PAUL-ANDRÉ MEYER

Géométrie différentielle stochastique, II

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome S16 (1982), p. 165-207
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__S16__165_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE (bis)

par P.A. Meyer

Cet exposé fait suite à l'exposé du même titre de l'an dernier(1). Il est consacré à un certain nombre de résultats sur la théorie des équations différentielles stochastiques régies par une semimartingale continue, sujet très incomplètement traité l'an dernier. Comme d'habitude, notre but principal consiste à étendre aux semimartingales générales ce que d'autres font seulement pour le mouvement brownien. Les résultats présentés ici sont à peu près les suivants

- Les théorèmes d'approximation des solutions des e.d.s. de Stratonovitch par interpolation linéaire (Bismut). Nous les présentons sous la forme de l'interpolation géodésique, ce qui nous permet de démontrer du même coup le théorème d'Ito sur l'approximation du transport parallèle stochastique (déjà ancien, mais dont je n'ai jamais vu de démonstration détaillée), et surtout, l'idée récente de correction géodésique au transport parallèle, due à Dohrn et Guerra, et qui m'a beaucoup intéressé.
- Une étude assez développée des équations différentielles stochastiques linéaires à valeurs dans T(V), ou plus généralement dans un fibré vectoriel au dessus de V (signalons tout de suite que nous n'utilisons aucun résultat de la théorie des fibrés vectoriels).
- Les formules classiques (Ito, Dynkin) sur l'extension aux champs de tenseurs d'un << procédé de transport >>.

Comme l'an dernier, cet exposé destiné aux probabilistes ne suppose que très peu de connaissances en géométrie différentielle (cependant, nous renverrons aux exposés du séminaire XV).

Il me reste à reconnaître mes dettes : envers le livre d'Ikeda-Watanabe pour un certain nombre de démonstrations, et envers le livre << Mécanique Aléatoire >> de J.M. Bismut pour presque tout l'exposé.

AVERTISSEMENT. Comme dans l'exposé de l'an dernier, nous évitons systématiquement certaines difficultés : d'abord, tout ce qui est différentiable est automatiquement supposé C^{∞}. Ensuite, et surtout, nous négligeons tous les problèmes de localisation et de recollement : nos << variétés >> sont en réalité des $\mathbb{R}^n$ dont on oublie la structure linéaire, et que l'on rapporte à des coordonnées globales (x^i) non linéaires, ou << mollusques de référence >>, comme disait (je crois) Einstein.

1. Toutefois, on ne promet plus rien quant aux larmes.

TABLE DES MATIERES

Les passages marqués d'une * traitent de questions spéciales, et pourront être omis sans inconvénient (comme tout l'exposé, d'ailleurs).

I. APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'E.D.S.

1. RAPPELS SUR LES E.D.S. DANS $\mathbb{R}^d$

Les équations différentielles stochastiques régies par une semimartingale continue peuvent se classer en trois types, par ordre de généralité croissante. Nous les appellerons de manière conventionnelle, par le nom d'auteurs qui les ont spécialement étudiés (et sans prétendre faire de l'histoire !).

Le plus ancien est le type d'Ito :

$$(1) \qquad Y_t = y + \int_0^t a(X_s,Y_s)dX_s$$

Ici, la semimartingale continue directrice $X = (X_s^\lambda)$ varie dans un $\mathbb{R}^k$, la solution $Y=(Y_s^i)$ varie dans un $\mathbb{R}^d$, et la matrice $a=(a_\lambda^i(x,y))$ sera supposée C^∞ en (x,y), et uniformément lipschitzienne en y.

Nous rencontrons ensuite le type de Doléans

$$(2) \qquad Y_t = y + \int_0^t a(.,s,Y_s)dX_s$$

La matrice $a(\omega,s,y)$ est , pour y fixé, un processus adapté càglàd., pour (ω,s) fixé une fonction uniformément lipschitzienne (C^∞) de y. Notons que C. Doléans considère le type plus général

$$(2') \qquad Y_t = H_t + \int_0^t a(.,s,Y_{s-})dX_s \qquad \text{où } H_t \text{ est un processus càdlàg. donné.}$$

Nous rencontrerons dans les variétés des équations du type (1), plus rarement du type (2), et c'est tout. Mais pour la théorie générale, le type d'Emery est extrêmement commode. Il s'agit d'équations

$$(3) \qquad Y_t = H_t + \int_0^t F(Y)_{s-}dX_s$$

Ici (H_t) est un processus càdlàg. adapté donné (il est important qu'il puisse être prix càdlàg., même lorsque X est continue), F est une << machine >> qui transforme les processus càdlàg. adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en processus càdlàg. adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, avec les propriétés

$$(4) \qquad \begin{array}{l} Y^{T-}=Z^{T-} \implies F(Y)^{T-}=F(Z)^{T-} \text{ pour tout t.d'a. } T \\ (F(Y)-F(Z))^* \leq K(Y-Z)^* \end{array}$$

où comme d'habitude, on pose $H_t^* = \sup_{s\leq t} |H_s|$, $H^*=H_\infty^*$ pour tout processus H à valeurs dans un $\mathbb{R}^n$.

Dans les trois cas, nous avons un théorème d'existence et d'unicité des solutions. Nous aurons besoin aussi de rappeler une inégalité due à Emery. Donnons nous un exposant p, $1\leq p<\infty$. Alors il existe un certain espace $\underline{\underline{H}}^\infty$, une certaine constante M (dépendant de p, des deux dimensions k et d, et de la constante de Lipschitz K de (4)) telle que si $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq M$, on ait

$$(5) \qquad \|Y^*\|_{L^p} \leq c\,\|(H+F(0))^*\|_{L^p}$$

où $c=c_p$ dépend seulement de p. L'espace $\underline{\underline{H}}^\infty$ est défini de manière précise dans le Sém. XII, bas de la p. 758, par exemple. Mais en réalité vous n'avez pas besoin d'en connaître la définition : il vous suffit de savoir que toute semimartingale continue X est localement dans $\underline{\underline{H}}^\infty$: X étant supposée nulle en 0, il existe un t.d'a. T>0 tel que $\|X^T\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq M$, ce qui permet d'appliquer (5) sur $[0,T]$. Après quoi on considère la semimartingale $(X_{t+T}-X_T)$, et on recommence...

Il est bon aussi de savoir que lorsque X est un mouvement brownien standard, la norme de X arrêté à N constant est majorée par cN , où c dépend de la dimension seulement.

Encore des rappels : des processus Y^n sont dits converger uniformément sur tout compact en probabilité (UCP) vers un processus Y si, pour tout N fixé, $(Y^n-Y)^*_N \to 0$ en probabilité.

Le plus grand avantage technique de l'emploi de semimartingales directrices continues quelconques est le suivant : si Q est une loi absolument continue par rapport à P, X est encore une Q-semimartingale, et on peut regarder l'équation (1), ou (2), ou (3) pour la loi Q. Alors la P-solution est Q-p.s. égale à la Q-solution. En pratique, on applique cela ainsi : A étant une partie quelconque de Ω telle que P(A)>0, on prend pour Q la loi conditionnelle P_A , pour laquelle la propriété $\omega\epsilon A$ est p.s. réalisée. On travaille alors sous l'hypothèse $\omega\epsilon A$, qui peut être très commode, et cela nous donne des résultats valables pour la loi P et les $\omega\epsilon A$. Cette méthode de conditionnement, que nous utiliserons dès le paragraphe 2, est extrêmement utile.

2. APPROXIMATION PAR DISCRETISATION DU TEMPS

Rappelons d'abord un résultat d'Emery (nous traitons seulement le cas de l'équation (1)). Soit n un entier ; posons $t_\rho(n)=\rho 2^{-n}$ ($\rho=0,1\ldots$; s'il n'y a pas de doute quant à n, on écrira simplement t_ρ). Définissons un processus $\overset{n}{Y}_t$ en posant $\overset{n}{Y}_0=0$, puis, par récurrence sur ρ

$$(6) \qquad \text{si } t\epsilon\,]t_\rho,t_{\rho+1}] \ , \ \overset{n}{Y}_t = \overset{n}{Y}_{t_\rho} + a(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})(X_t-X_{t_\rho})$$

Emery a démontré, sous les hypothèses de Lipschitz globales, le résultat suivant :

THEOREME 1 . Lorsque $n\to\infty$, $Y^n \to Y$ au sens UCP.

Notre premier travail va consister à tirer quelques conséquences de ce résultat. Puis - ce sera le principal objet de ce paragraphe - nous démontrerons le même théorème en permettant dans (6) une petite erreur.

CONSEQUENCE 1. Au lieu de regarder l'équation (1), **considérons**

(7) $$Y_t = y + \int_0^t a(X_s,Y_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t b(X_s,Y_s)d\langle X,X\rangle_s$$

où $\langle X,X\rangle$ est la matrice colonne $\langle X,X\rangle^{\lambda\mu} = \langle X^\lambda,X^\mu\rangle$, et $b=(b^i_{\lambda\mu}(x,y))$ est une matrice C^∞, lipschitzienne en y. Cette équation entre dans le type (1), à condition d'inclure les crochets parmi les semimartingales directrices. Mais au lieu de traduire la formule (6), nous utilisons les approximants

(8) $$\overset{n}{Y}{}^i_t = \overset{n}{Y}{}^i_{t_\rho} + a^i_\lambda(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})(X_t-X_{t_\rho})^\lambda + \frac{1}{2}b^i_{\lambda\mu}(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})(X_t-X_{t_\rho})^\lambda(X_t-X_{t_\rho})^\mu$$

(on a omis les $\sum_\lambda$, $\sum_{\lambda\mu}$, conformément à la convention de sommation). Alors on a encore $\overset{n}{Y}\to Y$ au sens UCP. Pour voir cela, nous écrivons (7) sous la forme (1)

$$dY^i_s = a^i_\lambda(\ )dX^\lambda_s + \frac{1}{2}b^i_{\lambda\mu}(\ )(d(X^\lambda X^\mu)_s - X^\lambda_s dX^\mu_s - X^\mu_s dX^\lambda_s)$$

en incluant les $X^\lambda X^\mu$ (et non les crochets) parmi les semimartingales directrices. Puis nous **construisons alors les approximants** (6), et cela nous donne exactement la forme (8). Nous sommes donc ramenés au théorème 1. Mais ici se présente une difficulté : si $b^i_{\lambda\mu}(x,y)$ est lipschitzienne en y, il n'en est plus de même de $x^\mu b^i_{\lambda\mu}(x,y)$. Il faut donc disposer d'une extension du théorème 1 au cas localement lipschitzien.[1] La voici.

CONSEQUENCE 2. Revenons à l'équation (1), en supposant que la matrice a (et la matrice b dans le cas de (7)) soit C^∞, mais sans condition de Lipschitz globale en y. Alors il est bien connu que la solution de (1) existe encore, est unique, mais peut s'éloigner à l'infini en temps fini : il y a un instant d'explosion ζ , dépendant de y et ω. En revanche, les approximants $\overset{n}{Y}_t$ sont définis pour tout t. L'énoncé qui remplace 1 est le suivant : il y a convergence UCP sur $[0,\zeta[$, soit précisément

(9) pour tout N fixé, $(\overset{n}{Y}-Y)^*_N \to 0$ en probabilité sur l'ensemble $\{N<\zeta\}$.

Remarquer que, ce théorème étant supposé établi pour l'équation (1), la << conséquence 1 >> se trouve établie elle aussi, et même dans le cas où a,b sont seulement localement lipschitziennes, avec convergence UCP sur $[0,\zeta[$.

Démonstration de (9). Considérons une suite (K_p) de compacts croissants dont les intérieurs recouvrent $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^d$. Soit A_p l'événement

$$\{\omega : \text{pour tout } t\leq N,\ (X_t,Y_t)\in K_p\ \}$$

Il nous suffit de démontrer que, pour tout p, $(\overset{n}{Y}-Y)^*_N I_{A_p} \to 0$ en prob.. Nous omettons maintenant l'indice p .

1. Voir note page suivante.

écrivant simplement K,A pour K_p, A_p . Si P(A)=0, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit Q la loi conditionnelle P_A . Soit a' une **matrice** C^∞ <u>à support compact</u> (donc globalement lipschitzienne) égale à a sur un voisinage V de K. Considérons l'équation (1) correspondante, sa solution Y', ses approximants $\overset{n}{Y}'$: le théorème 2 nous dit que $\overset{n}{Y}'$ converge vers Y' au sens ~~UCP.~~ pour la loi Q sur [0,N] D'autre part, on a Y'=Y/Q-p.s., puisque **nous avons là deux solutions** de la même équation lipschitzienne. Comme $\overset{n}{Y}'$ converge UCP vers Y', et (X,Y') est Q-p.s. dans K sur [0,N], la probabilité pour Q que $\overset{n}{Y}'$ sorte de V sur [0,N] est très petite pour n grand ; mais a et a' sont égales sur V, donc la probabilité que $\overset{n}{Y}'$ et $\overset{n}{Y}$ diffèrent sur [0,N] est très petite pour n grand, et $\overset{n}{Y}$ converge aussi vers ~~Y,~~ Y sur [0,N] uniformément en probabilité pour la loi Q. D'où enfin le même résultat pour la loi P, sur l'ensemble A.(1)

3. APPROXIMATION AVEC UN TERME D'ERREUR

Nous revenons à l'équation (1) avec matrice a C^∞ (pas de condition de Lipschitz). Au lieu de (8), nous considérons les approximants suivants, définis d'abord seulement pour les points dyadiques d'ordre n

$$(10)\quad \overset{n}{Z}_0=y\ ,\qquad \overset{n}{Z}_{t_{\rho+1}} = \overset{n}{Z}_{t_\rho} + a(X_t,\overset{n}{Z}_{t_\rho})(X_t-X_{t_\rho}) + \overset{n}{h}_{t_{\rho+1}}$$

où $\overset{n}{h}_{t_{\rho+1}}$ est une v.a. $\underline{\underline{F}}_{t_{\rho+1}}$-mesurable, qui représente une déviation accumulée pendant tout l'intervalle $[t_\rho,t_{\rho+1}]$. Ce processus $\overset{n}{Z}$ n'est défini naturellement qu'aux points dyadiques d'ordre n, mais il est commode de le prolonger à tous les t, de manière adaptée (mais non continue)

$$(10')\qquad \text{pour } t_\rho \leq t < t_{\rho+1}\ ,\ \overset{n}{Z}_t = \overset{n}{Z}_{t_\rho} + a(X_t,\overset{n}{Z}_{t_\rho})(X_t-X_{t_\rho})$$

Introduisons d'autre part le processus càdlàg. adapté

$$(11)\qquad H_t = \sum_{t_\rho<t} \overset{n}{h}_{t_\rho}$$

Nous avons alors :

THEOREME 2. Si $\overset{n}{H}\to 0$ au sens UCP, alors $\overset{n}{Z}\to Y$ au sens UCP sur $[0,\zeta[$.

VARIANTE. Le résultat s'applique aussi à l'équation (7), et aux approximants obtenus par addition d'un terme d'erreur à (8).

<u>Démonstration</u>. 1) Nous pouvons, grâce à la méthode de conditionnement, nous ramener au cas où (X,Y) est à valeurs dans un compact, alors remplacer (sans changer de notation) a par a' égale à a sur un voisinage

1. Pour la << conséquence 2 >>, j'ai utilisé des idées de Lenglart. Pour la << conséquence 1 >>, j'ai reproduit une note de Chou Ching-Sung (dans ce volume).

de K, et à support compact (cf. haut de la page précédente). Nous sommes ainsi ramenés au cas globalement lipschitzien, sans explosion.

Ensuite, nous nous ramenons à vérifier le résultat suivant : pour tout N fixé, et pour toute suite $(n_k)\uparrow\infty$ telle que $\sum_k (\overset{n_k}{H})^*_N = H$ soit p.s. finie, on a $\lim_k (\overset{n_k}{Z}-Y)^*_N = 0$ en probabilité. Cela s'établit très aisément par l'absurde, en remarquant que toute suite de v.a. positives qui converge vers 0 en probabilité contient une sous-suite de somme finie.

Nous remplaçons alors (sans changer de notation) P par une loi équivalente telle que H soit intégrable.

Après ces préliminaires, passons à la démonstration proprement dite. Le processus $\overset{n}{Z}-Y$ est solution de l'e.d.s. du type d'Emery

$$U_t = \overset{n}{H}_t + \int_0^t \overset{n}{F}(U)_{s-}dX_s$$

où $\overset{n}{F}$ est la fonctionnelle ainsi définie : $\overset{n}{F}(U)_0=0$ et sur $]t_\rho,t_{\rho+1}]$

$$\overset{n}{F}(U)_t = a(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho}+U_{t_\rho}) - a(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})$$

Cette fonctionnelle satisfait à $\overset{n}{F}(0)=0$, et elle admet une constante de Lipschitz <u>indépendante de n</u> (dépendant seulement de la constante de Lipschitz de a). Par conséquent, si la norme de X dans $\underline{\underline{H}}^\infty$ est majorée par une certaine quantité fixe M, nous avons

$$E[(\overset{n}{Z}-Y)^*_N] \leq cE[\overset{n}{H}{}^*_N] \quad \text{pour tout n}$$

Prenant $n=n_k$, le côté droit ->0 par convergence dominée, et donc le côté gauche aussi.

Maintenant, si la norme de X n'est pas petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, nous remplaçons X par X^T, où T est un temps d'arrêt tel que X^T ait une norme petite, et nous voyons que $\overset{n}{Z}$->Y (UCP) sur [0,T]. Puis nous recommençons après décalage de T, etc.

4. APPROXIMATION GEODESIQUE D'UNE EQUATION DE STRATONOVITCH

Revenons à l'équation du type (1), à coefficients C^∞

$$Y_t = y + \int_0^t a(X_s,Y_s)dX_s$$

et considérons d'abord l'approximation suivante : nous interpolons linéairement la courbe $X_\bullet(\omega)$ entre les instants $t_\rho(n)$ et $t_{\rho+1}(n)$, ce qui nous donne une trajectoire à variation finie (non adaptée) $\overset{n}{X}_\bullet(\omega)$, puis nous résolvons l'équation différentielle <u>ordinaire</u> (déterministe)

$$\overset{n}{Y}_t = y+\int_0^t a(\overset{n}{X}_s,\overset{n}{Y}_s)d\overset{n}{X}_s \tag{12}$$

et nous nous demandons si $\overset{n}{Y}$ converge, et vers quelle limite. Dans le cas brownien, après des années de travail par de nombreux et illustres auteurs, on est parvenu à des résultats définitifs (que l'on trouvera par exemple chez Bismut : d'abord la limite n'est pas la solution de (1), mais la solution de sa compagne au sens de Stratonovitch

(13)=(1$_s$) $\quad Y_t = y + \int_0^t a(X_s,Y_s)*dX_s$

Ensuite : non seulement $\overset{n}{Y}$ converge vers Y au sens UCP, mais il y a convergence de la fonction $\overset{n}{Y}_t(.,y)$ des deux variables (t,y) vers le flot de (13), uniforme en probabilité sur les compacts, et il y a convergence de toutes les dérivées de tous ordres en y vers les dérivées correspondantes du flot. Sur le flot d'une e.d.s., voir l'exposé du Sém. XV, p. 103, d'après Kunita.

Nous n'allons pas étendre ces résultats aux semimartingales directrices quelconques, car je préfère m'orienter dans une autre direction, en vue d'applications à la géométrie différentielle. Munissons l'espace $\mathbb{R}^k$ où se meut la semimartingale directrice X d'une connexion C^∞ Γ, et au lieu de construire la courbe $\overset{n}{X}$ par interpolation linéaire, construisons la par interpolation géodésique entre les points X_{t_ρ} (cela sera précisé plus loin). Alors, pour y fixé :

THEOREME 3. Le processus $\overset{n}{Y}$ converge au sens UCP vers Y sur $[0,\zeta[$, où Y est donnée par l'équation de Stratonovitch (13).

Démonstration. En utilisant à nouveau la méthode de conditionnement, nous pouvons nous ramener au cas où le processus (X,Y) reste dans un compact, la matrice a étant globalement lipschitzienne (pas d'explosion), C^∞ à support compact. En particulier, X varie dans un compact K, et nous pouvons supposer que les symboles de Christoffel de la connexion sont des fonctions C^∞ à support compact.

Il existe deux nombres >0 α et β possédant les propriétés suivantes : pour tout $x\in K$, l'application exponentielle e_x de la connexion est définie et injective dans la boule $\{|v|<\alpha\}$ de l'espace tangent, et l'image de cette boule contient la boule $\{|y-x|<\beta\}$ de $\mathbb{R}^k$. Dans ces conditions, si X_{t_ρ} et $X_{t_{\rho+1}}$ sont à distance $<\beta$, nous pouvons les joindre par un arc de géodésique bien défini entre les instants t_ρ et $t_{\rho+1}$, à savoir

(14)$_a$ $\quad \overset{n}{X}_t = e_{X_{t_\rho}}\left(\frac{t-t_\rho}{\tau} v_\rho\right)$, avec $v_\rho = e^{-1}_{X_{t_\rho}}(X_{t_{\rho+1}})$, et $\tau=2^{-n}$

Fixons N : la fonction $X_.(\omega)$ étant uniformément continue sur [0,N], nous voyons que la trajectoire interpolée $\overset{n}{X}_.(\omega)$ est bien définie sur [0,N] entier, pour n assez grand, ce qui donne un sens à notre énoncé. Il sera commode, cependant, de conditionner par l'événement

$$\{ \text{ pour tout } n>n_0 \text{ , on a } |X_{t_{\rho+1}} - X_{t_\rho}|<\beta \text{ pour tout } t_\rho(n)<N\}$$

de manière que $\overset{n}{X}$ soit définie sur [0,N] pour tous les ω dès que $n>n_0$.

Et maintenant nous abordons les calculs. Nous nous plaçons toujours sur $[0,N]$, avec $n>n_0$.

1) Ecrivons que pour tout v, $|v|<\alpha$, la courbe $t\mapsto e_x(tv)$ satisfait à l'équation des géodésiques

$$(14)_b \qquad \ddot{x}^\lambda+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0$$

et admet la vitesse v à l'origine. On obtient le développement limité de e_x , puis de e_x^{-1}

$$(14)_c \qquad e_x(v)^\lambda= x^\lambda+v^\lambda-\tfrac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu+O(|v|^3)$$

$$(14)_d \qquad e_x^{-1}(x+h)^\lambda= h^\lambda+\tfrac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)h^\mu h^\nu +O(|h|^3)$$

avec des termes complémentaires uniformément majorés en $x\in K$. D'où l'on tire par $(14)_a$

$$(14)_e \qquad (v_\rho)^\lambda =(X^\lambda_{t_{\rho+1}}-X^\lambda_{t_\rho}) +\tfrac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X_{t_\rho})(\quad)^\mu(\quad)^\nu +O(|X_{t_{\rho+1}}-X_{t_\rho}|^3) .$$

2) Autre calcul auxiliaire : considérons la solution de l'équation $dy_t=a(x_t,y_t)dx_t$, où x_t est un arc C^∞. Nous avons

$$(14)_f \qquad \dot{y}^i_t=a^i_\lambda(x_t,y_t)\dot{x}^\lambda_t \ , \quad \ddot{y}^i_t=a^i_\lambda(\,)\ddot{x}^\lambda_t+D_\mu a^i_\lambda(\,)\dot{x}^\lambda_t\dot{x}^\mu_t+D_j a^i_\lambda(\,)a^j_\mu(\,)\dot{x}^\lambda_t\dot{x}^\mu_t$$

et comme les a^i_λ et leurs dérivées sont bornés, un calcul donne pour la dérivée 3e une majoration du genre $M(|\dddot{x}_t|+|\ddot{x}_t||\dot{x}_t|+|\dot{x}_t|^3)$. Supposons que l'arc soit géodésique. Utilisant $(14)_b$ pour calculer les dérivées seconde et troisième, nous trouvons une majoration du genre $M|\dot{x}_t|^3$. Comme l'arc géodésique que nous considérons est donné par $(14)_a$ avec $t-t_\rho/\tau \leqq 1$ et $|v_\rho|<\alpha$, $|\dot{x}_t|/|\dot{x}_{t_\rho}|$ est borné, et nous pouvons majorer le terme complémentaire simplement par $M|\dot{x}_{t_\rho}|^3=M|v_\rho|^3/\tau^3$.

La formule de Taylor nous donne alors, pour $t_\rho\leqq t\leqq t_{\rho+1}$

$$(14)_f \qquad \overset{n}{Y}{}^i_t = \overset{n}{Y}{}^i_{t_\rho} + a^i_\lambda(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})(t-t_\rho)v^\lambda_\rho/\tau$$
$$+\tfrac{1}{2}[-a^i_\lambda(\,)\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\,)+D_\mu a^i_\lambda(\,)+D_j a^i_\lambda(\,)a^j_\mu(\,)]v^\lambda_\rho v^\mu_\rho/\tau^2$$
$$+O((t-t_\rho)^3|v_\rho|^3/\tau^3)$$

Nous remplaçons maintenant v_ρ par sa valeur tirée de $(14)_e$, et nous trouvons pour $t=t_{\rho+1}$:

$$(14)_g \qquad \overset{n}{Y}{}^i_{t_{\rho+1}}-\overset{n}{Y}{}^i_{t_\rho} = a^i_\lambda(X_{t_\rho},\overset{n}{Y}_{t_\rho})(X^\lambda_{t_{\rho+1}}-X^\lambda_{t_\rho})$$
$$+ \tfrac{1}{2}[D_\mu a^i_\lambda(\,)+D_j a^i_\lambda(\,)a^j_\mu(\,)](X^\lambda_{t_{\rho+1}}-X^\lambda_{t_\rho})(X^\mu_{t_{\rho+1}}-X^\mu_{t_\rho})$$
$$+ O(|X_{t_{\rho+1}}-X_{t_\rho}|^3)$$

3) Si l'on omet le terme complémentaire de la dernière ligne, on voit que $\overset{n}{Y}_t$ ainsi modifié coïncide, aux points dyadiques d'ordre n de l'intervalle [0,N], avec un approximant du type (8) pour l'équation

$$dY^i_t = a^i_\lambda(X_t,Y_t)dX^\lambda_t + \tfrac{1}{2}[D_\mu a^i_\lambda(\ )+D_j a^i_\lambda(\ )a^j_\mu]d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t$$

qui est la forme développée de l'équation de Stratonovitch (13). L'addition de la dernière ligne correspond à celle d'un terme d'erreur $\overset{n}{h}_{t_\rho}$ à la façon de (10) [attention : on ne considère ici que les points dyadiques : notre processus $\overset{n}{Y}_t$ n'est pas adapté aux instants t non dyadiques d'ordre n]. Pour appliquer le théorème 2, il suffit de remarquer que

$$\sum_{t_\rho<N} |X_{t_{\rho+1}}-X_{t_\rho}|^3 \ -> 0 \text{ en probabilité pour } n->\infty$$

Il en résulte que $\overset{n}{Y}->Y$ uniformément en probabilité sur les dyadiques (d'ordre quelconque) de [0,N]. Il n'est pas difficile de déduire alors de $(14)_f$ que la convergence uniforme en probabilité s'étend à tout l'intervalle [0,N].

II. TRANSPORT PARALLELE ET TRANSPORT GEODESIQUE

Jusqu'à maintenant, nous avons travaillé sur des espaces euclidiens $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^d$, dans notre étude de l'équation (1). Maintenant, nous allons oublier leurs structures linéaires : $\mathbb{R}^k$ (où se mouvra la semimartingale directrice) s'appellera donc V , avec des coordonnées globales (x^λ) constituant un << mollusque de référence >> ; $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^d$, où se mouvra la semimartingale solution (X_t,Y_t), s'appellera W, avec des coordonnées globales (x^λ,y^i) [1] . Là aussi, nous avons oublié la structure linéaire, <u>au moins pour l'instant</u>. La projection de W sur V : $(x^\lambda,y^i)\mapsto(x^\lambda)$, est notée π . Dans le cas le plus important, en fait, W sera T(V), et les y^λ seront les dx^i, ou tout au moins des formes sur V : la structure linéaire << verticale >> ne sera donc pas oubliée.

Nous nous proposons de développer d'abord quelques considérations générales sur les équations du type (1) - plus claires, j'espère, que ce que j'en avais dit dans le séminaire XV. Ensuite, nous étudierons de manière plus détaillée le transport parallèle stochastique. Enfin, nous parlerons de la << correction géodésique au transport parallèle >>, que nous appellerons plus simplement << transport géodésique >>.

1. Que le lecteur du séminaire XV nous pardonne ! les coordonnées l'an dernier s'appelaient (x^i,y^λ).

1.QUELQUES GÉNÉRALITES SUR LES E.D.S.

La première remarque que nous ferons est fondamentale : il n'existe pas d'équations du type (1) sur les variétés. Si une équation se met sous la forme (1) dans un << mollusque de référence >>, et si l'on change de coordonnées globales, elle ne reste pas du type (1) : les crochets $<X^\lambda, X^\mu>$ font leur apparition. Nous sommes donc obligés d'appeler équation différentielle stochastique une équation de la forme

$$(15) \qquad dY_t^i = a_\lambda^i(X_t, Y_t)dX_t^\lambda + \tfrac{1}{2}a_{\lambda\mu}^i(X_t, Y_t)d<X^\lambda, X^\mu>_t \qquad (a^i_{\lambda\mu} = a^i_{\mu\lambda})$$

avec une condition initiale que nous n'écrirons pas. Le problème que nous nous posons, à la suite de Schwartz, est celui de la nature géométrique des a_λ^i, $a_{\lambda\mu}^i$, et du sens d'une écriture telle que (15).

Supposons d'abord que la semimartingale X soit à variation finie. alors il en est de même de Y, et nous nous trouvons devant un problème déterministe, qui est celui du relèvement dans W d'une courbe tracée dans V. La nature des a_λ^i apparaît alors clairement : pour tout $x \in V$ et tout (x,y) dans W au dessus de V, nous avons une application linéaire $H_{x,y}$ de $T_x(V)$ dans $T_{x,y}(W)$, telle que $\pi_* \circ H_{x,y}$ soit l'identité sur $T_x(V)$: pour clarifier l'écriture, posons $Z_t=(X_t, Y_t)$, z=(x,y). Alors

$$H_z(D_\lambda|_x) = D_\lambda + a_\lambda^i(z)D_i\,|_z$$

(avec l'abus de langage qui consiste à noter D_λ l'opérateur de dérivée partielle p.r.à x^λ à la fois sur W et sur V). Etant donnée une courbe x(t) à variation finie dans V, son relèvement y(t) dans W, l'équation différentielle se met sous forme parfaitement intrinsèque

$$(16) \qquad dz_t = H_{z_t}(dx_t) \qquad \text{avec} \quad z_t=(x_t, y_t)$$

Nous dirons que la donnée de a, ou encore des applications $H_z : T_x \to T_z$, est celle de la partie du premier ordre de l'e.d.s. Si le lecteur regarde le Sém. XV, p.79, il s'apercevra que cette donnée équivaut à celle d'une "connexion non linéaire", avec des << symboles de Christoffel >> $\Gamma_\lambda^i = -a_\lambda^i$ (sém. XV, bas de la p. 79). Dans cet exposé, en revanche le mot connexion ne sera employé qu'en un seul sens, celui du Sém. XV p. 52.

Rappelons maintenant que l'on peut attacher à toute semimartingale (Z_t) à valeurs dans une variété un vecteur tangent d'ordre 2 (vt_2) symbolique au point Z_t, qui s'écrit

$$d^2Z_t = dZ_t^pD_p + \tfrac{1}{2}d<Z^p, Z^q>_tD_{pq}$$

Si l'on veut généraliser (16), il faut prolonger $H_z = T_x(V) \mapsto T_z(W)$ en une application des espaces de vecteurs tangents d'ordre 2, que nous noterons

$$\bar{H}_z = \tau_x(V) \mapsto \tau_z(W)$$

Si l'on impose que $\pi_* \bar{H}_z$ soit l'identité de τ_x, une telle application s'écrit [1]

$$\bar{H}_z(D_\lambda|_x) = D_\lambda + a^i_\lambda(z)D_i \;|_z$$
$$\bar{H}_z(D_{\lambda\mu}|_x) = \bar{a}^i_{\lambda\mu}(z)D_i + D_{\lambda\mu} + \bar{a}^{ij}_{\lambda\mu}(z)D_{ij} + 2\bar{a}^{i\nu}_{\lambda\mu}(z)D_{i\nu} \;|_z$$

(remarquer que $\pi_*(D_{\lambda\mu}) = D_{\lambda\mu}$, $\pi_*(D_{ij}) = \pi_*(D_{i\nu}) = 0$). Ici nous imposons aux $\bar{a}^{ij}_{\lambda\mu}$ d'être symétriques en leurs deux paires d'indices, aux $\bar{a}^{\nu i}_{\lambda\mu}$ d'être symétriques en les $\lambda\mu$, mais les indices ν et i jouent des rôles différents : nous écrivons donc i avant ν et introduisons le facteur 2. L'équation (16) s'écrit alors pour des semimartingales générales

(16') $$d^2 Z_t = \bar{H}_{Z_t}(d^2 X_t)$$

et de manière explicite : pour les coefficients des D_i, D_λ

$$dY^i_t = a^i_\lambda(Z_t)dX^\lambda_t + \tfrac{1}{2}\bar{a}^i_{\lambda\mu}(Z_t)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t \quad (\text{ et } dX^\lambda_t = dX^\lambda_t \text{ ! })$$

(on reconnaît là (15)) et pour les coefficients des $D_{\lambda\mu}$, $D_{i\nu}$, D_{ij}

$$d\langle Y^i, Y^j\rangle_t = \bar{a}^{ij}_{\lambda\mu}(Z_t)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t \quad , \quad d\langle Y^i, X^\nu\rangle_t = \bar{a}^{i\nu}_{\lambda\mu}(Z_t)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t$$

Mais on peut tirer les expressions des crochets de la ligne précédente, et cela nous donne les expressions des $a^{ij}_{\lambda\mu}$, $a^{i\nu}_{\lambda\mu}$ ci-dessous : on voit donc qu'il reste seulement quelque liberté dans le choix des $a^i_{\lambda\mu}$ (nous verrons plus tard quelle liberté exactement).

(17) $$\bar{a}^{ij}_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(a^i_\lambda a^j_\mu + a^i_\mu a^j_\lambda) \quad , \quad \bar{a}^{i\nu}_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(a^i_\lambda \delta^\nu_\mu + a^i_\mu \delta^\nu_\lambda)$$

Signalons en passant la signification intrinsèque de ces formules : la transposée de $\bar{H}_z$ applique les formes d'ordre 2 en z dans les formes d'ordre 2 en x, et (17) signifie que pour deux formes d'ordre 1 en z on a $\bar{H}'_z(\eta_1 \cdot \eta_2) = \bar{H}'_z(\eta_1) \cdot \bar{H}'_z(\eta_2)$ (le ' désigne la transposée). Il est donc inutile de vérifier que (17) est préservé par les changements de cartes.

Reste à choisir les $a^i_{\lambda\mu}$. Le choix le plus habituel (que l'on fait le plus souvent sans même mentionner qu'il y a d'autres possibilités) consiste à traduire (16) pour les semi-martingales sous la forme de Stratonovitch, soit

(18) $$dY^i_t = a^i_\lambda(X_t, Y_t) * dX^\lambda_t$$

d'où explicitement

(19) $$a^i_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}(\, a^j_\lambda D_j a^i_\mu + a^j_\mu D_j a^i_\lambda + D_\lambda a^i_\mu + D_\mu a^i_\lambda \,)$$ (coefficients de Stratonovitch)

Nous verrons un peu plus bas pourquoi ce choix est intrinsèque. Nous le noterons avec un ^{s} : $\bar{H}^s_z$, $\bar{a}^{si}_{\lambda\mu}$, et l'utiliserons comme terme de comparaison.

1. Nous répétons ici la discussion du Sém. XV, p. 89

Maintenant, si nous considérons **un second prolongement** $\bar{H}_z$, la différence entre $\bar{H}_z$ et $\bar{H}^{s}_z$ est une application de $\tau_x(V)$ dans $\tau_z(W)$ nulle sur $T_x(V)$: elle peut donc être considérée comme une application bilinéaire symétrique de $T_x(V)\times T_x(V)$ dans $\tau_z(W)$. Mais en fait, il résulte de (17) que c'est une application à valeurs dans $T_z(W)$, et même dans le sous-espace << vertical >> de $T_z(W)$ (le noyau de π_*)

(20) $\qquad \bar{H}_z(D_\lambda)=\bar{H}^{s}_z(D_\lambda) \;,\; \bar{H}_z(D_{\lambda\mu})=\bar{H}^{s}_z(D_{\lambda\mu}) + c^i_{\lambda\mu}(z)D_i$

où $c^i_{\lambda\mu}=\bar{a}^i_{\lambda\mu}-\overset{s}{a}{}^i_{\lambda\mu}$ est maintenant << du premier ordre >>. Ce terme est appelé la <u>correction</u> à la forme de Stratonovitch.

[Traduisons[1] dans les notations présentes quelques résultats du Sém. XV, qui ne serviront pas dans la suite. Soient K et L deux champs de vecteurs sur V ; alors leurs relèvements sur W sont les champs de vecteurs H(K) et H(L). On pose

$(21)_a \qquad H(K)H(L)-H(L)H(K)-H([K,L]) = -R(K,L)$

(la raison du signe - est expliquée dans le Sém. XV, p.83). D'autre part, le relèvement de Stratonovitch est caractérisé par la propriété

$(21)_b \qquad \overset{s}{\bar{H}}(KL+LK) = H(K)H(L)+H(L)H(K)$

d'où aussi pour un relèvement arbitraire

$(21)_c \qquad \bar{H}(KL+LK)= H(K)H(L)+H(L)H(K) + 2C(K,L)$ où C est la correction

et

$(21)_d \qquad \bar{H}(KL) = H(K)H(L) + J(K,L) \qquad$ avec $J=C-\frac{1}{2}R$.]

Concluons cette section en donnant un argument simple pour le caractère intrinsèque de (18) - bien sûr, $(21)_b$ en est un aussi, mais il n'est pas spécialement intuitif ! C'est le théorème d'approximation du § I : si nous interpolons géodésiquement la semimartingale X pour une connexion <u>quelconque</u> sur la base, que nous résolvons l'équation déterministe (16) pour les arcs géodésiques, et que nous passons à la limite, nous obtenons (18). Dans le cas où W=T(V) et où H, la donnée du premier ordre, est le relèvement horizontal dans une connexion linéaire sur V, ce résultat est dû à Ito (mais il est peut être bon de souligner que l'interpolation géodésique peut être prise par rapport à une <u>autre</u> connexion sur V !).

2.CORRECTION GEODESIQUE AU TRANSPORT PARALLELE

Nous particularisons la situation précédente : maintenant W=T(V), les coordonnées sur W s'appellent x^λ et $y^\lambda=dx^\lambda$, on s'est donné une connexion Γ sur V , et l'e.d.s. au premier ordre est celle du transport parallèle :

1. Nous conseillons d'omettre ce passage.

(22) $$dy^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)dx^\mu y^\nu = 0$$

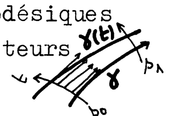
- si l'on veut écrire explicitement l'opérateur H de relèvement, introduisons l'opérateur $D_{\hat{\nu}}$ de dérivée partielle par rapport à la coordonnée y^ν (noté $\partial/\partial\dot{q}^\nu$ en mécanique), et alors $H_{x,y}(D_\lambda) = D_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)y^\mu D_{\hat{\nu}}$.

Nous allons indiquer comment Dohrn et Guerra décrivent un procédé d'approximation conduisant à un prolongement de (22) distinct du prolongement de Stratonovitch, et cependant << naturel >>.

L'idée est d'interpoler géodésiquement la semimartingale X, mais de modifier le procédé de transport le long de chaque petit arc géodésique. Après quoi on passe à la limite. Lorsque X est différentiable, on retombe alors sur le transport parallèle, mais lorsque les crochets ne sont pas nuls, on obtient quelque chose de nouveau - manifestement intrinsèque, puisque la construction l'est.

Voici la méthode de transport d'un vecteur u du point $\gamma(s_0)$ d'une géodésique $\gamma(s)$ jusqu'au point $\gamma(s_1)$. On prend une courbe $h(t)$ $(t\in[0,1])$ telle que $\dot{h}(0)=u$, et on transporte parallèlement le vecteur $v=\dot{\gamma}(s_0)$ le long de $h(t)$, d'où un champ de vecteurs $v(t)$ le long de h. Pour tout t on regarde la géodésique $\gamma_t(s)$ telle que $\gamma_t(s_0)=h(t)$, $\dot{\gamma}_t(s_0)=v(t)$, et on la suit jusqu'au point s_1 . On a ainsi une famille de géodésiques << parallèles à l'instant s_0 >> . On regarde le champ de vecteurs

$$B(s) = \frac{d}{dt}\gamma_t(s)|_{t=0}$$ le long de la géodésique γ



On a manifestement $B(s_0)=u$. Le transport de u le long de l'arc γ est alors ce champ B(s) [Le mot transport ne doit pas nous tromper : ce << transport le long d'une géodésique >> n'est pas le transport que nous avons en vue, mais seulement l'étape préliminaire. Il reste à interpoler et à passer à la limite - et le long de l'arc géodésique, comme on l'a dit, on n'obtient rien de nouveau à la limite].

Faisons le calcul, en laissant de côté les difficultés qui peuvent naître si l'on veut prolonger les géodésiques trop loin. Nous avons pour tout t, les $^\bullet$ désignant des dérivées par rapport à s

$$\ddot{\gamma}^\lambda(s,t) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\gamma)\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu(s,t)=0 \quad (\text{ équation des géodés.})$$

dérivons en t et faisons t=0

(23) $$\ddot{B}^\lambda(s) + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\gamma)\dot{\gamma}^\mu B^\nu(s) + D_\theta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\gamma)\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu B^\theta(s)=0$$

(on a utilisé les relations $\frac{d}{dt}\ddot{\gamma}^\lambda(s,t)|_{t=0} = \frac{d^2}{ds^2}B^\lambda(s)$, $\frac{d}{dt}\dot{\gamma}^\lambda(s,t)|_{t=0} = \frac{d}{ds}B^\lambda(s)$, qui sont de simples commutations de dérivations). Ceci est une équation linéaire du second ordre. Nous savons que $B^\lambda(s_0)=u$, il faut encore déterminer $\dot{B}^\lambda(0)$. Pour cela, nous écrivons le transport parallèle en t pour $s=s_0$

$$\frac{d}{dt}\dot{\gamma}^{\lambda}(s_0,t)+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(h(s_0,t))\frac{d}{dt}h^{\mu}(s_0,t)\dot{\gamma}^{\nu}(s_0,t)=0$$

ce qui pour $t=0$ donne

$$\dot{B}^{\lambda}(s_0)+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\gamma)u^{\mu}\dot{\gamma}^{\nu}(s_0)=0 \tag{24}$$

et on constate bien que seul u intervient, non la courbe $h(t)$ utilisée. L'équation (23) et les conditions initiales sur $B^{\lambda}(s_0)$ et $\dot{B}^{\lambda}(s_0)$ déterminent bien la fonction $B(s)$ le long de $\gamma(s)$. Tout ceci n'est absolument pas intrinsèque, mais c'est trivial !

Approximation. Maintenant, nous considérons la semimartingale (X_t) dans V, dont nous construisons l'approximation géodésique $\overset{n}{X}$ exactement comme dans la démonstration du théorème 3 (§ I, formules (14)), et nous construisons le processus $(\overset{n}{Y}_t)$ en partant de u au point X_0, et en le baladant géodésiquement le long de chacun des arcs découpés par les instants $t_{\rho},t_{\rho+1}$. Nous avons, en désignant par v_{ρ}/τ la vitesse de l'arc géodésique correspondant

$$\overset{n}{Y}_{t_{\rho+1}}-\overset{n}{Y}_{t_{\rho}}=\tau\dot{B}(t_{\rho})+\frac{\tau^2}{2}\ddot{B}(t_{\rho})+\text{terme complémentaire}$$

où B est la fonction calculée plus haut, relative à l'arc géodésique $[t_{\rho},t_{\rho+1}]$: $\dot{B}(t_{\rho})$ est tiré de (24), sa composante d'indice λ est

$$-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X_{t_{\rho}})\overset{n}{Y}{}^{\mu}_{t_{\rho}}v^{\nu}_{\rho}/\tau$$

et $\ddot{B}(t_{\rho})$ est de même tiré de (23). Après quoi on a v_{ρ} par $(14)_e$, on regroupe, et on applique le théorème 3 pour aboutir à l'équation différentielle horrible suivante :

$$dY^{\nu}_t=-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(X_t)dX^{\lambda}_tY^{\mu}_t+\frac{1}{2}d\langle X^{\lambda},X^{\mu}\rangle_tY^{\eta}_t\left(-D_{\eta}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\begin{matrix}+\Gamma^{\theta}_{\eta\lambda}\Gamma^{\nu}_{\mu\theta}\\+\Gamma^{\theta}_{\eta\mu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\theta}\end{matrix}-\Gamma^{\theta}_{\lambda\mu}\Gamma^{\nu}_{\eta\theta}\right). \tag{25}$$

Arrêtons nous un moment, pour faire des choses intrinsèques.

Champs de Jacobi. L'équation (23) se laisse écrire sous forme intrinsèque, de la manière suivante : il existe un opérateur différentiel sur les champs de vecteurs $J(s)$ le long de la courbe $\gamma(s)$, qui s'écrit

$$(26)_a \qquad DJ(s)=\nabla_{\dot{\gamma}(s)}J(s)=(\dot{J}^{\nu}(s)+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(\gamma)\dot{\gamma}^{\lambda}J^{\mu}(s))\text{ en }\gamma(s)$$

Alors (23) et ses conditions initiales s'écrivent

$$(26)_b \qquad D^2B(s)=R(\dot{\gamma}(s),B(s))\dot{\gamma}(s)\qquad B(s_0)=u\ ,\ DB(s_0)=0$$

où $R(X,Y)Z$ est l'effet sur $Z\in T_{\gamma(s)}(V)$ de l'opérateur de courbure $R(X,Y)$ soit

$$(26)_c \qquad R(X,Y)Z=(z^{\lambda}R^{\theta}_{\lambda\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu})D_{\theta}\ ,\ R^{\theta}_{\lambda\mu\nu}=D_{\mu}\Gamma^{\theta}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu}\Gamma^{\theta}_{\nu\varepsilon}-(\text{terme analogue avec }\mu\nu\text{ échangés})$$

[Cette notation est mauvaise pour la mémoire : se rappeler que les indices antisymétriques $\mu\nu$ sont les deux derniers, et que μ,ν sont dans cet ordre dans la dérivée affectée du signe +]

L'équation intrinsèque $(26)_b$ est fondamentale en géométrie différentielle : elle définit les champs de Jacobi le long de la géodésique γ. Ici, elle ne nous sert à rien, car nous avons besoin de sa forme non intrinsèque (23) pour l'approximation ! Mais maintenant, remettons (25) sous forme intrinsèque, en nous servant de l'expression explicite des composantes $(26)_c$

(27) $$dY_t^\nu = - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu(X_t)Y_t^\mu * dX_t^\lambda + \frac{1}{2}R_{\lambda\mu\eta}^\nu(X_t)d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t Y_t^\eta$$

qui nous donne la correction de courbure à la forme de Stratonovitch, et qui définit ainsi une équation différentielle stochastique naturelle sur T(V).

[Exercice : avec les notations de (20) , il est clair que l'on a

$$c_{\lambda\mu}^\nu = \frac{1}{2}(R_{\lambda\mu\eta}^\nu + R_{\mu\lambda\eta}^\nu)$$

mais pourquoi cela s'interprète t'il, dans le langage de (20), comme une application de $T_x(V)\times T_x(V)$ dans le sous-espace vertical de $T_{x,y}(W)$ avec W=T(V) ? Regardez la notion d'isomorphisme vertical, Sém. XV p. 78 - si cela vous amuse].

Exemple. X est le mouvement brownien d'une variété riemannienne. Alors $d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t = g^{\lambda\mu}(X_t)dt$, et la correction de courbure s'écrit

$$\frac{1}{2}R_\eta^\nu(X_t)Y_t^\eta dt \quad \text{avec } R_\eta^\nu = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu\eta}^\nu \quad (\text{ tenseur de Ricci }).$$

Commentaire. Dohrn et Guerra ne traitent du transport géodésique que dans le cas du mouvement brownien d'une variété riemannienne. Ils le justifient par l'application qu'ils en font à la << mécanique stochastique de Nelson >> dans une variété riemannienne. Dans ce travail, nous espérons convaincre le lecteur qu'il s'agit d'une notion intéressante pour des semimartingales quelconques, et pour des raisons multiples...

Signalons en passant une propriété intéressante, sur laquelle nous n'aurons pas l'occasion de revenir :

PROPOSITION 4. Supposons que V soit munie d'une structure riemannienne à courbure ≤ 0 (resp. ≥ 0). Alors le transport géodésique le long d'une semimartingale augmente (resp. diminue) la longueur des vecteurs tangents.

DEMONSTRATION. Nous nous inspirons de Bismut, p. 476. Il est clair qu'il suffirait de démontrer que le transport élémentaire par champ de Jacobi le long d'un arc géodésique ((23)-(24)) augmente, resp. diminue, la longueur des vecteurs tangents. Après quoi, le résultat passera aux semimartingales par interpolation géodésique. Cette fois, nous utiliserons l'équation sous la forme intrinsèque $(26)_b$.

D'après la propriété fondamentale de la connexion riemannienne $\nabla_X(Y|Z) = (\nabla_X Y|Z)+(Y|\nabla_X Z)$, on peut écrire pour le champ $B(t)$ le long de $\gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}|B(t)|^2 = 2(\ B(t)\ |\ DB(t))$$
$$\frac{d^2}{dt^2}|B(t)|^2 = 2|DB(t)|^2 + 2(\ B(t)|\ D^2B(t))$$
$$= 2|DB(t)|^2 - 2(\ B(t)\ |R(B,\dot{\gamma})\dot{\gamma}(t)) \text{ par } (26)_b$$

L'expression qui figure à droite est précisément celle dont le signe est déterminé par la courbure de la variété : si celle-ci est à courbure négative, on voit que la dérivée seconde est positive, i.e. $|B(t)|^2$ est convexe, et comme $DB(0)=0$, la première ligne entraîne que la dérivée est nulle pour $t=0$, donc positive pour $t>0$, et $|B(t)|$ est croissante.

Le cas de la courbure positive est plus délicat, et ma démonstration était incorrecte. Emery en ayant trouvé une bien meilleure, je vais me borner à indiquer l'idée qui rend le résultat vraisemblable. Si la courbure est positive, le dernier terme $-2(\ |\ )$ est négatif pour tout t, tandis que le premier est nul pour $t=0$. On espère donc que la somme sera négative _pour_ t _petit_. et cela doit suffire, car on n'utilise que de _petits_ arcs de géodésiques dans l'approximation. Malheureusement, il faut pour que cela soit correct que le second terme soit _strictement_ négatif, et cela fait des difficultés.

III. E.D.S. LINEAIRES ET CONNEXIONS SUR T(V).

1. E.D.S. LINEAIRES

Nous reprenons maintenant une équation différentielle stochastique du type (15), mais en la supposant _linéaire_ en y. Cela suppose la donnée, sur la variété W au dessus de V, d'une structure additionnelle : chaque << fibre >> W_x est munie d'une structure d'espace vectoriel, pour laquelle les coordonnées y^i sont linéaires. Nous n'admettons alors que des changements de carte sur W respectant (la structure fibrée de W et) la structure linéaire de chaque fibre. En langage officiel, W est un fibré vectoriel sur V. Avec nos hypothèses simplificatrices ($V=\mathbb{R}^k$, existence de coordonnées globales, etc.) ce sera un fibré trivial, mais tous les résultats de nature locale que nous établirons seront valables dans la situation la plus générale.

Le cas particulier le plus important que nous aurons à considérer sera celui où $W=T(V)$. Dans ce cas, les coordonnées y^i seront des formes linéaires sur V, constituant en chaque point la base duale d'un << repère mobile >>, et les y^i et x^λ seront en nombre égal. Plus spécialement, on peut utiliser comme coordonnées y^i les différentielles des x^λ : il existe alors un appariement entre indices << latins >> et << grecs>>, que nous désignerons par un ^ : $\hat{\imath}$ ($\hat{\mu}$) est l'indice grec (latin) associé à l'indice latin (grec) i (μ). La coutume en mécanique est de noter $(q^i,\dot{q}^i)$ les coordonnées que nous noterons, nous, (x^λ,x^λ). La traduction d'un langage dans l'autre est immédiate.(1)

Les vecteurs tangents D_λ et D_i forment une base de T(W) en tout point (x,y) de W, et l'on a $\pi_*(D_\lambda)=D_\lambda$, $\pi_*(D_i)=0$. De même, en leur adjoignant $D_{\lambda\mu}$, $D_{i\lambda}$, D_{ij} on obtient une base de $\tau(W)$: on remarquera que nous ne faisons pas apparaître dans la notation de vecteurs $D_{\lambda i}$. On a $\pi_*(D_{\lambda\mu})=D_{\lambda\mu}$ (sur V), $\pi_*(D_{i\lambda})=\pi_*(D_{ij})=0$. Les D_i, D_{ij}, $D_{i\lambda}$, et plus généralement tous vt_1 ou vt_2 dont l'image par π_* est nulle, seront dits <u>verticaux</u> . Faites bien attention à cela pour les vt_2 du type $D_{i\lambda}$, qui tout de même << sortent des fibres >> .

Plaçons nous au dessus d'un point x de V : puisque W_x est un espace vectoriel, W_x s'identifie à son espace tangent, tout élément u de W_x pouvant être considéré comme vecteur tangent en un point y quelconque de W_x. Envoyant ce vecteur tangent dans T(W) par i_*, où i est l'injection de W_x dans W, nous obtenons un <u>vecteur tangent vertical</u> à W au point (x,y), soit (x,y,0,u) . Cela s'appelle l'<u>isomorphisme vertical</u> de $W_x{\times}W_x$ dans $T_x(W)$. Il a déjà été vu dans le cas des fibrés tangents.

Voici alors le modèle général d'e.d.s. linéaire

$$(29)\qquad dY^i_t = Y^j_t a^i_{j\lambda}(X_t)dX^\lambda_t + \tfrac{1}{2}Y^j_t a^i_{j\lambda\mu}(X_t)d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t \qquad (a^i_{j\lambda\mu}=a^i_{j\mu\lambda})$$

Nous avons vu dans la section 1 du paragraphe précédent que la donnée de cette e.d.s. au premier ordre est celle d'un relèvement <<horizontal>> $H_{x,y} : T_x(V) \to T_{x,y}(W)$, donné par

$$(30)\qquad H_{x,y}(D_\lambda) = D_\lambda + y^j a^i_{j\lambda}(x)D_i$$

D'une manière générale, on peut appeler les courbes solutions de l'e.d.s. sont des << semimartingales horizontales >> , et que l'e.d.s. est celle du << transport horizontal >> d'un vecteur de la fibre le long de la semimartingale X sur la base. Le mot <u>horizontal</u> est suggestif, mais vide de sens.

2. E.D.S. LINEAIRES ET CONNEXIONS SUR W

Donnons nous maintenant une connexion Γ sur V, qui restera fixée dans toute la suite. Nous allons montrer que les e.d.s. linéaires à valeurs dans W sont en bijection avec certains <u>prolongements naturels de la connexion</u> Γ <u>à</u> W . Cela me semble assez intéressant, car on a là un énoncé propre au langage des semimartingales, et qui clarifie grandement (à mon avis) une question de pure géométrie différentielle, i.e. le problème (traité par Yano et Ishihara) du prolongement des connexions à un fibré tangent ou cotangent.

1. L'autre exemple important, celui de $T^*(V)$, sera traité plus loin.

Pour déterminer une connexion sur W, nous devons nous donner des symboles de Christoffel relatifs aux coordonnées x^λ, y^i, soit

$$\Gamma(D_{\mu\nu}) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda + \Gamma^i_{\mu\nu} D_i \ , \ \Gamma(D_{j\mu}) = \Gamma^\lambda_{j\mu} D_\lambda + \Gamma^i_{j\mu} D_i \ , \ \Gamma(D_{jk}) = \Gamma^\lambda_{jk} D_\lambda + \Gamma^i_{jk} D_i$$

(pas de $\Gamma_{\mu j}$ distincts des $\Gamma_{j\mu}$: nous ne considérons que des connexions sans torsion). Tous ces coefficients dépendent de (x,y).

Nous allons commencer par choisir certains coefficients de la manière la plus économique possible, et vérifier que la condition ainsi imposée à la connexion est intrinsèque :

$(31)_a$ $\qquad \Gamma^i_{jk}(x,y) = 0$

$(31)_b$ $\qquad \Gamma^\lambda_{j\mu}(x,y) = \Gamma^\lambda_{jk}(x,y) = 0$

$(31)_c$ $\qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x,y) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ (symboles de Christoffel de V)

$(31)_d$ $\qquad \Gamma^i_{j\lambda}(x,y) = -a^i_{j\lambda}(x)$ (donné par l'e.d.s. au 1er ordre)

Interprétons ces conditions : $(31)_a$ signifie que l'injection de W_x dans W est <u>affine</u> , lorsqu'on munit W_x de sa connexion triviale d'espace vectoriel. $(31)_b$ signifie que la dérive d'un vt_2 vertical est un vt_1 vertical. $(31)_c$ signifie que la projection π de W sur V est affine.

Enfin $(31)_d$ s'interprète ainsi : donnons nous une courbe différentiable (x(t),u(t)) dans W, et considérons le relèvement (x(t),y(t)) de sa projection sur V, au moyen de l'e.d.s. au premier ordre. Alors nous avons un transport vertical dans T(W)

$$(x(t),u(t),0,y(t))$$

et $(31)_d$ exprime exactement que ce transport est parallèle dans la connexion Γ sur W.

Il reste donc seulement à déterminer les coefficients $\Gamma^i_{\mu\nu}(x,y)$, ce que nous énoncerons de manière formelle :

THEOREME 5. Il existe une et une seule connexion Γ sur W satisfaisant à $(31)_{abcd}$ et à la condition suivante :

Si X est une martingale dans V, alors la solution (X,Y) de (29) est une martingale dans W.

Démonstration. Dire que X est une martingale revient à dire que

$$dX^\lambda_t = dM^\lambda_t - \tfrac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X_t)d\langle M^\mu,M^\nu\rangle_t$$

où les M^λ sont des martingales locales réelles. On veut écrire que les différentielles suivantes sont des différentielles de martingales locales réelles :

$$dY^i_t + \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{\mu\nu}(X_t,Y_t)d\langle X^\mu,X^\nu\rangle_t + \Gamma^i_{j\mu}(X_t,Y_t)d\langle X^\mu,Y^j\rangle_t + 0$$

(le terme en Γ^i_{jk} est nul d'après $(31)_a$; noter l'absence du coefficient 1/2 devant le dernier terme ; enfin, il est inutile d'écrire les équations relatives aux X^λ, qui sont automatiquement satisfaites d'après $(31)_b$ et $(31)_c$).

Tirant dY^i_t de (29), exprimant d'autre part les dX^λ_t au moyen des M^λ, nous voyons que

$$(31)_e \quad \Gamma^i_{\mu\nu}(x,y)=y^j\Gamma^i_{j\mu\nu}(x) \quad \text{avec } \Gamma^i_{j\mu\nu}+a^i_{j\mu\nu}=\Gamma^k_{j\mu}\Gamma^i_{k\nu}+\Gamma^k_{j\nu}\Gamma^i_{k\mu}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^i_{j\lambda} \ .$$

Dans le système de coordonnées (x^λ,y^i), nous avons déterminé ainsi les symboles de Christoffel d'une connexion sur W ; l'unicité dans l'énoncé montre que celle-ci est entièrement déterminée par des propriétés intrinsèques, i.e. ne dépend pas du système de coordonnées utilisé.

REMARQUE. Soit x(t) une géodésique de V, et soit (x(t),y(t)) son relèvement horizontal dans W. Il est naturel de se demander pour quelles connexions du type $(31)_{a-e}$ sur T(W) ce relèvement horizontal est une géodésique dans T(W). Cela a lieu pour la connexion associée à l'e.d.s. de Stratonovitch et pour elle seule. Dans un sens, cela se voit par un raisonnement probabiliste : soit B_t un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$; alors $x(B_t)$ est une martingale dans V, parce que x est une géodésique [on suppose x(t) défini pour tout $t\in\mathbb{R}$, pour simplifier] ; son relèvement horizontal est $y(B_t)$ par ce que l'e.d.s. est de Stratonovitch ; par $(31)_e$ $(x(B_t),y(B_t))$ est une martingale dans W, donc (x,y) est une géodésique . La réciproque exige un calcul. Je remercie Emery de m'avoir signalé l'erreur de la première rédaction sur ce point.

EXEMPLES. 1) Explicitons les symboles de Christoffel dans le cas d'une e.d.s. de Stratonovitch. Utilisant $(31)_e$ et (19) qui nous donne les coefficients $a^i_{j\lambda\mu}(x)$ en fonction des $a^i_{j\lambda}(x)$, nous trouvons la formule suivante, qui n'est pas spécialement drôle

$$(32) \qquad \Gamma^i_{\mu\nu}(x,y)=\tfrac{1}{2}y^j(\Gamma^k_{j\mu}\Gamma^i_{k\nu}+\Gamma^k_{j\nu}\Gamma^i_{k\mu}+D_\mu\Gamma^i_{j\nu}+D_\nu\Gamma^i_{j\mu}-2\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^i_{j\lambda}) \quad .$$

(rappel : on a écrit $\Gamma^i_{j\lambda}$ pour $-a^i_{j\lambda}$).

2) Prenons W=T(V), et prenons pour e.d.s. au premier ordre l'équation du transport parallèle : autrement dit

$$(33) \qquad a^i_{j\lambda}(x) = -\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\lambda}(x) \ , \text{ donc } \Gamma^i_{j\lambda}(x,y)=\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\lambda}(x)$$

Nous savons la prolonger au second ordre de deux manières : transport parallèle stochastique (forme de Stratonovitch) , et transport géodésique. D'où deux connexions sur T(V), que nous noterons respectivement Γ^p (parallèle) et Γ^g (géodésique). Le calcul horrible consistant à tirer les $a^i_{j\lambda\mu}$ de la formule $(27)_a$ et à les porter dans $(31)_e$ pour trouver les symboles de Christoffel de la connexion géodésique conduit à un résultat étonnamment simple :

(34) $\qquad \Gamma^{i}_{\mu\nu}(x,y) = y^{j}D_{\hat{j}}\Gamma^{\hat{i}}_{\mu\nu}$ (connexion géodésique)

Si l'on regarde maintenant le chapitre X du livre de Bismut, on y voit figurer deux connexions Γ^H et Γ^C sur T(V) (ou sur $T^*(V)$), dont la définition est empruntée au livre de Yano et Ishihara. L'examen des symboles de Christoffel dans ce livre montre aussitôt que Γ^C est exactement la connexion associée au transport géodésique ! Quant à Γ^H, elle présente en général de la torsion : ce ne peut donc être notre connexion associée au transport parallèle, mais celle-ci est la connexion sans torsion associée à Γ^H. Les calculs de Yano-Ishihara ont donc une interprétation probabiliste... n'est ce pas incroyable ?

3. DIGRESSION : AUTRES JUSTIFICATIONS DE Γ^g (lecture déconseillée)

La justification du transport géodésique donnée par Dohrn et Guerra est le fait que celui-ci conduit, lorsqu'on l'applique à la « mécanique stochastique de Nelson » , à une équation de Schrödinger correcte. Je vais en donner ici d'autres justifications, de type mathématique, et non physique .

Je rappelle sans insister la définition de la connexion Γ^g donnée par Yano-Ishihara : un champ de vecteurs sur V, $X=\xi^\lambda D_\lambda$, admet un prolongement naturel à T(V) ainsi défini :

$$\bar{X} = \xi^\lambda D_\lambda + y^j D_{\hat{j}}\xi^{\hat{i}} D_i$$

(l'idée est la suivante : X est le générateur infinitésimal d'un flot de difféomorphismes φ_t de V ; ceux-ci s'étendent naturellement à T(V), en un flot $\bar{\varphi}_t$, dont on prend le générateur $\bar{X}$). La connexion Γ^g est alors caractérisée par la propriété que, si X et Y sont deux champs sur V

$$\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} \quad .$$

Pour exprimer les autres caractérisations, il me faut quelques notations.

i) Soit x(t) une courbe tracée dans une variété quelconque U. Je désignerai par $vx(t) = \dot{x}(t)$ sa vitesse (courbe tracée dans T(U)), par $ax(t)= \ddot{x}$ (t) son accélération (Sém. XV, p. 50, formule (9)) qui est une courbe tracée dans $\tau(U)$, à distinguer de vvx, courbe tracée dans TT(U). La relation entre ax et vvx est la suivante : nous savons (Sém. XV, bas le la p. 77) qu'il existe une application naturelle de TT(U) dans $\tau(U)$ - notons la j pour fixer les idées ; alors ax est l'image de vvx par j . En effet, si $(x^\lambda,u^\lambda,v^\lambda,w^\lambda)$ est un élément de TT(U), son image par j est le vt$_2$ $w^\lambda D_\lambda + u^\mu v^\nu D_{\mu\nu}$, et lorsque $u^\lambda=v^\lambda=\dot{x}^\lambda(t)$, $w^\lambda=\ddot{x}(t)$ on trouve bien $\ddot{x}^\lambda D_\lambda+\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu D_{\mu\nu}$, i.e. ax .

ii) Soit Γ une connexion sur U ; Γ est une application de $\tau(U)$ dans $T(U)$. Nous convenons de noter aussi Γ l'application $\Gamma \circ j$ sur $TT(U)$.

iii) Soit un transport $\varphi(t)=(x(t),u(t))$ dans $T(U)$. Alors $v\varphi$ est une courbe dans $TT(U)$, et $a\varphi$ une courbe dans $\tau(T(U))$. La dérivée absolue, ou <u>dérivée covariante</u> du transport φ est le transport $D\varphi = \Gamma v\varphi = (x, \nabla_{\dot{x}} u)$ au dessus de la même courbe x.

Dans la suite de cette << digression >>, U sera V ou T(V) ; nous munirons V de la connexion Γ (qui permet de redescendre de $TT(V)$ ou $\tau(V)$ dans $T(V)$) et $T(V)$ <u>de la connexion géodésique</u>, qui permet de redescendre de $TT(T(V))$ ou $\tau(T(V))$ dans $TT(V)$. Le contexte étant suffisamment clair, nous la désignerons elle aussi/parfois par Γ , et nous désignerons par Γ^2 l'opération $\Gamma\Gamma^g$ qui fait redescendre au premier étage.

1) Considérons une courbe x(t) dans V, et cherchons à définir ses dérivées covariantes <u>jusqu'à l'ordre 3</u> ; ce seront des courbes dans T(V) au dessus de x(t).

<u>Ordre 1</u> : dérivée ordinaire vx .

<u>Ordre 2</u> : il y a deux choix, conduisant au même résultat Dvx. Soit former vvx dans TT(V) et redescendre par Γ : $TT(V) \to T(V)$, soit ax dans $\tau(V)$ et redescendre par Γ : $\tau(V) \to T(V)$. Voir i) et ii) ci-dessus. Remarquer que nos notations sont un peu inhabituelles : on écrira plus volontiers Dx pour vx, et D^2x pour Dvx.

<u>Ordre 3</u> : il y a un premier choix évident : Dvx est un transport, nous lui appliquons D, et nous obtenons la dérivée covariante itérée : explicitement, nous avons Dvx = Γax (par définition), nous reformons vΓax (remontant ainsi dans TT(V) et redescendons en ΓvΓax.

La connexion géodésique ouvre une seconde possibilité : former directement un élément du 3e ordre, qui sera avx (ou vvvx, mais le résultat est le même, pour la même raison que $\Gamma a=\Gamma vv$ plus haut), puis redescendre de $\tau(T(V))$ dans TT(V) par Γ^g (et ensuite dans T(V) par Γ). Ayant expliqué ceci, la connexion géodésique est <u>caractérisée</u>[1] par le fait que

(35) $$\Gamma^g avx = v\Gamma ax \qquad (\text{ égalité dans } TT(V))$$

d'où a fortiori l'égalité dans T(V) en redescendant par Γ. Que se passe t'il maintenant pour un transport quelconque $\varphi=(x,u)$, non nécessairement de la forme $(x,\dot{x})$? Le calcul brutal montre que

(36) $$D^2\varphi = \Gamma^2 a\varphi + R(\dot{x},u)\dot{x} \quad (R \text{ est la courbure, } \Gamma^2=\Gamma\Gamma^g)$$

qui est la forme générale de la formule $(26)_b$ des champs de Jacobi.

1. Parmi les connexions sur T(V) relevant Γ .

5. E.D.S. DUALE ET CONNEXION ASSOCIEE

Revenons à l'équation générale du type (29), à valeur dans W :

$$dY^i = Y^j a^i_{j\lambda}(X)dX^\lambda + \tfrac{1}{2}Y^j a^i_{j\lambda\mu}(X)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle$$

et considérons le fibré dual W' : il est commode de munir W' de coordonnées (x^λ, y_i) , la dualité au dessus de x étant $(y|y') = y^i y'_i$ - Ainsi, en mécanique, le fibré cotangent $T^*(V)$ est muni de coordonnées (q^i, p_i) duales des $(q^i, \dot{q}^i)$. Tout naturellement, les opérateurs de dérivation partielles sur W' seront notés D_λ, D^i, $D_{\lambda\mu}$, $D^i_\lambda = D^\lambda_i$, D^{ij} . Nous considérons une autre e.d.s., cette fois sur W' [1]

(37) $$dY_i = \hat{a}_{\lambda i}{}^j(X)Y_j dX^\lambda + \tfrac{1}{2}\hat{a}_{\lambda\mu i}{}^j(X)Y_j d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle$$

avec la même semimartingale directrice X. Notre problème est de choisir les coefficients $a_{i\lambda}{}^j$ et $\hat{a}_{i\lambda\mu}{}^j$ de telle sorte que, quelle que soient la semimartingale directrice et les données initiales, <u>la forme de dualité $Y^i_t Y_{it}$ garde une valeur constante</u>. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer l'énoncé suivant, très simple.

PROPOSITION 6. Les coefficients de l'e.d.s. << duale >> (37) sont uniquement déterminés, et l'on a explicitement

(38) $$\hat{a}_{\lambda i}{}^j + a^j_{i\lambda} = 0 \quad , \quad \hat{a}_{\lambda\mu i}{}^j + a^j_{i\lambda\mu} + a^k_{i\lambda}\hat{a}_{\mu k}{}^i + a^k_{i\mu}\hat{a}_{\lambda k}{}^i = 0$$

Maintenant, si l'on pense à la bijection entre connexions sur W satisfaisant aux conditions $(31)_{abc}$ et e.d.s. linéaires, on peut interpréter cette dualité entre e.d.s. comme une dualité entre connexions sur W et connexions sur W'. Introduisons les notations des symboles de Christoffel pour une connexion sur W' satisfaisant à $(31)_{abc}$

(39) $$\hat{\Gamma}(D_{\lambda\mu}) = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)D_\nu + \hat{\Gamma}_{i\lambda\mu}{}^j(x)y_j D^i \quad , \quad \hat{\Gamma}(D^{ij}) = 0 \text{ [1]}$$
$$\hat{\Gamma}(D^j_\lambda) = \hat{\Gamma}_{\lambda i}{}^j(x)D^i \text{ (on n'écrit pas les } D^\lambda_j \text{)}$$

et alors la relation de dualité entre deux connexions s'écrit

(40) $$\hat{\Gamma}_{\lambda i}{}^j + \Gamma^j_{i\lambda} = 0 \quad , \quad \hat{\Gamma}_{\lambda\mu i}{}^j + \Gamma^j_{i\lambda\mu} - \Gamma^k_{i\lambda}\Gamma^j_{k\mu} - \Gamma^k_{i\mu}\Gamma^j_{k\lambda} = 0 \ .$$

REMARQUE. Les Γ et les a vont en sens contraire dans $(31)_e$: une correction sur les $a^i_{j\lambda\mu}$ (sans toucher aux $a^i_{j\lambda}$) se retrouve avec le signe opposé sur les $\Gamma^i_{j\lambda\mu}$. D'après (38), elle se retrouve aussi avec le signe opposé sur les $\hat{a}$, et donc avec le <u>même</u> signe sur les $\hat{\Gamma}$.

D'autre part, la duale de l'équation de Stratonovitch

$(41)_a$ $$dY^i = Y^j a^i_{j\lambda}(X) * dX^\lambda$$

est l'équation de Stratonovitch

$(41)_b$ $$dY_i = -a^j_{i\lambda}(X)Y_j * dX^\lambda$$

1. La position bizarre des indices est destinée à éviter les confusions si l'on omet le ^.

A titre de curiosité, donnons les symboles de Christoffel des connexions importantes sur $T^*(V)$, correspondant à une connexion Γ donnée sur V. Il est peut être plus clair d'utiliser les notations de la mécanique, les coordonnées s'appelant q^λ et p_λ (ou encore mieux, q^λ et p_i, avec appariement entre les λ et les i). On a en omettant le $\hat{}$ sur Γ

$$(42)_a \qquad \Gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\right)=0 \ , \ \Gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial q^\lambda}\right) = -\Sigma_k \, \Gamma^{\hat{k}}_{\hat{i}\lambda}(q)\frac{\partial}{\partial p_k}$$

$$\Gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial q^\lambda \partial q^\mu}\right) = \Sigma_\nu \, \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(q)\frac{\partial}{\partial q^\nu} + \Sigma \ \Gamma_{\lambda\mu k}{}^{\ell}(q)p_\ell \frac{\partial}{\partial p_k}$$

Les seuls coefficients nouveaux sont donc les derniers , qui valent dans le cas de la connexion géodésique

$$(42)_b \qquad \overset{g}{\Gamma}_{\lambda\mu k}{}^{\ell} = -D_{\hat{k}}\Gamma^{\hat{\ell}}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\varepsilon}_{k\lambda}\Gamma^{\hat{\ell}}_{\varepsilon\mu}+\Gamma^{\varepsilon}_{k\mu}\Gamma^{\hat{\ell}}_{\varepsilon\lambda}$$

quant à ceux de la connexion parallèle, ou de Stratonovitch, on a $\overset{g}{\Gamma}_{\lambda\mu k}{}^{\ell} = \overset{p}{\Gamma}_{\lambda\mu k}{}^{\ell} + \frac{1}{2}(R^{\hat{\ell}}_{\lambda\mu\hat{k}}+R^{\hat{\ell}}_{\mu\lambda\hat{k}})$, avec le même signe pour la correction que dans (27).

AVERTISSEMENT. Par rapport à Bismut et Yano-Ishihara, notre Γ^p est leur Γ^H (détordue) sur T(V) et $T^*(V)$, notre Γ^g est leur Γ^C <u>sur</u> T(V) <u>seulement</u>. Leur connexion Γ^C sur $T^*(V)$ n'est pas la connexion duale, mais une troisième chose un peu bizarre. Ce n'est peut être pas la seule !

Je me suis amusé à calculer la dérivée covariante (dans la connexion géodésique) de la forme symplectique fondamentale $dp_\lambda \wedge dq^\lambda = \Omega$; pour un vecteur tangent X à $T^*(V)$ $X=x^\lambda D_\lambda + x_\lambda D^\lambda$, on a (sauf erreur)

$$\nabla_X \Omega = -\frac{1}{2}x^\lambda R^\eta_{\lambda\mu\nu}(q)p_\eta \, dq^\mu \wedge dq^\nu$$

Pour la connexion parallèle, la dérivée covariante est l'opposée de cette forme. Par conséquent, pour la connexion $\frac{1}{2}(\Gamma^p+\Gamma^g)$, la forme symplectique a une dérivée covariante nulle. Toute personne ayant un peu de foi symplectique pensera que c'est <u>la</u> bonne connexion à considérer .

On se trouve devant la situation habituelle en géométrie différentielle (non stochastique) : un foisonnement d'objets « intéressants » qu'il faut savoir écarter (en risquant d'écarter les bons).

6. E.D.S. PRODUIT ET CONNEXION ASSOCIEE

Encore des trivialités : si W^1 et W^2 sont des fibrés sur V, munis chacun d'une e.d.s. linéaire, nous pouvons chercher à construire, sur le fibré $W^1 \otimes W^2$, l'e.d.s. dont les solutions sont, pour chaque semimartingale directrice X, les produits $Y^1_t \otimes Y^2_t$ des solutions correspondant à X dans W^1 et W^2. Utilisant la bijection entre e.d.s. et connexions, on construit ainsi, en fait, une « connexion produit » sur $W^1 \otimes W^2$. Il y a bien sûr une propriété d'« associativité » . On peut aussi vérifier que le produit de deux e.d.s. de Stratonovitch est de Stratonovitch.

Faisons le calcul : nous prendrons des coordonnées (x^λ,y^i) sur W^1, des coordonnées (x^λ,y^u) sur W^2, l'utilisation de deux groupes distincts d'indices « latins » i,j,k... u,v,w... nous permettant la plupart du temps d'alléger les notations. Donnons nous nos deux e.d.s.

sur W^1 : $dY^i = a^i_{j\lambda}(X)Y^j dX^\lambda + \frac{1}{2}a^i_{j\lambda\mu}(X)Y^j d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle$

sur W^2 : $dY^u = a^u_{v\lambda}(X)Y^v dX^\lambda + \frac{1}{2}a^u_{v\lambda\mu}(X)Y^v d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle$

sur $W^1\otimes W^2$, muni des repères $D_{(iu)}=D_i\otimes D_u$, la semimartingale $Y^1_t\otimes Y^2_t$ a les coordonnées $Y^{iu}_t = Y^i_t Y^u_t$. Appliquant la formule d'intégration par parties, on trouve que celle-ci satisfait à l'e.d.s.

$$dY^{iu} = a^{iu}_{jv\lambda}(X)Y^{jv}dX^\lambda + \frac{1}{2}a^{iu}_{jv\lambda\mu}(X)Y^{jv}d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle$$

avec

$$(43)_a \qquad a^{iu}_{jv\lambda} = a^i_{j\lambda}\delta^u_v + \delta^i_j a^u_{v\lambda} \quad ; \quad a^{iu}_{jv\lambda\mu}=a^i_{j\lambda\mu}\delta^u_v+\delta^i_j a^u_{v\lambda\mu}+a^i_{j\lambda}a^u_{v\mu}+a^i_{j\mu}a^u_{v\lambda}$$

D'où une formule semblable (et tout aussi dépourvue d'intérêt) pour les symboles de Christoffel

$$(43)_b \qquad \Gamma^{iu}_{jv\lambda} = \Gamma^i_{j\lambda}+\Gamma^u_{v\lambda} \quad , \quad \Gamma^{iu}_{jv\lambda\mu} = \Gamma^i_{j\lambda\mu}+\Gamma^u_{v\lambda\mu} + \Gamma^i_{j\lambda}\Gamma^u_{v\mu}+\Gamma^i_{j\mu}\Gamma^u_{v\lambda}$$

Tout cela devrait nous permettre plus tard, en principe, de calculer les caractéristiques locales d'une semimartingale tensorielle. Mais en fait, dans les cas intéressants, les espaces que l'on considère sont des espaces de tenseurs T^r_s , produits tensoriels de r copies de T(V) et s copies de $T^*(V)$, et l'on procède autrement : le « transport » associé à l'e.d.s. définit un isomorphisme de $T_{X_0}(V)$ dans $T_{X_t}(V)$, où X est la semimartingale directrice ; il permet donc de transporter non seulement les vecteurs, mais les <u>repères</u>. Alors il est clair qu'il permet de transporter les <u>tenseurs</u>, en décidant que les composantes du tenseur transporté dans le repère transporté restent constantes. Ce transport est exactement celui que définit l'e.d.s. produit.

IV. CARACTERISTIQUES LOCALES D'UNE SEMIMARTINGALE VECTORIELLE

1. DEFINITION DES CARACTERISTIQUES LOCALES

Considérons d'abord une courbe différentiable x(t). Il n'y a aucune difficulté à définir la dérivation au premier ordre, qui nous donne le transport $(x(t),\dot{x}(t))$ dans T(V). Mais pour définir la dérivée d'une courbe vectorielle (c'est à dire d'un transport (x(t),u(t))), et en particulier la dérivée seconde d'une courbe x(t) dans V, sans monter dans les espaces tangents d'ordre supérieur, il nous faut utiliser une connexion.

Dans le cas des semimartingales, la nouveauté est la nécessité d'une connexion pour définir les dérivées <u>premières</u> :

DEFINITION. Soit X un processus à valeurs dans V munie de la connexion Γ. Nous dirons que X est <u>stochastiquement dérivable</u> si

- X est une semimartingale continue
- Les processus à variation finie $<X^\lambda,X^\mu>_t$ et A_t^λ ($A^\lambda = \tilde{X}^\lambda$ est le compensateur prévisible de X^λ) sont absolument continus par rapport à t, avec des densités $\xi_t^{\lambda\mu}$, α_t^λ .

On appelle alors <u>dérivée stochastique</u> de X_t à l'instant t le vecteur tangent $\Gamma(\xi_t^{\lambda\mu}D_{\lambda\mu}+\alpha_t^\lambda D_\lambda$) au point X_t . On le notera DX_t .

La dérivabilité stochastique ne dépend pas de la connexion, mais la dérivée stochastique en dépend. Formellement, on a $DX_t=\Gamma(d^2\tilde{X}_t)/dt$. Dans tous les cas traités ici, le processus (X_t,DX_t) admettra une version continue, qui sera même une semimartingale dans T(V) - il n'y aura donc pas d'ambiguïté quant à la définition de la dérivée stochastique.

D'un point de vue « physique », on peut dire que les quantités « mesurables » ou « observables » relativement à X sont ses caractéristiques locales, représentées par la forme bilinéaire $(\xi_t^{\lambda\mu})$ sur $T^*(V)$ et par la dérivée stochastique DX_t.

Le problème qui va nous occuper dans cette section consiste à définir la dérivée stochastique seconde, ou plus généralement la dérivée stochastique d'une semimartingale à valeurs dans T(V). Il nous faut pour cela une <u>connexion sur</u> T(V). Nous avons vu qu'il y a un certain arbitraire dans le choix d'une connexion sur T(V) relevant Γ ; notons provisoirement $\bar{\Gamma}$ ce relèvement[1], $(Z_t)=(X_t,U_t)$ la semimartingale à valeurs dans T(V) au dessus de (X_t). Supposant Z stochastiquement dérivable, le vt_2 de ses caractéristiques locales $d^2\tilde{Z}_t/dt$ est dans $\tau(T(V))$ au point Z_t , $\bar{\Gamma}$ le descend dans TT(V) au point Z_t de T(V), et $\Gamma\bar{\Gamma}$ le descend dans T(V) au point X_t : <u>c'est la dérivée stochastique cherchée</u>.

En fait, il est plus intéressant et plus clair de faire le calcul dans un fibré W, comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Nous considérons donc une semimartingale $(Z_t)=(X_t,U_t)$ à valeurs dans W. <u>Nous ne la supposons pas nécessairement dérivable</u>. Les vt_2 d^2Z_t, $d^2\tilde{Z}_t$ dans $\tau_{Z_t}(W)$ descendent par $\bar{\Gamma}$ en des vt_1 $\bar{\Gamma}(d^2Z_t)$, $\bar{\Gamma}(d^2\tilde{Z}_t)$ dans $T_{Z_t}(W)$. La connexion $\bar{\Gamma}$ nous permet de décomposer un vt_1 $v^\lambda D_\lambda + w^i D_i \in T_{x,u}(W)$ en une partie horizontale (relèvement horizontal de sa projection) $v^\lambda(D_\lambda - \Gamma_{j\lambda}^i y^j D_i)$ et une <u>partie verticale</u> ($w^i+u^j v^\lambda \Gamma_{j\lambda}^i)D_i$, qui s'identifie à un élément de W_x . On remarquera que la connaissance de la projection $v^\lambda D_\lambda$ et de la partie verticale détermine entièrement le vt_1 . Dans ces conditions, on posera

1. $\bar{\Gamma}$ sera en fait ou la connexion parallèle, ou la connexion géodésique.

(44)$_a$ $\underset{\sim}{d}X_t = \Gamma(d^2X_t)$, $\underset{\sim}{d}\tilde{X}_t = \Gamma(d^2\tilde{X}_t)$ (appartient à $T_{X_t}(V)$)
(c'est une bonne notation, on aurait dû l'utiliser plus tôt !), et

(44)$_b$ $\begin{matrix}\underset{\sim}{d}U_t \\ \underset{\sim}{d}\tilde{U}_t\end{matrix}$ = partie verticale de $\begin{matrix}\bar{\Gamma}(d^2Z_t) \\ \bar{\Gamma}(d^2\tilde{Z}_t)\end{matrix}$ (appartient à W_{X_t}) .

Lorsque W=T(V), et lorsque $\bar{\Gamma}$ est la connexion parallèle ou la connexion géodésique, l'e.d.s. au premier ordre est celle du transport parallèle, et on vérifie aussitôt que la partie verticale d'un élément $t = v^\lambda D_\lambda + w^\lambda D_{\hat{\lambda}}$ de $T_{x,u}(T(V))$ est bien le vt_1 que nous avons noté $\Gamma(t)$: en effet, l'image de t dans $\tau(V)$ est $w^\lambda D_\lambda + u^\mu v^\nu D_{\mu\nu}$, et en appliquant Γ on trouve bien $(w^\lambda + u^\mu v^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu})D_\lambda$. La définition dans W étend donc effectivement la définition donnée plus haut.

Puisque nous connaissons les symboles de Christoffel des connexions usuelles (parallèle, géodésique) sur T(V) ou $T^*(V)$, les calculs explicites sont à notre portée. Mais nous allons d'abord interpréter d'une autre manière la définition précédente.

2. INTERPRETATION AU MOYEN DU DEVELOPPEMENT

Nos notations sont les mêmes que toujours : le fibré W au dessus de V, l'e.d.s. (29), la connexion sur W associée par (31)$_{abcde}$ - nous la noterons simplement Γ. Nous écrirons (29) sous forme matricielle

(45) $$dY^i_t = (dC^i_{jt})Y^j_t \qquad C^i_{jt} = \int_0^t a^i_{j\lambda}(X_s)dX^\lambda_s + \tfrac{1}{2}a^i_{j\lambda\mu}(X_s)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_s$$

Soit M_t la solution de l'équation matricielle
$$M_t = I + \int_0^t dC_s M_s$$

M_t est la matrice de l'application de $T_{X_0}(V)$ dans $T_{X_t}(V)$ définie par le «transport » (29), application que nous noterons Φ_t , et l'on a $U_t = \Phi_t U_0$. Il est bien connu que Φ_t est inversible, et la matrice $N_t = M_t^{-1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante

(46) $$N_t = I + \int_0^t N_s(-dC_s + \langle C,C\rangle_s)$$

(Cette jolie formule est due à Karandikar, dans ce volume[1]).

Nous désignerons par H_t la semimartingale $\Phi_t^{-1}(U_t)$ à valeurs dans W_{X_0} : on l'appelle le <u>développement</u> de Z dans W_{X_0} . Comme c'est une semimartingale dans un espace vectoriel, on peut considérer directement dH_t ou $d\tilde{H}_t$ comme des vecteurs (si l'on veut, cela revient à descendre d^2H_t ou $d^2\tilde{H}_t$ par la connexion triviale de l'espace vectoriel !). On a alors le théorème suivant, essentiellement dû à Bismut :

THEOREME 7. Soit $(Z_t)=(X_t,U_t)$ une semimartingale dans V (avec X_0=x pour simplifier). Alors on a dans W_{X_t}

(47) $$\underset{\sim}{d}U_t = \Phi_t(dH_t) \ , \quad \underset{\sim}{d}\tilde{U}_t = \Phi_t(d\tilde{H}_t) \quad \text{(cf. (44)}_b\text{)} .$$

1. Elle figure aussi (sous une forme moins générale) chez Bismut, sém. XII p. 194.

COROLLAIRE 8. Z est une martingale dans W (muni de la connexion relevée Γ) si et seulement si X est une martingale dans V, et H une martingale locale dans W_{x_0} au sens usuel.

[Cela étend le théorème 5 : celui-ci caractérise la connexion relevée par le fait que, si X est une martingale dans V et H est constante, alors (X,U) est une martingale dans W].

DEMONSTRATION. C'est un calcul. On écrit

$$d^2Z = dX^\lambda D_\lambda + dU^i D_i + \frac{1}{2}d\langle X^\mu,X^\nu\rangle D_{\mu\nu} + d\langle U^j,X^\mu\rangle D_{j\mu} + \frac{1}{2}d\langle U^j,U^k\rangle D_{jk}$$

ensuite

$$\Gamma(d^2Z) = (dX^\lambda + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X)d\langle X^\mu,X^\nu\rangle)D_\lambda + (dU^i + \Gamma^i_{j\lambda}(X)d\langle U^j,X^\lambda\rangle + \frac{1}{2}\Gamma^i_{\mu\nu}(X,U)d\langle X^\mu,X^\nu\rangle)D_i$$

dont la partie horizontale est

$$(dX^\lambda + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X)d\langle X^\mu,X^\nu\rangle)(D_\lambda - \Gamma^i_{j\lambda}U^j D_i) \text{ (rel}^t\text{ horizontal de la projection)}$$

et par conséquent la partie verticale vaut

$$(48)_a \qquad dU^i + \Gamma^i_{j\lambda}(X)U^j dX^\lambda + \Gamma^i_{j\lambda}(X)d\langle X^\lambda,U^j\rangle + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{\mu\nu}(X,U) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X)\Gamma^i_{j\lambda}(X)U^j)d\langle X^\mu,X^\nu\rangle$$

On a d'autre part, d'après (46), comme $H_t = N_t U_t$

$$dH = dN\,U + N\,dU + \langle dN,dU\rangle = N(-dC + d\langle C,C\rangle)U + NdU + N\langle -dC,dU\rangle$$

d'où la quantité qui nous intéresse

$$MdH = dU - d\langle C,U\rangle + (d\langle C,C\rangle - dC)U$$

explicitons la i-ième composante du second membre :

$$(48)_b \qquad dU^i - a^i_{j\lambda}(X)d\langle U^j,X^\lambda\rangle - a^i_{j\lambda}(X)U^j dX^\lambda - \frac{1}{2}a^i_{j\mu\nu}(X)U^j d\langle X^\mu,X^\nu\rangle + a^i_{k\mu}(X)a^k_{j\nu}(X)U^j d\langle X^\mu,X^\nu\rangle$$

(ce dernier terme n'est pas correctement écrit : il reste à le symétriser en μ et ν). Reportons nous maintenant aux expressions (31) des symboles de Christoffel, pour vérifier que $(48)_a = (48)_b$.

Le calcul avec les ~ est le même. Quant au corollaire : Z est une martingale dans W si et seulement si $\Gamma(d^2\tilde{Z}_t)=0$, ce qui revient à annuler sa partie horizontale, relèvement horizontal de $d\tilde{X}_t$, et sa partie verticale $d\tilde{U}_t$. On utilise enfin le fait que Φ_t est un isomorphisme.

Le mot << développement >> a été aussi utilisé dans le sém. XV, p.92. Le sens est différent : c'est X et non (X,U) que l'on développait alors dans $T_{x_0}(V)$, en utilisant le transport parallèle. Nous revenons sur cet autre << développement >> dans les toutes dernières lignes de l'exposé.

3. CALCULS EXPLICITES

Nous considérons une semimartingale à valeurs dans $T(V)$, de la forme $(X_t,K(X_t))$ - ou $(X_t, K(t,X_t))$ - où K est un champ de vecteurs C^∞ sur V (dépendant du temps dans le second cas). Nous allons calculer les caractéristiques locales de cette semimartingale, dans la connexion parallèle ou géodésique.

Nous utilisons les notations précédentes : $U_t=K(X_t)$, $Z_t=(X_t,U_t)$.

THEOREME 9. Dans la connexion parallèle, on a

$$(49)_a \qquad \underset{\leadsto}{d}U_t = \nabla_{D_\lambda}K(X_t)dX_t^\lambda + \tfrac{1}{2}\nabla_{D_\lambda}\nabla_{D_\mu}K(X_t)d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t$$

et la formule analogue vaut pour $\underset{\leadsto}{d}\tilde{U}_t$, à condition de mettre $d\tilde{X}_t^\lambda$ du côté droit. Si K dépend du temps, ajouter un terme $\dot{K}(X_t)dt$, où $\dot{K}$ est la dérivée de K par rapport au temps.

Dans la connexion géodésique, il faut ajouter à $(49)_a$ le terme supplémentaire (attention au signe !)

$$(49)_b \qquad -\tfrac{1}{2}d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t R^\nu_{\lambda\mu\eta}(X_t)K^\eta(X_t)D_\nu$$

Avant de démontrer ce théorème, qui revient à un pur calcul, nous allons le commenter.

REMARQUES. a) La formule $(49)_a$ est vraie pour toutes les équations du type de Stratonovitch sur tous les fibrés :

$$dY^i = a^i_{j\lambda}(X)Y^j{*}dX^\lambda$$

à condition d'interpréter K comme une <u>section</u> de W, et ∇_{D_λ} comme l'opérateur

$$(50) \qquad \nabla_{D_\lambda}K = (D_\lambda K^i+K^j\Gamma^i_{j\lambda})D_i \ , \ \Gamma^i_{j\lambda}=-a^i_{j\lambda}$$

(l'opérateur de "dérivée covariante" $\nabla_\xi K$ porte sur les sections de W, et son indice ξ est un champ de vecteurs sur V). De même, $(49)_b$ s'étend à un fibré de la manière suivante : à la correction sur l'e.d.s.

$$dY^i = a^i_{j\lambda}(X)Y^j{*}dX^\lambda + \tfrac{1}{2}c^i_{j\lambda\mu}(X)Y^jd\langle X^\lambda,X^\mu\rangle$$

correspond sur les caractéristiques de la semimartingale Z_t une correction <u>opposée</u>

$$-\tfrac{1}{2}d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle K^j(X)c^i_{j\lambda\mu}(X)D_i$$

b) Du côté gauche de $(49)_a$, il n'y a pas de coordonnées, tandis que du côté droit il y en a. Cela signifie encore que l'expression

$$\nabla_{D_\lambda}Kdx^\lambda + \nabla_{D_\lambda}\nabla_{D_\mu}K\,dx^\lambda.dx^\mu$$

peut être considérée comme une forme d'ordre 2 à valeurs dans W (notion que nous nous gardons bien de développer).

c) Supposons que X soit le mouvement brownien d'une variété riemannienne. Alors on a $d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_t = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(X_t)dt$, $d\tilde{X}_t^\lambda=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X_t)dt$,et l'on a simplement

(51)$_a$ $\qquad \underset{\sim}{d}U_t = \frac{1}{2}\Delta K(X_t)dt \qquad$ où $\Delta = g^{\lambda\mu}(\nabla_{D_\lambda}\nabla_{D_\mu} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\nabla_{D_\nu})$ (tr. parallèle)

Δ est appelé le <u>laplacien horizontal</u> (dans les livres de calcul tensoriel, on trouvera souvent écrit $\Delta = \nabla^\lambda\nabla_\lambda$ ou $g^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\nabla_\mu$; il s'agit bien du même opérateur, malgré l'apparence : ∇_λ ne signifie pas ∇_{D_λ}). On a donc aussi pour le transport géodésique

(51)$_b$ $\qquad \underset{\sim}{d}U_t = \frac{1}{2}\square K(X_t) \qquad$ avec $\square K^i = \Delta K^i - g^{\lambda\mu}K^j R^i_{\lambda\mu j}$ (tr. géodésique).

opérateur connu sous le nom de <u>laplacien de de Rham</u> (certains probabilistes l'appellent « Laplacien de Durham », mais c'est une erreur). A vrai dire, on considère plus souvent ce laplacien sur les formes que sur les champs (et sur les formes, la correction de courbure est de signe opposé).

DEMONSTRATION DU TH. 9. Pour démontrer (49)$_a$, nous poursuivons un peu plus loin le calcul (48)$_a$, en remplaçant U_t par sa valeur $K(X_t)$. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{d}U^i_t &= D_\lambda K^i(X_t)dX^\lambda_t + \tfrac{1}{2}D_{\lambda\mu}K^i(X_t)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle \\ &+ \Gamma^i_{j\lambda}(X_t)K^j(X_t)dX^\lambda_t \\ &+ D_\mu K^j(X_t)\Gamma^i_{j\lambda}(X_t)d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t \\ &+ \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{\mu\nu}(X,K(X)) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X)\Gamma^i_{j\lambda}(X)K^j(X))_t d\langle X^\mu, X^\nu\rangle_t\end{aligned}$$

Maintenant nous remplaçons les symboles de Christoffel par leur valeur, tirée de (31)$_{abcde}$. Les seuls qui doivent être vraiment explicités sont les $\Gamma^i_{\mu\nu}(X_t, K(X_t))$, que nous tirons de (32), mais en les simplifiant pour le calcul grâce à la symétrie de $d\langle X^\mu, X^\nu\rangle$: on les remplace par

$$K^j(\Gamma^k_{j\mu}\Gamma^i_{k\nu} + D_\mu\Gamma^i_{j\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^i_{j\nu})$$

Nous avons d'autre part

$$\nabla_{D_\lambda}K^i = D_\lambda K^i + K^j\Gamma^i_{j\lambda} \quad , \quad \nabla_{D_\mu}\nabla_{D_\lambda}K^i = D_\mu(D_\lambda K^i + K^j\Gamma^i_{j\lambda}) + (D_\lambda K^h + K^j\Gamma^h_{j\lambda})\Gamma^i_{h\mu}$$

et alors la vérification de (49)$_a$ n'exige plus qu'une feuille de papier blanc et un crayon (ou une plage de sable fin et une huître). Si K dépend du temps, il y a un terme $\dot{K}(t,X_t)dt$ de plus dans la formule ci-dessus. Nous n'avons aucune modification à apporter au raisonnement pour établir la remarque a). Pour obtenir la correction (49)$_b$, il nous faut seulement remarquer que la correction change de signe en passant de l'e.d.s. aux symboles de Christoffel. Enfin, le même raisonnement s'applique avec des ~ sur les $\underset{\sim}{d}\tilde{U}$ et $d\tilde{X}$.

Revenons à la formule (47) et au théorème 7 : tout résultat sur les $\underset{\sim}{d}K(X_t)$ peut s'interpréter comme un résultat sur le développement dans W_{X_0} de la semimartingale $(X_t, K(X_t))$. Nous noterons $H(K)_t$ ce développement. La formule (49)$_a$, étendue à toutes les équations de Stratonovitch, s'interprète alors ainsi :

COROLLAIRE 10. Considérons une équation linéaire de Stratonovitch à valeurs dans W

$(52)_a$ $$dY^i = a^i_{j\lambda}(X)Y^j * dX^\lambda$$

et définissons la dérivée covariante $\nabla_\xi K$ d'une section K de W suivant un champ de vecteurs ξ sur V par la formule

$(52)_b$ $$\nabla_\xi D^i = \xi^\lambda(D_\lambda K^i - K^j a^i_{j\lambda})D_i$$

Alors le développement dans W_{X_0} de la semimartingale $(X_t, K(X_t))$, noté $H(K)_t$, satisfait à

$(52)_c$ $$H(K)_t = K(X_0) + \int_0^t H(\nabla_{D_\lambda}K)_s dX^\lambda_s + \tfrac{1}{2}H(\nabla_{D_\lambda}\nabla_{D_\mu}K)_s d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_s$$

COMMENTAIRE. Jusqu'à maintenant, X a toujours été une semimartingale prise individuellement, mais on peut aussi prendre pour X le flot d'une e.d.s. sur V (X est une fonction des trois variables (t,ω,x), dépend de x de manière C^∞, et l'on a $X(0,\omega,x)=x$). Dans ces conditions

pour tout x, $H(K)_t$ calculé le long de $X(.,.,x)$ appartient à W_x ; notons le $\bar{K}(t,\omega,x)$. Alors $x \mapsto \bar{K}(t,\omega,x)$ est une nouvelle section $\bar{K}(t,\omega)$ de W. Si les coefficients $a^i_{j\lambda}$ sont assez réguliers, on saura que cette section peut être choisie aussi différentiable que K elle même. Enfin, on a $\bar{K}(0,\omega)=K$.

Ainsi un flot sur la base et une e.d.s. linéaire déterminent un "flot sur les sections de W" (cela n'est pas restreint aux équations de Stratonovitch !).

Mais W_x est un espace vectoriel pour tout x. Sous des conditions à étudier, on peut intégrer une v.a. à valeurs dans W_x . Dans $\bar{K}(t,\omega)$, l'intégration efface ω, et il reste une opération déterministe sur les sections. Nous noterons P_tK cette intégrale, parce que dans beaucoup de cas ces opérations forment un semi-groupe. En particulier, supposons que $X_t(\omega,x)$ soit, pour tout x, une diffusion de générateur $L=c^\lambda D_\lambda + c^{\lambda\mu}D_{\lambda\mu}$; la formule $(52)_c$ va nous donner - à condition que l'intégration soit légitime, toujours

(53) $$P_tK = K + \int_0^t P_s(c^\lambda\nabla_{D_\lambda}K + c^{\lambda\mu}\nabla_{D_\lambda}\nabla_{D_\mu}K)\, ds$$

qui permet d'obtenir le << générateur infinitésimal >> de (P_t). Pour le transport parallèle stochastique au dessus du mouvement brownien, on remonte là aux débuts mêmes de la géométrie différentielle stochastique, avec les travaux de Ito, Dynkin, Gangolli...

4. EXTENSION AUX SEMIMARTINGALES TENSORIELLES

Considérons une e.d.s. linéaire dans W, éventuellement avec correction :

$$(54)_a \qquad dY^i = a^i_{j\lambda}(X)Y^j{*}dX^\lambda + \tfrac{1}{2}c^i_{\lambda\mu j}(X)Y^j d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle$$

Les résultats du corollaire 10 restent valables, à condition d'ajouter à $(52)_c$ le terme correctif

$$(54)_b \qquad \tfrac{1}{2}\int_0^t H(C_{\lambda\mu}K)_s d\langle X^\lambda,X^\mu\rangle_s \qquad \text{où } C_{\lambda\mu}K^i = -c^i_{\lambda\mu j}K^j$$

Cela vaut pour tout fibré W. Nous nous demandons maintenant comment se comportent les opérations $\nabla_\xi K$ et $C_{\lambda\mu}K$ lorsqu'on fait, sur les e.d.s., les deux opérations vues au § III : passage à l'e.d.s. duale, produit tensoriel. Cela nous permettra de calculer, dans le cas du transport parallèle et du transport géodésique, les caractéristiques locales de semi-martingales tensorielles.

Le passage au dual est immédiat : remplacement des $a^i_{j\lambda}$ et $c^i_{\lambda\mu j}$ par leurs opposés. Le passage au produit tensoriel est donné par le lemme suivant :

LEMME 11. Soit $W=W^1\otimes W^2$; on se donne sur chaque W^i une e.d.s. linéaire, et on munit W de l'e.d.s. produit. Alors

$$\nabla_\xi(K^1\otimes K^2) = (\nabla^1_\xi K^1)\otimes K^2 + K^1\otimes(\nabla^2_\xi K^2)$$

$$C_{\lambda\mu}(K^1\otimes K^2) = (C^1_{\lambda\mu}K^1)\otimes K^2 + K^1\otimes(C^2_{\lambda\mu}K^2).$$

DEMONSTRATION. Formules $(43)_b$!

Avec les formules $\nabla_\xi(fK) = \langle\xi,df\rangle K + f\nabla_\xi K$, $C_{\lambda\mu}(fK)=fC_{\lambda\mu}K$ en plus de celles-ci, on a exprimé toutes les règles de calcul.

COMMENTAIRES. Dans le cas du transport parallèle et du transport géodésique, ces règles entraînent que l'opérateur V_ξ <u>est bien l'opérateur de dérivation covariante de la géométrie différentielle</u>.

En particulier, la formule $(49)_a$ ou $(52)_c$, pour le transport parallèle, <u>reste vraie pour les semimartingales tensorielles</u>. Dans le cas où X est le mouvement brownien, ce résultat est dû à Dynkin.

En revanche, dans le cas du transport géodésique, la correction au transport parallèle <u>n'est pas</u> celle qui fait passer du laplacien horizontal au laplacien de de Rham, dans le cas des p-formes, $p>1$ (et du mouvement brownien) Si l'on regarde dans les traités de géométrie différentielle la « formule de Weitzenböck » qui relie ces deux laplaciens, elle comporte un dernier terme pour $p\geq 2$, qui est « de trop ». D'ailleurs, si l'on avait pour tous les p la relation entre laplacien de de Rham et transport géodésique, le produit extérieur de deux formes harmoniques serait harmonique, ce qui n'est pas.

V. LA << MECANIQUE STOCHASTIQUE >> DE NELSON

Dans ce paragraphe (qui utilise beaucoup de formules sans démonstration et omet bien des détails), nous présentons d'après Dankel [2] et Dohrn-Guerra [3], l'application du théorème 9 à la << mécanique stochastique de Nelson >> dans les variétés.

1. CALCUL SUR LES CHAMPS DE VECTEURS

Nous nous plaçons sur une variété riemannienne V, et nous allons utiliser un peu de calcul extérieur sur les champs de vecteurs et de 2-vecteurs, ce qui est sans doute moins familier aux géomètres que le calcul sur les formes, mais plus familier aux non-géomètres, qui ont au moins un souvenir des cours de premier cycle.

Nous rappelons d'abord que le produit scalaire permet d'identifier formes et vecteurs : nous désignerons par h° la forme (le vecteur) obtenue en faisant passer de l'autre côté le vecteur (la forme) h . Ainsi $h^{\circ\circ}=h$. De même pour les 2-formes. Si f est une fonction, nous posons

$$\operatorname{grad} f = (df)^{\circ}$$

si h est un champ de 1-vecteurs, nous posons

$$\operatorname{rot} h = (dh^{\circ})^{\circ}$$

Nous le calculerons tout à l'heure. Sur les formes, on a aussi une codifférentielle δ . Nous poserons pour un champ de vecteurs h

$$\operatorname{div} h = -\delta(h^{\circ}) \qquad \text{(une fonction)}$$

et pour un champ de 2-vecteurs k

$$\operatorname{tor} k = -(\delta(k^{\circ}))^{\circ} \quad \text{(un champ de vecteurs)}^{(1)} .$$

(on écrit tor, parce qu'il va en sens contraire de rot. Les anglais l'appellent lurc). Enfin, si h est un champ de vecteurs, k un champ de 2-vecteurs, nous noterons $h\cdot k$ le champ de vecteurs obtenu en contractant le 1er indice de k avec la forme h° (ou : $g\cdot(h\cdot k)=(g\wedge h)\cdot k$)

Pour le calcul, maintenant : de même que la différentielle est très simple sur les formes, la codifférentielle est simple sur les champs : par exemple, sur un champ de vecteurs

$$\operatorname{div} h = D_{\lambda}h^{\lambda} + h^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \quad \text{(c'est la trace de } X\mapsto \nabla_X h \text{)}$$

et la métrique n'y apparaît pas explicitement. D'une manière générale, la codifférentielle ou divergence se calcule sur un tenseur T en formant $\nabla_{\bullet}T$ (c'est à dire $X\mapsto\nabla_X T$) qui a un indice covariant en tête, et en le contractant avec le premier indice de T. C'est un opérateur de carré nul sur les champs de p-vecteurs, comme on peut le voir soit en le ramenant à dd=0 grâce à la métrique, soit (mieux) comme le fait Nelson dans << Tensor Analysis >>, pour toute connexion à Ricci symétrique.

1. Nous n'utilisons presque pas cet opérateur.

Quant à rot h , c'est le bivecteur $\nabla^\lambda h^\mu\, D_\lambda \wedge D_\mu$, en posant $\nabla^\lambda h^\mu = g^{\lambda\varepsilon}\nabla_{D_\varepsilon} h^\mu$

Notons maintenant, sans démonstration, les formules de calcul vectoriel dont nous aurons besoin

$(55)_a$ $\Delta f = \mathrm{divgrad} f$ (fonction) , $\Box h = \mathrm{grad\,div}\, h + \mathrm{tor\,rot}\, h$ (champ) (laplacien de de Rham)

$(55)_b$ $\mathrm{div}(fh) = f\mathrm{div}h + \mathrm{grad}f.h$

$(55)_c$ $\frac{1}{2}\mathrm{grad}|h|^2 = \nabla_h h + h\cdot \mathrm{rot}\, h$

et bien entendu, les formules rot grad =0,... correspondant à $d^2=0$ ou $\delta^2=0$.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant : si h est un champ à support compact, div h a toujours une intégrale nulle par rapport à la mesure riemannienne r(dx). Il en résulte sans peine que

$(55)_d$ $\int f(h\cdot \mathrm{grad} g)r = -\int g\, \mathrm{div}(fh) r$ si fgh est à support compact

autrement dit, l'adjoint formel de l'opérateur $h = h^\lambda D_\lambda$ est l'opérateur $f \mapsto -\mathrm{div}(fh)$. On en déduit aussi que $\int f\Delta g\, r = \int g\Delta f\, r$.

2. UNE FORMULE DE MECANIQUE CLASSIQUE

Nous nous donnons sur V un potentiel scalaire p et un potentiel-vecteur a (i.e. une fonction p(t,x), un champ a(t,x)). Nous désignons par η la forme associée a°, et nous considérons une courbe $x(t)$ qui satisfait aux équations de Lagrange :

(56) $\left(\frac{d}{dt}D_{\hat\lambda}T - D_\lambda T\right)\xi^\lambda = \left(\frac{d}{dt}D_{\hat\lambda}\underset{\sim}{V} - D_\lambda \underset{\sim}{V}\right)\xi^\lambda$ le long du transport $(x_t, \dot x_t)$

avec les notations suivantes : les coordonnées sur T(V) s'appellent x^λ et $x^{\hat\lambda} = dx^\lambda$ (les q^λ et $\dot q^\lambda$ de la mécanique) ; T est la « force vive», i.e. la fonction $\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}(x)x^{\hat\lambda}x^{\hat\mu}$ sur T(V) ; $\underset{\sim}{V}$ est la fonction sur T(V)

$$\underset{\sim}{V} = p(t,x) - \eta_\lambda(t,x)x^{\hat\lambda} \text{ (1)}$$

Enfin $\xi = \xi^\lambda D_\lambda$ est un champ de vecteurs arbitraire sur V. Nous avons vu dans le Sém. XV, p. 65-66, que le côté gauche est égal à $\Gamma(\ddot x)\cdot\xi$, où $\ddot x$ est le vt_2 accélération et Γ est la connexion riemannienne. Du côté droit, on doit donc avoir $F\cdot\xi$, où F est le vecteur force. Or le calcul fait du côté droit montre qu'il vaut

$$-\langle \xi, \dot\eta + dp\rangle + \langle \xi\wedge\dot x , d\eta\rangle = \langle -\dot\eta - dp + i(\dot x)d\eta , \xi\rangle$$

où $d\eta$ est la différentielle extérieure, $i(\dot x)$ un produit intérieur. Repassant du côté des vecteurs, nous trouvons l'expression classique de la force

(57) $$-\dot a - \mathrm{grad}\, p + \dot x\cdot \mathrm{rot}\, a = F(t,x,\dot x) .$$

1. Les signes sont conformes (sauf erreur) à l'usage général en électromagnétisme.

3. UNE EQUATION DE SCHRÖDINGER

La traduction de (56) en mécanique quantique non relativiste est l'équation de Schrödinger

(58) $$i\dot{\psi} = H\psi = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \dot{V}\psi$$

où l'on a posé

$(58)_a$ $$\psi(t,x) = e^{R(t,x)+iS(t,x)} = \sqrt{\rho(t,x)}\, e^{iS(t,x)}$$

H étant l'opérateur

$(58)_b$ $$H\psi = \frac{1}{2}(-\mathrm{div} + ia\cdot)(\mathrm{grad} - ia)\psi + p\psi$$

(la première parenthèse fournit un champ de vecteurs, dont la seconde parenthèse refait un scalaire). Ecrivons cela de manière explicite, en utilisant un certain nombre de fois la formule $\Delta(e^f)=e^f(\Delta f+\mathrm{grad}^2 f)$(1). Elle s'écrit $(59)_a=(59)_b$, où

$(59)_a$ $$\frac{2}{\psi}(i\dot{\psi}+ \frac{1}{2}\Delta\psi) = (\Delta R-2\dot{S}+\mathrm{grad}^2R-\mathrm{grad}^2S)+i(\Delta S+2\dot{R}+2\mathrm{grad}R.\mathrm{grad}S)$$

$(59)_b$ $$\frac{2}{\psi}\dot{V}\psi = (2p+|a|^2-2a\cdot\mathrm{grad}S)+i(\mathrm{div}\, a + 2a.\mathrm{grad}R).$$

Nous allons faire subir à ces équations une transformation d'apparence inexplicable, destinée à faire reparaître la <u>force classique</u> (57). Nous introduisons deux champs de vecteurs (dépendant du temps)

(60) $$u = \mathrm{grad}\, R \;, \quad v = \mathrm{grad}\, S - a$$

Les relations obtenues en égalant parties réelles et imaginaires dans $(59)_a=(59)_b$ s'écrivent maintenant (cela exprime complètement (58) !)

$(61)_a$ $$\dot{R} + \frac{1}{2}\mathrm{div}\, v + u.v = 0$$

$(61)_b$ $$\dot{S} - \frac{1}{2}\mathrm{div}\, u+ \frac{1}{2}(|v|^2-|u|^2) + p = 0$$

(ou si l'on pose R+iS=T , v-iu=w : $\dot{T}+ \frac{1}{2}(\mathrm{div}\, w -iw.w)+ip = 0$) . Notons aussi que les relations $\rho=e^{2R}$ et $(61)_a$ nous permettent d'écrire les formules assez symétriques

$(62)_a$ $$\frac{1}{2}\Delta\rho - \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$(62)_b$ $$\dot{\rho} + \mathrm{div}(\rho v) = 0$$

Pour faire apparaître la force classique, nous appliquons grad aux deux côtés de $(61)_b$. Comme u=grad R, $(55)_a$ nous donne $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u = \Box u$, et $(55)_c$ $\mathrm{grad}|u|^2 = 2\nabla_u u$, $\mathrm{grad}|v|^2=2\nabla_v v+2v.\mathrm{rot}\, v = 2\nabla_v v-2v.\mathrm{rot}\, a$, d'où nous tirons

$(63)_a$ $$\dot{v} - \frac{1}{2}\Box u + \nabla_v v-\nabla_u u = -\mathrm{grad}\, p - \dot{a} + v.\mathrm{rot}\, a = F(x,t,v)$$

Par symétrie, nous ferons la même chose sur $(61)_a$. Nous évaluons grad div v par la seconde formule $(55)_a$, et utilisons la relation

1. Si L est un opérateur d'ordre 2, et L(f,g)=L(fg)-gLf-fLg, on a $L(e^f)=e^f(Lf+\frac{1}{2}L(f,f))$: le vérifier pour les D_λ et $D_{\lambda\mu}$.

Prenons un grad des deux côtés. Nous évaluons grad div v par la seconde formule $(55)_a$, et utilisons le fait que rot v = -rot a (60). Nous évaluons grad(u.v) par la formule $(55)_c$, et arrangeons les choses de manière que la formule ressemble autant que possible à $(63)_a$ (on utilise aussi la formule rot u=0 dans la transformation)

$$(63)_b \qquad \dot{u} + \tfrac{1}{2}\square v + \nabla_u v + \nabla_v u = -\tfrac{1}{2}\mathrm{torrot}\,a + u.\mathrm{rot}\,a = G(t,x,u)$$

Inversement, Dankel a montré (après Nelson) comment, de deux solutions des équations d'évolution non linéaires (63), on peut déduire des solutions de l'équation de Schrödinger (58).

Il n'est pas étonnant que l'on ait une jolie formule en posant w=v-iu (le - nous conviendra un peu plus loin). On a

$$(63)_c \qquad \dot{w} - \tfrac{i}{2}\square w + \nabla_w w = F-iG$$

4. INTERPRETATION PROBABILISTE

Donnons nous sur un intervalle de temps $[t_0,t_1]$ une diffusion (X_t) à valeurs dans V, admettant un générateur infinitésimal (dépendant du temps) de la forme

$$(64) \qquad L_t = \tfrac{1}{2}\Delta + b_t^\lambda D_\lambda \quad \text{où } b(t,x) \text{ est un champ } C^\infty \text{ dépendant de } t$$

- L'existence d'un tel processus n'est pas évidente, même si b=0 !

Désignons par $\rho(x,t)$ la densité de la loi de X_t par rapport à la mesure riemannienne r(dx). Nous avons pour $f\in C_c^\infty$

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\rho(x,t)r(dx) = \frac{d}{dt}E[f\circ X_t] = E[L_t f\circ X_t] = \int L_t f\rho(x,t)r(dx)$$

D'où l'on déduit en passant à l'adjoint (on verra une autre méthode plus tard)

$$(65)_a \qquad \dot{\rho} = \tfrac{1}{2}\Delta\rho - \mathrm{div}(\rho b) \;.$$

Il est « bien connu » que si l'on regarde la diffusion dans l'autre sens, on a encore une diffusion $(\hat{X}_t)$, dont le générateur $\hat{L}_t$ a même forme bilinéaire associée que L_t (invariance des crochets par retournement du temps). Nous poserons donc

$$(66) \qquad \hat{L}_t = \tfrac{1}{2}\Delta - \hat{b}_t^\lambda D_\lambda$$

et nous aurons d'après (65) vu dans l'autre sens

$$(65)_b \qquad -\dot{\rho} = \tfrac{1}{2}\Delta\rho + \mathrm{div}(\rho\hat{b})$$

d'où en posant $u=\frac{1}{2}(b-\hat{b})$, $v=\frac{1}{2}(b+\hat{b})$

$$(67) \qquad \tfrac{1}{2}\Delta\rho = \mathrm{div}(\rho u) \;,\quad \dot{\rho} = -\mathrm{div}(\rho v)$$

On a trouvé une interprétation de $(61)_a$ et $(61)_b$. Puisque Δ est un opérateur de dérive nulle dans la connexion riemannienne, b_t est la dérive de L_t, autrement dit $b(t,X_t)$ est la dérivée stochastique DX_t . De même, $-\hat{b}(t,X_t)$ est la dérivée stochastique de X dans l'autre sens du temps, et nous pouvons dire que $\hat{b}(t,X_t)$ est la dérivée stochastique de X, dans

b_t est la dérive de L_t , autrement dit $b(X_t,t)$ est la dérivée stochastique DX_t . De même, $-\hat{b}(\hat{X}_t,\hat{t})$ est la dérivée stochastique de $\hat{X}_t$ dans l'autre sens du temps, donc $+\hat{b}(X_t,t)$ s'interprète comme une dérivée stochastique $\hat{D}X_t$ de X calculée dans le bon sens du temps, mais avec conditionnement par rapport au futur . On voit que $v(X_t,t)$ est la vitesse symétrique $\frac{1}{2}(D+\hat{D})X_t$.

Nous pouvons faire la même chose pour des champs de vecteurs : si $c(x,t)$ est un champs de vecteurs dépendant du temps, la vitesse stochastique vers l'avant s'écrit $C(X_t,t)$, où

$$(68)_a \qquad C = \frac{1}{2}\square c + \dot{c} + \nabla_b c \qquad (\text{ théorème } 9)$$

(calcul au moyen du transport géodésique vers l'avant), et la vitesse stochastique vers l'arrière est $\hat{C}(X_t,t)$

$$(68)_b \qquad \hat{C} = -\frac{1}{2}\square c + \dot{c} + \nabla_{\hat{b}} c$$

(transport géodésique vers l'arrière et changement du sens du temps : le transport géodésique est irréversible !). La formule $(63)_a$ s'écrit alors de la manière suivante (<< loi de Newton stochastique >>)

$$(69) \qquad \frac{1}{2}(D\hat{D}+\hat{D}D)X_t = F(X_t,t,\ \frac{1}{2}(D+\hat{D})X_t)$$

Le côté gauche est l'accélération stochastique de Nelson,[1] le côté droit la force classique, où la vitesse a été remplacée par la vitesse stochastique (symétrique). La formule $(63)_b$ n'a aucune expression évidente au moyen de D et $\hat{D}$, mais ce n'est pas nécessaire : l'équation est complètement exprimée par les relations $u = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\log\rho$, $\dot{\rho}+\mathrm{div}(\rho v)=0$, et (69).

5. APPLICATION DU THEOREME DE GIRSANOV

Nous introduisons maintenant les formes $\beta=b^\circ$, $\hat{\beta}=\hat{b}^\circ$, $u^\circ,v^\circ\ldots$,sur V, dépendant de t ; nous allons leur chercher une interprétation probabiliste.

Soit P la loi de la diffusion sur l'espace $\Omega=\underline{\underline{C}}([t_0,t_1],V)$ (avec ses applications coordonnées X_t, et sa filtration naturelle). Soit Q la << loi >> du mouvement brownien à valeurs dans V, admettant pour mesure initiale la mesure riemannienne r(dx). Rappelons (Sém. XV, p. 67, formule (35)) la formule d'Ikeda-Manabe, suivant laquelle pour toute forme α sur V (ne dépendant pas du temps), le processus $\int_{X_{t_0}^t} \alpha + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \delta\alpha(X_s)ds$ est une Q-martingale locale.[2] Nous étendrons cela de la manière suivante aux formes dépendant du temps : nous poserons $Y_t=(X_t,t)$, et nous désignerons par $\underline{\underline{\alpha}}$ la forme sur $V\times\mathbb{R}$

1. Pour une autre interprétation des équations de Nelson, dans le cas des solutions stationnaires de (38), voir le très joli article [7] de Nagasawa.
2. Les intégrales sont prises au sens de Stratonovitch.

$$\underline{\underline{\alpha}} = \alpha + (\tfrac{1}{2}\delta\alpha_t)dt \quad (\ \delta \text{ opère par rapport à la variable } x)$$

Alors $\int_{Y_{t_0}^{t}} \underline{\underline{\alpha}}$ est une martingale locale pour Q .

Avec ces notations, il n'y a pas de difficulté à trouver la densité dP/dQ : elle est donnée par la formule de Cameron-Martin-Girsanov[1]

$$(70)_a \qquad \frac{dP}{dQ} = \rho(X_{t_0},t_0)\exp[\int_{X_{t_0}^{t_1}} \beta + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\delta\beta_s - |\beta_s|^2)ds\ ]$$

$$= \rho(X_{t_0},t_0)\,\mathcal{E}(\int_{Y_{t_0}^{t_1}} \underline{\underline{\beta}}\ )^{o}$$ où $\mathcal{E}$ est l'exponentielle stochastique.

Retournons le temps, en utilisant la réversibilité du mouvement brownien et de l'intégrale de Stratonovitch, et en remplaçant β par $-\hat{\beta}$. Nous obtenons une autre expression de la densité

$$(70)_b \qquad \frac{dP}{dQ} = \rho(X_{t_1},t_1)\exp[\int_{X_{t_0}^{t_1}} \hat{\beta} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\ -\delta\hat{\beta}_s - |\hat{\beta}_s|^2)ds\ ]^{(2)}$$

En particulier, $(70)_a=(70)_b$, ce qui en posant $R=\frac{1}{2}\log\rho$ peut s'écrire

$$R(X_{t_1},t_1)-R(X_{t_0},t_0) = \int_{Y_{t_0}^{t_1}} u^{\circ} + (\ \tfrac{1}{2}\delta v_s^{\circ} - u_s^{\circ}.v_s^{\circ})ds$$

Mais le côté gauche est l'intégrale $\int_{Y_{t_0}^{t_1}} (dR+\dot{R}dt)$, ce qui nous redonne les formules $u=\text{grad}R$ ($u^{\circ}=dR$) et $\dot{R}=\frac{1}{2}\delta v^{\circ}-u^{\circ}.v^{\circ}$ ($(61)_a$, ou $(65)_a$), puisque $u^{\circ}.v^{\circ}=u.v$, $\delta v^{\circ}=-\text{div}v$.

Calculons alors de la même manière, en nous servant de (60) et $(61)_b$

$$S(X_{t_1},t_1)-S(X_{t_0},t_0) = \int_{Y_{t_0}^{t_1}} (dS+\dot{S}dt) = \int_{Y_{t_0}^{t_1}} v^{\circ} + \tfrac{1}{2}(-\delta u_s^{\circ} + |v_s^{\circ}|^2 - |u_s^{\circ}|^2)ds$$

$$+ \int_{Y_{t_0}^{t_1}} a^{\circ} - p_s ds$$

et la relation $(63)_a$ équivaut à la fermeture de la forme sur $V\times\mathbb{R}$

$$v^{\circ} + \tfrac{1}{2}(-\delta u_s^{\circ} + |v_s^{\circ}|^2 - |u_s^{\circ}|^2)ds + (a^{\circ} - p_s ds)$$

Mais je ne vois pas comment exprimer au moyen de toutes ces formes la « loi de Newton stochastique » (69).

1. Il faut vérifier que sous la loi P ainsi définie, $f(X_t)-\int^{t} L_s f(X_s)ds$ est une martingale locale, ce qui se fait par Girsanov.
2. Noter que ceci est une Q-martingale en le temps $t=t_1$.

REPRESENTATIONS DE SEMIMARTINGALES (APPENDICE)

1. Dans ce bref paragraphe, nous abandonnons les e.d.s. linéaires pour traiter un problème qui revient à plusieurs reprises dans le livre de Bismut, et dans les exposés du Sém. XV : comment décrire une semimartingale dans V au moyen de vecteurs tangents <u>d'ordre 1</u> et de semimartingales réelles ?

V est toujours munie[1] de coordonnées x^λ , et X est une semimartingale dans V . Considérons des processus continus adaptés $(X_t,H_{\alpha t})$ à valeurs dans T(V), $H_{\alpha t}$ étant un vecteur tangent au point X_t . Les indices α et λ peuvent parcourir des ensembles différents. Nous supposerons en général que <u>ces processus sont des semimartingales</u> dans T(V), bien que ce ne soit pas partout indispensable. Considérons enfin des semimartingales réelles M_t^α . Nous allons donner un sens aux relations suivantes

(A1-S) $\quad d^2X_t = H_{\alpha t} * dM_t^\alpha$ (représentation de Stratonovitch)

(A1-I) $\quad d^2X_t = H_{\alpha t} \cdot dM_t^\alpha$ (représentation d'Ito)

que nous considérerons comme des abréviations des propriétés suivantes, évidemment intrinsèques :

(A2) pour toute forme C^∞ η d'ordre 1, l'intégrale de Stratonovitch (resp. d'Ito) $\int_{X_0}^{X_t} \eta$ est égale à $\int_0^t < H_{\alpha s}, \eta_{X_s} > dM_s^\alpha$

Si cette relation est vraie pour η, elle est vraie pour $f\eta$, $f \in C^\infty$ (cf. Sém. XV, bas de la p. 61). Il suffit donc de l'écrire pour les formes

1. Pour les représentations d'Ito, on se donne sur V une connexion Γ .

de base $\eta=dx^{\lambda}$, ce qui s'écrit

(A2-S) $\qquad dX_t^{\lambda} = H_{\alpha t}^{\lambda} * dM_t^{\alpha} = H_{\alpha t}^{\lambda} dM_t^{\alpha} + \frac{1}{2} d\langle H_{\alpha}^{\lambda}, M^{\alpha}\rangle_t$

(A2-I) $\qquad dX_t^{\lambda} = H_{\alpha t}^{\lambda} dM_t^{\alpha} - \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X_t) H_{\alpha t}^{\mu} H_{\beta t}^{\nu} d\langle M^{\alpha}, M^{\beta}\rangle_t$.

REMARQUE. Du côté droit des égalités (A1) figurent des sommes : peut on donner un sens, même symbolique, à chacun des termes de ces sommes, autrement dit à $H_t * dM_t$ et $H_t \bullet dM_t$ pour une semimartingale (X_t, H_t) dans T(V) et une semimartingale réelle (M_t) ? C'est possible, en définissant les vt_2 symboliques au point X_t

(A3-S) $\qquad H_t * dM_t = (H_t^{\lambda} dM_t + \frac{1}{2} d\langle H^{\lambda}, M\rangle_t) D_{\lambda} + \frac{1}{2} H_t^{\lambda} d\langle X_t^{\mu}, M\rangle_t D_{\lambda\mu}$

(A3-I) $\qquad H_t \bullet dM_t = (H_t^{\lambda} dM_t - \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X_t) H_t^{\mu} d\langle X^{\nu}, M\rangle_t) D_{\lambda} + \frac{1}{2} H_t^{\lambda} d\langle X^{\mu}, M\rangle_t D_{\lambda\mu}$

[écritures incorrectes : le coefficient de $D_{\lambda\mu}$ n'est pas symétrisé]. Pour vérifier le caractère intrinsèque de (A3-S), on remarque que pour toute forme η sur V on a $\langle H_t * dM_t, d\eta\rangle = \langle H_t, \eta_{X_t}\rangle * dM_t$. Pour (A3-I), on a bien $\langle H_t \bullet dM_t, \Gamma\eta\rangle = \langle H_t, \eta_{X_t}\rangle dM_t$, mais il n'est pas évident que cela caractérise $H_t \bullet dM_t$: il vaut mieux remarquer que $H_t \bullet dM_t$ a même partie bilinéaire que $H_t * dM_t$, et une dérive égale à $H_t dM_t$.

Revenons aux représentations (A1) : si les vecteurs $H_{\alpha t}$ sont indépendants à chaque instant, les semimartingales dM_t^{α} sont <u>uniques</u>. En particulier, lorsque les $H_{\alpha t}$ forment un <u>repère</u> à chaque instant, on pourra dire que les semimartingales réelles dM_t^{α} constituent la <u>lecture</u> de d^2X_t dans le repère $(H_{\alpha t})$ (au sens de Stratonovitch, resp. d'Ito). Tout cela doit être justifié.

<u>Unicité de la représentation</u>. Traitons par exemple le cas de Stratonovitch (le cas d'Ito est analogue). Les relations $H_{\alpha t}^{\lambda} dM_t^{\alpha} + \frac{1}{2} d\langle H_{\alpha}^{\lambda}, M^{\alpha}\rangle_t = 0$ entraînent que les $H_{\alpha t}^{\lambda} dM_t^{\alpha}$ sont à variation finie, donc les $H_{\alpha t} H_{\beta t} d\langle M^{\alpha}, M^{\beta}\rangle_t$ sont nuls, et comme les produits symétriques $H_{\alpha} \odot H_{\beta}$ sont indépendants à chaque instant, les $\langle M^{\alpha}, M^{\beta}\rangle$ sont nuls.(1) Donc les M^{α} eux mêmes sont à variation finie, les crochets $\langle H_{\alpha}^{\lambda}, M^{\alpha}\rangle$ sont nuls, et la relation s'écrit simplement $H_{\alpha t}^{\lambda} dM_t^{\alpha} = 0$, qui entraîne enfin $dM_t^{\alpha}=0$(1).

<u>Existence de la lecture dans un repère</u>. La matrice $(H_{\alpha t}^{\lambda})$ est une matrice carrée inversible, dont on désigne par $(K_{\lambda t}^{\alpha})$ l'inverse - une semimartingale si la première en était une. On vérifie alors que les expressions explicites suivantes constituent les << lectures >> cherchées

(A4-S) $\quad dM_t^{\alpha} = K_{\lambda t}^{\alpha} * dX_t^{\lambda}$. $\qquad$ (A4-I) $\quad dM_t^{\alpha} = K_{\lambda t}^{\alpha}(dX_t^{\lambda} + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X_t) d\langle X^{\mu}, X^{\nu}\rangle_t$)

1. Il s'agit de processus à variation finie : prenant des densités par rapport à un processus croissant (scalaire) dA_t convenable, on se trouve ramené à un problème d'indépendance linéaire de vecteurs ordinaires.

On peut présenter les choses d'une autre manière : si nous avons un repère $(H_{\alpha t})$ au dessus de (X_t) dans $T(V)$, nous avons un repère dual (H_t^α) au dessus de (X_t) dans $T^*(V)$, et nous devons pouvoir interpréter dM_t^α comme la « valeur de H_t^α sur d^2X_t ». Autrement dit, nous sommes ramenés aux définitions suivantes, duales en quelque sorte de (57).

DEFINITION. Soit (X_t,Y_t) une **semimartingale** à valeurs dans $T^*(V)$. Nous définissons les semimartingales réelles

(A5-S) $\quad \int_0^t \langle Y_s, * dX_s\rangle = \int_0^t Y_{\lambda s} * dX_s^\lambda$

(A5-I) $\quad \int_0^t \langle Y_s, \bullet dX_s\rangle = \int_0^t Y_{\lambda s} dX_s^\lambda + \frac{1}{2} Y_{\lambda s}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X_s) d\langle X^\mu, X^\nu\rangle_s$

Par exemple, si $Y_t = \eta_{X_t}$, où η est une forme d'ordre 1 sur V, on retrouve ainsi les intégrales de Stratonovitch et d'Ito de η le long de X. Pour la seconde définition, on n'a pas besoin que Y soit une semimartingale : il suffit (et c'est encore trop) que Y soit continu adapté au dessus de X .

L'interprétation de (A5-I) est tout à fait simple : c'est **l'intégrale stochastique** $\int_0^t \langle Y_s, \Gamma(d^2X_s)\rangle$ (valeur de la forme Y_s sur le vt_1 $\Gamma(d^2X_s)$ au point X_s), et le caractère intrinsèque en découle aussitôt. Pour celle de (A5-S), rappelons que $T^*(V)$ porte une 1-forme canonique, qui s'écrit (si les coordonnées sont notées (x^λ, y_λ)) $\varphi = y_\lambda dx^\lambda$ (1) et alors (A5-S) est l'intégrale de Stratonovitch $\int_{(X,Y)} \varphi$ le long de la semimartingale (X_t,Y_t).

(en fait, (A5-I) est l'intégrale d'Ito de la 1-forme canonique $y_\lambda dx^\lambda$ le long de (X,Y), pour <u>n'importe laquelle</u> des connexions sur $T^*(V)$ que nous avons considérées au paragraphe précédent, et cette propriété équivaut en fait, dans ce cas, aux conditions $(31)_{abc}$).

EXEMPLES . 1) Toute semimartingale X dans V admet la représentation de Stratonovitch suivante, au moyen de ses propres composantes X^λ

(A6) $$d^2X_t = D_\lambda(X_t) * dX_t^\lambda$$

2) Supposons que X admette une représentation d'Ito
$$d^2X_t = H_{\alpha t} \bullet dM_t^\alpha$$
où les M^α sont des martingales locales réelles. Alors X est une martingale dans V. Inversement, supposons que X soit une martingale dans V, et soit $\overset{c}{X}{}^\lambda$ la partie martingale de X^λ ; on a
$$d^2X_t = D_\lambda(X_t) \bullet d\overset{c}{X}{}_t^\lambda$$

3) Soit $(M_t^\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ un mouvement brownien standard, et soit (X_t)

1. Soit t un vecteur tangent à $T^*(V)$ en (x,y). Alors $\pi_* t$ est un vt en x à v, et $\langle y, \pi_* t\rangle$ est un nombre $\phi(t)$; ϕ est la forme indiquée.

une semimartingale à valeurs dans V, appartenant à la filtration naturelle de M. Nous savons (Sém. XV, p. 52, c)) que les parties martingales locales $d\overset{c}{X}{}^{\lambda}_t$ sont les composantes d'un vt_1 symbolique au point X_t . D'autre part, elles admettent des représentations comme intégrales stochastiques

$$d\overset{c}{X}{}^{\lambda}_t = a^{\lambda}_{\alpha t} dM^{\alpha}_t$$

et les $a^{\lambda}_{\alpha t}$ sont les composantes d'un vt_1 $H_{\alpha t} = a^{\lambda}_{\alpha t} D_{\lambda}$ au point X_t . Supposons les processus $H_{\alpha t}$ assez réguliers pour que l'on puisse leur appliquer les considérations qui précèdent (en général, les $a^{\lambda}_{\alpha t}$ ne seront même pas localement bornés !). Ecrivons $X^{\lambda}_t - \overset{c}{X}{}^{\lambda}_t = \tilde{X}^{\lambda}_t$, et supposons que ces processus à variation finie soient de la forme $b^{\lambda}_t dt$, avec des coefficients assez réguliers. Alors les coefficients

$$a^{\lambda}_{0t} = \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(X_t) a^{\mu}_{\alpha t} a^{\nu}_{\beta t} \delta^{\alpha\beta} + b^{\lambda}_t$$

sont les composantes d'un vecteur tangent d'ordre 1 H_{0t} en X_t , et si l'on convient que $M^0_t = t$, on peut écrire <u>en sommant sur</u> $\alpha \geqq 0$

(A5) $$d^2X_t = H_{\alpha t} \cdot dM^{\alpha}_t$$

de sorte que d^2X_t est décrit entièrement au moyen de vecteurs d'ordre 1. Bismut appelle ces vecteurs les <u>caractéristiques locales d'Ito</u> de X (par rapport au mouvement brownien).

4) Reprenons les problèmes de relèvement de connexions du paragraphe précédent. Nous avons un fibré vectoriel W au dessus de V, et une e.d.s. linéaire, dont la partie du premier ordre définit un <u>relèvement horizontal</u> $H_{x,y} : T_x(V) \mapsto T_{x,y}(W)$. Alors si une semimartingale X dans V admet une représentation d'Ito $d^2X_t = K_{\alpha t} \cdot dM^{\alpha}_t$ dans V (pour la connexion Γ) et si l'on munit W de la connexion associée à Γ et à l'e.d.s. par le théorème 5, la solution de l'e.d.s. admet la représentation d'Ito $d^2Z_t = \bar{K}_{\alpha t} \cdot dM^{\alpha}_t$, où $\bar{K}_{\alpha t}$ est relèvement horizontal de $H_{\alpha t}$ en Z_t.

5) Soit X une semimartingale dans V, issue de x_0 fixé. Considérons une base $H_{\lambda 0}$ de $T_{x_0}(V)$, et transportons la parallèlement en une base $H_{\lambda t}$
nulles en 0
de $T_{X_t}(V)$. Soient M^{λ}_t les semimartingales réelles/telles que $d^2X_t = H_{\lambda t} \cdot dM^{\lambda}_t$ (lecture d'Ito de X dans le repère). Alors la semimartingale $M^{\lambda}_t H_{0t}$ dans $T_{x_0}(V)$ est le développement de X dans l'espace tangent, péniblement défini dans le Sém. XV, p. 92-95.

REFERENCES

[1]. BISMUT (J.M.). Mécanique Aléatoire. L.N. in M. 866, Springer 1981

[2]. DANKEL (Th. G.). Mechanics on manifolds and the incorporation of spin into Nelson's stochastic mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal. 37, 1971, p. 192-221.

[3]. DOHRN (D.) et GUERRA (F.). Nelson's stochastic mechanics on Riemannian manifolds. Lett. al Nuovo Cimento. 22, 1978, p. 121-127.

[4]. DYNKIN (E.B.). Diffusions of Tensors. DAN 9, 1968, p. 532-535 (éd. anglaise).

[5]. IKEDA (N.) et WATANABE (S.). Diffusion processes and stochastic differential equations. North-Holland 1981.

[6]. ITO (K.). The brownian motion and tensor fields on Riemannian manifolds. Proc. Int. Congress Math. Stockholm 1962, p. 536.

[8]. NELSON (E.). Dynamical theories of Brownian motion. Princeton 1967)

[7]. NAGASAWA (M.). Segregation of a population in an environment. J. Math. Biology 9, 1980, p. 213-235.

[9]. YANO (K.) et ISHIHARA (S.) Tangent and cotangent bundles. New-York, Marcel Dekker 1973.

[10]. YASUE (K.). Stochastic calculus of variations. J. Funct.An. 41, 1981, p. 327-340 (référence ajoutée, sur la méc. de Nelson).

Institut de Recherche Mathématique
Avancée. Université Louis Pasteur.
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
FRANCE

(laboratoire associé au CNRS).

Note sur les épreuves. Je viens de recevoir une lettre de William Darling, mentionnant des travaux récents faits par lui sur l'approximation géodésique, et sur la correction géodésique au transport parallèle. D'autre part, la même correspondance m'a appris que l'emploi des formes d'ordre 2 en intégration stochastique était dû en fait à R.V. KOHN : integration over stochastic simplices. M. Sc. Dissertation, Warwick 1975.