seulement de Y, mais aussi de (t,ω) par X supposée remplacée par sa valeur !

Dans ce cas, où H_k ne dépend pas de (t,ω), (12.9) est fausse, mais, avec la notation (9.17bis), (12.12) est exacte :

$$(12.12) \qquad dY \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{m} \Gamma(X,Y)H_k(X) \; dZ^k \quad ,$$

où X est supposée remplacée par sa valeur ; c'est équivalent à (12.11).

§ 13. RELEVEMENT D'UNE SEMI-MARTINGALE PAR UNE CONNEXION (OU TRANSPORT PARALLELE LE LONG DES TRAJECTOIRES D'UNE SEMI-MARTINGALE)

Résumé du § 13 : La proposition (13.1) est fondamentale : si EDS est une équation différentielle stochastique sur la base d'un fibré, $\widehat{EDS}$ son relèvement par une connexion, X une semi-martingale sur la base, $\hat{X}$ une semi-martingale au-dessus de X, et si X est solution de EDS, $\hat{X}$ est un relèvement de X si et seulement si elle est solution de $\widehat{EDS}$. Ceci montre que toute semi-martingale se relève, avec un relevement initial donné, (13.2bis). (13.4) étudie le temps de mort de $\hat{X}$; (13.5) est important. (13.6) étudie, dans le cas d'une connexion linéaire, le relèvement d'un produit tensoriel, (13.12), le fibré dual, (13.15), la conservation du produit scalaire (bien connue pour la relèvement déterministe de la conne-

xion de Levi-Civita). (13.18) exprime tous les relèvements par un relèvement unique dans le fibré des repères.

Proposition (13.1) : Soit A un ensemble comme dans le § 1. Soient G un espace fibré $C^{2,1}$, de base B, de fibre type F, et σ une connexion $C^{1,1}$ sur G. Soient X une semi-martingale sur A à valeurs dans B, $\hat{X}$ une semi-martingale sur A à valeurs dans G, au-dessus de X, i.e. $\pi\hat{X} = X$. Soient EDS une équation différentielle stochastique sur B, définie dans A, $\widehat{EDS}$ son relèvement par σ, équation différentielle stochastique sur G définie dans A. On suppose X solution de EDS. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\hat{X}$ est horizontale (11.1) ;

2) $\hat{X}$ est solution de $\widehat{EDS}$.

Démonstration : Le cas d'une équation de Stratonovitch est évidemment un cas particulier du cas général.
C'est évident : $\hat{X}$ est horizontale ssi $d\underline{\hat{X}} = \overset{2}{\sigma}(\hat{X})d\underline{X}$, formule (11.6), ce qui, si on le développe, est exactement l'écriture qui exprime que $\hat{X}$ vérifie $\widehat{EDS}$, avec EDS (8.3), et $\widehat{EDS}$ (12.2).
Il faut cependant être un peu plus précis ; avec des jeux d'écriture, on peut démontrer tout ; il faut être sûr que les diverses écritures $dX = \dots$ correspondent bien à la même chose. Dans $d\underline{\hat{X}} = \sigma(\hat{X})d\underline{X}$ de (11.6), on exprime (3.17quarto) ; on a vu alors que cela transporte toute représentation tangentielle $d\underline{X} = \dots$, voir (3.17bis) et (3.17ter) ; et une équation différentielle stochastique signifie précisément une représentation tangentielle, voir (8.3) Donc les écritures correspondent bien à l'intuition, et sont bien justifiées !

Définition (13.2) : On dit que $\hat{X}$ est un relèvement de X au-dessus de A, si elle vérifie les propriétés équivalentes de (13.1). Cela équivaut à dire qu'elle est horizontale (de projection X), ou qu'elle vérifie l'équation relevée d'une (ou de toute) équation différentielle stochastique vérifiée par X. Rappelons que X est toujours solution d'une équation différentielle stochastique, (9.23).

Proposition (13.2bis) : Soit X une semi-martingale dans A à valeurs dans B, $\hat{X}$ une semi-martingale dans A à valeurs dans G, au-dessus de X, $\pi\tilde{X} = X$. Il existe un plus grand ouvert relatif A' de A sur lequel $\hat{X}$ est un relèvement de X ; il est optionnel si A est optionnel et T temps d'arrêt.

Démonstration : On choisit une EDS dont X est solution dans A ; on cherche le plus grand ouvert relatif A' de A où $\hat{X}$ vérifie $\widehat{\text{EDS}}$, et on applique (6.6).

Proposition (13.3) : Soit X une semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans E. Elle admet un relèvement maximum $\hat{X}$ unique dans $[S,\hat{\zeta}[$, $\hat{\zeta}$ temps de mort, prenant une valeur donnée $\hat{X}_S = \hat{a} \in \mathcal{C}_S$ au temps d'arrêt S, $\pi\hat{a}_S = a_S = X_S$. Cette semi-martingale $\hat{X}$ est la solution d'une équation différentielle stochastique globale $\widehat{\text{EDS}}$ sur G, relevée d'une équation EDS vérifiée par X, avec la condition initiale $\hat{X}_S = \hat{a}$. Elle vérifie donc toutes les propriétés (7.2), (7.3), (7.4).

Evident.

On voit l'intérêt considérable de (9.23) : cette proposition permet d'étudier le relèvement $\hat{X}$ de X globalement sur G, comme solution d'une équation différentielle stochastique globale.

(13.4) Etude du temps de mort de $\hat{X}$.

On peut supposer X définie sur B tout entière, et $\hat{X}$ sur $[S,\hat{\zeta}[$. Mais, plus généralement, on peut se donner une équation EDS, sa relevée $\widehat{\text{EDS}}$ par σ, puis une solution X de EDS maxima, définie sur $[S,\zeta[$ avec $X_S = a \in \mathcal{C}_S$, et étudier son relèvement $\hat{X}$ dans $[S,\hat{\zeta}[$ avec $\hat{X}_S = \hat{a} \in \mathcal{C}_S$, $\pi\hat{a} = a$. Bien évidemment $[S,\hat{\zeta}[\subset [S,\zeta[$ puisque $\pi\hat{X} = X$; si on appelle $\Omega'(K)$, Ω', Ω'' les parties de Ω relatives à X, $\hat{\Omega}'(\pi^{-1}(K))$, $\hat{\Omega}'$, $\hat{\Omega}''$ celles relatives à $\hat{X}$, $\hat{\Omega}'(\pi^{-1}(K)) \subset \hat{\Omega}(K)$, $\hat{\Omega}' \subset \Omega'$, $\hat{\Omega}'' \supset \Omega''$. Si, pour $\omega \in \Omega$, $[S(\omega),\hat{\zeta}(\omega)[\subsetneq [S(\omega),\zeta(\omega)[$, cela veut dire que, pour $t \to \hat{\zeta}(\omega)$, $X(t,\omega)$ a une limite b, mais que $\hat{X}(t,\omega)$ tend vers l'infini de G ; en prenant une carte produit de $\pi^{-1}(V_b')$, V_b' voisinage de b, on peut dire que $\hat{X}(t,\omega)$ tend vers l'infini de la fibre F_b de b, vers (b,∞_{F_b}). Que ζ soit fini on non, $X_{\hat{\zeta}}$ existe,

$\hat{X}_{\hat{\zeta}}$ n'existe pas. On sait que $\hat{\zeta}$ est prévisible ; soit $(\hat{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $\hat{\zeta}$, $\hat{\zeta}_n \geq S$, $\hat{\zeta}_n < \zeta$ là où $S < +\infty$.

<u>Proposition (13.5)</u> : <u>Dans les conditions de</u> (13.4), <u>si la fibre est compacte ou discrète, ou si la fibre est vectorielle et la connexion linéaire</u>, $\hat{\zeta} = \zeta$, $[S,\hat{\zeta}| = [S,\zeta|$, <u>et, si</u> X <u>est une semi-martingale sur</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ <u>à valeurs dans</u> B, <u>son relèvement</u> $\hat{X}$, <u>pour</u> $\hat{X}_S = \hat{a} \in \mathcal{C}_S$, <u>est défini dans</u> $[S,+\infty]$.

<u>Démonstration</u> : Le cas de la fibre compacte est évident, $\hat{X}(t,\omega)$ ne peut pas tendre vers l'infini de F_b, qui n'existe pas. Le cas de la fibre discrète aussi, car $t \mapsto \hat{X}(t,\omega)$ est continu, donc, dans une trivialisation $G = B\times F$, il est constant lorsque t tend vers $\zeta(\omega)$ si $X(\zeta(\omega),\omega)$ existe. Passons au cas vectoriel. Soit $[S,\hat{\zeta}| \subsetneq [S,\zeta|$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times\Omega'$, Ω' de λ-mesure > 0, qu'on peut supposer assez petit pour que $X_{\hat{\zeta}}$ prenne ses valeurs dans un ouvert $\mathcal{B}$ de B au-dessus duquel G ait une carte produit $\mathcal{B}\times F$, et que, pour un n, $X((\overline{\mathbb{R}}_+ \times\Omega') \cap [\hat{\zeta}_n,\hat{\zeta}]) \subset \mathcal{B}$. On peut supposer que $\mathcal{B}$ est un ouvert d'un espace vectoriel B, que les coefficients de EDS sont prolongés à B tout entier, que $G = B\times F$, que la connexion sur $\mathcal{B}\times F$ est prolongée en connexion linéaire sur $B\times F$ tout entier. Il suffit donc de montrer que cette hypothèse est contradictoire pour B = espace vectoriel, les coefficients étant globalement bornés et lipschitziens. Alors $\zeta = +\infty$, $[S,\zeta| = [S,+\infty]$, $[S,\hat{\zeta}| \neq [S,+\infty]$ sur Ω'. Mais, dans l'équation de Y devenue (11.12) (pour X supposé connu), tous les coefficients sont linéaires en Y à coefficients fonctions de (t,ω) seulement (puisque X est connue !), donc globalement lipschitziens en Y. L'équation ainsi modifiée n'a donc pas de temps de mort pour Y, d'après (7.1). Mais, sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times\Omega'$, on a le même résultat pour $[\hat{\zeta}_n,+\infty]$, avec les conditions initiales $X_{\hat{\zeta}_n}$, $\hat{X}_{\hat{\zeta}_n}$. Or, dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times\Omega) \cap [\hat{\zeta}_n,\hat{\zeta}]$, X reste dans $\mathcal{B}$, l'équation modifiée est l'équation donnée et $\hat{X}$ a son temps final en $\hat{\zeta}$, avec $[\hat{\zeta}_n,\hat{\zeta}|$ (relatif à $\hat{X}$) = $[\hat{\zeta}_n,\hat{\zeta}[$, ce qui est contradictoire.

<u>Proposition (13.6)</u> : <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale à valeurs dans</u> B.

1) <u>Soit</u> G <u>un fibré vectoriel sur</u> B, <u>muni d'une connexion linéaire</u>. <u>Si</u> $\hat{X}_1$,

$\hat{X}_2$ sont deux relèvements de X, α_1 et α_2 deux fonctions réelles $\mathcal{T}_0$-mesurables sur Ω, $\alpha_1 \hat{X}_1 + \alpha_2 \hat{X}_2$ est aussi un relèvement de X.

2) Soient G_1, G_2, deux fibrés vectoriels sur B, $G_1 \underset{B}{\otimes} G_2$ leur produit tensoriel fibré. Si G_1 et G_2 sont munis de connexions linéaires, il en est de même de $G_1 \otimes G_2$. Si $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ sont deux relèvements de X dans G_1, G_2, respectivement, $\hat{X}_1 \otimes \hat{X}_2$ est un relèvement de X dans $G_1 \otimes G_2$. Si donc $\hat{X}_1$ et $\hat{X}_2$ sont les relèvements prenant des valeurs donnés $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2 \in \mathcal{T}_S$ au temps d'arrêt S, le relèvement de X dans $G_1 \otimes G_2$ prenant la valeur $\hat{a}_1 \otimes \hat{a}_2$ en S est $\hat{X}_1 \otimes \hat{X}_2$ (son temps de mort est $\zeta_1 \wedge \zeta_2$). Même résultat pour des produits tensoriels symétriques ou extérieurs, et produits ordinaires.

Démonstration : Les démonstrations étant toutes analogues, nous ne donnerons que celle de 2) pour $\otimes$. On peut le voir dans une carte produit $G_1 = B \times F_1$, $G_2 = B \times F_2$, B vectoriel, $G_1 \otimes G_2 = B \times (F_1 \otimes F_2)$. Soient Γ_1, Γ_2 les coefficients des connexions de G_1, G_2. La connexion de $G_1 \otimes G_2$ a des coefficients $\Gamma_{1,2}$ donnés par $\Gamma_{1,2}(b) : (F_1 \otimes F_2) \times B \to (F_1 \otimes F_2)$, telle que, pour $\xi \in B$, $(\eta_1, \eta_2) \in (F_1, F_2)$, on ait

$$(13.7) \qquad \Gamma_{1,2}(b)(\eta_1 \otimes \eta_2)\xi = (\Gamma_1(b)(\eta_1)\xi) \otimes \eta_2 + \eta_1 \otimes (\Gamma_2(b)(\eta_2)\xi) \in F_1 \otimes F_2 \quad .$$

On peut utiliser la remarque qui a été faite à (12.12), ou plus simplement l'équation d'horizontalité (11.5) de Y_1 et Y_2 :

$$dY_1 \underset{(S)}{=} \overset{1}{\Gamma}_1(X)\ Y_1\ dX \quad , \quad dY_2 \underset{(S)}{=} \overset{1}{\Gamma}_2(X)\ Y_2\ dX \quad ,$$

d'où aussitôt (compte-tenu de ce que, pour les intégrales de Stratonovitch, le changement de variables est le changement usuel, et non celui d'Itô) :

$$\begin{aligned} d(Y_1 \otimes Y_2) &\underset{(S)}{=} dY_1 \otimes Y_2 + Y_1 \otimes dY_2 \\ &\underset{(S)}{=} (\Gamma_1(X)Y_1 \otimes Y_2 + Y_1 \otimes \Gamma_2(X)Y_2)dX \underset{(S)}{=} \Gamma_{1,2}(X)(Y_1 \otimes Y_2)dX \quad , \end{aligned}$$

donc $Y_1 \otimes Y_2$ est $\Gamma_{1,2}$-horizontale.

Proposition (13.8) : Soit X une semi-martingale sur V. Soit G un fibré vectoriel sur B, de fibre type F, G^* son fibré dual, de fibre-type F^*. Si G est muni d'une connexion linéaire, G^* l'est aussi (connexion duale). Si $\hat{X}$, $\hat{X}^*$ sont deux relèvements de X dans G, G^* respectivement, $(X^* | \tilde{X})_{F^*,F}$ est un processus localement constant, donc constant si $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Démonstration : On utilise la même méthode. Comme on raisonne sur une carte, donc sur un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on montrera qu'il est ~ 0 dans cet ouvert. Si Γ définit la connexion de G, celle de G^* est définie par $\Gamma^* = -{}^t\Gamma$; si $\Gamma(b)\eta \in \mathcal{L}(F;F)$, ${}^t\Gamma(b)\eta^* \in \mathcal{L}(F^*,F^*)$, pour $b \in B$, $(\eta,\eta^*) \in (F \times F^*)$, de sorte que $(\Gamma(b)\eta | \eta^*)_{F,F^*} + (\eta | \Gamma^*(b)\eta^*)_{F,F^*} = 0$. On a, pour $\hat{X} = (X,Y)$, $\hat{X}^* = (X,Y^*)$:

$$dY \underset{(S)}{=} \Gamma(X)\, Y\, dX \quad , \quad dY^* = -{}^t\Gamma(X)\, Y^*\, dX \quad , \quad \text{donc}$$

$$d(Y|Y^*) \underset{(S)}{=} ((\Gamma(X)\, Y|Y^*) - (Y|{}^t\Gamma(X)\, Y^*))dX \underset{(S)}{=} 0 \quad .$$

Proposition (13.9) : Soit Σ une section $C^{2,1}$ d'un fibré quelconque G, $\Sigma : B \to G$, $\pi \circ \Sigma = I_B$. Nous l'identifions aussi à la sous-variété $C^{2,1}$ de G qu'elle définit, qui est l'image $\Sigma(B)$. Supposons qu'elle soit horizontale pour la connexion, ou annulée par la dérivation covariante : pour $\xi \in T(B,b)$, $\overset{1}{\sigma}(\Sigma(b))\xi \in T^1(\Sigma,\Sigma(b))$, ou $\Sigma'(b) = \overset{1}{\sigma}(\Sigma(b))$, pour $b \in B$. Soit X une semi-martingale sur B, $X_S = a \in \mathcal{C}_S$. Alors $\Sigma(X)$ est horizontale. Le relèvement $\hat{X}$ de X, pour une valeur $\hat{a} \in \mathcal{C}_S$ au temps d'arrêt S, $\pi\hat{a} = a$, reste toute sa vie (i.e. dans $[S,\hat{\zeta}|)$ dans Σ sur toute les trajectoires pour lesquelles $\hat{a} \in \Sigma$; ou encore $\hat{X} = \Sigma(X)$ sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,\hat{\zeta}|$, $\Omega' = \{\hat{a} = \Sigma(a)\}$.

Démonstration : Σ est horizontale, donc $d(\Sigma(X)) \underset{(S)}{=} \Sigma'(X)\, dX \underset{(S)}{=} \overset{1}{\sigma}(\Sigma(X))dX$; donc $\Sigma(X)$ est une semi-martingale horizontale, i.e. un relèvement de X ; d'après l'unicité du relèvement (13.2) $\Sigma(X) = \hat{X}$ sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [S,\hat{\zeta}|$,

$\Omega' = \{\Sigma(a) = \hat{a}\}$. On voit qu'on pourrait aussi appliquer (10.5) : on choisira un équation différentielle stochastique EDS ayant X comme solution, alors $\hat{X}$ sera solution de $\widehat{EDS}$, (13.1), mais $\widehat{EDS}$ est tangente à Σ le long de Σ, car elle entraîne $d\hat{X} \underset{(S)}{=} \overset{1}{\sigma}(\hat{X})\, dX \underset{(S)}{=} \Sigma'(X)\, dX$.

Proposition (13.10) : Si la connexion de G est complètement intégrable, ps. $\hat{X}$ reste toute sa vie dans la section horizontale de son point de départ.

Démonstration : C'est (5.7).

Proposition (13.11) : (Constance du produit scalaire par transport parallèle). Soit G un fibré vectoriel sur B, muni d'une connexion linéaire. Soit β une section $C^{2,1}$ de $G^* \otimes_B G^*$ (c-à-d. un champ $C^{2,1}$ de formes bilinéaires sur les fibres), invariant par la connexion (de dérivée covariante nulle). Elle définit un produit scalaire sur les fibres, $\beta(b)(\eta_1,\eta_2) = (\eta_1|\eta_2)_{F_b}$, pour η_1, $\eta_2 \in F_b$. Si $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ sont deux relèvements par la connexion d'une semi-martingale X sur A à valeurs dans B, le produit scalaire $(\hat{X}_1|\hat{X}_2)_F = \beta(X)(\hat{X}_1,\hat{X}_2)$ est un processus localement constant, donc constant si $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Démonstration : Soit $\hat{\gamma}$ un relèvement de X dans $G^* \otimes_B G^*$. Une combinaison de (13.6) et (13.9), pour la dualité entre $G^* \otimes G^*$ et $G \otimes G$, dit que $\hat{\gamma}(\hat{X}_1,\hat{X}_2)$ est un processus localement constant. Mais β est une section horizontale pour la connexion du fibré $G^* \otimes G^*$, donc (13.9) dit que $\beta(X)$ est un relèvement de X dans ce fibré, d'où le résultat.

Remarque : Si V est une variété riemannienne, et si nous voulons que la connexion de Levi-Civita de son fibré tangent soit $C^{2,1}$, il faut que V soit $C^{3,1}$.

Proposition (13.12) : Soit G un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire. Si $\hat{X}_1,\hat{X}_2,\dots,\hat{X}_\ell$ sont des relèvements de X semi-martingale à valeurs dans B, dans $[S,+\infty]$, correspondant à des valeurs initiales $(\hat{X}_1)_S,(\hat{X}_2)_S,\dots,(\hat{X}_\ell)_S$, indépendan-

<u>tes, elles sont partout indépendantes dans</u> $[S,+\infty]$.

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord que la fibre de G soit de dimension 1, auquel cas $\ell = 1$. Soit $T = \operatorname{Inf}\{t \geq S\,;\ \hat{X}_t = 0\}$, à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$. C'est un temps d'arrêt prévisible (•). En effet, il est la limite croissante des temps d'arrêt $T_n = \operatorname{Inf}\{t \geq S\ ;\ |X_t| \geq \frac{1}{n}\}$, où $|\ \ |$ est calculé pour une métrique sur les fibres de G. Si donc $\{T \neq \overline{+\infty}\}$ n'est pas λ-négligeable, il existe un ouvert $\mathcal{B}$ de B, identifiable à un ouvert d'un espace vectoriel, et trivialisant G, soit $G = \mathcal{B} \times F$, puis un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ de λ-mesure > 0, puis un n tel que $T_n < T < \overline{+\infty}$ sur Ω', et tels que X soit, dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [T_n, T]$, à valeurs dans $\mathcal{B}$. Soit $(b_k)_{k=1,2,\dots,N}$ une base de B, $(X^k)_{k=1,\dots,N}$ les composantes de X suivant cette base. Alors, pour $b \in B$, $\Gamma(b) \in B'$, dual de B ; et l'équation d'horizontalité (11.11bis) prend la forme $dY \underset{(S)}{=} Y\, dZ$, où $dZ \underset{(S)}{=} \sum_{k=1}^{N} \Gamma(X)\, b_k\, dX^k$. Elle se résout, dans $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cap [T_n, T]$, par $Y = Y_{T_n}\, e^{Z - Z_{T_n}}$ [un temps d'arrêt T à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$ est dit prévisible s'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, tendant vers T, $T_n < T$ là où $T \in\,]0,+\infty]$; là où $T = 0$, nécessairement $T_n = 0$, et là où $T = \overline{+\infty}$, on permet $T_n = \overline{+\infty}$.] puisque la formule du changement de variables en intégrales de Stratonovitch est la formule usuelle. Cela contredit $Y_T = 0$ puisque $Y_{T_n} \neq 0$.

Supposons maintenant la fibre G de dimension d quelconque. Quitte à prolonger le système libre des $(\hat{X}_i)_S$ en une base, on peut toujours supposer $\ell = d$. On considèrera le fibré puissance extérieure $\Lambda^d G$; sa fibre à la dimension 1. On applique alors (13.6) pour le produit extérieur, et on est ramené au cas d'une fibre de dimension 1, puisque l'indépendance de $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_d$ équivaut à la non nullité de $\hat{X}_1 \wedge \hat{X}_2 \wedge \dots \wedge \hat{X}_d$.

<u>(13.13)</u> Soit $\mathcal{L}(F;G)$ le fibré vectoriel sur B des applications linéaires de la fibre type F dans les fibres de G ; la fibre de $\mathcal{L}(F;G)$ au-dessus de $b \in B$ est

---

(•) Catherine Doléans-Dade a résolu de telles équations même pour des semi-martingales Z discontinues.

$\mathcal{L}(F;F_b)$. En choisissant une base $(f_i)_{i=1,2,\dots,g}$ de F, un élément de $\mathcal{L}(F;F_b)$ est entièrement défini par l'image qu'il donne de cette base, donc en fait $\mathcal{L}(F;G)$ est isomorphe à G^g, puissance g-ième de G sur B. Le fibré des repères de G est un ouvert de $\mathcal{L}(F;G)$. Il est donc muni d'une connexion linéaire si G l'est, et on a (13.6). On peut donc relever X en $\hat{U}$ dans $\mathcal{L}(F;G)$, pour une valeur initiale $\hat{U}_o$ donnée (•). Supposons U_o inversible, alors $(\hat{f}_i = U_o f_i)_{i=1,2,\dots,g}$ est une base $\mathcal{T}_o$-mesurable de F_{X_o} ; (13.6), 1), dit que, si $\hat{X}_i$ est le relèvement de X dans G pour la valeur initiale $\hat{f}_i = (\hat{X}_i)_o$ de X dans G au temps 0, $\hat{X}_o = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{f}_i$, α_i réelles $\mathcal{T}_o$-mesurables, le relèvement $\hat{X}$ de X dans G pour la valeur initiale $\hat{X}_o$ est $\hat{X} = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{X}_i$; et (13.6), 2) appliqué au produit G^g dit que $\hat{X}_i = \hat{U} f_i$, $\hat{X} = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{U} f_i = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{U}\hat{U}_o^{-1} \hat{f}_i = \hat{U}\hat{U}_o^{-1}\hat{X}_o$; (13.6) dit que $(\hat{X}_i)_{i=1,2,\dots,g}$ est une base à tout instant, donc que $\hat{U}$ est inversible. Donc, quel que soit le choix de $\hat{U}_o$ (qui détermine $\hat{U}$), $\hat{U}\hat{U}_o^{-1}$ est invariable (pour X donnée !) et définit une semi-martingale u à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}(G;G)$ des opérateurs entre fibres de G, défini à (3.17quarto) (fibré sur $B \times B$; la fibre au-dessus de $(b_1,b_2) \in B \times B$ est $\mathcal{L}(F_{b_1};F_{b_2})$), avec $\hat{X} = u\hat{X}_o$, $\hat{X}_t = u_t \hat{X}_o$, $u(t,\omega) \in \mathcal{L}(F_{X(t,\omega)};F_{X(t,\omega)})$; u est inversible, avec $u^{-1} = \hat{U}_o \hat{U}^{-1}$, $u_t^{-1} = \hat{U}_o \hat{U}_o^{-1}$, $u_o = I_{F_{X_o}}$. Mais u sert aussi pour d'autres conditions initiales : pour $\hat{X}_S = \hat{a} \in \mathcal{T}_S$, S temps d'arrêt, on aura $\hat{a} = \hat{X}_S = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i (\hat{X}_i)_S$, α_i réelles $\mathcal{T}_S$-mesurables, où $\hat{a} = u_S(\sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{f}_i)$, $\hat{X} = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{X}_i = u(\sum_{i=1}^{g} \alpha_i \hat{f}_i) = u(u_S)^{-1}\hat{a}$. Par (13.6) et (13.9), on voit aussitôt que, pour des connexions sur G_1, G_2, auxquelles correspondent u_1, u_2, à la connexion canonique sur $G_1 \times G_2$, $G_1 \otimes G_2$ correspond $u_1 \times u_2$, $u_1 \otimes u_2$, et à la connexion duale sur G^* correspond ${}^t u^{-1}$. Donc :

(•) P. Malliavin a utilisé systématiquement ce relèvement dans le fibré des repères, et J.M. Bismut l'opérateur u donné plus loin.

Proposition (13.14) : Soit G fibré vectoriel, muni d'une connexion linéaire, et soit X semi-martingale sur la base B. Il existe une semi-martingale u unique à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}(G;G)$ des opérateurs entre fibres, $u(t,\omega) \in \mathcal{L}(F_{X(0,\omega)} ; F_{X(t,\omega)})$, inversible, $u^{-1}(t,\omega) \in \mathcal{L}(F_{X(t,\omega)} ; F_{X(0,\omega)})$, $u_o = I_{F_{X_o}}$, telle que, si $\hat{X}_o$ est un relèvement arbitraire de X dans G à l'instant 0, son relèvement $\hat{X}$ soit donné par $\hat{X} = u\hat{X}_o$, $\hat{X}_t = u_t \hat{X}_o$. Si le relèvement initial est donné, $\hat{a}$ $\mathcal{T}_S$-mesurable à un temps d'arrêt S, le relèvement correspondant est donné par $\hat{X} = u(u_S)^{-1}\hat{a}$. Si G_1, G_2 sont deux fibrés vectoriels sur B, munis de connexions, et si u_1, u_2, sont les opérateurs associés, l'opérateur associé à $G_1 \otimes G_2$ est $u_1 \otimes u_2$; de même pour les produits tensoriels symétriques et extérieurs, et le produit ordinaire, et le fibré dual avec ${}^t u^{-1}$.

Remarque : Si U_o n'est pas inversible, U ne l'est pas non plus, mais il reste vrai que $\hat{U} = u\hat{U}_o$.

***

Ce texte a été dactylographié au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Laboratoire Associé au C.N.R.S. No 169, par Marie-José Lécuyer.

NOTES

(1) page 4. Il est inévitable que des factorielles s'introduisent quelque part dans les produits tensoriels, comme π dans la transformation de Fourier ! Si on les écrase à un endroit, elles réapparaissent à un autre ; ici, c'est $2! = 2$ qui apparaît ici et là. La formule (1.4) pour la dualité entre $E^* \odot E^*$ et $E \odot E$ est classique, sans facteur $\frac{1}{2}$ au second membre (mais beaucoup de gens préfèrent mettre un facteur $\frac{1}{2}$, et personne ne peut rien reprocher à personne !). Plus généralement, on peut identifier l'algèbre tensorielle symétrique $\odot E = \bigoplus_{m=0}^{+\infty} \odot^m E$ à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur E, algèbre pour la composition des opérateurs différentiels, et l'algèbre tensorielle symétrique du dual, $\odot E^* = \bigoplus_{m=0}^{+\infty} \odot^m E^*$ à l'algèbre des fonctions polynômes sur E, algèbre pour la multiplication des fonctions ; et on les met en dualité par $(P(D)|Q)_{\odot E, \odot E^*} = (P(D)Q)(0)$. Par exemple, si α et β sont deux fonctions linéaires, ξ et $\eta \in E$ deux opérateurs différentiels homogènes du premier ordre à coefficients constants ∂_ξ, ∂_η, on aura $(\xi \odot \eta | \alpha \odot \beta)_{\odot E, \odot E^*} = \partial_\xi \partial_\eta (\alpha\beta)(0) = \partial_\xi \alpha(0) \partial_\eta \beta(0) + \partial_\xi \beta(0) \partial_\eta \alpha(0) = (\xi|\alpha)(\eta|\beta) + (\xi|\beta)(\eta|\alpha)$. Soit alors $E = \mathbb{R}$, $e = 1$ son élément de base ; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ son dual, $\varepsilon = 1$ son élément de base, $(\varepsilon|e) = 1$. Alors $E \odot E = \mathbb{R} \odot \mathbb{R}$, isomorphe à $\mathbb{R}$, d'élément de base $e \odot e = e^2$, et $E^* \odot E^* = \mathbb{R}^* \odot \mathbb{R}^*$, isomorphe à $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, d'élément de base $\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2$. L'isomorphisme le meilleur entre $\mathbb{R} \odot \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^* \odot \mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$, n'est pas le même pour tout le monde. On a sûrement $(\varepsilon^2 | e^2) = 2$, suivant (1.4) ; d'ailleurs e est l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx}$, ε le polynôme $x \mapsto x$, noté x, et alors $(\varepsilon^2|e^2) = (\frac{d^2}{dx^2}(x^2))(0) = 2$. En théorie quantique des champs (espaces de Fock), on prend plutôt $e^2 = \sqrt{2}$, $\varepsilon^2 = \sqrt{2}$. Ici nous prendrons $e^2 = 1$ (donc

$\varepsilon^2 = 2$, ce dont nous ne nous servirons pas). Voici pourquoi. Soient X, Y deux semi-martingales continues (ou aussi bien deux applications quelconque d'un ensemble) à valeurs dans E. Il est raisonnable de considérer leur produit XY, à valeurs dans $E \odot E$; si $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$ est une base de E, $X = \sum_{k=1}^{N} X^k e_k$, $Y = \sum_{k=1}^{N} Y^k e_k$, alors $X \odot Y = \sum_{i,j=1}^{N} X^i Y^j e_i \odot e_j$. Ensuite l'intégrale stochastique $X \cdot Y$ est aussi une semi-martingale à valeurs dans $E \odot E$, $X \cdot Y = \sum_{i,j=1}^{N} X^i \cdot Y^j e_i \odot e_j$; $Y \cdot X = \sum_{i,j=1}^{N} Y^i \cdot X^j e_i \odot e_j$. Et $[X,Y] = XY - X \cdot Y - Y \cdot X = \sum_{i,j=1}^{N} [X^i, X^j] e_i \odot e_j$ est son processus à variation finie à valeurs dans $E \odot E$. Si alors $E = \mathbb{R}$, on doit distinguer X réelle et Xe, $e = 1$; XY, $X \cdot Y$, $Y \cdot X$, $[X,Y]$ réelles et $(Xe)(Ye) = XYe^2$, $(Xe \cdot Ye) = (X \cdot Y)e^2$, $(Ye \cdot Xe) = (Y \cdot X)e^2$, $[Xe,Ye] = [X,Y]e^2$; c'est bien ennuyeux ! avec $e^2 = 1$, il n'y a pas lieu de les distinguer. Naturellement on aurait des ennuis avec des semi-martingales à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ mais "à valeurs réelles" doit tout de même vouloir dire à valeurs dans $\mathbb{R}$ plutôt que $\mathbb{R}^*$. Dans la formule (1.5), pour $E = \mathbb{R}$, $\varphi''(v) \in \mathbb{R}^* \odot \mathbb{R}^*$ est $\partial^2 \varphi(v) \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\partial^2 \varphi(v) \in \mathbb{R}$, et on a bien $\frac{\varepsilon^2}{2} = 1$, $\varphi''(v) = \partial^2 \varphi(v)$.

(2) page 9. $\overset{1}{\Phi}(v) \circledcirc \overset{1}{\Phi}(v)$ est le carré tensoriel d'une application linéaire ; on n'a pas le choix sur sa définition. Si $u : E \to F$ est une application linéaire de E dans F, $u \circledcirc u$ est une application linéaire de $E \odot E$ dans $F \odot F$, définie par $(u \circledcirc u)(x \odot y) = u(x) \odot u(y)$, de façon que, si I est l'identité de E, $I \odot I$ soit l'identité de $E \odot E$. [On peut la polariser et calculer alors $(u \circledcirc v)(x \odot y) = \frac{1}{2}(u(x) \odot v(y) + u(y) \odot v(x))$, mais en général on ne le fait pas.] Soit alors $F = \mathbb{R}$; $u \circledcirc u$ envoie $E \odot E$ dans $\mathbb{R} \odot \mathbb{R}$, dont l'identification avec $\mathbb{R}$ n'est pas automatique. Mais $u \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = E^*$, donc $u \odot u$ possède un sens comme élément de $E^* \odot E^*$, c-à-d. comme un élément du dual de $E \odot E$, donc $u \odot u$ envoie $E \odot E$ dans $\mathbb{R}$; suivons (1.4), $(u \odot u)(x \odot y) = u(x)\,u(y) + u(y)\,u(x) = 2u(x)\,u(y)$. Si $e = 1 \in \mathbb{R}$, $u(x) = u(x)e$, $u(y) = u(y)e$, $(u \odot u)(x \odot y) = 2u(x)\,u(y)$, $(u \circledcirc u)(x \odot y) = u(x) \odot u(y) = u(x)e \odot u(y)e = u(x)\,u(y)e^2$, donc $u \circledcirc u = \frac{e^2}{2}\, u \odot u$.

A la note précédente, nous avons suggéré de prendre $e^2 = e \odot e = 1$, alors $u \circledcirc u = \frac{1}{2}\, u \odot u$.

(3) page 25. Dans la définition d'une semi-martingale réelle X sur A, on suppose qu'il existe une suite d'ouverts $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant A, telle que, dans A_n, X soit restriction d'une semi-martingale X_n.
Nous avons dit, au début de cet article, que semi-martingale voudrait toujours dire semi-martingale continue. Donc X est supposée continue sur A ; par contre il n'est pas possible, en général, de supposer X_n continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Mais, si X est vectorielle, elle reste équivalente, sur A_n et sur A, à une semi-martingale formelle continue, et nous dirons simplement : équivalente à une semi-martingale formelle. Voir S[2], (6.7).

(4) page 59. On a besoin de savoir que $(J|\eta_k(X))_{T^{*1},T^1}$ est de Stratonovitch. Or J et $\eta_k(X)$ sont de Stratonovitch à valeurs dans $T^{*1}(V)$ et $T^1(V)$ respectivement, donc le couple $(J,\eta_k(X))$ est Stratonovitch à valeurs dans le produit $T^{*1}(V)\times T^1(V)$; mais il prend ses valeurs dans la sous-variété de classe C^1, $T^{*1}(V) \underset{(V)}{\times} T^1(V)$, produit fibré sur V, espace des couples d'un vecteur cotangent et d'un vecteur tangent à V au même point, donc il est Stratonovitch à valeurs dans ce fibré ; et le produit scalaire $(.|.)_{T^{*1},T^1}$ est une fonction C^1 sur ce fibré, d'où le résultat.

(5) page 74. On pourrait sans doute trouver $\overset{2}{\circledast}(b,f)$ sans faire autant de calculs que dans ce qui suit. Mais, dans la pratique, pour savoir trouver $\overset{2}{\circledast}(b,f)$, il faut bien faire ces calculs. Nous les retrouverons dans les connexions, § 11 ; c'est pourquoi j'emploie les Γ qui figureront dans ces connexions.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

S[1] Laurent SCHWARTZ

Semi-martingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes,
Lecture Notes in Mathematics n° 780, Springer Verlag 1980.

S[2] Laurent SCHWARTZ

Semi-martingales formelles,
Séminaire de Probabilités XV, Strasbourg 1979-1980,
Lecture Notes in Mathematics n° 850, Springer Verlag 1981, p. 413-489.

M[1] Paul-André MEYER

Un cours sur les intégrales stochastiques
Séminaire de Probabilités X, Strasbourg 1974-1975,
Lecture Notes in Mathematics n° 511, Springer Verlag 1976, p. 246-400.

M[2] Paul-André MEYER

Géométrie stochastique sans larmes.
Séminaire de Probabilités XV, Strasbourg 1979-1980,
Lecture Notes in Mathematics n° 850, Springer Verlag 1981, p. 44-102.

INDEX TERMINOLOGIQUE

et

INDEX DES NOTATIONS

TABLE DES MATIERES
