PAUL-ANDRÉ MEYER

Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 95-132
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__95_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

NOTE SUR LES PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

par P.A. Meyer

Il s'agit ici du processus d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, introduit par Malliavin dans [1], étudié ensuite par Stroock [1], et par D. Williams (dans des notes non publiées). Je trouve qu'il ne s'agit pas là d'un simple outil pour développer le << calcul de Malliavin >>, mais d'un objet très intéressant en lui même pour les probabilistes, et je vais chercher ici à en présenter les propriétés essentielles. Cette note doit presque tout aux trois auteurs cités plus haut, mais j'ai essayé d'affranchir certains énoncés de Stroock de restrictions techniques, sans importance pour l'application aux théorèmes de Malliavin, mais peu satisfaisantes en elles mêmes.

I. MESURES GAUSSIENNES EN DIMENSION FINIE

1. Nous allons introduire des notations que nous conserverons intégralement en dimension infinie. On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie, par E' son dual, par $\{\ ,\ \}$ la forme bilinéaire de dualité. Les éléments de E' sont désignés par des lettres grecques $\alpha,\beta,\ldots$ On se donne sur E une mesure gaussienne μ centrée de covariance q :

$$(1)\qquad q(\alpha,\beta) = \int\{\alpha,x\}\{\beta,x\}\mu(dx)$$

On connaît alors la transformée de Fourier de μ : écrivant $q(\alpha)$ pour $q(\alpha,\alpha)$ et $e_\alpha(x)$ pour $e^{i\{\alpha,x\}}$, on a

$$(2)\qquad \hat{\mu}(\alpha) = \int e_\alpha(x)\mu(dx) = e^{-q(\alpha)/2}$$

On peut alors faire entrer μ dans un semi-groupe de convolution de mesures gaussiennes μ_t

$$(3)\qquad \hat{\mu}_t(\alpha) = e^{-tq(\alpha)/2}$$

La mesure μ_t est image de μ par l'homothétie de rapport $\sqrt{t}$. On peut alors associer à μ un <u>semi-groupe de transition</u> (Π_t)

$$(4)\qquad \Pi_t(x,f) = \int f(x+y)\mu_t(dy)$$

un <u>laplacien</u> A, générateur de ce semi-groupe, un <u>opérateur carré du champ</u> Γ ainsi défini, si f et g sont deux fonctions complexes

$$(5)\qquad \Gamma(f,g) = A(f\bar{g}) - fA\bar{g} - \bar{g}Af \ ^{(1)}$$

1. Cet opérateur est le double de celui que nous avons considéré dans des exposés antérieurs (vol.X et XV).

et enfin, un mouvement brownien (X_t) à trajectoires continues, admettant (Π_t) comme semi-groupe de transition. Sauf mention du contraire, nous le prendrons issu de 0. Ce processus est stable d'ordre 2 (le processus cX_t a même loi que le processus $X_{c^2 t}$).

Notons quelques formules que l'on retrouvera en dimension infinie.

(6) $\Pi_t e_\alpha = e^{-tq(\alpha)/2} e_\alpha$; $Ae_\alpha = -\frac{1}{2}q(\alpha)e_\alpha$; $\Gamma(e_\alpha, e_\beta) = q(\alpha,\beta)e_{\alpha-\beta}$.

2. Le <u>processus d'Ornstein-Uhlenbeck</u> associé à μ est la diffusion admettant le générateur

$$Lf(x) = Af(x) - \frac{1}{2}\{df_x, x\}$$

à interpréter ainsi : la différentielle de f en x est une forme linéaire sur E, que l'on applique au vecteur x lui même. D'aprés la méthode d'Ito pour construire les diffusions, on cherchera à construire la diffusion Y^x, gouvernée par L et issue de x, comme solution de l'équation différentielle stochastique (dite équation de Langevin)

$$Y_t = x - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s ds + X_t$$

Posant $Y_t = e^{-t/2}Z_t$, on est ramené à une équation très simple en Z, d'où la solution explicite

$$Y_t = e^{-t/2}x + e^{-t/2}\int_0^t e^{s/2} dX_s$$

Donc Y_t est un processus gaussien non centré, avec

$$m_t = \mathbb{E}[Y_t] = e^{-t/2}x \quad , \mathbb{E}[\{\alpha, Y_s - m_s\}\{\beta, Y_t - m_t\}] = q(\alpha,\beta)e^{-(s+t)/2}(e^{s\wedge t} - 1)$$

Mais alors, en comparant les covariances, on s'aperçoit que le processus gaussien

(7) $$\bar{Y}_t = e^{-t/2}(x + X_{e^t - 1})$$

est identique en loi à (Y_t), donc est aussi un processus de diffusion gouverné par L. Il est encore plus simple de faire entrer x dans X en laissant libre la v.a. X_0, et de réaliser le processus d'O-U comme

(7') $$Y_t = e^{-t/2}X_{e^t - 1}$$

J'ai trouvé cette construction extrêmement simple du processus d'O-U dans les notes de Williams, et elle nous servira constamment.

Utilisons la pour calculer le <u>semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck</u>

(8) $$P_t(x,f) = \mathbb{E}^x[f \circ Y_t] = \mathbb{E}[f(e^{-t/2}x + \sqrt{1-e^{-t}}\, X_1)]$$

Un calcul très simple nous donne

$$P_t(x, e_\alpha) = e^{-q(\alpha)(1-e^{-t})/2} e_{\alpha e^{-t/2}}(x)$$

Cela prend une forme beaucoup plus agréable si l'on introduit les fonctions, proportionnelles aux e_α

(9) $$\varepsilon_\alpha = e^{i\{\alpha,.\}+q(\alpha)/2}$$

la formule précédente s'écrivant simplement

(10) $$P_t\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha e^{-t/2}}$$

Prenons des α_i (i=1,...,n) orthonormés pour la forme quadratique q , et $\alpha = \lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n$; soit λ le vecteur de composantes $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, et ξ le vecteur de composantes $(\{\alpha_1,x\},\ldots\{\alpha_n,x\})$; alors $\varepsilon_\alpha(x) = e^{i\lambda.\xi+|\lambda|^2/2}$. Si l'on se rappelle la <u>série génératrice des polynômes d'Hermite</u>

$$e^{\lambda.\xi-|\lambda|^2/2} = \Sigma\ \lambda_1^{p_1}\ldots\lambda_n^{p_n}H_{p_1,\ldots,p_n}(\xi_1,\ldots,\xi_n)/p_1!\ldots p_n!$$

et qu'on écrit (10), on obtient

(11) $$P_t(H_{p_1,\ldots,p_n}(\{\alpha_1,.\},\ldots,\{\alpha_n,.\})) =$$
$$= e^{-t(p_1+..+p_n)/2}H_{p_1,..,p_n}(\{\alpha_1,.\},..\{\alpha_n,.\})$$

le cas particulier le plus important étant celui où n=1 : $\boxed{\text{si } q(\alpha)=1}$

(11') $$P_t(H_k\circ\{\alpha,.\}) = e^{-kt/2}H_k\circ\{\alpha,.\}$$

et donc, pour le générateur L

(12) $$L(H_k\circ\{\alpha,.\}) = -\frac{k}{2}H_k\circ\{\alpha,.\}\ .$$

3. Nous démontrons maintenant une propriété fondamentale du semi-groupe d'O-U : <u>il est symétrique par rapport à la mesure</u> μ , autrement dit, si f et g sont deux fonctions boréliennes bornées, on a

(13) $$< f,P_tg >_\mu = < P_tf,g >_\mu$$

Il suffit de traiter le cas où $f=e_\alpha$, $g=e_\beta$. Posons aussi $e^{-t/2}=r$, $\sqrt{1-e^{-t}} = s$ (donc $r^2+s^2=1$). D'après (8), on a $< f,P_tg >_\mu$ = $\mathbb{E}[f(H)g(rH+sK)]$, où $H=X_0$ et $K=X_1-X_0$ sont indépendantes et de loi μ . Il s'agit de démontrer que ceci est symétrique en α et β ; or cela vaut $\mathbb{E}[\exp(i\{\alpha+r\beta,H\}+i\{s\beta,K\})] = \exp(-\frac{1}{2}(q(\alpha+r\beta)+q(s\beta)))$, et $q(\alpha+r\beta)+q(s\beta) = q(\alpha)+2rq(\alpha,\beta)+(r^2+s^2)q(\beta)$ est bien symétrique.

Une conséquence importante de (13) : prenant g=1, on voit que la mesure μ est <u>invariante</u> par le semi-groupe (P_t)

REMARQUE. La construction du processus d'O-U à partir du mouvement brownien semble très spéciale, alors qu'elle peut se rattacher à un principe de symétrisation très général : soient f et g deux fonctions complexes, combinaisons linéaires finies de caractères e_α ; on vérifie sans peine la formule

$$-< f,\overline{Lg} >_\mu = \frac{1}{2}\int \Gamma(f,g)(x)\mu(dx)$$

Du côté droit, en intégrant l'opérateur carré du champ du mouvement brownien par rapport à une mesure positive, on obtient une forme bilinéaire symétrique et positive. Du côté gauche, on a la forme de Dirichlet du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Donc, de manière formelle, la recette pour la symétrisation par rapport à une mesure μ est la suivante : intégrer par rapport à μ l'opérateur carré du champ (défini sur le domaine du générateur), et examiner si la forme bilinéaire obtenue peut être considérée comme une forme de Dirichlet d'un semi-groupe symétrique.

4. Soit h une application linéaire de E dans un espace de dimension finie $\overline{E}$, et soit $\overline{\mu}$ la mesure gaussienne image $h(\mu)$. Nous pouvons associer à $\overline{\mu}$ un semi-groupe de convolution $(\overline{\mu}_t)$, un semi-groupe brownien $(\overline{\Pi}_t)$, un semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(\overline{P}_t)$, un générateur d'O-U $\overline{L}$.

Il est d'abord clair que $\overline{\mu}_t$ est la mesure image $h(\mu_t)$: en effet, μ_t est image de μ par l'homothétie de rapport $\sqrt{t}$, et h est linéaire. Il en résulte sans peine que, si f est une fonction bornée sur $\overline{E}$

$$(\overline{\Pi}_t f)\circ h = \Pi_t(f\circ h) \quad , \quad (\overline{P}_t f)\circ h = P_t(f\circ h) \ \text{(cf. (8))}$$

En particulier, si f appartient au domaine de $\overline{L}$, $f\circ h$ appartient au domaine de L, et $(\overline{L}f)\circ h=L(f\circ h)$. D'autre part, le processus $(h\circ X_t)$ est un processus à accroissements indépendants à valeurs dans $\overline{E}$, et on voit aussitôt que c'est un mouvement brownien associé à $\overline{\mu}$. Il en résulte que si Y est un processus d'O-U à valeurs dans E, issu de $x\in E$, le processus $(h\circ Y_t)$ est un processus d'O-U à valeurs dans $\overline{E}$, issu de h(x). Cela se voit sur (7') de manière évidente.

II. EXTENSION A LA DIMENSION INFINIE

1. Toute la suite sera consacrée à un processus très concret, mais déroulons d'abord quelques plates généralités. Soit E un e.v.t. localement convexe, soit E' un sous-espace du dual de E, séparant E (la forme bilinéaire de dualité notée $\{\ ,\ \}$ comme plus haut).Il sera bon de supposer que E est polonais : alors les formes $\{\alpha,.\}$, $\alpha\in E'$, engendrent la tribu borélienne de E. Considérons une mesure gaussienne μ sur E ; nous pouvons plonger μ dans un semi-groupe de mesures gaussiennes (μ_t est l'image de μ par l'homothétie de rapport $\sqrt{t}$), définir la forme quadratique q sur E', les fonctions e_α et ε_α , les semi-groupes (Π_t) et (P_t), vérifier les formules (10), (11). (12),(13) (symétrie de (P_t) par rapport à μ). Enfin, la propriété I.4 s'étend sans difficulté à une application linéaire h de E dans un espace vectoriel $\overline{E}$ (il n'est pas nécessaire que $\overline{E}$ soit de dimension finie, ni que h soit continue : borélienne suffit). Tout cela est évident.

Les théorèmes usuels de construction de processus de Markov permettent de construire le << mouvement brownien >> (X_t), et le processus (Y_t) défini par (7') est alors un << processus d'Ornstein-Uhlenbeck >>, mais nous ne chercherons pas à établir qu'il en existe des versions à trajectoires continues - dans le cas concret que nous allons étudier, ce sera vrai parçe que "bien connu" . Le cas général est dû à Gross pour les Banach (J. Funct. Anal. 1, 1967), étendu par L. Schwartz (Ann. Inst. Fourier 27-3, 1977, p. 274) et H. Sato (1980) aux e.v.t.l.c..

2. Nous prenons désormais comme espace d'états E l'espace de toutes les applications continues w de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, nulles en 0. La coordonnée d'indice s sur cet espace sera notée $w(s)=B_s(w)$. La topologie sur E sera la topologie (polonaise) de la convergence compacte ; la tribu borélienne $\underline{\underline{F}}^\circ$ est engendrée par les coordonnées B_s , et l'on a sur E une filtration naturelle $\underline{\underline{F}}^\circ_s=\underline{\underline{T}}(B_r,r\leq s)$.

Nous munissons E d'une mesure gaussienne μ, la <u>mesure de Wiener</u>, pour laquelle le processus (B_s) est le mouvement brownien standard des probabilistes, issu de 0 (la normalisation signifie que le générateur est $\Delta/2$, ou que $B^i_sB^j_s-\delta^{ij}s$ est une martingale).

Il nous faut aussi définir l'espace E', et la forme bilinéaire de dualité $\{\ ,\ \}$: nous prendrons pour E' un espace assez petit, celui des applications α de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$, à variation finie et à support compact, avec $\{\alpha,w\} = -\int w_s\cdot d\alpha_s$[1](le . représente un produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$: cette intégrale est donc une somme de d intégrales relatives aux composantes). Comme w est nulle en 0, α nulle a l'infini, on peut aussi écrire cela comme une intégrale stochastique élémentaire

$$(14)\qquad \{\alpha,w\} = \int \alpha_s\cdot dB_s(w)$$

et il est clair alors que la forme $q(\alpha,\beta)$ sur E' est donnée par

$$(15)\qquad q(\alpha,\beta) = \int\alpha_s\cdot\beta_s\, ds$$

Parmi les fonctions α figurent des fonctions a variation finie purement atomiques, et les caractères e_α correspondants sont du type

$$\exp[i(u_1\cdot B_{s_1}+ u_2\cdot(B_{s_2}-B_{s_1})+\dots+u_n\cdot(B_{s_n}-B_{s_{n-1}}))$$

Il en résulte en particulier que les caractères e_α correspondant aux α à support dans $[0,s]$ suffisent à engendrer $\underline{\underline{F}}^\circ_s$.

Pour l'instant, nous n'avons décrit que l'<u>espace d'états</u>. Maintenant il faut construire un mouvement brownien à valeurs dans cet espace, i.e. sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{G}},P)$ un processus gaussien (X_t), à accroissements indépendants et homogènes, à valeurs dans E, tel que la loi de

---

1. La notation $\int$ sans indication de bornes désigne une intégrale de 0 à $+\infty$, la notation $\int^t$ une intégrale de 0 à t .

X_1 soit μ . Et pour cela nous considérons un drap brownien (X_{st}), indexé par $\mathbb{R}^2_+$, nul sur les axes, a trajectoires continues, et nous posons

$$X_t(\omega)\in E = (s \longmapsto X_{st}(\omega))$$

et ce processus à valeurs dans E satisfait à toutes les conditions exigées, et ses trajectoires sont continues. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de x ($x\in E$ est une trajectoire) vaut alors

$$Y_t(\omega) = e^{-t/2}(x + X_{e^t-1}(\omega)).$$

3. Cette section constitue une petite digression, destinée à faire comprendre les profondes différences entre les mouvements browniens en dimension finie et infinie, et les raisons pour lesquelles, en dimension infinie, le processus d'O-U est plus important que le mouvement brownien. Il y en a une première, évidente, c'est que le mouvement brownien en dimension infinie n'a plus de << mesure de Lebesgue >> invariante. Mais surtout, alors qu'en dimension finie les mesures μ_t sont toutes équivalentes pour $t>0$, en dimension infinie elles sont deux à deux étrangères. De manière précise, désignons par W_t l'ensemble des $w\in E$ possédant la propriété suivante :

$$\text{pour tout } s \text{ dyadique, } \Sigma_{k=0}^{2^m-1}(B^i_{t^m_{k+1}}(w)-B^i_{t^m_k}(w))(B^j_{t^m_{k+1}}(w)-B^j_{t^m_k}(w)) \longrightarrow \delta^{ij}st$$
$$\text{pour } 1 \leqq {i \atop j} \leqq d$$

où l'on a posé $t^m_k=sk2^{-m}$. Alors un théorème célèbre de P.Lévy affirme que W_t porte μ_t, et il est clair que les W_t sont deux à deux disjoints, que W_t est l'image de $W=W_1$ par l'homothétie de rapport $\sqrt{t}$. Comme le suggère McKean (Geometry of differential space, Ann. Prob. 1, 1973), on doit imaginer W_t comme la << sphère >> de rayon $\sqrt{t}$ dans E, et μ_t comme la << répartition uniforme >> sur cette sphère.

On peut préciser cela encore davantage(1). Revenons au cas de la dimension finie n, et considérons un processus de Markov produit (R_t,Y_t), où (R_t) est un processus de Bessel de " dimension" n , et (Y_t) est un mouvement brownien sphérique standard a valeurs dans S^{n-1} ; ce processus est à valeurs dans $\mathbb{R}_+\times S^{n-1}$, et si la mesure initiale ne charge pas $\{0\}\times S^{n-1}$, nous pouvons définir le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$X_t = R_t\, Y_{\int_0^t ds/R_s^2} \tag{16}$$

qui est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Ici faisons la même chose, en prenant pour (Y_t) le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et pour (R_t) le << processus de Bessel de dimension infinie >>, i.e. le processus

1. Les questions qui suivent sont traitées de manière plus approfondie par Y.Hasegawa, Proc. Japan Acad. 58, 1980.

déterministe à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

$$R_{s+t} = (R_s^2+t)^{1/2}$$

Prenons par exemple $R_0=1$; alors $\int^t ds/R_s^2 = \log(1+t)$, et en prenant $t=e^u-1$, la formule (16) s'écrit

$$X_{e^u-1} = e^{u/2}Y_u$$

c'est à dire (7'). Autrement dit, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète comme le << mouvement brownien en dimension infinie sur la sphère W >> , tandis que la << partie radiale >> du mouvement brownien X est déterministe en dimension infinie.

REMARQUE. La mesure μ étant invariante pour le semi-groupe (P_t), et portée par W, on a $P^{\mu}\{Y_t \notin W\}=0$ pour tout t fixé, mais on ignore si W est un véritable espace d'états pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, i.e. si le complémentaire de W est μ-polaire.[1]

5. Nous abordons maintenant, en suivant Stroock, les questions vraiment importantes, celles qui ne dépendent pas uniquement du caractère gaussien de la mesure μ, mais du fait qu'il s'agit vraiment de la mesure de Wiener. Il s'agit de savoir comment le semi-groupe (P_t) opère sur les variables aléatoires définies comme intégrales stochastiques browniennes

$$f(w) = \int u_s(w)\cdot dB_s(w)$$

où (u_s) est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à $(\underline{\underline{F}}_s)$. Une telle v.a. est en réalité une <u>classe</u> pour μ, mais comme μ est invariante par le semi-groupe, la classe $P_t f$ sera bien définie sous réserve d'intégrabilité.

Nous commençons par définir sans ambiguïté $P_t f$, comme $P_t(f^+)-P_t(f^-)$ avec la convention $\infty-\infty=0$. On vérifie que la classe de $P_t f$ ne dépend que de la classe de f (cf. ci-dessus), et que si f est $\underline{\underline{F}}_s^\circ$-mesurable, il en est de même de $P_t f$ (par classes monotones on se ramène au cas où f est bornée, puis où $f=e_\alpha$ ou ε_α , $\alpha\in E'$ étant à support dans $[0,u]$; on a alors $P_t\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha e^{-t/2}}$, d'où le résultat désiré). Un nouveau raisonnement par classes monotones, à partir du cas des processus prévisibles étagés, montrera que

(17) si (u_s) est un processus prévisible, le processus $(P_t u_s)_s$ est prévisible

Nous démontrons ensuite un lemme, utile dans la manipulation d'intégrales stochastiques.

LEMME 1. <u>Soit</u> (u_s) <u>un processus mesurable à valeurs dans</u> $\mathbb{R}^d$. <u>On a pour</u> $1\le p\le\infty$

(18) $$\mu[(\int|P_t u_s|^2 ds)^{p/2}] \le \mu[(\int|u_s|^2 ds)^{p/2}]$$

1. Cela vient d'être établi par D. Williams.

(Nous écrivons μ et non pas $\mathbb{E}$, pour éviter des confusions possibles avec la loi du processus d'O-U).

DEMONSTRATION. Pour $p\geq 2$, on remarque que P_t diminue la norme dans $\underline{\underline{L}}^{p/2}(\mu)$ (c'est vrai pour tout noyau sousmarkovien N tel que $\mu N\leq\mu$). Donc

$$\mu((P_t(\int |u_s|^2ds)^{p/2}) \leq \mu((\int|u_s|^2ds)^{p/2})$$

après quoi on utilise l'inégalité $|P_tu_s|^2\leq P_t(|u_s|^2)$. Pour $1\leq p<2$ on utilise un argument de dualité :

$$\mu[(\int|P_tu_s|^2ds)^{p/2}]^{1/p} = \sup_h \mu[\int P_tu_s\cdot h_s\, ds\,]^{(1)}$$

h parcourant l'ensemble des processus mesurables bornés tels que $\|(\int|h_s|^2ds)^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^q(\mu)} \leq 1$ ($1/p+1/q=1$). On utilise alors la symétrie de (P_t) par rapport à μ pour écrire $u_s\cdot P_th_s$ au lieu de $P_tu_s\cdot h_s$, et on écrit

$$|\mu[\int u_s\cdot P_th_sds]| \leq \mu[(\int|u_s|^2ds)^{p/2}]^{1/p}\mu[(\int |P_th_s|^2ds)^{q/2}]^{1/q}$$

et on applique à la dernière intégrale le résultat précédent, puisque $q>2$ (le cas $q=\infty$ exige une discussion spéciale). Cette démonstration est empruntée à Stein.

Le théorème suivant est le plus important de cette section.

THEOREME 2. <u>Soit</u> f <u>une v.a. définie comme intégrale stochastique</u>

(19) $\qquad f = \int u_s\cdot dB_s$

<u>Si</u> f <u>appartient à l'espace</u> $\underline{\underline{H}}^1$, <u>alors</u> P_tf <u>appartient à l'espace</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>et l'on a</u>

(20) $\qquad \|P_tf\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq \|f\|_{\underline{\underline{H}}^1}\ , \qquad P_tf= e^{-t/2}\int P_tu_s\cdot dB_s$ [2] .

DEMONSTRATION. Nous utilisons sur $\underline{\underline{H}}^1$ la norme quadratique : $\|f\|_{\underline{\underline{H}}^1} = \mu[(\int|u_s|^2ds)^{1/2}]$. Alors la première relation (20) a déjà été établie, et pour établir la seconde il suffit de raisonner sur un ensemble de variables aléatoires f total dans $\underline{\underline{H}}^1$. Nous prendrons f de la forme (19), avec

$$u_s= hI_{]r,r']}(s) \quad (h\ \underline{\underline{F}}^\circ_r\text{-mesurable bornée, } r<r'<\infty)$$

et alors $f= h\cdot(B_{r'}-B_r)$. Nous allons montrer que

(21) $\qquad \Pi_t(x,f) = \Pi_t(x,h)\cdot(B_{r'}(x)-B_r(x))$

et (20) en résultera, car $P_t(x,f)=\Pi_{1-e^{-t}}(e^{-t/2}x,f)$ (cf. (7)). Pour prouver (21), nous utilisons le drap brownien (X_{st}) de II.2 ; on a

1. On ne restreint pas la généralité en vérifiant (18) pour un processus (u_s) borné et nul pour $s>s_o$. Les intégrales écrites ont alors certainement un sens.
2. Pour appliquer P_t à une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on l'applique coordonnée par coordonnée.

$X_t = X_{.t}$, donc $f(x+X_t) = h(x+X_t)\cdot(B_{r'}(x)-B_r(x)+X_{r't}-X_{rt})$. et en prenant l'espérance, comme h est $\underline{\underline{F}}^\circ_r$-mesurable, $X_{r't}-X_{rt}$ disparaît, et il reste simplement $\Pi_t(x,h)\cdot(B_{r'}(x)-B_r(x))$. ▯

REMARQUES. a) Dans la formule (19), prendre une espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}^\circ_r$ (pour μ) revient à remplacer u_s par $u_s I_{\{s\leq r\}}$. Donc il résulte de (20) que P_t commute aux espérances conditionnelles browniennes. Ou encore, si (M_s) est une martingale , $(P_t M_s)_s$ en est une aussi. On vérifie aisément (d'abord dans la classe $\underline{\underline{H}}^1$ par convergence dominée, puis par passage à la limite grâce à l'inégalité de Doob) que si (M_s) est continue , $(P_t M_s)_s$ est également continue, sans avoir à en reprendre une modification.

> Il y a sans doute[(1)] une démonstration plus élémentaire de la commutation de P_t avec les espérances conditionnelles, car nous avons utilisé la propriété de représentation prévisible du mouvement brownien ! Je me demande si le processus $(P_t M_s)_{s,t}$ est continu en ses deux paramètres.

b) Puisque (P_t) opère sur $\underline{\underline{H}}^1$, par dualité et symétrie il opère sur BMO.

c) Remarque importante pour la suite : tout ce que nous avons fait pour le semi-groupe (P_t) peut se faire pour sa résolvante $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, et la formule (20) prend la forme

(21) Si $f\in\underline{\underline{H}}^1$, on a $R_\lambda f = R_\lambda(\int u_s\cdot dB_s) = \int R_{\lambda+1/2}u_s\cdot dB_s$

Remarquons que toute fonction f, appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$ et d'intégrale nulle par rapport à μ, admet une représentation (19) et une seule. Lorsque $\lambda \to 0$, $R_\lambda f$ converge dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers

(22) $$Rf = \int R_{1/2}u_s\cdot dB_s$$

et nous avons un splendide opérateur potentiel récurrent, défini sur les fonctions de $\underline{\underline{H}}^1$ d'intégrale nulle, continu pour toutes les normes $\underline{\underline{L}}^p$ et pour la norme de BMO. En revanche, j'ignore s'il peut être prolongé aux fonctions de $\underline{\underline{L}}^1$ d'intégrale nulle.

III. QUESTIONS DE DOMAINES

1. Nous faisons maintenant reparaître le processus (Y_t) et sa loi $\mathbb{P}^\mu$, qui avaient disparu depuis un moment, et la filtration naturelle complétée $(\underline{\underline{G}}_t)$ du processus (Y_t), qui satisfait aux conditions habituelles. Nous démontrons :

LEMME 3 . Toute martingale locale càdlàg. (M_t) de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$ est continue, et les mesures $d\langle M,M\rangle_t$ sont absolument continues par rapport à dt (nous normalisons le crochet par la condition $\langle M,M\rangle_0=0$).

DEMONSTRATION. Il nous suffira de prouver ces résultats pour une martingale uniformément intégrable $M_t = \mathbb{E}[M|\underline{\underline{G}}_t]$, où M parcourt un ensemble

(1) En effet, cela peut se voir aussi par la décomposition de L^2 en chaos de Wiener (Hida p. 149).

total de $\underline{\underline{L}}^1(\mathbb{P}^\mu)$. Soit h une application de E dans $\overline{E}=\mathbb{R}^n$, de la forme $h(x)=(\{\alpha_1,x\},\ldots,\{\alpha_n,x\})$, avec $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in E'$, et soient $\overline{\mu}=h(\mu)$, $\overline{Y}_t=$ $=h\circ Y_t$, et $\overline{\underline{\underline{G}}}_t$ la filtration naturelle de $\overline{Y}$, augmentée des ensembles de mesure nulle. Reprenons le raisonnement du n° I.4 : il nous montre en fait que le processus $(\overline{Y}_t)$ est un processus de Markov admettant $(\overline{P}_t)$ comme semi-groupe de transition, par rapport à la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$. Par conséquent, si M est une v.a. $\overline{\underline{\underline{G}}}_\infty$-<u>mesurable</u> et intégrable, on a

$$\overline{M}_t = \mathbb{E}[M|\overline{\underline{\underline{G}}}_t] = \mathbb{E}[M|\underline{\underline{G}}_t] = M_t \quad \text{p.s.}$$

(raisonner par classes monotones à partir du cas où M est de la forme $f_1\circ\overline{Y}_{t_1}\ldots f_k\circ\overline{Y}_{t_k}$). Mais $(\overline{Y}_t)$ est une excellente diffusion, et il est classique que $(\overline{M}_t)$ est continue, et $d\langle\overline{M},\overline{M}\rangle_t=d[\overline{M},\overline{M}]_t$ est absolument continue par rapport à dt ; d'où la même chose pour (M_t). On conclut en remarquant que les v.a. M du type précédent, lorsque h varie, forment un ensemble total dans $\underline{\underline{L}}^1(\mathbb{P}^\mu)$.

2. Soient $\dot{f}$ et $\dot{g}$ deux classes pour l'égalité μ-p.p. (très vite nous confondrons fonctions et classes, mais pour l'instant la distinction doit être soulignée) . <u>Nous disons que</u> $\dot{f}\in\underline{\underline{D}}^0(L)$ <u>et</u> $L\dot{f}=\dot{g}$ s'il existe des représentants f,g de ces deux classes tels que

1) Le processus $(f\circ Y_t)$ est $\mathbb{P}^\mu$-indistinguable d'une semimartingale càdlàg. (en fait, continue d'après 3) plus bas).

2) Le processus $\int^t |g|\circ Y_s ds$ est ($\mathbb{P}^\mu$-p.s.) à valeurs finies $(t<\infty)$.

3) Le processus $C_t^f = f\circ Y_t - \int^t g\circ Y_s ds$ est une $\mathbb{P}^\mu$-martingale locale.

On remarquera que la fonction g peut être choisie arbitrairement dans la classe $\dot{g}$, mais que f est déterminée par la condition 1) à un ensemble μ-polaire près : nous dirons que f est un <u>représentant précisé</u> de $\dot{f}$, et nous choisirons toujours un tel représentant, sans mention spéciale. Mais notre définition se prête bien à l'itération : on dit que $\dot{f}\in\underline{\underline{D}}_2^0$ si $\dot{f}\in\underline{\underline{D}}^0$ et $Lf\in\underline{\underline{D}}^0$, et on définit $L^2f=L(Lf)$, etc.

Rappelons rapidement la démonstration d'un théorème fondamental de Kunita et Watanabe :

THEOREME 4. $\underline{\underline{D}}^0(L)$ <u>est une algèbre</u>.

DEMONSTRATION. Soit $f\in\underline{\underline{D}}^0(L)$, soit $M_t=C_t^f$, $g=Lf$ et $A_t=\int^t g\circ Y_s ds$. D'après le théorème de Motoo et le lemme 3, la fonctionnelle additive absolument continue $d\langle M,M\rangle_t$ peut s'écrire $h(Y_t)dt$, h étant une fonction positive. (voir le sém. V, p. 231, la très jolie démonstration de Getoor). D'autre part, $(f^2\circ Y_t)$ est une semimartingale continue, donc admet une décomposition canonique $f^2\circ Y_t=N_t+B_t$, où N est une martingale locale, B un processus prévisible à variation finie nul en 0. Notons $\sim$ l'égalité modulo les martingales locales. En élevant au carré la relation $f\circ Y_t = M_t + A_t$, on a

$$d(f^2\circ Y_t) = dM_t^2 + 2M_t dA_t + 2A_t dM_t + 2A_t dA_t = dM_t^2 + 2f\circ Y_t dA_t + 2A_t dM_t$$
$$\sim d\langle M,M\rangle_t + 2f\circ Y_t dA_t = (h+2fg)\circ Y_t dt$$

Mais on a aussi $d(f^2\circ Y_t) \sim dB_t$. L'unicité de la décomposition canonique entraîne que $dB_t = (h+2fg)\circ Y_t dt$: cela signifie que $f^2 \in \underline{\underline{D}}^0(L)$ et $L(f^2) = h+2fLf$ μ-p.p.. Cela entraîne le théorème.

Comme dans la formule (5), nous définirons alors l'<u>opérateur carré du champ</u> sur $\underline{\underline{D}}^0 \times \underline{\underline{D}}^0$ par la formule

(23) $$\Gamma(u,v) = L(uv) - uLv - vLu \quad \mu\text{-p.p.} \qquad (u,v \in \underline{\underline{D}}^0)$$

et nous pouvons écrire

$$< C^u, C^v >_t = \int^t \Gamma(u,v)\circ Y_s \, ds$$

avec $\int^t |\Gamma(u,v)|\circ Y_s ds < \infty$ p.s. pour t fini. On remarquera que ce crochet est aussi celui des semimartingales $u\circ Y$, $v\circ Y$. C'est sans doute pourquoi Stroock note $\langle u,v\rangle$ pour $\Gamma(u,v)$.

Comme $\Gamma(f,f)$ est positive pour toute fonction $f \in \underline{\underline{D}}^0$ (μ-p.p.), on démontre très aisément l'<<inégalité de Schwarz >>

(24) $$|\Gamma(u,v)| \leq \Gamma(u,u)^{1/2}\Gamma(v,v)^{1/2} \quad \mu\text{-p.p.} \;.$$

Une application très simple de la formule d'Ito donne alors

THEOREME 5. <u>Soient</u> $f_1,\dots,f_n$ <u>des fonctions appartenant à</u> $\underline{\underline{D}}^0(L)$, h <u>une fonction de classe</u> $\underline{\underline{C}}^2$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Alors la fonction</u> $f = h(f_1,\dots,f_n)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{D}}^0(L)$, <u>et l'on a</u>

(25) $$Lf = \Sigma_i D_i h(f_1,\dots,f_n) Lf_i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij} D_{ij} h(f_1,\dots,f_n)\Gamma(f_i,f_j)$$

et, pour toute fonction $g \in \underline{\underline{D}}^0(L)$

(26) $$\Gamma(f,g) = \Sigma_i D_i h(f_1,\dots,f_n)\Gamma(f_i,g) \;.$$

3. A côté de $\underline{\underline{D}}^0(L)$, nous aurons besoin des <u>générateurs classiques</u> : (P_t) induit un semi-groupe fortement continu sur tous les espaces $\underline{\underline{L}}^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$), et nous pouvons définir de manière classique le domaine $\underline{\underline{D}}^p(L)$ du générateur sur $\underline{\underline{L}}^p(\mu)$. Introduisant la résolvante (R_λ) ($\lambda > 0$), nous avons les résultats classiques

(27) $f \in \underline{\underline{D}}^p$ et $Lf = g \iff f \in \underline{\underline{L}}^p, g \in \underline{\underline{L}}^p$ et $P_t f - f = \int^t P_s g ds$ μ-p.p..

$\iff f \in \underline{\underline{L}}^p, g \in \underline{\underline{L}}^p$ et pour un $\lambda > 0$ (tout $\lambda > 0$) $f = R_\lambda(\lambda f - g)$.

(28) $\underline{\underline{D}}^p(L)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{\underline{\underline{D}}^p} = \|f\|_{\underline{\underline{L}}^p} + \|Df\|_{\underline{\underline{L}}^p}$

(pour p=2, on prendra plutôt $(\|f\|_2^2 + \|Lf\|_2^2)^{1/2}$, pour avoir un espace de Hilbert). Une conséquence intéressante de (27) : μ étant invariante, on a

(29) $\mu(Lf)=0$ pour tout $f\in\underline{\underline{D}}^1(L)$.

Quelles sont les relations entre ces espaces ? Tout d'abord, on a

$$f\in\underline{\underline{D}}^p \text{ et } Lf=g \iff f\in\underline{\underline{D}}^1,\ Lf=g\ ,\ \text{et } f,g\in\underline{\underline{L}}^p$$

(c'est clair sur (27)). Ensuite, si $f\in\underline{\underline{D}}^1(L)$ et $Lf=g$, alors on a aussi $f\in\underline{\underline{D}}^0(L)$ et $Lf=g$ au sens de $\underline{\underline{D}}^0(L)$: en effet, le processus $f\circ Y_t-\int^t g\circ Y_s ds$ est une martingale d'après (27), il faut seulement choisir un représentant de f qui la rende continue, et ce représentant sera $R_\lambda((\lambda f_\circ-g_\circ)^+)$ - $R_\lambda((\lambda f_\circ-g_\circ)^-)$ avec la convention $\infty-\infty=0$, $f_\circ$ et $g_\circ$ étant deux représentants arbitrairement choisis des classes f et g.

Inversement, supposons $f\in\underline{\underline{D}}^0(L)$ et $Lf=g$: à quelle condition peut on affirmer que $f\in\underline{\underline{D}}^1(L)$? Une condition nécessaire est $f\in\underline{\underline{L}}^1$, $g\in\underline{\underline{L}}^1$, mais je suis certain qu'elle n'est pas suffisante. On obtient une condition nécessaire et suffisante (peu maniable) en ajoutant l'existence d'une fonction positive h et d'un $\lambda>0$, tels que $R_\lambda h$ soit fini μ-p.p. et majore $|f|$ (la condition est suffisante, car la martingale locale C^f est majorée en valeur absolue par $R_\lambda h\circ Y_t+\int^t|g\circ Y_s|ds$, qui appartient à la classe (D) sur tout intervalle fini ; elle est nécessaire, car $|f|\leq R_\lambda(\lambda|f|+|g|)$)

Voici deux exemples qui marqueront bien la différence entre $\underline{\underline{D}}^0$ et $\underline{\underline{D}}^p$:

a) Dans le cas du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, le potentiel f d'une mesure positive portée par un ensemble polaire appartient à $\underline{\underline{D}}^0$, avec $Lf=0$, mais C^f n'est pas une vraie martingale, donc $f\notin\underline{\underline{D}}^1$.

b) Si deux fonctions f et g sont telles que $R_\lambda(\lambda|f|+|g|)$ soit finie μ-p.p., et que $f=R_\lambda(\lambda f-g)$ (sans hypothèse d'intégrabilité), alors on a $f\in\underline{\underline{D}}^0$ et $Lf=g$ (C^f est une vraie martingale pour toute loi P^x, où x est tel que $R_\lambda(x,\lambda|f|+|g|)<\infty$).

4\. Cette section est une digression, introduisant un problème dont nous nous occuperons pendant tout le paragraphe IV : existe t'il des inégalités contrôlant la norme de $\Gamma(f,f)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$?

Par exemple, en théorie classique du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$, si f est une bonne fonction, et si l'on pose $\Delta f=g$, $D_k f=h$, on a entre les transformées de Fourier de f,g,h

$$\hat{h}(u) = iu_k\hat{f}(u) = (iu_k/|u|)(|u|/1+|u|^2)(1+|u|^2)\hat{f}(u)$$

On montre que $|u|/1+|u|^2$ est transformée de Fourier d'une mesure bornée Θ. Donc

$$D_k f = R_k(\Theta*(f-g)) \quad \text{où } R_k \text{ est une transformée de Riesz,}$$

donc D_k est un opérateur borné sur $\underline{\underline{D}}^p$ ($1<p<\infty$), ce qui entraîne

$$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|f\|_{\underline{\underline{D}}^p}$$

Examinons ce que l'on peut dire sans étude approfondie.

1) Soient f et g deux éléments de $\underline{\underline{D}}^p$ et $\underline{\underline{D}}^q$ respectivement, où p et q sont conjugués et tous deux finis. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe on a

$$\mathbb{E}[\int^1 |d\langle C^f, C^g\rangle_t|] \leq c_p \,\mathbb{E}[|C_1^f|^p]^{1/p}\,\mathbb{E}[|C_1^g|^q]^{1/q}$$

soit encore, la mesure μ étant invariante

$$(30)\qquad \mu(|\Gamma(f,g)|) \leq c'_p \|f\|_{\underline{\underline{D}}^p} \|g\|_{\underline{\underline{D}}^q}$$

La fonction fg appartient à $\underline{\underline{L}}^1$, $L(fg) = fLg+gLf+\Gamma(f,g)$ aussi, et enfin $\sup_{t\leq 1} |fg\circ Y_t| \leq (\sup |f\circ Y_t|)(\sup |g\circ Y_t|)$ est intégrable d'après l'inégalité de Doob. Donc en fait $fg\in\underline{\underline{D}}^1$, et on a d'apres (30)

$$(31)\qquad \|fg\|_{\underline{\underline{D}}^1} \leq c''_p \|f\|_{\underline{\underline{D}}^p} \|g\|_{\underline{\underline{D}}^q}$$

Remarquons aussi que $\int L(fg)\mu = 0$ (29), donc

$$(32)\qquad \mu(\Gamma(f,g)) = -\langle f,Lg\rangle_\mu - \langle g,Lf\rangle_\mu = -2\langle f,Lg\rangle$$

(on a utilisé la symétrie), que l'on rapprochera de la remarque du n°I.3.

2) Soit $f\in\underline{\underline{D}}^p$, avec $1<p\leq 2$; d'après les inégalités de Burkholder, nous avons $\mathbb{E}[\langle C^f,C^f\rangle_1^{p/2}] \leq c_p \|f\|^p_{\underline{\underline{D}}^p}$. D'autre part

$$\langle C^f,C^f\rangle_1^{p/2} = (\int^1 \Gamma(f,f)\circ Y_s ds)^{p/2} \geq \int^1 \Gamma(f,f)^{p/2}\circ Y_s ds$$

donc

$$(33)\qquad \|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p \|f\|_{\underline{\underline{D}}^p} \qquad \text{pour } 1<p\leq 2$$

Malheureusement, cela ne dit rien pour $p>2$, qui est le cas intéressant. Pour $p=\infty$, on peut dire quelque chose, d'apparemment inutile : fixons $\lambda>0$, et soit $f\in\underline{\underline{D}}^1$ telle que f et $R_\lambda(|Lf|)$ appartiennent à $\underline{\underline{L}}^\infty$ (cette condition ne dépend pas de λ) ; alors $R_\lambda(\Gamma(f,f))$ appartient à $\underline{\underline{L}}^\infty$.

3) Le moyen qu'utilise Stroock pour tourner ces difficultés consiste à introduire l'espace $\underline{\underline{K}}^p$ des fonctions $f\in\underline{\underline{D}}^p$ telles que $\sqrt{\Gamma(f,f)}\in\underline{\underline{L}}^p$ (en fait, son exposant p est toujours ≥ 2, et il note cet espace $\underline{\underline{K}}^{p/2}$). Nous tâcherons de nous en passer dans la suite.

5. Nous arrivons maintenant aux résultats importants pour le << calcul de Malliavin>> : il s'agit de savoir comment L (puis Γ dans la section suivante) opèrent sur les intégrales stochastiques browniennes.(1)

Nos notations dans toute la fin du paragraphe seront les suivantes : nous avons deux variables aléatoires

$$(34)\qquad f = \int u_s\cdot dB_s \quad , \qquad g = \int h_s ds$$

où (u_s) est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, (h_s) un processus prévisible réel (la prévisibilité de h ne servira pas dans ce paragraphe).

1. Ce paragraphe peut être omis pour l'abord des théorèmes d'intégrales singulières 13 et 14.

D'après le théorème de dérivation de Mokobodzki, pour toute fonction $a \in \underline{\underline{D}}^1$, $(P_t a - a)/t$ converge μ-p.s. vers Lf. Nous conviendrons donc de définir le processus prévisible (Lh_s) comme $\liminf_t (P_t u_s - u_s)/t$.

THEOREME 6. 1) <u>Supposons que pour presque tout</u> s <u>on ait</u> $u_s \in \underline{\underline{D}}^1$, $h_s \in \underline{\underline{D}}^1$, <u>avec</u>

(35.a)) $\quad (\int |u_s|^2 + |Lu_s|^2) ds)^{1/2} \in \underline{\underline{L}}^1$, (35.b)) $\int (|h_s| + |Lh_s|) ds \in \underline{\underline{L}}^1$
(en particulier, $f \in \underline{\underline{H}}^1$) . <u>Alors on a</u> $f \in \underline{\underline{D}}^1$, $g \in \underline{\underline{D}}^1$, <u>et</u>

(36) $\quad Lf = \int (Lu_s - \frac{1}{2} u_s) \cdot dB_s \quad , \quad Lg = \int Lh_s ds$

(en particulier, $Lf \in \underline{\underline{H}}^1$).

2) <u>Inversement, supposons que</u> f <u>appartienne à</u> $\underline{\underline{D}}^1$, <u>soit d'intégrale nulle, et que</u> f <u>et</u> Lf <u>appartiennent à</u> $\underline{\underline{H}}^1$. <u>Alors dans l'unique représentation de</u> f <u>comme intégrale stochastique</u>, $f = \int u_s \cdot dB_s$, <u>on peut affirmer que</u> $u_s \in \underline{\underline{D}}^1$ <u>pour presque tout</u> s <u>et que</u> (35.a)) <u>est satisfaite</u>, <u>et donc</u> Lf <u>est donnée par (36)</u>.

DEMONSTRATION. Le cas de g est à peu près trivial : on a d'après (35.b)) $g \in \underline{\underline{L}}^1$, posons $m = \int Lh_s ds \in \underline{\underline{L}}^1$; une application immédiate du théorème de Fubini montre que $P_t g - g = \int^t P_s m ds$, donc $g \in \underline{\underline{D}}^1$ et $Lg = m$.

Pour étudier f, nous posons $n = \int (Lu_s - \frac{1}{2} u_s) \cdot dB_s \in \underline{\underline{H}}^1$. Nous avons d'après (21)

$$R_\lambda f = \int R_{\lambda+1/2} u_s \cdot dB_s \qquad R_\lambda n = \int R_{\lambda+1/2} (Lu_s - \tfrac{1}{2} u_s) \cdot dB_s$$

et donc $R_\lambda(\lambda f - n) = \int R_{\lambda+1/2}((\lambda + \frac{1}{2}) u_s - Lu_s) \cdot dB_s = \int u_s \cdot dB_s = f$.

Passons à 2). Puisque $f \in \underline{\underline{H}}^1$, $\int f\mu = 0$, nous pouvons écrire f sous la forme $\int u_s \cdot dB_s$, avec $(\int |u_s|^2 ds)^{1/2} \in \underline{\underline{L}}^1$ - ce qui entraîne $\int_0^t \mu(|u_s|) ds < \infty$ pour t fini, donc $u_s \in \underline{\underline{L}}^1$ pour presque tout s. De même, nous pouvons écrire $Lf = \int v_s \cdot dB_s$, avec les mêmes propriétés. Comme nous avons $f = R_\lambda(\lambda f - Lf)$, la formule (21) nous donne $f = \int R_{\lambda+1/2}(\lambda u_s - v_s) \cdot dB_s$, et l'unicité de la représentation prévisible entraîne $u_s = R_{\lambda+1/2}(\lambda u_s - v_s)$ pour presque tout s, donc aussi $u_s \in \underline{\underline{D}}^1$, $v_s = Lu_s - \frac{1}{2} u_s$.

REMARQUE. Soit $f \in \underline{\underline{D}}^1$, et soit $Lf = \int v_s \cdot dB_s \in \underline{\underline{H}}^1$. Posons $f' = -RLf = -\int R_{1/2} v_s \cdot dB_s$ (22), qui appartient à $\underline{\underline{H}}^1 \cap \underline{\underline{D}}^1$ avec $Lf' = \int v_s \cdot dB_s = Lf$. La fonction f-f' appartient à $\underline{\underline{D}}^1$ avec $L(f-f')=0$, donc elle est invariante par le semi-groupe et intégrable, et le théorème ergodique entraîne qu'elle est constante. autrement dit, $f \in \underline{\underline{D}}^1$ et $Lf \in \underline{\underline{H}}^1$ entraîne $f = \mu(f) - RLf \in \underline{\underline{H}}^1$. On en déduit pour p>1

$$\text{si } f \in \underline{\underline{D}}^1 \ , \ \|f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p(|\mu(f)| + \|Lf\|_{\underline{\underline{L}}^p})$$

6. Nous allons dans cette section calculer (avec les notations (34)) les quantités $\Gamma(f,f)$, $\Gamma(g,g)$, $\Gamma(f,g)$. Nous renforcerons les hypothèses (35) en supposant

(37.a)) $\int(\|u_s\|^2_{\underline{\underline{L}}^2}+\|Lu_s\|^2_{\underline{\underline{L}}^2})ds < \infty$, (37.b)) $\int(\|h_s\|_{\underline{\underline{L}}^2}+\|Lh_s\|_{\underline{\underline{L}}^2})ds < \infty$

en particulier, f et g appartiennent à $\underline{\underline{D}}^2$. Nous introduirons les deux processus

$$f_s=\int^s u_r\cdot dB_r \qquad , \quad g_s = \int^s h_r dr$$

D'après les calculs faits précédemment, $\|f_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}$ et $\|g_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}$ sont bornés.

Si l'on pose $v_s=Lu_s-\frac{1}{2}u_s$, $k_s=Lh_s$, on a

(38) $\qquad f = \mu(f) - \frac{1}{2}\int R_{1/2}v_s ds \quad , \quad g = \int\mu(h_s)ds - \int Rk_s ds$.

FORMULE POUR $\Gamma(g,g)$. On a

(39) $\qquad \Gamma(g,g) = 2\int \Gamma(g_s,h_s)ds$

DEMONSTRATION. Nous écrivons d'abord les formules d'intégration par parties classiques

$$g^2 = \int 2g_s h_s ds \quad , \quad 2gLg = \int 2(h_s Lg_s+g_s Lh_s)ds$$

Ensuite, nous calculons $L(g^2)$ par application de la formule (36). Pour cela, il nous faut vérifier que

$$\int|g_s h_s|ds \in \underline{\underline{L}}^1 \ , \ \int(|g_s Lh_s|+|h_s Lg_s|+|\Gamma(g_s,h_s)|)ds \in \underline{\underline{L}}^1$$

A gauche, nous majorons par $(\sup_s|g_s|)(\int|h_s|ds)$, produit de deux éléments de $\underline{\underline{L}}^2$. A droite, les deux premiers termes se traitent de même. Quant au dernier, on écrit $\mu(|\Gamma(g_s,h_s)|)\leq c\|g_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}\|h_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}$; le premier facteur est borné, le second intégrable en s .

Dans ces conditions, on a $L(g^2)=\int 2(g_s Lh_s+h_s gL_s+\Gamma(g_s,h_s))ds$, et on a (39) en formant $L(g^2)-2gLg$.

FORMULE POUR $\Gamma(f,f)$. On a

(40) $\qquad \Gamma(f,f) = \int 2\Gamma(f_s,u_s)\cdot dB_s + \int(|u_s|^2+\Gamma(u_s',u_s))ds$

où $\Gamma(u_s',u_s)$ est une notation abrégée pour $|u_s|^2-2u_s\cdot Lu_s = \Sigma_i \Gamma(u_s^i,u_s^i)$ - le ' désigne la transposition des matrices.

La justification sera beaucoup plus délicate que ci-dessus. On commence par écrire les formules banales d'intégration par parties

(41) $\qquad f^2=2\int f_s df_s+\int d\langle f,f\rangle_s = \int 2f_s u_s\cdot dB_s + \int|u_s|^2 ds$

$$2fLf = 2\int(f_s d(Lf)_s+Lf_s df_s+d\langle f,Lf\rangle_s) =$$
$$2\int(f_s(Lu_s-\tfrac{1}{2}u_s)\cdot dB_s + Lf_s u_s\cdot dB_s + u_s\cdot(Lu_s-\tfrac{1}{2}u_s)ds\ )$$

Maintenant, appliquons formellement (36) à (41) pour calculer $L(f^2)$

$$Lf^2 = 2\int (L(f_s u_s) - \tfrac{1}{2} f_s u_s)\cdot dB_s + \int L|u_s|^2 ds$$

et formons $L(f^2)-2fLf$, nous obtenons (40). Tout revient donc à justifier ce calcul formel. Remarquons qu'il n'y a aucune difficulté quant au terme $\int |u_s|^2 ds$, les hypothèses (35.b)) étant satisfaites. La difficulté tient donc à l'intégrale stochastique

$$\phi = \int f_s u_s \cdot dB_s \ ,$$

pour laquelle il faut vérifier les hypothèses (35.a)). Nous commençons par le cas simple où $f = -\int R_{1/2} v_s \cdot dB_s$, (v_s) étant un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ du type

(42) $$v_s = \Sigma_i \, a_i I_{]r_i, r_{i+1}]}(s)$$

chaque a_i étant une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont chaque composante est un polynôme (de degré au plus n_i) en un nombre fini de formes linéaires $\{\alpha_{ik}, \cdot\}$, les $\alpha_{ik} \in E'$ ayant leur support dans $[0, r_i]$. Il résulte de (11) que $P_t v_s$ est du même type, et $u_s = -R_{1/2} v_s$ aussi. Sur l'intervalle $]r_i, r_{i+1}]$ on peut donc écrire

$$f_s u_s^i = b^i + c^i (B_s^i - B_r^i)$$

où b^i et c^i sont des polynômes. On a alors, d'après un cas particulier trivial de (36)

$$L(f_s u_s^i) = Lb^i + (Lc^i - \tfrac{1}{2} c^i)(B_s^i - B_r^i)$$

et comme Lc^i, c^i, Lb^i sont des polynômes, donc appartiennent à tout $\underline{\underline{L}}^p$, on voit que $\|L(f_s u_s)\|_2$ est une fonction bornée à support compact sur $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas l'hypothèse (35.a)) est satisfaite, et la formule (40) aussi.

Nous remarquons maintenant que l'espace des fonctions f d'intégrale nulle, appartenant à $\underline{\underline{D}}^2$, pour lesquelles (40) a lieu est <u>fermé</u>. Soient en effet des f^n appartenant à cet espace, et convergeant dans $\underline{\underline{D}}^2$ vers f ; nous écrivons $Lf^n = \int v_s^n \cdot dB_s$, $Lf = \int v_s \cdot dB_s$, où $\int \mu(|v_s^n - v_s|^2) ds \to 0$, et nous avons $f^n = \int u_s^n \cdot dB_s$, $f = \int u_s \cdot dB_s$ avec $u_s^n = -R_{1/2} v_s^n$, $u_s = -R_{1/2} v_s$. Nous avons $|\sqrt{\Gamma(f,f)} - \sqrt{\Gamma(f^n,f^n)}| \leq \sqrt{\Gamma(f-f^n, f-f^n)}$, donc le côté gauche tend vers 0 dans $\underline{\underline{L}}^2$, et $\Gamma(f^n,f^n) \to \Gamma(f,f)$ dans $\underline{\underline{L}}^1$. On vérifie sans peine que $\int |u_s^n|^2 ds$ converge dans $\underline{\underline{L}}^1$ vers $\int |u_s|^2 ds$. D'autre part, on a

$$\int |\Gamma(u_s^{ni}, u_s^{ni}) - \Gamma(u_s^i, u_s^i)| d\mu ds \leq \int |\sqrt{\Gamma_n} - \sqrt{\Gamma}| (\sqrt{\Gamma_n} + \sqrt{\Gamma}) d\mu ds$$
$$\leq (\int |\sqrt{\Gamma_n} - \sqrt{\Gamma}|^2 d\mu ds)^{1/2} \; (2\int \Gamma_n d\mu ds + 2\int \Gamma d\mu ds)^{1/2}$$

Comme $\mu(\Gamma(u_s^{ni}, u_s^{ni})) = \mu((u_s^{ni})^2)$, le second facteur est borné. Le premier se majore par $(\int \Gamma(u_s^{ni} - u_s^i, u_s^{ni} - u_s^i) d\mu ds)^{1/2}$ et tend vers 0 pour la même raison.

En racapitulation de tout ceci, nous avons que

$$\Gamma(f^n,f^n)-\int(|u_s^n|^2+\Gamma(u_s^{n\prime},u_s^n))ds = \int 2\Gamma(f_s^n,u_s^n)\cdot dB_s = J^n$$

converge dans $\underline{\underline{L}}^1$ vers $\Gamma(f,f)-\int(|u_s|^2+\Gamma(u_s',u_s))ds$, v.a. d'espérance nulle, que nous noterons J . Introduisant les martingales J_s^n, J_s , nous savons qu'il existe un processus prévisible (j_s) tel que $\int|j_s|^2ds$ soit p.s. fini et que $J_s=\int^s j_r\cdot dB_r$ pour tout $s\leq\infty$. D'après un résultat de Yor, nous savons aussi qu'il existe des temps d'arrêt T_k tendant vers l'infini, tels que $(J^n)^{T_k}$ tende vers J^{T_k} dans $\underline{\underline{H}}^1$ pour tout k : il en résulte que $\Gamma(f_s^n,u_s^n)\rightarrow j_s$ en mesure sur $\mathbb{R}_+\times E$ muni de la mesure $dsd\mu$. Mais d'autre part, pour presque tout s $\Gamma(f_s^n,u_s^n)$ converge dans $\underline{\underline{L}}^1$ vers $\Gamma(f_s,u_s)$. Il en résulte que les processus $\Gamma(f_s,u_s)$ et j_s sont égaux $dsd\mu$-p.p., et la formule (40) est vraie pour f.

Il reste donc seulement à vérifier que les v.a. f du type construit plus haut (au moyen de polynômes) sont denses dans l'espace des v.a. de $\underline{\underline{D}}^2$ d'intégrale nulle. Il suffit pour cela de savoir approcher les processus prévisibles étagés usuels

$$v_s = \Sigma_i\ \varphi_i I_{]r_i,r_{i+1}]}(s)$$

où φ_i est $\underline{\underline{F}}^\circ_{r_i}$-mesurable bornée, par des processus du type (42). Cela revient à approcher φ_i dans $\underline{\underline{L}}^2$ par des polynômes du type considéré. On se ramène par classes monotones au cas où φ_i est fonction d'un nombre fini de formes linéaires $\{\alpha_{ik},\cdot\}$, et l'on se trouve alors ramené au fait qu'en dimension finie, les polynômes sont denses dans l'espace $\underline{\underline{L}}^2$ d'une mesure gaussienne.

FORMULE POUR $\Gamma(f,g)$. On a

$$(43)\qquad \Gamma(f,g) = \int\Gamma(u_s,g_s)\cdot dB_s + \int\Gamma(f_s,h_s)ds.$$

Pour voir cela, on écrit les formules d'intégration par parties

$$(44)\qquad \begin{aligned} fg &= \int f_s dg_s+g_s df_s = \int g_s u_s\cdot dB_s + \int f_s h_s ds \\ fLg &= \int f_s d(Lg)_s+Lg_s df_s = \int Lg_s u_s\cdot dB_s + \int f_s Lh_s ds \\ gLf &= \int g_s(Lu_s-\tfrac{1}{2}u_s)\cdot dB_s + \int Lf_s h_s ds \quad \text{de même} \end{aligned}$$

Tout le problème consiste, comme plus haut, à justifier l'application des formules (36) à la fonction (44). Nous donnerons moins de détails que précédemment : le terme $\int f_s h_s ds$ ne crée pas de problème, en remarquant que $\sup_s|f_s|\in\underline{\underline{L}}^2$ et que $\|L(f_s h_s)\|_{\underline{\underline{L}}^1}\leq c\|f_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}\|h_s\|_{\underline{\underline{D}}^2}$. Il faut donc examiner seulement l'intégrale stochastique

$$\phi = \int g_s u_s\cdot dB_s$$

Pour le traiter, on raisonne comme dans la discussion précédente, en posant de plus $k_s=Lh_s$, $h_s'=\mu(h_s)-R(k_s)$, et en approchant (k_s) aussi par des processus étagés polynômiaux.

Récapitulons les trois formules obtenues :

THEOREME 7 . Considérons une v.a. de $\underline{\underline{D}}^2(L)$, du type

$$\varphi = \int u_s \cdot dB_s + \int h_s ds$$

avec $\int \|u_s\|^2_{\underline{\underline{D}}^2} ds < \infty$, $\int \|h_s\|_{\underline{\underline{D}}^2} ds < \infty$. La v.a. φ_s est l'intégrale correspondante sur $[0,s]$. On a alors

(45) $$\Gamma(\varphi,\varphi) = 2\int \Gamma(\varphi_s,u_s)\cdot dB_s + \int (2\Gamma(\varphi_s,h_s)+|u_s|^2+\Gamma(u_s',u_s))ds .$$

6. Notre but dans cette section va être de calculer l'opérateur carré du champ Γ. Nous commençons par introduire une notation, et démontrer un petit lemme technique. Soit $f\in\underline{\underline{D}}^1$ et soit $g=Lf$; nous dirons que $f\in\underline{\underline{D}}^{1+}$ si f et g appartiennent à $\underline{\underline{H}}^1(\mu)$ [j'ignore quelle relation cela peut avoir avec le fait que la martingale C^f appartient à $\underline{\underline{H}}^1(P^\mu)$ sur tout intervalle fini]. On vérifie sans peine que (P_t) est fortement continu sur $\underline{\underline{H}}^1$, et que $\underline{\underline{D}}^{1+}$ est le domaine de son générateur.

Nous appellerons polynômes trigonométriques sur E les combinaisons linéaires de "caractères" e_α , $\alpha\in E'$, et polynômes sur E les éléments de l'algèbre engendrée par les formes $\{\alpha,.\}$.

LEMME 8. L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans les espaces $\underline{\underline{D}}^p$ ($p>1$) et dans $\underline{\underline{D}}^{1+}$ (bien sûr, il s'agit ici de fonctions complexes).

DEMONSTRATION. Nous traitons le cas de $\underline{\underline{D}}^{1+}$, par exemple. Soit $f\in\underline{\underline{D}}^{1+}$; on peut la supposer d'intégrale nulle. Si l'on pose alors $Lf=\int v_s\cdot dB_s$, avec $(\int|v_s|^2ds)^{1/2}\in\underline{\underline{L}}^1$, on a $f=-\int R_{1/2}v_s\cdot dB_s$. Approchant alors (v_s) par des processus prévisibles (v_s^n) étagés du type (42), on sait que les f^n correspondantes convergent vers f dans $\underline{\underline{D}}^{1+}$, donc il suffit de savoir approcher les f^n elles mêmes. Or fixons n , et omettons le de la notation : $f=f^n$ est un polynôme $P(\{\alpha_1,.\},\dots,\{\alpha_k,.\})$ en un nombre fini de formes linéaires $\alpha_i\in E'$, que l'on peut supposer orthonormées pour q. Utilisant la propriété I.4, on est ramené à trouver sur $\mathbb{T}^k$ des polynômes trigenométriques Q_i tels que $P-Q_i$ converge vers 0 pour $i\to\infty$ dans tous les $\underline{\underline{L}}^p$ de la mesure gaussienne standard, de même que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Cela ne pose pas de problème.

Maintenant, nous calculons l'opérateur carré du champ pour un polynôme trigonométrique. Nous remarquons que, pour une fonction qui ne dépend que d'un nombre fini de formes linéaires $\{\alpha_i,.\}$, on est ramené à un calcul en dimension finie (pour un e_α , à un calcul en dimension 1!). Or en dimension finie, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et le mouvement brownien ont même opérateur carré du champ. Un calcul immédiat donne alors

(46) $$\Gamma(e_\alpha,e_\beta) = q(\alpha,\beta)e_{\alpha-\beta}$$

[On peut aussi arriver directement à cette formule, à partir des relations $P_t\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha e^{-t/2}}$ (10) ; $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha+\beta}e^{-q(\alpha,\beta)}$, d'où l'on tire

(47) $$L\varepsilon_\alpha = -\frac{1}{2}(\ i\{\alpha,.\}+q(\alpha))\varepsilon_\alpha$$

et (46) par la définition de Γ].

Soit $\xi\in E$; la translation $x \overset{\tau_\xi}{\mapsto} x+\xi$ ne transforme pas en général la mesure μ en une mesure équivalente, et on ne peut donc la faire opérer sur les classes pour l'égalité μ-p.p.. Mais supposons que ξ soit absolument continue, avec une dérivée (notée ξ' ou $\dot\xi$) de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La formule de Cameron-Martin nous dit que la loi image de μ est absolument continue par rapport à μ , avec la densité

(48) $$\exp(\ \int\dot\xi_s\cdot dB_s - \frac{1}{2}\int|\dot\xi_s|^2ds\ )$$

qui appartient à tout $\underline{\underline{L}}^p(\mu)$. Bien que $\dot\xi$ n'appartienne pas nécessairement à E',[1] rien n'empêche de noter $\int|\dot\xi_s|^2ds=q(\dot\xi)$, et $\varepsilon_{-i\dot\xi}$ cette densité.[1]

Nous notons alors $\nabla_\xi f$, de manière générale, la limite de $\frac{1}{t}(f\circ\tau_{t\xi}-f)$ lorsque $t\to 0$, en un sens qu'il faudra préciser à chaque fois (dans $\underline{\underline{L}}^p$, p.s., etc.). Par exemple, il est clair que, si $\alpha\in E'$

(49) $$\nabla_\xi(e_\alpha) = i\{\alpha,\xi\}e_\alpha \qquad (\ \{\alpha,\xi\} = \int\alpha_s\cdot d\xi_s = \int\alpha_s\cdot\dot\xi_s ds\ )$$

les quotients différentiels convergeant uniformément sur E. Par conséquent, si nous choisissons des ξ_n du type ci-dessus dont les dérivées forment une base orthonormale de $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\Gamma(e_\alpha,e_\beta) = \Sigma_n\ \nabla_{\xi_n}(e_\alpha)\overline{\nabla_{\xi_n}(e_\beta)}$$

Il en résulte que, pour tout polynôme trigonométrique f

$$\Gamma(f,f) = \Sigma_n\ |\nabla_{\xi_n}f|^2$$

et il en résulte que les opérateurs ∇_ξ (où $\dot\xi$ parcourt la boule unité de $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+,dx)$ se prolongent par continuité en des opérateurs bornés de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$ ($1<p\leqq 2$: cf (33) ; pour p=1 je ne sais rien). Soit g un polynôme trigonométrique ; pour tout k, on a $\Sigma_{n\leqq k}\ |\nabla_{\xi_n}f||\nabla_{\xi_n}g| \leqq \sqrt{\Gamma(f,f)}\sqrt{\Gamma(g,g)}$ lorsque f est un polynôme trigonométrique, puis lorsque f est quelconque dans $\underline{\underline{D}}^p(L)$. On peut alors faire tendre k vers l'infini, et définir l'opérateur linéaire continu $f\mapsto \Sigma_n\ \nabla_{\xi_n}f\overline{\nabla_{\xi_n}g}$ de $\underline{\underline{D}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^0$, (continu, parce que limite simple d'opérateurs continus), qui coïncide avec $f\mapsto\Gamma(f,g)$ lorsque f est un polynôme trigonométrique, donc pour

1. La complétion de E' par rapport à la norme q est $L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ (mais les formes linéaires correspondantes sont définies p.p. seulement). Ce complété $\bar{E}'$ s'envoie dans E par <u>intégration</u> en t, et son image est l'espace $\underline{\underline{CM}}$ des fonctions de Cameron-Martin, donnant les translations permises de Ω

$f \in \underline{\underline{D}}^p$. On prolonge ensuite à g de la même manière. Enonçons le résultat :

THEOREME 9.[1] Soit $\underline{\underline{CM}}$ le sous espace de E formé des applications $\xi \in E$, absolument continues et dont la dérivée appartient à $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^+)$. Soit (ξ_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{CM}}$ dont les dérivées forment une base orthonormale de $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

a) Pour tout $\xi \in \underline{\underline{CM}}$, ∇_ξ est un opérateur continu de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$ $(1<p\leq 2)$

b) Pour tout $f \in \underline{\underline{D}}^p$, $p>1$, on a

$$\Gamma(f,f) = \Sigma_n |\nabla_{\xi_n} f|^2 \tag{50}$$

DEMONSTRATION. $\underline{\underline{CM}}$ veut dire Cameron-Martin. Remarquons que nous avons vu un résultat bien plus fort que a) : pour $1<p\leq 2$ l'opérateur $f \mapsto (\nabla_{\xi_n} f)_{n\in N}$ est borné de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2)$.

Notons l'expression de l'adjoint formel de ∇_ξ :

LEMME 10. Soient f et g deux polynômes trigonométriques. Alors pour $\xi \in \underline{\underline{CM}}$ on a

$$\int (\nabla_\xi f)\bar{g}\,\mu = \int f(\overline{\nabla_\xi + \phi_\xi I)g}\,\mu \tag{51}$$

où ϕ_ξ est la fonction (définie μ-p.p.) $x \mapsto \{\dot\xi, x\} = \int \dot\xi_s \cdot dx_s$.

DEMONSTRATION. On part de la formule (49) pour obtenir

$$\int \nabla_\xi e_\alpha \overline{e_\beta}\,\mu = i\{\alpha,\xi\} e^{-\frac{1}{2}q(\alpha-\beta)} \qquad \text{et de même}$$

$$\int e_\alpha \overline{\nabla_\xi e_\beta}\,\mu = i\{\beta,\xi\} e^{-\frac{1}{2}q(\alpha-\beta)}$$

Tout revient donc à établir que

$$\int \{\dot\xi, .\} e_{\alpha-\beta}\,\mu = i\{\alpha-\beta,\xi\} e^{-\frac{1}{2}q(\alpha-\beta)}$$

Lorsque $\dot\xi$ est à support compact et à variation finie, $\{\dot\xi, .\}$ est une forme linéaire sur E entier, et il s'agit d'une formule classique sur les moments des mesures gaussiennes. On en déduit le cas général par un passage à la limite.

REMARQUE. La formule s'étend aussitôt au cas où $f \in \underline{\underline{D}}^2$, g étant un polynôme trigonométrique, puisque nous savons que ∇_ξ est un opérateur continu de $\underline{\underline{D}}^2$ dans $\underline{\underline{L}}^2$. Considérons maintenant des polynômes trigonométriques g_n qui convergent dans $\underline{\underline{D}}^2$ vers une fonction g ; du côté gauche, $\int \nabla_\xi f \overline{g_n}\mu$ converge vers $\int \nabla_\xi f \bar{g}\mu$; de même, du côté droit, $\int f \overline{\nabla_\xi g_n}\mu$ converge vers $\int f \overline{\nabla_\xi g}\mu$. Par différence, $\int f \phi \overline{g_n}\mu$ converge. Comme cela a lieu pour tout $f \in \underline{\underline{L}}^2$, nous en déduisons que ϕg appartient à $\underline{\underline{L}}^2$ pour tout $g \in \underline{\underline{D}}^2$, et l'opérateur de multiplication par ϕ_ξ est borné sur $\underline{\underline{D}}^2$ (non sur $\underline{\underline{L}}^2$, car ϕ_ξ appartient à tout $\underline{\underline{L}}^p$, p fini, mais n'est pas bornée).

1. Cet énoncé doit être considéré comme classique, mais je n'en connais pas l'origine exacte.

Nous concluons cette section sur un lemme analytique. Seul le premier résultat (à peu près évident) sera utilisé dans la suite.

LEMME 11. Soient $f \in \underline{\underline{D}}^2$, $\xi \in \underline{\underline{CM}}$. Notons ϕ_ξ la " fonction linéaire" $\int \dot{\xi}_s . dB_s$ sur E. Alors on a

1) $\nabla_\xi P_t f = e^{-t/2} P_t \nabla_\xi f$

2) $P_t(\phi_\xi f) = e^{-t/2} \phi_\xi P_t f + (1-e^{-t}) P_t \nabla_\xi f$.

DEMONSTRATION. Pour 1), supposons que f soit un polynôme trigonométrique. Ecrivons

$$e^{t/2}(P_t f(x+h\xi)-P_t f(x))/h = (\text{ cf. formule (8)})$$
$$= \frac{1}{he^{-t/2}} \int (f(e^{-t/2}(x+h\xi)+\sqrt{\dots}y)-f(e^{-t/2}x+\sqrt{\dots}y))\mu(dy)$$

Le côté droit tend vers $P_t \nabla_\xi f$, le côté gauche vers $e^{t/2}\nabla_\xi P_t f$. Le résultat s'étend ensuite à $\underline{\underline{D}}^2$ par densité.

Pour 2), nous pouvons supposer que $\int_0^\infty |\dot{\xi}_s|^2 ds = 1$, et nous borner au cas où f est un polynôme trigonométrique en un nombre fini de "formes linéaires" $\phi_{\xi_0} = \phi_\xi$, $\phi_{\xi_1}, \dots, \phi_{\xi_n}$, où $\dot{\xi}_0, \dots, \dot{\xi}_n$ sont orthogonaux et normés dans $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Par projection, nous sommes ramenés à un problème sur la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^{n+1}$: montrer que $P_t(x_0 f) = e^{-t/2} x_0 P_t f$ $+(1-e^{-t}) P_t D_0 f$, où $x_0, \dots, x_n$ sont les coordonnées, $D_0, \dots, D_n$ les dérivées partielles correspondantes. Il suffit de traiter le cas où f est de la forme $g(x_0)h(x_1, \dots, x_n)$, et on se trouve ramené à la dimension 1, où il s'agit de montrer que

$$\int g(e^{-t/2}x+\sqrt{1-e^{-t}}\,y)(e^{-t/2}x+\sqrt{\dots}\,y)\mu(dy) = e^{-t/2}x \int g(e^{-t/2}x+\sqrt{\dots}\,y)\mu(dy)$$
$$+ (1-e^{-t}) \int g'(e^{-t/2}x+\sqrt{\dots}\,y)\mu(dy)$$

qui se ramène à une intégration par parties triviale sur le dernier terme.

REMARQUE.[1] Soient ξ et η deux fonctions de Cameron-Martin. La << forme linéaire >> $\{\dot{\xi}, \omega\}$ vaut $\int_0^\infty \dot{\xi}_s . dB_s(\omega)$, donc $\{\dot{\xi}, \omega+h\eta\} - \{\dot{\xi}, \omega\} = hq(\dot{\xi}, \dot{\eta})$, et

$$\nabla_\eta \{\dot{\xi}, .\} = q(\dot{\xi}, \dot{\eta})$$

Introduisons alors les opérateurs

$$A_\xi f = \tfrac{1}{2}\{\dot{\xi}, .\}f \quad \text{(multiplication par la "forme linéaire"} \{\dot{\xi}, .\})$$
$$B_\xi f = \nabla_\xi f - \tfrac{1}{2}\{\dot{\xi}, .\}f \quad \text{(l'adjoint formel de } B_\xi \text{ est } B_{-\xi} \text{: lemme 10)}$$

Nous avons les relations de commutation suivantes, bien connues en mécanique quantique

$$[A_\xi, A_\eta] = 0 \quad , [A_\xi, B_\eta] = -\tfrac{1}{2}q(\dot{\xi}, \dot{\eta}) \quad , [B_\xi, B_\eta] = 0$$

et d'après le lemme 11 $[L, A_\xi] = \frac{1}{2}B_\xi$, $[L, B_\xi] = \frac{1}{2}A_\xi$.

1. Voir le livre de Hida " Brownian motion". Il faudrait adjoindre à cette liste d'opérateurs le "shift" θ_t du mouvement brownien lui même.

IV . O-U et L-P

Ce titre signifie que nous allons maintenant étudier $\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$ (et en particulier résoudre la question laissée en suspens dans la section III.5), au moyen de la théorie de Littlewood-Paley-Stein.

1. Nous définissons le semi-groupe de Cauchy (ou de Poisson) associé à (P_t), c'est à dire

$$Q_t = \int \mu_t(ds)P_s$$

où (μ_t) est le semi-groupe stable d'ordre 1/2 sur $\mathbb{R}_+$, caractérisé par sa transformée de Laplace :

(52) $$\int \mu_t(ds)e^{-ps} = e^{-t\sqrt{p}}$$

Nous noterons C le générateur infinitésimal de (Q_t). On a $C=-\sqrt{-L}$ au sens suivant : si $f\in\underline{\underline{D}}^2(L)$, alors $f\in\underline{\underline{D}}^2(C)$, Cf appartient à $\underline{\underline{D}}^2(C)$, et $C^2f=-L$ (cela se voit très bien, par exemple, sur la représentation spectrale du semi-groupe). On montre assez facilement - on peut utiliser pour cela la représentation explicite des mesures μ_t

$$\mu_t(ds) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2/4s} s^{-3/2} ds \qquad \text{(sém. X, p. 127)}$$

que, pour $t>0$, $f\in\underline{\underline{L}}^2$, Q_tf appartient à $\underline{\underline{D}}^2(L)$ et à $\underline{\underline{D}}^2(C)$, et que

(53) $$\frac{d}{dt}Q_tf = CQ_tf = \int \mu'_t(ds)P_sf$$

où μ'_t est une mesure bornée, non positive, sur $\mathbb{R}_+$ (dont la masse tend vers l'infini lorsque $t\to 0$).

Nous voulons appliquer le théorème de Littlewood-Paley-Stein . Que dit ce théorème ? Soit $h\in\underline{\underline{L}}^2$, et soit $h_t=Q_tf$ pour $t>0$. Définissons la fonction de Littlewood-Paley G_h par

$$G_h^2(x) = \int_0^\infty t\left(\frac{d}{dt}h(x,t)\right)^2 dt$$. Alors on a une équivalence de normes :

(54) $$c_p\|h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geqq \|G_h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geqq c'_p\|h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \qquad \text{pour } 1<p<\infty$$

où l'inégalité de droite suppose de plus que h soit " sans partie invariante" , c'est à dire que Q_th tende vers 0 dans $\underline{\underline{L}}^2$ pour $t\to\infty$. Plus généralement, si (h_n) est une suite de fonctions de $\underline{\underline{L}}^2$ satisfaisant chacune à la condition ci-dessus, on a la même équivalence entre

$$\|\,(\Sigma_n\, h_n^2\,)^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad \text{et} \quad \|\,(\Sigma_n\, G_{h_n}^2\,)^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

Ce théorème est susceptible d'une démonstration probabiliste : voir l'article récent de Varopoulos (J. Funct. Anal.,1980) et mes exposés sur la question dans les volumes X et XV du séminaire. Signalons aussi que cet énoncé est vrai avec P_t à la place de Q_t : c'est la forme originale de Stein, valable pour tout semi-groupe markovien symétrique, et apparemment plus profonde que la précédente, puisqu'elle a résisté jusqu'à maintenant aux tentatives de démonstration par les martingales !

2. Voici d'abord la démonstration formelle : il restera à vérifier les détails, ce que nous ferons dans un paragraphe ultérieur.

Nous partons d'une bonne fonction $f \in \underline{\underline{D}}^2(L)$, d'intégrale nulle, admettant une représentation

(55) $\quad f = \int u_s \cdot dB_s \;,\; Lf = \int v_s \cdot dB_s \qquad (u_s = -R_{1/2} v_s)$

Le processus (v_s) sera un très bon processus étagé, que nous choisirons plus tard. Nous poserons

(56) $\quad g = \int C u_s \cdot dB_s \quad , \quad \bar{g}_t = \int Q_t C u_s \cdot dB_s \quad , \; g_t = P_t g$

Nous partons du lemme 11, pour écrire, avec $\xi \in \underline{\underline{CM}}$

$$P_r \nabla_\xi f = e^{r/2} \nabla_\xi P_r f = \nabla_\xi \int P_r u_s \cdot dB_s$$

intégrons par rapport à la mesure bornée $\dot{\mu}_t(dr)$ (53)

$$\frac{d}{dt} Q_t \nabla_\xi f = \nabla_\xi \int \frac{d}{dt} Q_t u_s \cdot dB_s = \nabla_\xi \bar{g}_t$$

élevons au carré, intégrons en t, nous voyons apparaître à gauche la fonction $G^2_{\nabla_\xi f}$. Faisons parcourir maintenant à ξ une suite (ξ_n), telle que les dérivées $\dot{\xi}_n$ forment une base orthonormale de $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, et sommons en n . Du côté gauche, nous trouvons $\Sigma_n G^2_{\nabla_{\xi_n} f}$, et du côté droit, d'après le théorème 9, nous trouvons

$$\Sigma_n \int t(\nabla_{\xi_n} \bar{g}_t)^2 dt = \int t\Gamma(\bar{g}_t, \bar{g}_t) dt$$

Prenons la racine carrée, et appliquons du côté gauche le théorème de Littlewood-Paley-Stein. Nous obtenons le résultat suivant :

LEMME (à justifier en détail). Pour $1<p<\infty$, on a une équivalence de normes dans $\underline{\underline{L}}^p$ entre

(57) $\quad (\Sigma_n (\nabla_{\xi_n} f)^2)^{1/2} = \sqrt{\Gamma(f,f)} \quad$ et $\quad (\int t\Gamma(\bar{g}_t, \bar{g}_t) dt)^{1/2}$

à condition toutefois que chaque fonction $\nabla_{\xi_n} f$ soit sans partie invariante.

Il faut maintenant étudier le côté droit. Nous avons

$$\int P_r C u_s \cdot dB_s = e^{r/2} P_r \int C u_s \cdot dB_s = e^{r/2} P_r g$$
$$\bar{g}_t = \int Q_t C u_s \cdot dB_s = \int \mu_t(dr) e^{r/2} P_r g$$

et par conséquent, $\sqrt{\Gamma}$ se comportant comme une norme hilbertienne

$$\sqrt{\Gamma(\bar{g}_t, \bar{g}_t)} \leq \int \mu_t(dr) e^{r/2} \sqrt{\Gamma(g_r, g_r)} \qquad g_r = P_r g$$

La mesure μ_t étant de masse 1, nous en déduisons

$$\Gamma(\bar{g}_t,\bar{g}_t) \leq \int \mu_t(dr) e^r \Gamma(g_r,g_r)$$

Nous intégrons en t . On voit aussitôt que $\int t\mu_t(dr)dt = dr$ (regarder les transformées de Laplace). Donc

(58) $$\int t\Gamma(\bar{g}_t,\bar{g}_t)dt \leq \int e^r \Gamma(g_r,g_r)dr$$

Maintenant, nous allons utiliser une inégalité de Littlewood-Paley relativement triviale, établie dans le sém. X, p. 138 - nous y reviendrons. Elle nous dit que, pour toute fonction h, on a une inégalité du type

(59) $$\|h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geqq c_p \| \left(\int P_t\Gamma(h_t,h_t)dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad \text{pour } p \geqq 2$$
$$\geqq c_p \| \left(\int (P_t(\sqrt{\Gamma(h_t,h_t)}))^2 dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad \text{pour } 1<p\leqq 2 \text{ [1]}$$

avec $h_t = P_t h$. Maintenant, remarquons (lemme 11)

(60) $$\nabla_{\xi_n} P_t h_t = e^{-t/2} P_t \nabla_{\xi_n} h_t$$

Remplaçons ξ par ξ_n , posons pour un instant $\nabla_{\xi_n} h_t = j_n$, et utilisons l'inégalité suivante, où Θ est une mesure

$$\Theta((\Sigma_n j_n^2)^{1/2}) \geqq (\Sigma_n \Theta(j_n)^2)^{1/2}$$

avec $\Theta = P_t(x,.)$; il vient

$$P_t(\sqrt{\Gamma(h_t,h_t)}) = P_t((\Sigma_n j_n^2)^{1/2}) \geqq (\Sigma_n (P_t j_n)^2)^{1/2}$$
$$(\text{cf. } (60)) \quad = (\Sigma_n (\nabla_{\xi_n} P_t h_t \, e^{t/2})^2)^{1/2} = e^{t/2}\sqrt{\Gamma(h_{2t},h_{2t})}$$

donc dans les deux cas de (59), nous avons

(61) $$\|h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geqq c_p \| \left(\int e^t \Gamma(h_{2t},h_{2t})dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p}$$
$$= c'_p \| \left(\int e^{t/2}\Gamma(h_t,h_t)dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

Appliquant cela à $P_u h$ au lieu de h , nous avons (en récrivant c_p pour c'_p)

$$e^{u/4}\|h_u\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geqq c_p \| \left(\int_u^\infty e^{t/2}\Gamma(h_t,h_t)dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

Cela s'interprète ainsi : pour $u>0$, considérons le processus $J_t^u = I_{]u,\infty[}(t) e^{t/4} \sqrt{\Gamma(h_t,h_t)}$; alors sa norme dans $\underline{\underline{L}}^p(\mu, \underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+, ds))$ est majorée par $a_p e^{u/4} \|P_u h\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Mais alors, par convexité, la norme du processus $\int e^{u/4} J_t^u du$ est majorée par $a_p \int e^{u/2} \|P_u h\|_{\underline{\underline{L}}^p} du$. Autrement dit (en changeant de constante a_p et en prenant $h=g$)

$$\| \left(\int e^{t/2}(e^{t/4}-1)^2 \Gamma(g_t,g_t)dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq a_p \int e^{u/2} \|P_u g\|_{\underline{\underline{L}}^p} du$$

donc $$\| \left(\int_1^\infty e^t \Gamma(g_t,g_t)dt\right)^{1/2} \|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq a'_p \int e^{u/2} \|P_u g\|_{\underline{\underline{L}}^p} du$$

1. Et aussi pour p>2, car l'inégalité précédente est plus forte que celle-ci.

Quant à $\|(\int_0^1 e^t\Gamma(g_t,g_t)dt)^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$, comme e^t et $e^{t/2}$ sont comparables sur $[0,1]$, il n'est pas nécessaire de chercher plus loin que (61). Autrement dit, nous avons obtenu tout ce que la méthode de Littlewood-Paley peut nous donner :

LEMME . Si le lemme précédent est correct, $\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$ est majorée par une quantité de la forme

$$a\|g\|_{\underline{\underline{L}}^p} + b\int e^{u/2}\|P_u g\|_{\underline{\underline{L}}^p}du \tag{62}$$

où a et b sont des constantes (dépendant de p).

3. Maintenant, il va falloir montrer que $\|P_u g\|_{\underline{\underline{L}}^p}$ est à décroissance suffisamment rapide, et justifier les détails. Pour cela, nous allons avoir besoin de quelques résultats auxiliaires, que nous développons dans cette section.

Soit $f\in\underline{\underline{L}}^2$. Nous définissons par récurrence l'expression " f est d'ordre $\geq k$ " de la manière suivante : toute fonction est d'ordre ≥ 0 ; pour $k\geq 1$, f est d'ordre $\geq k$ si et seulement si $\mu(f)=0$ et, dans la représentation $f=\int u_s\cdot dB_s$, u_s est d'ordre $\geq k-1$ pour presque tout s. En fait nous n'aurons pas besoin des ordres élevés : le raisonnement précédent sera justifié lorsque f est d'ordre ≥ 2, et il faudra savoir se ramener à ce cas.

Voici une manière évidente de développer f suivant les ordres croissants : on écrit $J_0(f)=\mu(f)$, $K_0(f) = f-\mu(f)$. Puis on pose $K_0(f)=\int u_s\cdot dB_s$, $J_1(f) = \int\mu(u_s)\cdot dB_s$, $K_1(f)=\int u_s^1\cdot dB_s$, où $u_s^1=u_s-\mu(u_s)$. On pose alors $u_s^1 = \int u_{ss_1}^1\cdot dB_{s_1}$ (NB : comme u_s^1 est un vecteur, $u_{ss_1}^1$ est une matrice), de sorte que $K_1(f)=\int dB_s\cdot\int u_{ss_1}^1\cdot dB_{s_1}$, intégrale stochastique itérée (comme u_s^1 est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable, $u_{ss_1}^1=0$ pour $s_1>s$). On écrit alors $J_2(f)= =\int dB_s\cdot\int\mu(u_{ss_1}^1)\cdot dB_{s_1}$, $K_2(f)=\int dB_s\cdot\int u_{ss_1}^1\cdot dB_{s_1}$, où $u_{ss_1}^1=u_{ss_1}^1-\mu(u_{ss_1}^1)$. On écrit $u_{ss_1}^1 = \int u_{ss_1s_2}^1\cdot dB_{s_2}$ et on continue. Il est clair que ce que l'on fait ainsi, c'est développer f suivant les chaos de Wiener successifs : $J_0(f)$ est une constante, $J_1(f)$ une intégrale stochastique ordinaire (de processus déterministe), $J_2(f)$ une intégrale stochastique double (de processus déterministe), etc. Nous dirons qu'une fonction f est exactement d'ordre n si elle appartient au n-ième chaos de Wiener (la fonction 0 est exactement de tout ordre), et d'ordre $\leq n$ si elle appartient à la somme des n premiers chaos.

Nous aurons besoin de connaître les propriétés de continuité des projecteurs J_0, J_1 et K_1 . Tout d'abord, on a $\|J_0(f)\|_{\underline{\underline{L}}^p}$, $\|K_0(f)\|_{\underline{\underline{L}}^p}\leq\|f\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Ensuite, le lemme 1 (appliqué au noyau sous-markovien qui à f associe la fonction constante $\mu(f)$) montre que $\|J_1 f\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq \|K_0 f\|_{\underline{\underline{H}}^p}$ pour $1 \leq p < \infty$, donc pour $1<p<\infty$ J_1 est continu de $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p$. Il en est donc de même de $K_1 = I - J_0 - J_1$.

On sait depuis Wiener que toute fonction $f \in \underline{\underline{L}}^2$ admet un développement suivant les chaos de Wiener, convergent dans $\underline{\underline{L}}^2$

(63) $$f = \Sigma_{k \geq 0} f_k$$

sur lequel P_t opère de la manière suivante

64) $$P_t f = \Sigma_n e^{-tk/2} f_k \qquad (\text{ cf. } (20))$$

on connaît donc explicitement la décomposition spectrale de (P_t). Notons quelques autres formules qui en résultent aussitôt

(65)
$$\begin{aligned} Q_t f &= \Sigma_k e^{-t\sqrt{k/2}} f_k \\ Lf &= \Sigma_k - \frac{k}{2} f_k \qquad (\text{ si } f \in \underline{\underline{D}}^2(L)) \\ Cf &= \Sigma_k -\sqrt{k/2}\, f_k \qquad (\text{ si } f \in \underline{\underline{D}}^2(C)\ ) \\ Rf &= 2\Sigma_k \frac{1}{k} f_k \qquad \text{si } f_0 = 0 \\ Vf &= \sqrt{2}\, \Sigma_k \frac{1}{\sqrt{k}} f_k \qquad \text{si } f_0 = 0 \end{aligned}$$

(Rappelons que R est l'opérateur potentiel de (P_t) (cf. (22)) ; on désigne par V l'opérateur potentiel de (Q_t)).

A côté de ces opérateurs, nous en considérerons d'autres, définis seulement pour les fonctions d'ordre ≥ 1 : si $f = \int u_s \cdot dB_s$, nous poserons

(66) $$\tilde{P}_t f = \int P_t u_s \cdot dB_s = e^{t/2} P_t f$$

et à partir de là, nous définirons de la manière évidente $\tilde{Q}_t f = \int \mu_t(ds) \tilde{P}_s f$ etc. Nous aurons besoin de calculer ces opérateurs .

Nous dirons que f est <u>élémentaire</u> , si $f = \mu(f) + \int u_s \cdot dB_s$, où (u_s) est un processus prévisible étagé (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$)

(67) $$u_s = \Sigma_m a_m I_{]r_m, r_{m+1}]}(s) \qquad (r_0 = 0 < r_1 \ldots < r_M < \infty)$$

chaque v.a. a_m ayant des composantes a_m^i ($i \leq d$) dont chacune est une combinaison linéaire finie de polynômes d'Hermite en un nombre fini de formes linéaires $\{\alpha_j, \cdot\}$, les $\alpha_j \in E'$ étant à support dans $[0, r_m]$. Séparant les polynômes d'Hermite relatifs aux divers degrés :

$$u_s = \Sigma_{k \geq 0} u_s^k \quad , \quad u_s^k = \Sigma_m a_m^k I_{]r_m, r_{m+1}]}$$

avec $P_t a_m^k = e^{-tk/2} a_m^k$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} f &= \mu(f) + \Sigma_{k,m} a_m^k \cdot (B_{r_{m+1}} - B_{r_m}) \\ P_t f &= \mu(f) + \Sigma_{k,m} e^{-t/2} P_t a_m^k \cdot (B_{r_{m+1}} - B_{r_m}) \qquad (\text{ cf. } (20)) \end{aligned}$$

d'où il résulte sans peine que f admet un développement fini suivant les chaos de Wiener, avec

(68) $f_0=\mu(f)$, $f_k = \int u_s^{k-1}\cdot dB_s$ pour $k\geq 1$

Mais alors, il est facile de calculer $\tilde{P}_t f$: si f est d'ordre ≥ 1

(69)
$$\begin{aligned} \tilde{P}_t f &= \Sigma_{k\geq 1}\, e^{-t(k-1)/2} f_k \\ \tilde{Q}_t f &= \Sigma_{k\geq 1}\, e^{-t\sqrt{k-1/2}}\, f_k \\ \tilde{C} f &= \Sigma_{k\geq 1}\, -\sqrt{k-1/2}\, f_k \\ \tilde{V} f &= \sqrt{2}\, \Sigma_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k-1}} f_k \quad (\text{ f d'ordre } \geq 2 \text{ }) \end{aligned}$$

Toutes ces transformations sont données par des multiplicateurs opérant sur le développement de f suivant les chaos de Wiener. On voit que l'on a

(70) $$\tilde{C}f = TCf$$

où T correspond au multiplicateur nul au rang 0, et valant $\sqrt{1-1/k}$ au rang $k\geq 1$. Or on peut écrire $\sqrt{1-1/k} = 1 - \Sigma_{i\geq 1}\, a_i/k^i$, où les a_i sont positifs et de somme 1. Cela signifie que

$$T = I - \Sigma_{i\geq 1}\, a_i(\tfrac{R}{2})^i$$

Mais par ailleurs, l'opérateur R/2 est égal, sur une fonction d'ordre ≥ 1 $f=\int u_s\cdot dB_s$, à $\int \frac{1}{2}R_{1/2}u_s\cdot dB_s$, et d'après le lemme 1 cet opérateur est une contraction dans tout espace $\underline{\underline{H}}^p$ (ou plus exactement, dans $\underline{\underline{H}}^p_0$, sous-espace de $\underline{\underline{H}}^p$ formé des fonctions d'intégrale nulle). Donc T est aussi borné dans tout $\underline{\underline{H}}^p_0$, et comme les normes de $\underline{\underline{H}}^p$ et de $\underline{\underline{L}}^p$ sont équivalentes, T est borné dans $\underline{\underline{L}}^p_0$ pour $1<p<\infty$.

Lorsque f appartient à $\underline{\underline{L}}^2$, on sait calculer exactement les normes de P_tf, J_0f, J_1f en fonction des f_k, et il en résulte en particulier que l'opérateur $T_t=P_t(I-J_0-J_1)$ a une norme $\leq e^{-t}$ dans $\underline{\underline{L}}^2$. On sait que sa norme sur $\underline{\underline{L}}^p$ (p>2) est finie ; notons la c_p. Le théorème de Riesz-Thorin nous dit que si r>p, avec $\frac{1}{p}=\frac{u}{p}+\frac{1-u}{r}$, on a

$$c_p \leq e^{-ut} c_r^{1-u}$$

Prenant r grand, on peut rendre u arbitrairement voisin de 1. Remarquons d'autre part que, P_t étant une contraction de $\underline{\underline{L}}^p$, c_r peut être calculé en fonction de la norme de J_1 seul, et donc c_r peut être choisi indépendamment de t. Autrement dit, pour p>2, on a $\|T_t\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq Ae^{-ut}$, u étant arbitrairement voisin de 1 et A étant une constante (dépendant de u). Par dualité, T_t étant symétrique (J_0 et J_1 étant des projecteurs spectraux pour P_t), on a le même résultat par conjugaison pour p<2. En particulier :

(71) si f est d'ordre ≥ 2 , on a $\|P_tf\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq Ae^{-t(1-\varepsilon)}\|f\|_p$ ($\varepsilon>0$ arbitraire)

Les opérateurs de dérivation ∇_ξ ne sont pas donnés par des multiplicateurs, mais le lemme 11 nous dit que

$$(71)\qquad \begin{aligned} \nabla_\xi P_t f &= e^{-t/2} P_t \nabla_\xi f = e^{-t} \tilde{P}_t \nabla_\xi f \quad (\text{ f d'ordre } \geqq 0) \\ P_t \nabla_\xi f &= e^{t/2} \nabla_\xi P_t f = \nabla_\xi \tilde{P}_t f \quad (\text{ f d'ordre } \geqq 1) \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que <u>si</u> f <u>est d'ordre</u> $\geqq 2$, $P_t \nabla_\xi f = e^{t/2} \nabla_\xi P_t f$ tend vers 0 dans $\underline{\underline{L}}^2$ lorsque $t \to \infty$: en effet, on a

$$e^{t/2} P_t f = \Sigma_{k \geqq 2}\; e^{t/2} e^{-tk/2} f_k \text{ , qui tend vers 0 dans } \underline{\underline{L}}^2$$

et de même $e^{t/2} P_t Lf$ tend vers 0 dans $\underline{\underline{L}}^2$. Donc $e^{t/2} P_t f$ tend vers 0 dans $\underline{\underline{D}}^2(L)$, et nous savons (th. 9) que ∇_ξ est continu de $\underline{\underline{D}}^2(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^2$. Il en résulte que $Q_t \nabla_\xi f \to 0$ dans $\underline{\underline{L}}^2$ lorsque $t \to \infty$.

4. Nous reprenons maintenant, en les justifiant, les raisonnements formels du n°2. Nous considérons une fonction f, <u>élémentaire et d'ordre</u> $\geqq 2$, admettant donc un développement fini

$$f = \Sigma_{k \geqq 2}\; f_k$$

nous posons $g = \tilde{C} f$, et nous démontrons (le lemme est numéroté, parce que cette fois nous le prouvons)

LEMME 12. <u>On a pour</u> $1<p<\infty$ $\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq c_p \|g\|_{\underline{\underline{L}}^p}$.

DEMONSTRATION. Nous reprenons au début la démonstration formelle du n°2, en examinant les détails. Après (56), il n'y a pas de problème dans les dérivation sous le signe d'intégrale stochastique : le processus (u_s) est étagé, il s'agit de sommes finies. Dans l'application du théorème de L-P-S, formule (57), nous avons dit plus haut que (f étant d'ordre $\geqq 2$) les $\nabla_{\xi_n} f$ n'ont pas de partie invariante : donc l'équivalence de normes a bien lieu.

Nous laissons de côté pour l'instant les inégalités de martingales (59) : nous les établirons rapidement ci-dessous , pour la commodité du lecteur. La formule (62) est alors justifiée.

Comme la fonction g est d'ordre $\geqq 2$, nous avons d'après (71) avec $\varepsilon = 1/4$ $\|P_u g\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq A e^{-3u/4} \|g\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Si l'on porte cela du côté droit de (62), il reste simplement la norme de g, et le lemme 12 est établi.

DEMONSTRATION DES INEGALITES DE MARTINGALES.

Nous commençons par le cas $p>2$. Rappelons que h=g a un développement fini $h = \Sigma_k h_k$ suivant les chaos de Wiener - il importe peu ici que h soit d'ordre $\geqq 2$. Considérons sur l'espace $\hat{E} = E \times \mathbb{R}$ un processus de Markov $Z_t = (Y_t, x_t)$, produit du processus d'O-U (Y_t) par une translation uniforme (x_t) à vitesse unité vers la gauche. Soit $\hat{L}$ son générateur : formellement on a $\hat{L} = L^{\uparrow} - D_{\rightarrow}$ (L opérant "verticalement" à t fixé, et D "horizontalement") à x fixé) ; donc aussi l'opérateur carré du champ $\hat{\Gamma}$ se réduit à $\hat{\Gamma}(h,k)=\Gamma(h,k)$ opérant à t fixé. Ces résultats formels ne sont pas faciles à préciser, mais heureusement nous ne les utiliserons que dans un cas trivial : celui de la fonction

$$h(x,t) = \Sigma_k\, h_k(x)e^{-tk/2} \quad (\text{ somme \underline{finie} ; } t\in\,]-\infty,+\infty[\ )$$

qui se décompose en produits d'une fonction de x par une fonction de t. Nous obtenons alors les résultats suivants :

1) $M_t = h(Y_t,x_t)$ est une martingale locale continue
2) $\langle M,M\rangle_t = \int_0^t \gamma(Y_s,x_s)ds$ où $\gamma(x,t) = \Gamma(h_t,h_t)(x)$

Prenons comme loi initiale $\mu_a = \mu\otimes\varepsilon_a$, avec $a>0$, et arrêtons le processus à l'instant a . La martingale locale arrêtée vaut

$$M_t = P_{a-t}(Y_t,h) \text{ si } t<a \quad , \quad h(Y_a) \text{ si } t\geq a$$

qui est une vraie martingale, et les inégalités de Burkholder nous disent que, pour tout $p>1$

$$c_p\|M_a\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geq \|(\int_0^a \Gamma(h_{a-s},h_{a-s})\circ Y_s ds\ )^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

La loi de Y_a étant μ , du côté gauche nous avons simplement $\|h\|_{\underline{\underline{L}}^p}$.
Du côté droit, nous écrivons (comme $p\geq 2$) $\|\ \|^{1/2}_{\underline{\underline{L}}^{p/2}}$ et nous utilisons le fait que l'espérance conditionnelle diminue la norme dans $\underline{\underline{L}}^{p/2}$; nous minorons donc le côté gauche en remplaçant $\int_0^a \Gamma(\ )\circ Y_s ds$ par son espérance conditionnelle par rapport à Y_a , qui vaut (le semi-groupe étant symétrique)

$$\int_0^a P_{a-s}(Y_a,\Gamma(h_{a-s},h_{a-s})ds$$

la loi de Y_a étant μ, nous avons prouvé

$$c_p\ \|h\|_{\underline{\underline{L}}^p} \geq \|\ \int_0^a P_{a-s}(\cdot,\Gamma(h_{a-s},h_{a-s}))ds\ \|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

et il ne reste plus qu'à poser a-s=u et à faire tendre a vers $+\infty$.

Le cas $p<2$ est un peu plus délicat. On applique à la martingale (M_t) arrêtée à l'instant a, comme ci-dessus, la formule d'Ito pour la fonction de classe $\underline{\underline{C}}^2$ $F(u) = (\varepsilon+u^2)^{p/2}$ $(\varepsilon>0)$, puis on fait tendre ε vers 0. Après quelques calculs laissés au lecteur, il vient

$$E[|M_a|^p] = E[|M_0|^p + \frac{1}{2}\int_0^a p(p-1)|M_s|^{p-2}d\langle M,M\rangle_s\ ]$$

(1): on peut ! c'est une formule d'Ito pour fonction convexe.

autrement dit, la même chose que si l'on pouvait (1) directement appliquer la formule d'Ito à $F(u)=|u|^p$. Maintenant, nous écrivons $|M_s|=|h_{a-s}(Y_s)|$, $d\langle M,M\rangle_s = k^2_{a-s}\circ Y_s$, où $k_s = \sqrt{\Gamma(h_s,h_s)}$, et nous avons obtenu l'égalité suivante, après conditionnement par la valeur terminale :

(72) $$\mu(|h|^p) = \mu(|P_a h|^p) + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^a \langle \mu, P_{a-s}(|h_{a-s}|^{p-2}k^2_{a-s})\rangle ds$$

où d'ailleurs le P_{a-s} dans le dernier terme peut être supprimé à volonté, puisque μ est invariante. Posons $m_t=|h_t|^{p-2}k_t^2$, donc $k_t=|h_t|^{1-p/2}m_t^{1/2}$. D'après Schwarz

$$P_t(k_t)^2 \leqq P_t(|h_t|^{2-p})P_t(m_t) \leqq P_t(|h_t|)^{2-p}P_t(m_t) \quad \text{puisque } 1<p\leqq 2$$
$$\leqq P_t(m_t) \sup_t P_t(|h_t|)^{2-p}$$

La quantité qui nous intéresse est $\|J\|_{\underline{L}^p}$, avec $J^2=\int P_t(k_t)^2 dt$ (cf.(59)) Posons $h^{\times} = \sup_t P_t|h|$ (qui majore aussi $\sup_t P_t|h_t|$) : d'après le théorème ergodique de Stein,[1] on a $\|h^{\times}\|_{\underline{L}^p} \leq c_p\|h\|_{\underline{L}^p}$. L'inégalité précédente nous donne

$$J^2 \leqq (h^{\times})^{2-p} \int_0^{\infty} P_t(m_t)dt$$
$$J^p \leqq (h^{\times})^{(2-p)p/2} (\int_0^{\infty} P_t(m_t)dt)^{p/2}$$
$$\|J\|^p_{\underline{L}^p} \leqq \|h^{\times}\|^{(2-p)p/2}_{\underline{L}^p} E[\int P_t(m_t)dt]^{p/2}$$

d'après Hölder avec les exposants 2/2-p et 2/p . D'après (72), le dernier terme à droite est majoré par $c_p(\|h\|^p_{\underline{L}^p})^{p/2}$, et il reste enfin $\|J\|^p_{\underline{L}^p}\leqq c_p\|h\|^p_{\underline{L}^p}$, le résultat désiré.

REMARQUE. Nous avons recopié servilement le séminaire X, p. 135, démonstration elle même recopiée sur Stein.

On aurait pu se simplifier la vie pour $p<2$, car dans la démonstration du lemme, après (59), on a eu du mal à se débarrasser des P_t dans $P_t\Gamma$, $P_t\sqrt{\Gamma}$, alors qu'ici on vient de se fatiguer pour les introduire (il aurait été plus simple de considérer k_t au lieu de P_tk_t). Mais les P_t sont inévitables pour $p>2$, et il aurait fallu disjoindre les deux cas dans la démonstration du lemme, après (59).

La démonstration du lemme 12 est donc achevée, et la partie compliquée de l'exposé aussi.

5. Cette section contient les résultats intéressants de l'exposé. Nous commençons par un résultat qui correspond exactement, en dimension finie, à la théorie des transformations de Riesz.

THEOREME 13. Soit $f\in\underline{D}^2(L)$. Alors pour tout $p\in]1,\infty[$ on a une équivalence de norme dans $\underline{L}^p$ entre Cf et $\sqrt{\Gamma(f,f)}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de faire parcourir à f un ensemble dense dans $\underline{D}^2(L)$, et nous prendrons l'ensemble des fonctions élémentaires. D'autre part, nous pouvons supposer f d'intégrale nulle. Nous pouvons écrire comme après (67)

$$f = \int u_s \cdot dB_s = \Sigma_{k\geq 0} \int u_s^k \cdot dB_s = \{\alpha,\cdot\} + \Sigma_{k\geq 1} \int u_s^k \cdot dB_s$$

où $\alpha\in E'$ provient du terme de rang 0, et où le dernier terme, que nous

1. Qui se réduit en fait pour $p>1$ à l'inégalité de Doob.

noterons f', est d'ordre ≥ 2 . Pour simplifier, écrivons α au lieu de $\{\alpha,.\}$; nous avons

$$P_t\alpha = e^{-t/2}\alpha \ , \ Q_t\alpha = e^{-t/\sqrt{2}}\alpha \ , \ L\alpha = -\frac{1}{2}\alpha \ , \ C\alpha = -\alpha/\sqrt{2}$$

D'autre part, x^2-1 étant un polynôme d'Hermite, on a si $q(\alpha)=1$ $L(\alpha^2-1)=-(\alpha^2-1)$, donc $\Gamma(\alpha,\alpha)=L(\alpha^2)-2\alpha L(\alpha)=1$. D'où en général

(73) $$\Gamma(\alpha,\alpha) = q(\alpha)$$

Posons $k=Cf$; nous avons $k= -\alpha/\sqrt{2} + k'$, avec k' d'ordre ≥ 2. On voit donc que $\alpha = -\sqrt{2}\ J_1(k)$, et par conséquent

$$\|\alpha\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|k\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

Comme toutes les normes $\underline{\underline{L}}^p$ sont équivalentes sur le premier chaos de Wiener, nous avons aussi, en prenant la norme $\underline{\underline{L}}^2$

(74) $$\sqrt{q(\alpha)} \leq c_p\|k\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

D'autre part, d'après (70), nous avons $\|\tilde{C}f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|k\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Mais $\tilde{C}f=\tilde{C}f' = \int Cu_s.dB_s$ contrôle d'après le lemme 12 la norme dans $\underline{\underline{L}}^p$ de $\sqrt{\Gamma(f',f')}$. Et finalement, on a

$$\sqrt{\Gamma(f,f)} \leq \sqrt{\Gamma(f',f')} + \sqrt{\Gamma(\alpha,\alpha)} \ (=\sqrt{q(\alpha)} \ )$$

d'où la première moitié de l'équivalence,

$$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|k\|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad .$$

Pour établir l'autre moitié, nous admettons pour un instant[1] le résultat facile suivant : soit $\underline{\underline{L}}^p_0$ le sous-espace d'intégrale nulle de $\underline{\underline{L}}^p$. Alors V est borné de $\underline{\underline{L}}^p_0$ dans $\underline{\underline{L}}^p_0$. Nous voulons majorer $|\int kg\mu\ |$, où g parcourt la boule unité de $\underline{\underline{L}}^q$ (q est l'exposant conjugué de p), par une quantité de la forme $c_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Nous pouvons supposer g d'intégrale nulle, et poser h=-Vg, de sorte que Ch=g. Nous avons alors

$$|\int kg\mu| = |\int CfCh\mu| = |\int\Gamma(f,h)|_\mu \quad (\text{ polarisation de } \langle Cf,Cf\rangle_\mu = \langle C^2f,f\rangle_\mu = -\langle Lf,f\rangle_\mu = \int\Gamma(f,f)\mu \ )$$

$$\leq \int\sqrt{\Gamma(f,f)}\sqrt{\Gamma(h,h)}\mu$$

$$\leq \|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p\|\sqrt{\Gamma(h,h)}\|_q$$

On utilise alors la première moitié de l'équivalence, pour remplacer le dernier terme par $c_p\|Ch\|_q = c_p\|g\|_q \leq c_p$. Pour être tout à fait correct, il aurait fallu prendre g dans $\underline{\underline{D}}^2(L)$: peu importe. Le théorème est établi.

Démontrons maintenant le petit résultat sur V dont nous nous sommes servis : il s'agit des potentiels analogues aux potentiels de Riesz, et leur théorie est absolument triviale.

1. Voir le théorème 14

Nous désignons, pour $0<\varepsilon\leq 1$, par (μ_t^ε) le semi-groupe de convolution stable d'ordre ε sur $\mathbb{R}_+$, i.e.

$$\int \mu_t^\varepsilon(ds)e^{-ps} = e^{-tp^\varepsilon}$$

Il lui correspond un semi-groupe sur E , $Q_t^\varepsilon = \int \mu_t^\varepsilon(ds)P_s$ ($Q_t = Q_t^{1/2}$, $P_t = Q_t^1$) et nous noterons R^ε l'opérateur potentiel correspondant (on a $R^1=R$, $R^{1/2}=V$). Cet opérateur vaut $+\infty$ sur les constantes.

THEOREME 14. Si f appartient à $\underline{\underline{L}}_0^p$, R^ε existe et appartient à $\underline{\underline{L}}_0^p$, avec

(75) $$\|R^\varepsilon f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_{p,\varepsilon}\|f\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

DEMONSTRATION. On écrit $f=\int u_s \cdot dB_s$. Alors d'après (20) $R^\varepsilon f = \int A^\varepsilon u_s \cdot dB_s$, où $A^\varepsilon = c_\varepsilon \int s^{\varepsilon-1}e^{-s/2}P_s ds$; A^ε est un noyau borné, et on applique le lemme 1.

REMARQUE. On peut montrer, d'après les "inégalités de Sobolev logarithmiques", que les R^ε améliorent très légèrement l'intégrabilité, appliquant $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p \log^{p\varepsilon}\underline{\underline{L}}$: voir l'exposé dans ce même volume, sur ce sujet.

Nous pouvons maintenant résoudre complètement la question posée au paragraphe III, n°4, formule (33) : les espaces $\underline{\underline{D}}^p$ et $\underline{\underline{K}}^p$ de Stroock sont identiques.

COROLLAIRE 15. Soit $f\in\underline{\underline{D}}^2(L)$, d'intégrale nulle. Alors on a

(76) $$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|Lf\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que Cf=VLf, et d'appliquer les théorèmes 13 et 14.

En particulier, les inégalités $|\nabla_\xi f| \leq \sqrt{\Gamma(f,f)}$ si $q(\dot{\xi})\leq 1$ entraînent que les ∇_ξ sont des opérateurs continus sur $\underline{\underline{D}}^p(L)$ pour tout p, complétant ainsi le théorème 9, a) - ils sont même continus sur $\underline{\underline{D}}^p(C)$. Utilisant le lemme 10, on voit alors que l'opérateur de multiplication par $\{\dot{\xi},.\}$ est continu de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$, de $\underline{\underline{D}}^p(C)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$ (toujours pour $1<p<\infty$) : pour $\underline{\underline{D}}^p(L)$, cela résulte des inégalités de Sobolev logarithmiques, la fonction $\{\dot{\xi},.\}$ étant une v.a. gaussienne, donc exponentiellement intégrable.

Comme en dimension finie, on a mieux : reprenons l'opérateur T de la formule (70), et remarquons que T transforme les fonctions d'ordre ≥ 1 en fonctions d'ordre ≥ 2, avec $\widetilde{\nabla}T = V - J_1V$

THEOREME 16. Soient ξ et η deux éléments de $\underline{\underline{CM}}$, avec $q(\dot{\xi})\leq 1$, $q(\dot{\eta})\leq 1$. L'opérateur $\nabla_\xi\nabla_\eta$ (défini sur les polynômes trigonométriques) est prolongeable à $\underline{\underline{D}}^p(L)$, avec

(77) $$\|\nabla_\xi\nabla_\eta f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p\|f\|_{\underline{\underline{D}}^p(L)}$$

où c_p dépend seulement de p.

DEMONSTRATION. On peut supposer f d'intégrale nulle. Ecrivant $f=J_1f+f'$, on constate que $\|f\|_{\underline{\underline{D}}^p(L)}$ contrôle $\|f'\|_{\underline{\underline{D}}^p(L)}$, et que $\nabla_\xi\nabla_\eta$ a même valeur sur f et sur f'. Il suffit donc de traiter le cas où f est d'ordre $\geqq 2$.

D'après le théorème 13, les opérateurs $\nabla_\xi V$, $\nabla_\eta V$, sont bornés de $\underline{\underline{L}}_0^p$ dans $\underline{\underline{L}}_0^p$, avec des normes dépendant seulement de p. Donc si f est une fonction d'ordre $\geqq 2$, on a

$$\|\nabla_\xi V\nabla_\eta VTf\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq c_p\|f\|_{\underline{\underline{L}}^p}$$

$\underset{\sim}{T}$ étant borné (voir après (70)). Mais d'après (71) on a $V\nabla_\eta=\nabla_\eta\tilde{V}$, puis $\tilde{V}VT = R$ sur les fonctions d'ordre $\geqq 2$, soit

$$\|\nabla_\xi\nabla_\eta Rf\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leqq c_p\|f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad \text{si f est d'ordre } \geqq 2$$

Remplaçant f par Lf, on obtient le résultat désiré.

6. Nous allons examiner maintenant quelles conséquences entraînent les résultats précédents en dimension finie.

Nous nous bornons au cas où d=1. Nous allons nous intéresser seulement à des v.a. sur E de la forme

$$(78) \qquad f(x) = \mathbf{f}(B_1(x),B_2(x)-B_1(x),\dots,B_n(x)-B_{n-1}(x))$$

où $\mathbf{f}$ est une fonction sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons que $B_k(x)-B_{k-1}(x)=\{\alpha_k,x\}$, où $\alpha_k=I_{]k-1,k]}$; les α_k forment un système orthonormal dans $\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+)$, et la loi image de μ par l'application linéaire $(\{\alpha_k,\cdot\})_{k=1,\dots,n}$ est la mesure $\boldsymbol{\mu}$ gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$. Si f correspond à $\mathbf{f}$ par (78), P_tf correspond à $\mathbf{P}_t\mathbf{f}$, où $(\mathbf{P}_t)$ est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, si nous prenons $\xi_k(s)=0$ pour $s\leqq k-1$, $s-k+1$ pour $k-1\leqq s\leqq k$, 1 pour $s\geqq k$, nous avons $\xi_k\in\underline{\underline{CM}}$, $q(\xi_k)=1$, et l'application à f de l'opérateur ∇_{ξ_k} correspond à l'application à $\mathbf{f}$ de l'opérateur de dérivée partielle D_k.

Abandonnons maintenant les lettres grasses, et représentons la fonction f (ex $\mathbf{f}$) sur $\mathbb{R}^n$, par son développement d'Hermite, supposé fini pour simplifier

$$(79) \qquad f = \Sigma_{k\geqq 1}\ H_k(f)$$

où $H_k(f)$ est un polynôme appartenant à la valeur propre $-\frac{k}{2}$ de L .

Nous supposons essentiellement ici que f est d'intégrale nulle, de sorte que le développement commence à k=1.

Notre résultat sur les " potentiels de Riesz" va signifier ici que les opérateurs R^ε, transformant f en

$$(80) \qquad f^{(\varepsilon)} = \Sigma_{k\geqq 1}\ \frac{1}{k^\varepsilon}H_k(f) \qquad (0<\varepsilon\leqq 1)$$

appliquent $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p$.

Ensuite, le théorème 13 nous permet d'introduire le système des " transformées de Riesz" de f, c'est à dire des fonctions $D_i Vf$ $(V=R^{1/2})$. Si on les note $\rho_i f$, on a

$$(81)\qquad \|(\Sigma_i(\rho_i f)^2)^{1/2}\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq c_p \|f\|_{\underline{\underline{L}}^p} \quad (\ c_p \text{ ne dépend pas de la dimension } n\ )$$

Lorsque n=1, on peut expliciter ρf : écrivons $f=\Sigma_{k\geq 1}\, a_k H_k$, où H_k est <u>le</u> polynôme d'Hermite usuel de degré k. Alors
$Vf = \Sigma_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} a_k H_k$, et en dérivant et en tenant compte de la relation $DH_k = kH_{k-1}$ (qui se voit aussitôt sur la fonction génératrice) on trouve $\rho f = \Sigma_{k\geq 1} \sqrt{k}\ a_k H_{k-1}$. Cet opérateur est connu depuis longtemps (voir B. Muckenhoupt. Hermite conjugate expansions. TAMS 139,1969, 243-260).

REMARQUE. Le théorème 13 permet aussi d'établir des théorèmes de commutateurs, en dimension infinie, et aussi en dimension finie comme on vient de le voir. Voici ce que l'on obtient sans aucun mal (mais qui n'a peut être pas d'intérêt non plus).

THEOREME 17 . <u>Soient</u> p <u>et</u> q <u>deux exposants conjugués finis, et soient</u> f <u>et</u> g <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{D}}^p(L)$ <u>et</u> $\underline{\underline{D}}^q(L)$ <u>respectivement. Alors on a</u>

$$(82)\qquad \|L(gf)-gLf\|_{\underline{\underline{L}}^1} \leq c_p \|f\|_{\underline{\underline{D}}^p(C)} \|g\|_{\underline{\underline{D}}^q(L)}$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons la différence au premier membre comme $fLg + \Gamma(f,g)$. Le premier terme se majore par $\|f\|_{\underline{\underline{L}}^p}\|g\|_{\underline{\underline{D}}^q(L)}$ dans $\underline{\underline{L}}^1$.
Le second se majore par $\sqrt{\Gamma(f,f)}\sqrt{\Gamma(g,g)}$, auquel on applique l'inégalité de Hölder et les théorèmes 13 (pour f) et 15 (pour g).

7. RECHERCHE D'UN ESPACE DE FONCTIONS-TEST

Supposons que nous soyons en dimension finie, avec la mesure gaussienne standard μ , et le laplacien d'Ornstein-Uhlenbeck correspondant L. Définissons l'espace $\underline{\underline{S}}(\mu)$ comme l'ensemble des fonctions f telles que $f\in\underline{\underline{D}}^2(L)$, $Lf\in\underline{\underline{D}}^2(L)$, $L^2f\in\underline{\underline{D}}^2(L)$... ce qui revient à dire que toutes les distributions L^nf (au sens usuel) sont dans $\underline{\underline{L}}^2(\mu)$ (donc f est C^∞ au sens usuel). Si l'on développe f suivant les espaces propres de L dans $\underline{\underline{L}}^2(\mu)$: $f = \sum_k f_k$ avec $Lf_k=-\frac{k}{2}f$, la condition $f\in\underline{\underline{S}}(\mu)$ signifie que la suite $(\|f_k\|)$ est à décroissance rapide. Soit $g(x)=f(x)\exp(-|x|^2/4)$, $g_k(x)=f_k(x)\exp(-|x|^2/4)$; alors $g\in\underline{\underline{L}}^2(dx)$, et $Hg_k=-(k+\frac{1}{2})g_k$, où H est l'opérateur $\Delta-\frac{1}{4}|x|^2 I$ (oscillateur harmonique).
La condition de décroissance rapide entraîne qu'en fait g appartient à

l'espace $\underline{\underline{S}}$ de Schwartz usuel, et l'on peut montrer (en s'appuyant sur des lemmes de Sobolev : voir B.Simon, Distributions and their Hermite expansions, J. of Math. Physics 12, 1971, 140-147) que $S(\mu)$ est exactement l'ensemble des fonctions de la forme $ge^{|x|^2/4}$, où g parcourt l'espace $\underline{\underline{S}}$ usuel. Noter que $\underline{\underline{S}}(\mu)$ n'est pas une algèbre : il contient la fonction $e^{|x|^2/8}$, mais non son carré.

Le problème que nous voulons poser est celui du choix d'un bon espace de << fonctions-test >> en dimension infinie. Un choix naturel me semble être le suivant :

DEFINITION. Sur l'espace du mouvement brownien, on notera $\underline{\underline{T}}$ l'espace des fonctions $f\in\bigcap_p \underline{\underline{D}}^p(L)$ telles que $Lf\in\bigcap_p \underline{\underline{D}}^p(L)$, $L^2f\in\bigcap_p \underline{\underline{D}}^p(L)$...

Par exemple, si $\xi_1,\dots,\xi_n$ sont des << formes linéaires >> sur Ω (définies p.p.) du type $\omega\mapsto\int_0^\infty u_s.dB_s(\omega)$, avec $u_1,\dots,u_n\in\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$, et si F est une fonction C^∞ à croissance lente sur $\mathbb{R}^n$ ($|D^\alpha F|$ est majoré par un polynôme pour tout multiindice α), alors $F(\xi_1,\dots,\xi_n)$ appartient à $\underline{\underline{T}}$.

L'intérêt de cet espace vient du théorème suivant (probablement connu des physiciens depuis les travaux de Nelson).

THEOREME 18. Soit $\xi\in\underline{\underline{CM}}$ (autrement dit, $\dot\xi\in\underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$). Alors $\underline{\underline{T}}$ est stable par l'opérateur de dérivation ∇_ξ , et par l'opérateur M_ξ de multiplication par la "forme linéaire" $\{\dot\xi,\omega\}=\int_0^\infty \dot\xi_s.dB_s(\omega)$.

DEMONSTRATION. Définissons l'espace $\underline{\underline{D}}^p(L^n)$ comme l'espace des fonctions f "n fois dérivables dans $\underline{\underline{L}}^p$" : $f\in\underline{\underline{D}}^p(L),\dots\ L^{n-1}f\in\underline{\underline{D}}^p(L)$, avec la norme $\sum_0^n \|L^kf\|_{\underline{\underline{L}}^p}$. Nous supposons ici $p\geq 2$, donc $Lf,\dots,L^nf$ se calculent au moyen de multiplicateurs sur le développement $f=\sum f_k$ de f suivant les chaos de Wiener, et l'on a $f=f_0 + R^n(L^nf)$; comme R est borné de $\underline{\underline{L}}^p_0$ dans lui-même, on voit que la norme de $\underline{\underline{D}}^p(L^n)$ peut être remplacée par $|f_0|+\|L^nf\|_p$. Nous allons montrer que ∇_ξ et M_ξ sont des opérateurs bornés de $\underline{\underline{D}}^p(L^n)$ dans $\underline{\underline{D}}^p(L^{n-1})$, et cela suffira.

Approchant L^nf dans $\underline{\underline{L}}^p$ par des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de formes linéaires,(1) nous pouvons nous ramener au cas où f elle même est fonction C^∞ d'un nombre fini de "formes linéaires", parmi lesquelles figure la fonction $j=\{\dot\xi,.\}$. Il n'y a aucune difficulté alors à écrire des expressions telles que $L^n(\nabla_\xi f)$, qui a priori n'ont pas de sens : il s'agit en fait, par projection, d'opérateurs différentiels ordinaires portant sur des fonctions C^∞ .

Démontrons le théorème pour n=1. Soit $f\in\underline{\underline{D}}^p(L)$. Alors $Cf=\nabla Lf\in\underline{\underline{L}}^p$ (th. 14), donc $\sqrt{\Gamma(f,f)}\in\underline{\underline{L}}^p$ (th. 13). D'après le th. 9, incluant un multiple

1. Rappelons que la coordonnée B^i_t est la forme linéaire correspondant à $\dot\xi^j_t=I_{[0,t]}$ si $j=i$, 0 sinon

de ξ dans une base orthonormale, on voit que $\nabla_\xi f \in \underline{\underline{L}}^p$. Plus précisément, que l'on a un opérateur borné de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$.

D'autre part, notons j la forme linéaire $\{\xi,.\}$. D'après l'inégalité de Sobolev logarithmique, établie ailleurs dans ce volume, on peut affirmer en fait que f appartient à l'espace d'Orlicz $\underline{\underline{L}}^p\log^p\underline{\underline{L}}$, donc $|f|^p$ appartient à $\underline{\underline{L}}^1\log^p\underline{\underline{L}}$. Pour vérifier que $M_\xi f \in \underline{\underline{L}}^p$, c'est à dire que $|j|^p|f|^p$ est intégrable, il suffit de vérifier que $|j|^p$ appartient à l'espace d'Orlicz dual. Or il est classique (voir par exemple Nobelis-Nanopoulos, Sém. XII p. 573 et bas de la page 606) que ce dual est l'espace d'Orlicz $\underline{\underline{L}}\exp(\underline{\underline{L}}^{1/p})$. Autrement dit, il suffit de vérifier que pour λ assez grand $E[|j|^p\exp(|j|/\lambda)]<\infty$, ce qui a lieu en fait pour tout $\lambda>0$. Ici encore, il faudrait être plus précis et dire que M_ξ est un opérateur borné de $\underline{\underline{D}}^p(L)$ dans $\underline{\underline{L}}^p$.

On passe au cas général par récurrence sur n, que nous illustrerons sur le cas n=2. Introduisons les opérateurs $A_\xi = \frac{1}{2}M_\xi$, $B_\xi=\nabla_\xi - \frac{1}{2}M_\xi$. Nous savons (cf. la remarque après le lemme 11) que

$$[L,A_\xi] = \frac{1}{2}B_\xi \ , \ [L,B_\xi] = \frac{1}{2}A_\xi$$

Soit $f\in\underline{\underline{D}}^p(L^2)$; alors f, Lf, appartiennent à $\underline{\underline{D}}^p(L)$, donc $A_\xi f, B_\xi f, A_\xi Lf, B_\xi Lf$ appartiennent à $\underline{\underline{L}}^p$ d'après le résultat précédent. Utilisant les commutateurs, on voit que ceux-ci appartiennent à $\underline{\underline{L}}^p$, donc aussi $LA_\xi f$, $LB_\xi f$, et en définitive $A_\xi f$, $B_\xi f$ appartiennent à $\underline{\underline{D}}^p(L)$, le résultat cherché.

Maintenant, faisons une conjecture. Nous allons passer la fin de cet exposé à en établir les premières étapes.

CONJECTURE. $\underline{\underline{T}}$ <u>est une algèbre</u>.

Cela découlera de la conjecture plus précise suivante :

CONJECTURE. Si $f\in\underline{\underline{D}}^{2p}(L^n)$, $g\in\underline{\underline{D}}^{2p}(L^n)$, $1<p<\infty$, alors $fg\in\underline{\underline{D}}^p(L^n)$.

DEMONSTRATION pour n=1. Nous pouvons supposer que f et g sont des polynômes trigonométriques pour que tout ait un sens : le problème est de majorer les normes dans $\underline{\underline{L}}^p$ de fg et de L(fg). Pour fg, c'est Hölder . Pour L(fg), nous écrivons $L(fg) = fLg+gLf+\Gamma(f,g)$; les deux premiers termes marchent par Hölder. Nous majorons le dernier

$$\|\Gamma(f,g)\|_{\underline{\underline{L}}^p} \leq \|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_{\underline{\underline{L}}^{2p}}\|\sqrt{\Gamma(g,g)}\|_{\underline{\underline{L}}^{2p}}$$

à une constante près, nous pouvons majorer $\|\sqrt{\Gamma}\|$ par $\|C\| = \|VL\|$ (th. 13 et 14), et c'est terminé.

DEMONSTRATION pour n = 2 . Ici nous allons travailler dans le cas où f=g ; le cas général s'en déduit par polarisation. Comme plus haut, on peut supposer que f est un polynôme trigonométrique. Il s'agit de majorer les normes dans $\underline{\underline{L}}^p$ de f^2, $L(f^2)$, $L^2(f^2)$ en fonction des normes dans $\underline{\underline{L}}^{2p}$ de f, Lf, L^2f . Pour les deux premières c'est déjà fait. Pour la dernière, nous écrivons $L^2(f^2)= L(L(f^2))=L(2fLf+\Gamma(f,f))$, et le premier terme est déjà connu par la première étape. Reste le dernier terme, $L\Gamma(f,f)$.

Pour cela, nous allons utiliser le théorème 9 : $\Gamma(f,f)=\sum_n(\nabla_{\xi_n}f)^2$: comme L est un opérateur fermé, il nous suffit de démontrer que $\sum L(\nabla_{\xi_n})^2$ a une limite dans $\underline{\underline{L}}^p$. Nous écrivons (indice n omis)

$$L(\nabla_\xi f)^2= 2\ \nabla_\xi f\ L\nabla_\xi f + \Gamma(\nabla_\xi f,\nabla_\xi f)$$

Dans le premier terme, nous utilisons la commutation $L\nabla_\xi=\nabla_\xi L+ \frac{1}{2}\nabla_\xi$ pour transformer l'expression en

$$2\ \nabla_\xi f\ \nabla_\xi Lf + (\nabla_\xi f)^2 + \Gamma(\nabla_\xi f,\nabla_\xi f)$$

et nous sommons en n : le premier terme va nous donner $2\Gamma(f,Lf)\in\underline{\underline{L}}^p$, le second $\Gamma(f,f)\in\underline{\underline{L}}^p$. Le troisième est positif , et comme l'intégrale du tout reste égale à 0, <u>le troisième terme converge dans</u> $\underline{\underline{L}}^1$, et nous pouvons écrire une formule que je trouve intéressante

$$L\Gamma(f,f) = 2\Gamma(f,Lf) + \Gamma(f,f)+ \sum_n \Gamma(\nabla_{\xi_n} f,\nabla_{\xi_n} f) \tag{83}$$

qui donne des inégalités, sachant simplement que le dernier terme est positif (par exemple, en intégrant :$2E[\Gamma(f,Lf)]=-E[fL^2f+(Lf)^2]= -2E[(Lf)^2]$, $E[\Gamma(f,f)]=-E[fLf]$, d'où $2E[(Lf)^2]\geq -E[fLf]=E[(Cf)^2]$, qui est connue : elle exprime que la norme de V dans $\underline{\underline{L}}^2$ est $\leq\sqrt{2}$, qui se voit sur les multiplicateurs d'Hermite).

Les deux premiers termes à droite de (83) sont dans $\underline{\underline{L}}^p$, avec des normes bornées en fonction des normes de f, Lf, L^2f dans $\underline{\underline{L}}^{2p}$. Reste donc le dernier terme.

Pour cela, il nous faut un lemme étendant les théorèmes 13 et 14 aux espaces de Hilbert, extension d'ailleurs tout à fait classique. Soit A une application d'un $\underline{\underline{L}}^p$ dans un $\underline{\underline{L}}^p$; notons $\underline{\underline{A}}$ l'extension de A aux <u>suites</u> de fonctions : si $\underline{\underline{f}}=(f_n)$ est une suite d'éléments de $\underline{\underline{L}}^p$, $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{f}})$ est la suite (Af_n). Alors <u>si A est borné de</u> $\underline{\underline{L}}^p$ <u>dans</u> $\underline{\underline{L}}^{p'}$, $\underline{\underline{A}}$ est borné de $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2)$ dans $\underline{\underline{L}}^{p'}(\ell^2)$, c.à.d.

$$\|(\Sigma\ (Af_n)^2)^{1/2}\|_p \leq c\,\|(\Sigma\ f_n^2\ )^{1/2}\|_p \qquad (1\leq p<\infty\ )^{(1)}$$

La démonstration est très simple : il suffit de raisonner sur des suites finies. Soit $(\varepsilon_n(t))$ le système des fonctions de Rademacher (jeu de pile ou face !) sur [0,1]. On écrit que A est borné de $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p$

---

1. Ce résultat peut être précisé, avec une démonstration plus compliquée. Cf. Stein, Singular integrals... exercice 7.12 p. 115.

pour la fonction (somme finie) $\Sigma_n \varepsilon_n(t)f_n$, soit

$$\|\Sigma_n\varepsilon_n(t)Af_n\|_p^p \leqq C\|\Sigma_n \varepsilon_n(t)f_n\|_p^p$$

on intègre en t, et on applique l'inégalité de Khintchine. Plus généralement, l'inégalité de Khintchine (qui n'est qu'une inégalité de Burkholder !) s'applique dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$

$$\int \|\Sigma_n \varepsilon_n(t)a_n\|_{\mathcal{H}}^p dt \sim (\Sigma_n \|a_n\|^2)^{1/2} \quad (a_n \in \mathcal{H},\ 1 \leqq p < \infty)$$

et on voit que si A est lui même un opérateur $f \mapsto (A_k f)_k$ borné de $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2)$, alors l'opérateur $(f_n) \mapsto (A_k f_n)_{k,n}$ est borné de $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2)$ dans $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2 \otimes \ell^2)$ (suites doubles de carré sommable)

Nous pouvons maintenant étendre le th. 13. Celui-ci peut s'énoncer de la manière suivante : l'opérateur A qui à f d'intégrale nulle associe la suite $(\nabla_{\xi_k} Vf)$ ou $(\nabla_{\xi_k} Rf)$ est borné de $\underline{\underline{L}}^p$ dans $\underline{\underline{L}}^p(\ell^2)$. Donc on a aussi

$$\|(\Sigma(\nabla_{\xi_k} Rf_n)^2)^{1/2}\|_p \leqq c\|(\Sigma\ f_n^2)^{1/2}\|_p$$

Soit $f \in \underline{\underline{D}}^p(L^2)$; prenons $Rf_n = \nabla_{\xi_n} f$, soit $f_n = -L\nabla_{\xi_k} f = -\nabla_{\xi_k} Lf - \frac{1}{2}\nabla_{\xi_k} f$
Nous obtenons

$$\|(\Sigma_{kn}(\nabla_{\xi_k}\nabla_{\xi_n} f)^2)^{1/2}\|_p \leqq c(\|\sqrt{\Gamma(\tfrac{1}{2}f+Lf,\ \tfrac{1}{2}f+Lf)}\|_p$$

et la fonction à l'intérieur de $\|\ \|_p$ à gauche est exactement le dernier terme de (83).

Il est clair que l'on a des majorations analogues pour $\sqrt{\Sigma(\nabla_{\xi_j}\nabla_{\xi_k}\nabla_{\xi_n} f)^2}$, $f \in \underline{\underline{D}}^p(L^3)$, etc. Ce qui m'arrête dans la démonstration, c'est plutôt la complexité combinatoire des calculs nécessaires pour se réduire à cette forme, et ce volume XVI est déjà assez gros.

REFERENCES

MALLIAVIN (P.). Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Conf. on Stoch. Diff. Eqs., Kyoto 1976, p. 195-263. New York, Wiley 1978.

STROOCK (D.). The Malliavin Calculus and its applications to 2d order parabolic differential equations. Math. Systems Th. 13, 1981, p. (partie II non encore parue).