SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
DENIS FEYEL
GABRIEL MOKOBODZKI

Intégrales de capacités fortement sous-additives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 8-28
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__8_0>

INTEGRALES DE CAPACITES FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

par C. Dellacherie, D. Feyel et G. Mokobodzki

Après deux paragraphes introductifs, sur le contenu desquels nous reviendrons plus loin, cet exposé(1) reprend le travail [14] de Mokobodzki en lui apportant des améliorations notables. Rappelons d'abord, sous une forme appropriée pour la suite, quels étaient les résultats essentiels de [14]. Soient E un espace métrisable compact, $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet et F un "compact aléatoire", i.e. un élément de la tribu produit $\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{F}}$ à coupes F_ω compactes. Posons, pour $A\in\underline{\underline{B}}(E)$,

$$C_\omega(A)=0 \text{ si } A\cap F_\omega=\emptyset \quad , \quad C_\omega(A)=1 \text{ sinon}$$

puis, $\omega\to C_\omega(A)$ étant comme chacun sait mesurable,

$$C(A) = \int C_\omega(A)\,P(d\omega) = P[\pi((A\times\Omega)\cap F]$$

où π est la projection sur Ω. Chaque C_ω est une capacité fortement sous-additive (et même alternée d'ordre infini) majorée par 1, et il en est évidemment de même de l'intégrale $C=\int C_\omega\,d\omega$. Considérons les trois propriétés suivantes éventuellement vérifiées par le compact aléatoire F

(a) F_ω est p.s. fini, et $\omega\to\operatorname{card}F_\omega$ est intégrable

(b) F_ω est p.s. fini

(c) F_ω est p.s. dénombrable

Avec un peu de métier et de culture "classique", on voit sans peine que la capacité C vérifie alors respectivement les trois propriétés suivantes (où A parcourt $\underline{\underline{B}}(E)$ et m l'ensemble $\underline{\underline{M}}$ des mesures ≥ 0 bornées sur E)

(A) $\exists m\ \forall A\quad C(A)\leq m(A)$

(B) $\exists m\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall A\quad m(A)<\delta\ \Rightarrow\ C(A)<\varepsilon$

(C) $\exists m\ \forall A\quad m(A)=0\ \Rightarrow\ C(A)=0$

où, grâce au théorème de capacitabilité, on peut se contenter de faire parcourir à A l'ensemble $\underline{\underline{K}}$ des parties compactes de E. Résolvant des problèmes posés par Horowitz, Mokobodzki a établi dans [14] les réciproques (A) ⇒ (a) , (B) ⇒ (b) et (C) ⇒ (c) , les deux dernières au prix d'une belle virtuosité en théorie de la mesure, admirée du lecteur mais le laissant sur sa faim.

----

(1) rédigé par Dellacherie d'après une première rédaction de Feyel. Le rédacteur se permettra de mettre à mal la modestie de ses coauteurs.

(2) pour des raisons historiques (cf [8]), la propriété (C) se trouve notée (N) et la propriété (B) notée (S) dans la littérature.

Nous faisons maintenant une remarque élémentaire mais jetant quelque lumière sur les rapports "a priori" entre la première série de trois propriétés et la seconde, au prix, il est vrai, d'une interprétation différente de "F_ω est fini" dans (a) et (b). Considérant la mesure M_ω de comptage des points dans F_ω, qui est bornée (resp équivalente à une mesure bornée) ssi F_ω est fini (resp dénombrable), on voit qu'on peut écrire (a),(b),(c) en terme des C_ω comme suit

(a) C_ω vérifie p.s. (A) + une condition d'intégrabilité

(b) C_ω vérifie p.s. (B)

(c) C_ω vérifie p.s. (C)

si bien que les équivalences en question sont du type "$C = \int C_\omega d\omega$ vérifie la propriété (π) ssi presque toute C_ω vérifie (π)". Cela dit, les améliorations que nous apportons ici à [14] sont de trois ordres : plus grande généralité, plus grande clarté, et approfondissement. Plus précisément, au lieu de partir d'un compact aléatoire F, nous partirons d'une famille (C_ω) de capacités fortement sous-additives telle que $\omega \to C_\omega(A)$ soit intégrable pour tout $A \in \underline{\underline{B}}(E)$; cela amènera un meilleur décryptage de la situation, aboutissant finalement à des démonstrations "compréhensibles" des équivalences considérées (démonstrations devenant alors particulièrement simples quand on se replace dans le cadre de [14] que nous appellerons la "situation canonique"[(1)]) ; enfin, nous préciserons quantitativement le rapport entre (c) et (C) en montrant que "l'épaisseur de C est l'intégrale des épaisseurs des C_ω" ce qui, dans la situation canonique, s'écrit encore : la probabilité que F_ω ne soit pas dénombrable est la borne supérieure des t pour lesquels existe une famille non dénombrable (B_i) de boréliens disjoints avec $C(B_i) > t$ pour tout i.

Signalons en outre que Talagrand a aussi travaillé sur le sujet : il a obtenu dans [15] une généralisation des résultats de [14] dans une autre direction, ayant des applications à certains problèmes de convolution, et a par ailleurs montré dans [16] (dans ce volume) que le rapport de type intégral entre les épaisseurs évoqué ci-dessus est encore vrai pour certaines capacités non fortement sous-additives et faux pour d'autres (pour lesquelles on peut même avoir (B) sans avoir (b)).

Le §1 est un paragraphe de préliminaires qui, après une "prérédaction monstrueuse", a été réduit à l'essentiel pour une bonne compréhension de la suite - un appendice à l'exposé ayant servi d'exutoire au rédacteur. On y introduit essentiellement la notion de "capacité normale" (i.e., en gros, de capacité provenant d'une semi-norme croissante sur l'espace

---

(1) parce qu'il s'agit de la situation que l'on rencontre dans le théorème de représentation intégrale des capacités alternées d'ordre infini.

des fonctions continues - cf l'appendice !) : on regarde l'incidence des propriétés (A),(B) et (C) sur le comportement d'une telle capacité, et on définit et étudie l'épaisseur associée à une telle capacité. Le §2 est consacré aux capacités fortement sous-additives, leur normalité et leur épaisseur. Les §3 et §5 sont consacrés au vif du sujet ; nous avons tâché de faire en sorte que les idées et étapes essentielles des démonstrations paraissent au §3 sans avoir à utiliser la théorie des ensembles analytiques, et avons rejeté au §5 ce qui nécessitait de manière explicite l'usage de cette théorie. Le §4 est consacré à deux applications, à savoir le théorème sur les suites p.s. stationnaires de Feyel [10] et la résolution par Dellacherie de sa conjecture [7] sur les ensembles semi-polaires annoncée dans [8].

Quelques mots encore, pour finir, sur l'appendice. D'abord, il est signé du seul rédacteur parce que ce fut au départ son exutoire comme il a été dit plus haut mais aussi parce que le rédacteur n'a pas laissé le temps à ses deux complices d'en approuver le contenu. Maintenant, son contenu a deux fonctions : d'une part, apporter divers compléments aux deux premiers paragraphes de l'exposé (§1 à §6 de l'appendice) ; d'autre part, ébaucher une généralisation du cadre de l'exposé (§7 et §8) pour avoir la "vraie" généralisation de [14], où étaient considérés non seulement le cas d'un compact aléatoire mais aussi celui d'un analytique aléatoire. Nous avons en particulier cité aux §7 et §8 des résultats récents des trois auteurs (un pour chacun pour faire bonne mesure) - sans démonstrations, par faute de temps. La suite donc au prochain numéro.

1. PRELIMINAIRES

On travaille, dans tout le corps de cet exposé, sur un espace métrisable compact E ; on note $\underline{\underline{E}}$ sa tribu borélienne, $\underline{\underline{K}}$ l'ensemble de ses parties compactes muni de la topologie de Hausdorff et $\underline{\underline{M}}$ l'ensemble des mesures (positives) bornées sur $(E,\underline{\underline{E}})$ muni de la topologie vague.

Une fonction C de $\underline{\underline{E}}$ dans $\mathbb{R}_+$ sera appelée une <u>sous-mesure</u> sur E si elle est nulle en $\emptyset$, croissante, montante (i.e. $B_n \uparrow B \Rightarrow C(B_n)\uparrow C(B)$) et sous-additive. Soient C une sous-mesure et $\mathbb{P}$ l'ensemble des partitions boréliennes finies de E ; la fonction M sur $\underline{\underline{E}}$ définie par

$$M(B) = \sup_{P\in\mathbb{P}} \sum_{A\in P} C(A\cap B)$$

est appelée la <u>variation</u> de C. On voit sans peine que M est une mesure (σ-additive, mais non nécessairement σ-finie), et c'est évidemment la plus petite mesure majorant C.

La proposition suivante fournit un mode de calcul de la variation

PROPOSITION 1.- <u>Soit $(\underline{\underline{P}}_n)$ une suite de partitions boréliennes finies de E telle que tout élément de $\underline{\underline{P}}_n$ soit réunion d'éléments de $\underline{\underline{P}}_{n+1}$ et que la réunion des $\underline{\underline{P}}_n$ engendre la tribu $\underline{\underline{E}}$. Alors, pour toute sous-mesure C, la variation M est la limite croissante des sous-mesures C_n définies par</u> $C_n(B) = \sum_{A\in\underline{\underline{P}}_n} C(A\cap B)$.

DEMONSTRATION. Désignons par $\underline{\underline{A}}$ l'algèbre de Boole engendrée par les $\underline{\underline{P}}_n$ et par C_∞ la sous-mesure limite croissante des C_n. On a évidemment $C \leq C_\infty \leq M$ et on voit sans peine que, pour tout $B\in\underline{\underline{E}}$, la restriction de C_∞ à l'algèbre trace de $\underline{\underline{A}}$ sur B est additive, donc σ-additive car C_∞ est montante. Ainsi pour $B\in\underline{\underline{E}}$ soit on a $C_\infty(B) = +\infty$ et donc $C_\infty(B) = M(B)$, soit on a $C_\infty(B) < +\infty$ et le théorème d'extension d'une mesure bornée sur une algèbre de Boole assure que la restriction de C_∞ à $(B,\underline{\underline{E}}_{|B})$ est une mesure, égale à celle de M par minimalité de M, d'où $C_\infty(B) = M(B)$.

Soient C une sous-mesure et Γ l'ensemble des $m\in\underline{\underline{M}}$ majorées par C. Nous dirons que C est une <u>sous-mesure normale</u> si $C(B) = \sup_{m\in\Gamma} m(B)$ pour tout $B\in\underline{\underline{E}}$ (si bien que C est le supremum "ponctuel" de Γ tandis que sa variation M en est le supremum "au sens des mesures"). Si C est une sous-mesure normale, on a $C(B) = \sup C(K)$, $K\subseteq B$, $K\in\underline{\underline{K}}$ pour tout borélien B et donc $m\in\underline{\underline{M}}$ est majorée par C dès qu'elle l'est sur $\underline{\underline{K}}$.

Nous dirons qu'une sous-mesure C est <u>contrôlée</u> par une sous-mesure C' si on a $\quad \forall B\in\underline{\underline{E}} \quad C'(B) = 0 \Rightarrow C(B) = 0$

et qu'elle est <u>contrôlée continûment</u> par C' si on a

$$\forall B\in\underline{\underline{E}} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad C'(B)<\delta \Rightarrow C(B)<\varepsilon \ .$$

Nous retrouvons maintenant les propriétés envisagées dans l'introduction

PROPOSITION 2.- *Soit* C *une sous-mesure normale sur* E.

(A) *Elle est majorée par une mesure bornée ssi elle est* à variation bornée (*i.e. sa variation* M *est bornée*).

(B) *Elle est contrôlée continûment par une mesure bornée ssi elle est* séquentiellement continue (*i.e.* $B_n \to B \Rightarrow C(B_n) \to C(B)$).

(C) *Elle est contrôlée par une mesure bornée ssi elle est* mince (*i.e. toute famille de boréliens disjoints non* C-*négligeables est au plus dénombrable* ; *on dit aussi que* C *est* sans épaisseur).

DEMONSTRATION. Le point (A) est presqu'un pléonasme (et ne fait pas intervenir le caractère "normal" de C). La nécessité dans le point (C) est triviale, ainsi d'ailleurs que celle dans le point (B) une fois remarqué que C, étant montante et sous-additive, est séquentiellement continue dès qu'on a $B_n \downarrow \emptyset \Rightarrow C(B_n) \downarrow 0$. La suffisance dans le point (C) étant établie dans [6] (dans un cadre plus large), nous nous contentons de donner les grandes lignes d'une démonstration. On montre d'abord, à l'aide du théorème de Zorn que, si C est mince, alors toute famille (A_i) de boréliens admet un C-ess sup A au sens suivant : A est la réunion d'une sous-famille dénombrable et $C(A_i - A) = 0$ pour tout i. Cela étant on montre ensuite que, pour toute $m \in \underline{\underline{M}}$ contrôlée par C, il existe un borélien B_m portant m sur lequel C est contrôlée par m (prendre pour B_m le complémentaire d'un C-ess sup des H tels que $C(H) > 0$ et $m(H) = 0$) ; puis, on remarque qu'un C-ess sup des B_m pour m parcourant l'ensemble Γ des mesures majorées par C est nécessairement égal à E, à un ensemble C-négligeable près, d'où l'existence de $m \in \Gamma$ contrôlant C. Enfin, si C est séquentiellement continue, elle est évidemment mince, donc contrôlée par une mesure bornée m, et on voit aisément que m contrôle nécessairement C continûment à cause de la continuité séquentielle.

On appelle *épaisseur* d'une sous-mesure C la sous-mesure e définie par

$e(B) > t \Leftrightarrow$ il existe dans B une famille non dénombrable de boréliens disjoints (B_i) avec $C(B_i) > t$ pour tout i.

On sait dire peu de choses sur l'épaisseur sans supposer une "bonne régularité" de la sous-mesure qui l'engendre.

Nous dirons qu'une sous-mesure C est une *capacité normale* si c'est une sous-mesure normale finie qui descend sur les compacts (i.e. $K_n \downarrow K \Rightarrow C(K_n) \downarrow C(K)$). Nous allons voir que l'épaisseur d'une capacité normale est une sous-mesure normale. Nous rappelons d'abord un résultat de [6] dont nous verrons une généralisation en appendice

PROPOSITION 3.- *Soient* C *une capacité normale et* B *un borélien d'épaisseur* $>t$. *Il existe un compact* K *inclus dans* B *et une application continue surjective* Ψ *de* K *sur* $W = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *tels que, pour tout* $w \in W$, *on ait*

$C(K_w) > t$ <u>où</u> $K_w = \Psi^{-1}(\{w\})$. <u>On dira que le couple</u> (K,Ψ) <u>est un</u> témoin d'ordre t de l'épaisseur de B.

COROLLAIRE.- <u>Si on a</u> $e(B) > t$, <u>alors, pour tout</u> $m \in \underline{\underline{M}}$, <u>il existe</u> $L \in \underline{\underline{K}}$ <u>inclus dans</u> B <u>tel que</u> $e(L) > t$ <u>et</u> $m(L) = 0$.

DEMONSTRATION. Soient (K,Ψ) un témoin d'ordre t de e(B) et ϕ une surjection continue de W sur W telle que chaque $\phi^{-1}(\{w\})$ soit non dénombrable. Posons $L_w = \Psi^{-1}[\phi^{-1}(\{w\})]$: on a $e(L_w) > t$ pour tout $w \in W$ tandis que, pour $m \in \underline{\underline{M}}$, on a évidemment $m(L_w) = 0$ pour la plupart des $w \in W$.

Voici maintenant le résultat annoncé plus haut

THEOREME 1.- <u>L'épaisseur</u> e <u>d'une capacité normale</u> C <u>est une sous-mesure normale</u>.

DEMONSTRATION. Il suffit de prouver que, si (K,Ψ) est un témoin d'ordre t de l'épaisseur de B, alors il existe $m \in \underline{\underline{M}}$ majorée par e et telle que $m(B) \geq t$. Et, pour avoir cela, il suffit de montrer l'existence d'une application borélienne $w \to m_w$ de W dans $\underline{\underline{M}}$ telle que, pour tout w, m_w soit de masse $\geq t$, portée par K_w et majorée par C : il n'y aura plus qu'à poser $m = \int m_w \, dw$ où dw est la mesure du jeu de pile ou face sur W. Désignons par (U_n) une base dénombrable de E stable pour les réunions finies : comme tout compact de E a un système fondamental de voisinages extrait de (U_n), une mesure m est majorée par une capacité normale C'(1) ssi on a $m(U_n) \leq C'(\overline{U}_n)$ pour tout n. Considérons alors la partie H de $W \times \underline{\underline{M}}$ définie comme suit

$$(w,m) \in H \iff m(E) \geq t \ \text{ et } \ \forall n \ m(U_n) \leq C(\overline{U}_n \cap K_w)$$

On voit sans peine que, pour n fixé, la fonction $w \to C(\overline{U}_n \cap K_w)$ est semi-continue supérieurement, si bien que H est un compact de $W \times \underline{\underline{M}}$. En outre ses coupes H_w sont non vides car $A \to C(A \cap K_w)$ est une capacité normale et on a $C(K_w) > t$. Une théorème classique de se[le]ction assure alors l'existence de notre application $w \to m_w$.

2. CAPACITES FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

Nous dirons ici qu'une fonction C sur $\underline{\underline{E}}$ est une <u>capacité fortement sous-additive</u> si c'est une sous-mesure finie, descendante sur $\underline{\underline{K}}$, et fortement sous-additive (i.e. $C(A \cup B) + C(A \cap B) \leq C(A) + C(B)$). Le théorème de capacitabilité de Choquet [4] pour une telle fonction entraine qu'on a, pour tout borélien B,

$$\sup_{K \subseteq B,\ K \in \underline{\underline{K}}} C(K) = C(B) = \inf_{U \supseteq B,\ U \in \underline{\underline{U}}} C(U)$$

où $\underline{\underline{U}}$ est l'ensemble des ouverts de E.

---

(1) Nous signalons au passage qu'une sous-mesure normale C est une capacité normale ssi l'ensemble $\Gamma = \{m \in \underline{\underline{M}} : m \leq C\}$ est un compact de $\underline{\underline{M}}$.

Il est bien connu qu'une capacité fortement sous-additive est une capacité normale mais, comme il n'est pas facile d'en trouver une démonstration écrite, nous en donnons une (différente d'ailleurs de la démonstration traditionnelle) qui reposera sur trois lemmes ayant leur propre intérêt.

Le premier lemme jouera un rôle important dans toute la suite : c'est lui qui nous a amené à considérer des capacités fortement sous-additives dans nos problèmes d'intégrales de capacités.

LEMME 1.- Une fonction croissante C de $\underline{\underline{E}}$ dans $\mathbb{R}_+$ est fortement sous-additive ssi, pour tout $A \in \underline{\underline{E}}$, la fonction C^A de $\underline{\underline{E}}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par
$$C^A(H) = C(A \cup H) - C(A)$$
est sous-additive. La fonction C^A est alors elle-même fortement sous-additive, majorée par C, et c'est une capacité si C en est une.

DEMONSTRATION. Si C est fortement sous-additive, on a $C^A \leq C$ et
$$C[A \cup (H_1 \cup H_2)] + C[A \cap (H_1 \cup H_2)] \leq C(A \cup H_1) + C(A \cup H_2)$$
d'où la forte sous-additivité de C^A en retranchant deux fois $C(A)$ aux deux membres. Réciproquement, si $C^{A \cap B}$ est sous-additive, on a
$$C(A \cup B) - C(A \cap B) \leq C(A) - C(A \cap B) + C(B) - C(A \cap B)$$
d'où la forte sous-additivité de C en ajoutant deux fois $C(A \cap B)$ aux deux membres. Enfin, pour $K \subseteq L$, on a $C^L = (C^K)^L$ et donc $C^L \leq C^K$ si C^K est sous-additive, ce qui implique $C(A \cup L) - C(A \cup K) \leq C(L) - C(K)$: la descente de C sur $\underline{\underline{K}}$ entraine donc celle de C^A. Le reste de l'énoncé est évident.

Le second lemme est consacré au cas où E est fini

LEMME 2.- Supposons E fini, composé de n points $x_1, \ldots, x_n$ et posons $K_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Si C est une capacité fortement sous-additive, l'unique mesure m telle que $m(K_i) = C(K_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ est majorée par C.

DEMONSTRATION. Nous raisonnons par récurrence sur la taille de n. Le cas $n = 2$ étant trivialement résolu, nous supposons $n > 2$ et posons $E_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, $E_2 = \{x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. Nous munissons E_1 de la capacité fortement sous-additive C_1, restriction de C à E_1, et E_2 de la capacité fortement sous-additive C_2, restriction à E_2 de la capacité $C^{\{x_1\}}$ (notation du lemme précédent). Par hypothèse de récurrence, la mesure m_1 sur E_1 telle que $m_1(K_i) = C(K_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ est majorée par C_1 et la mesure m_2 sur E_2 telle que $m_2(K_i - \{x_1\}) = C^{\{x_1\}}(K_i)$ pour $i = 2, \ldots, n-1, n$ est majorée par C_2. Comme m_1 (resp m_2) est la restriction à E_1 (resp E_2) de notre mesure m, il est alors clair que m est majorée par C.

Le dernier lemme, dont l'énoncé est emprunté à [3], exprime de manière adéquate que notre espace E est compact (appliqué à la mesure simplement additive associée à un ultrafiltre, il exprime que ce dernier converge)

LEMME 3.- Soit u une mesure simplement additive (finie) sur E et posons, pour tout ouvert V de E ,

$$u^{*}(V) = \sup u(K) \, , \, K \subseteq V \, , \, K \text{ compact}$$

puis, pour tout borélien B ,

$$u^{*}(B) = \inf u^{*}(V) \, , \, V \supseteq B \, , \, V \text{ ouvert}$$

On définit ainsi une "vraie" mesure u^{*} (i.e. σ-additive) ayant même masse que u .

DEMONSTRATION. Comme u est en particulier fortement sous-additive, un résultat bien connu de Choquet [4] entraine que u^{*} est une capacité fortement sous-additive. Comme u^{*} est manifestement additive sur $\underline{\underline{K}}$, elle l'est aussi sur $\underline{\underline{E}}$ par capacitabilité, et c'est donc une "vraie" mesure. Enfin, on a évidemment $u(E) = u^{*}(E)$.

Nous en venons aux rapports entre capacités normales et capacités fortement sous-additives. Le point a) est emprunté à [2].

PROPOSITION 4.- a) Une capacité normale C est fortement sous-additive ssi, pour tout $K,L \in \underline{\underline{K}}$ tels que $K \subseteq L$, il existe $m \in \underline{\underline{M}}$ majorée par C telle qu'on ait $m(K) = C(K)$ et $m(L) = C(L)$.

b) Toute capacité fortement sous-additive C est normale. De plus, pour toute famille de compacts $(K_i)_{i \in I}$ totalement ordonnée par inclusion, il existe $m \in \underline{\underline{M}}$ majorée par C telle que $m(K_i) = C(K_i)$ pour tout $i \in I$.

DEMONSTRATION. La condition du point a) entraine clairement la forte sous-additivité de C sur $\underline{\underline{K}}$, qui s'étend à $\underline{\underline{E}}$ par capacitabilité, et sa nécessité est évidemment impliquée par le "de plus" du point b). Par ailleurs, dans ce point b), le caractère"normal" résulte aussi, par capacitabilité, de ce "de plus" qui est donc la seule chose qui nous reste à démontrer. Soient donc C une capacité fortement sous-additive et (K_i) une famille totalement ordonnée de compacts. Pour p,q entiers, donnons-nous p éléments $K_1,\dots,K_p$ de la famille (K_i) et q boréliens $B_1,\dots,B_q$ et désignons par $\underline{\underline{A}}$ l'algèbre de Boole finie engendrée par ces p+q boréliens. Choisissons un point x dans chaque atome de $\underline{\underline{A}}$ et appliquons le lemme 2 à l'ensemble fini ainsi obtenu : cela donne une mesure v sur $\underline{\underline{A}}$ de masse C(E) portée par la réunion des points x , majorée par la restriction de C à $\underline{\underline{A}}$ et telle qu'on ait $v(K_1) = C(K_1)$, ... , $v(K_p) = C(K_p)$; en outre v , étant atomique, est aussi une mesure sur $\underline{\underline{E}}$. Comme l'ensemble des mesures simplement additives sur $\underline{\underline{E}}$ de masse C(E) est compact pour la convergence simple sur $\underline{\underline{E}}$, on déduit aisément de ce qui précède l'existence d'une mesure simplement additive u sur $\underline{\underline{E}}$ majorée par C et telle qu'on ait $u(K_i) = C(K_i)$ pour tout élément K_i de notre famille. Maintenant, la mesure $u^{\#}$ du lemme 3 est majorée par u sur les ouverts ; elle est donc majorée par C sur les ouverts et par suite sur tout $\underline{\underline{E}}$. Et, comme $u^{\#}$ majore u sur $\underline{\underline{K}}$ (car u et $u^{\#}$ ont même masse), on a nécessairement $u^{\#}(K_i) = C(K_i)$ pour tout i. C'est fini.

Nous achevons ce paragraphe avec un résultat nouveau sur l'épaisseur d'une capacité fortement sous-additive

THEOREME 2.- <u>L'épaisseur</u> e <u>d'une capacité fortement sous-additive</u> C <u>est une sous-mesure normale fortement sous-additive</u>.

DEMONSTRATION. Le fait que e soit une sous-mesure normale résulte de la proposition 4 et du théorème 1. Passons à la forte sous-additivité. Soient A,B deux boréliens tels que $e(A\cap B) > a$ et $e(A\cup B) > b$; nous devons montrer qu'on a alors $e(A) + e(B) > a+b$. Pour cela, nous allons démontrer qu'il existe un témoin (K^1,Ψ^1) d'ordre a de $e(A\cap B)$ et un témoin (K^2,Ψ^2) d'ordre b de $e(A\cup B)$ tels que $K^1\cap K^2 = \emptyset$; posant alors $L_w = K^1_w\cup K^2_w$ pour tout $w\in W$, on aura grâce à la forte sous-additivité de C

$$C(A\cap L_w) + C(B\cap L_w) \geq C(K^1_w) + C(K^2_w) > a+b$$

et, les L_w étant deux à deux disjoints, on aura bien $e(A) + e(B) > a+b$. Maintenant, pour obtenir nos témoins à domaines disjoints, il suffit de trouver un borélien B_1 inclus dans $A\cap B$ et d'épaisseur $>a$, et un borélien B_2 inclus dans $A\cup B$, disjoint de B_1 et d'épaisseur $>b$. Or soit m une mesure majorée par e telle que $m(A\cap B) > a$ et soit (K,Ψ) un témoin d'ordre b de $e(A\cup B)$: on a $e(K_w) > b$ pour tout $w\in W$ tandis qu'on a $m(K_w) = 0$ sauf pour un ensemble (au plus) dénombrable de w. On peut alors prendre pour B_2 un K_w tel que $m(K_w) = 0$ et pour B_1 la trace de B_2^c sur $A\cap B$. C'est fini.

3. INTEGRALE DE CAPACITES FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

Nous nous donnons désormais, en plus de notre espace E, un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. Une famille $(\phi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de fonctions de $\underline{\underline{E}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ sera dite <u>mesurable</u> si la fonction $\omega\to\phi_\omega(B)$ est $\underline{\underline{F}}$-mesurable pour tout $B\in\underline{\underline{E}}$; on note alors $\int\phi_\omega\,d\omega$ la fonction $B\to\int\phi_\omega(B)\,d\omega$ et la famille (ϕ_ω) est dite <u>intégrable</u> si cette fonction est finie.

La proposition 1 entraine clairement le résultat suivant

THEOREME 3.- <u>Soit</u> (C_ω) <u>une famille mesurable de sous-mesures</u>. <u>La famille</u> (M_ω) <u>de leurs variations est mesurable et</u> $\int M_\omega\,d\omega$ <u>est égale à la variation</u> M <u>de la sous-mesure</u> $C = \int C_\omega\,d\omega$. <u>En particulier</u>, C <u>est à variation bornée ssi</u> (M_ω) <u>est intégrable</u>.

Nous désignons désormais par $(C_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille intégrable de capacités fortement sous-additives et posons $C = \int C_\omega d\omega$; il est clair que C est aussi une capacité fortement sous-additive. S'il existe une partie mesurable F de $E\times\Omega$ à coupes F_ω compactes tel que $C_\omega(B) = 0$ ou 1 suivant que $B \cap F_\omega$ est vide ou non, nous dirons que nous sommes "dans la situation canonique " (les capacités C_ω et la capacité C sont alors des capacités alternées d'ordre infini suivant la terminologie de [4]).

Nous passons maintenant à l'étude de la continuité séquentielle. Nous établissons d'abord un lemme simple mais crucial (dont nous donnerons une version plus sophistiquée en appendice)

LEMME 4.- Soient ϕ une fonction croissante, montante, de $\underline{\underline{E}}$ dans $\mathbb{R}_+$ et m une mesure bornée. Pour tout entier k il existe un ouvert V tel que $\phi(V) \geq k\,m(V)$ et qu'on ait $\phi(V\cup H) - \phi(V) \leq k\,m(H)$ pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$.

DEMONSTRATION. Parmi les ouverts W vérifiant $\phi(W) \geq km(W)$ [noter que $W = \emptyset$ convient], choisissons-en un, maximal [cela existe car E est à base dénombrable et m montante], que nous notons V. On a alors

$$\phi(V\cup H) - \phi(V) \leq k[m(V\cup H) - m(V)] \leq km(H)$$

pour tout ouvert H, et donc pour tout borélien H par classe monotone [car ϕ monte, et m monte et descend].

REMARQUE.- Comme on a $m(V) \leq \phi(V)/k \leq \phi(E)/k$, on voit que m(V) est petit pour k grand. Donc, si ϕ se trouve être une sous-mesure contrôlée continûment par m, on peut, pour $\varepsilon>0$ fixé, choisir k pour avoir $\phi(V) < \varepsilon$.

Nous conseillons au lecteur de faire un dessin dans la situation canonique pour apprécier la simplicité de la démonstration du théorème suivant dans cette situation (noter que, dans ce cas, on a évidemment $C(V) < \varepsilon$ ssi $P\{\omega : C_\omega(V) \neq 0\} < \varepsilon$).

THEOREME 4.- La capacité C est séquentiellement continue ssi C_ω est séquentiellement continue pour presque tout $\omega\in\Omega$.

DEMONSTRATION. La suffisance (qui est la partie la moins intéressante) résulte immédiatement du théorème de Lebesgue : si $C_\omega(B_n) \downarrow C_\omega(B)$ pour presque tout ω, alors $C(B_n) \downarrow C(B)$. Pour la nécessité, désignons par m une mesure bornée contrôlant continûment C et, à l'aide du lemme précédent et de sa remarque, choisissons pour tout entier n un entier k_n et un ouvert V_n avec $C(V_n) < 2^{-n}$ de sorte qu'on ait, pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$,

$$C(V_n\cup H) - C(V_n) \leq k_n m(H) \quad .$$

Désignons par $\overline{C}$ l'une des capacités C_ω ou C et par $\overline{C}^n$ la fonction

$$H \to \overline{C}(V_n\cup H) - \overline{C}(V_n) \ ;$$

d'après le lemme 1, chaque $\overline{C}^n$ est une capacité fortement sous-additive et on vient de voir que C^n est majorée par la mesure bornée $k_n m$.

Comme on a évidemment $C^n = \int C^n_\omega \, d\omega$, on déduit du théorème 3 que la variation M^n_ω de C^n_ω est bornée pour presque tout ω. D'autre part la norme $C(V_n)$ dans $L^1(P)$ de $\omega \to C_\omega(V_n)$ est $< 2^{-n}$ et donc on a $\lim_n C_\omega(V_n) = 0$ p.s.. Finalement, comme on a pour tout $H \in \underline{\underline{E}}$

$$C_\omega(H) \leq C_\omega(V_n \cup H) = C_\omega(V_n) + C^n_\omega(H) \leq C_\omega(V_n) + M^n_\omega(H)$$

on voit que, pour presque tout ω, C_ω est continûment contrôlée par la mesure bornée $m_\omega = \sum_n 2^{-n} M^n_\omega / M^n_\omega(E)$ (avec $0/0 = 0$).

REMARQUES.- 1) Pour démontrer la nécessité, il n'est pas nécessaire de savoir a priori que les C_ω descendent sur $\underline{\underline{K}}$, et on obtient finalement que les C_ω descendent p.s. sur tout $\underline{\underline{E}}$.

2) Si on suppose seulement que nos capacités C_ω sont normales, la suffisance est encore vraie mais Talagrand a montré dans [16] (dans ce volume) que, dans ce cas, on peut avoir C séquentiellement continue alors que les C_ω ont une épaisseur non nulle.

3) Au cours de la démonstration on a de plus montré que, si les C_ω sont p.s. séquentiellement continues, il existe une famille mesurable (m_ω) de mesures p.s. bornées telle que m_ω contrôle continûment C_ω p.s.. On peut aussi établir cela en appliquant un théorème classique de section à la partie H de $\underline{\underline{M}} \times \Omega$ constituée des (m,ω) tels que m contrôle continûment C_ω (un calcul élémentaire montre en effet que H est une partie mesurable de $\underline{\underline{M}} \times \Omega$).

COROLLAIRE.- <u>Dans la situation canonique</u>, <u>la capacité</u> C <u>est séquentiellement continue ssi le compact aléatoire</u> F <u>a p.s. ses coupes finies</u>.

La connaissance de la variation M est suffisante pour décider si C est à variation bornée (rire !) ou si C est sans épaisseur (car C et M ont mêmes ensembles négligeables). Elle est cependant en général insuffisante pour décider si C est séquentiellement continue. Dans la situation canonique M peut être σ-finie sans que C soit séquentiellement continue (déjà vrai pour Ω réduit à un point), et C peut être séquentiellement continue sans que M soit σ-finie. Nous voyons maintenant un exemple de cette éventualité.

UN EXEMPLE, dans la situation canonique, d'une capacité C séquentiellement continue alors qu'il n'existe aucun compact K non C-négligeable tel que la restriction de C à K soit à variation bornée. On prend pour Ω et E le segment $[0,1]$, pour P la mesure de Lebesgue. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ et, pour n fixé, $I^k_n = [(k-1)2^{-n}, k\,2^{-n}]$ pour k variant de 1 à 2^n. On prend alors pour F la réunion des diagonales de tous les carrés $I^k_n \times \Omega_n$. Les coupes de F étant finies, la capacité C est séquentiellement continue, et est évidemment contrôlée par la mesure de Lebesgue. Mais, pour tout $B\in\underline{\underline{E}}$, l'intégrale de $\omega\rightarrow\mathrm{card}(B\cap F_\omega)$ sur Ω_n est égale à la mesure de Lebesgue de B, et donc son intégrale sur Ω vaut $+\infty$ si B n'est pas négligeable. Ainsi, la variation M de C ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$.

Nous arrivons finalement à l'étude de l'épaisseur, qui sera complétée au §5. Nous désignons par e l'épaisseur de la capacité C et par $(e_\omega)_{\omega\in\Omega}$ la famille des épaisseurs des capacités C_ω ; nous supposerons connu dans ce paragraphe que $(e_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est mesurable - cela sera établi au §5. Dans la situation canonique, on a $e_\omega(B)=0$ ou 1 suivant que $B\cap F_\omega$ est dénombrable ou non, et il est bien connu dans ce cas que (e_ω) est mesurable.

THEOREME 5.- <u>L'épaisseur</u> e <u>de</u> $C=\int C_\omega\,d\omega$ <u>est égale à</u> $\int e_\omega\,d\omega$, <u>intégrale des épaisseurs des</u> C_ω. <u>En particulier</u>, C <u>est sans épaisseur ssi</u> C_ω <u>est sans épaisseur pour presque tout</u> $\omega\in\Omega$.

DEMONSTRATION. On sait, d'après le théorème 2, que e et chaque e_ω est une sous-mesure normale fortement sous-additive, majorée respectivement par C et C_ω. Posons $f=\int e_\omega\,d\omega$; il est clair que f est une sous-mesure fortement sous-additive, majorée par C, et il est intuitif que f est normale (il suffit de choisir mesurablement m_ω proche de e_ω pour que $\int m_\omega\,d\omega$ soit proche de f) - cela sera établi au §5. Nous devons montrer que $e=f$; comme e et f sont normales[(1)], il nous suffit de voir que $e(K)=f(K)$ pour tout compact K et finalement que $e(E)=f(E)$, l'égalité pour $K\in\underline{\underline{K}}$ s'y ramenant par restriction. Nous montrons d'abord qu'on a $e(E)\leq f(E)$, ce qui est bien intuitif. Le cas $e(E)=0$ étant trivial, supposons qu'on ait $e(E)>t$ et soit (K,Ψ) un témoin d'ordre t de e(E) (cf la proposition 3, dont nous reprenons les notations). La fonction $(\omega,L)\rightarrow C_\omega(L)$ sur $\Omega\times\underline{\underline{K}}$ étant mesurable du couple (si (U_n) est une base dénombrable de E stable pour les réunions finies, on a $C_\omega(L)\geq s$ ssi on a $\forall n\ L\subseteq U_n\Rightarrow C_\omega(U_n)\geq s$), la fonction $(\omega,w)\rightarrow C_\omega(K_w)$ sur $\Omega\times W$ est mesurable du couple et on a alors, en utilisant le théorème de Fubini, dw étant la mesure du jeu de pile ou face sur W,

$$f(E)=\int e_\omega(E)\,d\omega\geq\int[\int C_\omega(K_w)\,dw]\,d\omega=\int[\int C_\omega(K_w)\,d\omega]\,dw=\int C(K_w)\,dw>t.$$

Nous montrons enfin qu'on a $e(E)\geq f(E)$, ce qui, même dans la situation canonique, est surprenant a priori[(2)]. Nous commençons par établir un lemme qui, au passage, assure l'implication $e(E)=0\Rightarrow f(E)=0$ en y prenant pour m une mesure bornée contrôlant C.

---

(1) La normalité de f n'interviendra pas dans la démonstration de l'équivalence $e(E)=0 \Leftrightarrow f(E)=0$.

(2) Etant donné le titre de [16], le sandwich ne peut cacher qu'en cet endroit le jambon s'est révélé supérieur au pain.

LEMME 5.- <u>Soient</u> $m \in \underline{\underline{M}}$ <u>et</u> $\varepsilon > 0$. <u>Si on a</u> $f(E) > \varepsilon$, <u>alors il existe</u> $K \in \underline{\underline{K}}$ <u>tel qu'on ait</u> $C(K) \geq \varepsilon$ <u>et</u> $m(K) = 0$.

DEMONSTRATION. Nous allons construire par récurrence une suite décroissante (K_n) de compacts tels que $f(K_n) > 2^n m(K_n)$ et $f(K_n) > \varepsilon$: si K est l'intersection des K_n, on aura alors $m(K) = 0$ et $C(K) \geq \varepsilon$. Supposons K_{n-1} construit (avec $K_0 = E$) et restreignons nos fonctions $C_\omega, C, m, e_\omega, f$ à K_{n-1} sans changer de notations. En appliquant le lemme 4 avec $\phi = f$, $k = 2^n + 1$, on obtient un ouvert V_n de K_{n-1} tel que $f(V_n) \geq (2^n+1)\, m(V_n)$ (mais rien n'empêche pour l'instant d'avoir $f(V_n) = 0$) et qu'on ait

$$f(V_n \cup H) - f(V_n) \leq (2^n+1)\, m(H)$$

pour tout borélien H de K_{n-1}. Posons $e^n_\omega(H) = e_\omega(V_n \cup H) - e_\omega(V_n)$; d'après le lemme 1, chaque fonction e^n_ω est une sous-mesure fortement sous-additive et il en est donc de même pour $f^n = \int e^n_\omega\, d\omega$. Or nous venons d'écrire que f^n est à variation bornée, et le théorème 3 entraine alors que e^n_ω est à variation bornée pour presque tout ω. Mais il résulte aisément du corollaire de la proposition 3 que e^n_ω ne peut être majorée par une mesure bornée que si elle est nulle. On a donc $e_\omega(V_n) = e_\omega(K_{n-1})$ p.s. d'où $f(V_n) = f(K_{n-1}) > \varepsilon$ (d'après l'hypothèse de récurrence), ce qui implique $f(V_n) > 0$ et donc $f(V_n) > 2^n m(V_n)$. Enfin V_n, ouvert de K_{n-1} , est limite d'une suite croissante de compacts ; comme f monte, il est alors clair qu'on peut trouver un compact K_n inclus dans V_n tel que

$$f(K_n) > 2^n m(K_n) \quad \text{et} \quad f(K_n) > \varepsilon \;.$$

La démonstration du lemme achevée, nous revenons à celle du théorème. Supposons qu'on ait $f(E) > t$ et, f étant normale, soit m une mesure majorée par f telle que $m(E) > t$. D'après le lemme, on peut trouver $K \in \underline{\underline{K}}$ tel que $m(K) = 0$ et $C(K) > t$. Soit alors $(K_i)_{i \in I}$ une famille maximale de compacts disjoints tels qu'on ait $m(K_i) = 0$ et $C(K_i) > t$ pour tout $i \in I$. Si I n'est pas dénombrable, la définition de l'épaisseur assure qu'on a $e(E) > t$. Si I était dénombrable, on aurait $m(\bigcup_i K_i) = 0$ et il existerait donc $L \in \underline{\underline{K}}$ disjoint des K_i et tel que $t < m(L) \leq e(L)$: appliquant le lemme à la restriction de notre situation à L, on trouverait $K \in \underline{\underline{K}}$ contenu dans L, et donc disjoint des K_i, tel que $m(K) = 0$ et $C(K) > t$, ce qui contredirait la maximalité de notre famille. C'est fini.

REMARQUES.- 1) Si on suppose seulement que nos capacités C_ω sont normales, on a encore l'inégalité $e \leq f$, mais nous avons déjà signalé plus haut qu'on peut alors avoir e nulle et f non nulle d'après [16].

2) Si les C_ω sont p.s. minces, il existe une famille (m_ω) de mesures p.s. bornées telle que m_ω contrôle C_ω p.s.. En situation canonique, il est bien connu qu'on peut trouver une telle famille <u>mesurable</u>, mais nous ne savons pas le démontrer dans le cas général. Si on regarde la

partie H de $\underline{\underline{M}}\times\Omega$ constituée des (m,ω) tels que m contrôle C_ω (cf la remarque 3) du théorème 4, mais le contrôle ici n'est pas continu), on obtient seulement par un calcul simple que H est dans $\underline{\underline{M}}\times\Omega$ le complémentaire d'une partie $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{M}})\times\underline{\underline{F}}$ - analytique et, en général, il faut ajouter des axiomes à la théorie habituelle des ensembles pour assurer qu'une telle partie admet une section mesurable.

COROLLAIRE.- Dans la situation canonique, la capacité C est mince ssi le compact aléatoire F a p.s. ses coupes dénombrables.

REMARQUE. Supposons plus généralement que F soit un borélien aléatoire (ou même un analytique aléatoire). Alors les C_ω et C ne sont plus des capacités mais sont encore de "bonnes" sous-mesures normales et fortement sous-additives. Et il est encore vrai que C est mince ssi les coupes F_ω sont p.s. dénombrables ; dans [14], la suffisance est établie grâce à un contrôle des C_ω mesurable en ω et la nécessité en se ramenant au cas F_ω compact grâce à un argument de capacitabilité. Nous verrons en appendice une généralisation du théorème 5 englobant ce résultat.

En théorie du potentiel, on a souvent affaire à une capacité C provenant d'une situation canonique et ayant la propriété suivante : tout compact K d'épaisseur nulle pour C est, à un ensemble C-négligeable près, la réunion d'une suite de compacts sur lesquels C est séquentiellement continue. Nous verrons un tel exemple au §4 et montrons maintenant que cette propriété n'est pas toujours vérifiée.

UN EXEMPLE, dans la situation canonique , d'une capacité C sans épaisseur alors qu'il n'existe aucun compact K non C-négligeable tel que la restriction de C à K soit séquentiellement continue. On prend pour Ω et E le segment [0,1], pour P la mesure de Lebesgue. Sur Ω et sur E on considère tous les points de la forme $2^{-1} \pm 2^{-k}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, et on prend pour F la réunion des parallèles à la diagonale de $E\times\Omega$ issues de tous ces points. Les coupes de F étant dénombrables, C est mince, et est évidemment contrôlée par la mesure de Lebesgue. D'après le corollaire du théorème 4, la capacité C aura la propriété voulue si, pour tout compact K non négligeable, le compact aléatoire $(K\times\Omega)\cap F$ n'est pas p.s. à coupes finies. Or, pour K fixé, il résulte immédiatement du lemme suivant que p.s. sur K (considéré aussi comme une partie de Ω) les coupes de $(K\times K)\cap F$ sont infinies.

LEMME 6.- Soient K un compact de $\mathbb{R}$ non négligeable pour la mesure de Lebesgue et (a_k) une suite injective de réels convergeant vers 0 . Pour presque tout $x\in K$ il existe une suite (b_k) extraite de (a_k) telle que les points $x+b_k$, $k\in\mathbb{N}$, appartiennent tous à K .

DEMONSTRATION. Soit, pour tout n, une énumération $(s_p^n)_{p\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble S_n des parties à n éléments de $\{a_1,\dots a_k,\dots\}$. Posons, pour tout n et tout $s_p^n = \{c_1,\dots,c_n\}\in S_n$,

$$L_n^p = \{x\in K : \exists y_1,\dots,y_n \in K \quad y_i = x+c_i \text{ pour } i=1,\dots,n\}$$

puis, pour tout n , $L_n = \bigcup_p L_n^p$. Chaque L_n^p est compact, la suite (L_n) est décroissante et, pour tout $x\in\bigcap_n L_n$, il existe une suite (b_k) extraite de (a_k) telle que $x+b_k \in K$ pour tout k . Il nous reste donc à démontrer que $L_n = K$ p.p. pour tout n . Or, un résultat classique assure que, pour tout borélien B non négligeable, l'ensemble $\{y-x ; x,y\in B\}$ contient un voisinage de 0 . Cela implique que $K-L_1$ est négligeable, ainsi que chaque $L_n^p - L_{n+1}$ et donc chaque $L_n - L_{n+1}$. C'est fini.

4. INTERMEDE

Nous donnons ici deux belles applications des corollaires des théorèmes 4 et 5. La première a déjà été publiée dans [10] tandis que la seconde a été annoncée (comme imminente !) dans [8].

A. Une caractérisation des suites p.s. stationnaires

Nous nous donnons une suite (T_n) d'applications mesurables de Ω dans E et dirons qu'elle est <u>p.s. stationnaire</u> si, pour presque tout ω il existe une entier $N(\omega)$ tel que $T_n(\omega) = T_{n+1}(\omega)$ pour tout $n \geq N(\omega)$. Nous allons démontrer le résultat suivant

<u>Pour que (T_n) soit p.s. stationnaire, il faut et il suffit que, pour tout fonction borélienne bornée f sur E , la suite des v.a. $f(T_n)$ converge p.s.</u> (le "p.s." pouvant dépendre a priori de f).

La condition nécessaire est triviale ; la condition suffisante le serait aussi si le "p.s." ne dépendait pas de f : là réside tout le sel de cet énoncé. Nous démontrons la suffisance en deux étapes

<u>1ère étape</u> : La condition de l'énoncé entraine en particulier que la suite (T_n) admet une limite p.s. T (faire parcourir à f une suite de fonctions continues dense pour la convergence uniforme) et nous montrons dans cette première étape que, pour toute fonction borélienne bornée f , la suite $(f(T_n))$ converge p.s. vers f(T). Posons pour tout couple A,B de boréliens de E

$$m^A(B) = \int_A \lim 1_B(T_n)\, dP = \lim \int_A 1_B(T_n)\, dP$$

Le théorème de Vitali-Hahn-Saks (et donc, en dernier ressort, le théorème de Baire) entraine que, pour A fixé, $B \to m^A(B)$ est une mesure, et on a évidemment $m^A(f) = \int_A f(T)\, dP$ pour toute fonction continue f . On en déduit, par classes monotones, qu'on a encore $m^A(f) = \int_A f(T)\, dP$ pour toute fonction borélienne bornée f . Comme cela a lieu pour tout $A\in\underline{\underline{E}}$, on a donc $f(T) = \lim f(T_n)$ p.s..

<u>2ème étape</u> : Soit F le compact aléatoire constitué des graphes des T_n et de T, et soient C_ω,C les capacités associées à cette situation. Si (B_k) est une suite de boréliens décroissant vers $\emptyset$, alors, pour ω hors d'un ensemble négligeable (dépendant a priori de (B_k)), les fonctions 1_{B_k} sont continues sur F_ω d'après la première étape et donc on a $C_\omega(B_k)\downarrow 0$ d'après le lemme de Dini. Cela implique que C est séquentiellement continue et donc, d'après le corollaire du théorème 4, que presque toutes les coupes F_ω sont finies. D'où la conclusion.

REMARQUES.- 1) L'énoncé n'admet pas de variante dans laquelle la convergence en probabilité remplacerait la convergence presque-sûre. En effet, prenons $\Omega = E = [0,1]$ et pour P la mesure de Lebesgue puis, pour tout ω, posons $T_n(\omega) = \omega + \frac{1}{n}$ (mod 1). On sait que, pour toute fonction borélienne bornée f, la suite des $f(T_n)$ converge vers f dans L^1 alors que la suite (T_n) n'est douée d'aucune propriété de stationnarité.

2) En fait, si $\Omega = E$ est un groupe, P n'en étant pas forcément la mesure de Haar, l'énoncé implique que, pour toute suite (x_n) de v.a. convergeant vers 0 mais non stationnairement, il existe une fonction borélienne bornée f telle les fonctions $f_n(\omega) = f(\omega + x_n(\omega))$ ne convergent pas p.s. vers f.

3) On voit sans grand peine que la condition de l'énoncé est vérifiée dès qu'elle l'est lorsque f parcourt les indicatrices de compacts. En particulier, en 2), on peut prendre pour f une telle indicatrice.

B. <u>Une caractérisation des ensembles semi-polaires</u>

Renvoyant à [9] pour une étude systématique des ensembles semi-polaires dans un cadre plus large, nous supposerons ici que nous travaillons avec un semi-groupe borélien de Hunt (P_t) sur E vérifiant l'hypothèse (L) et adoptons les notations habituelles afférentes à cette situation. Nous prenons donc pour Ω l'ensemble des applications càdlàg de $\mathbb{R}_+$ dans E muni des applications coordonnées (X_t) et, λ désignant une probabilité de référence sur E, nous prenons pour P la mesure P^λ si bien que $H \in \underline{\underline{E}}$ est polaire ssi $P\{\exists t>0 : X_t \in H\}$ est nul.

On sait, d'après [5], que $B \in \underline{\underline{E}}$ est semi-polaire ssi l'une des trois conditions suivantes est vérifiée

(1) pour presque tout ω l'ensemble $\{t : X_t(\omega) \in B\}$ est dénombrable,

(2) tout borélien finement fermé inclus dans B contient un point irrégulier (pour ce finement fermé, supposé non vide),

(3) tout compact inclus dans B est semi-polaire.

Nous allons démontrer ici le résultat suivant, qui clot une conjecture de [7] (pour d'autres démonstrations, en partant de "contextes potentialistes"différents, voir [12],[1],[11])

<u>Pour que</u> $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$ <u>soit semi-polaire, il faut et il suffit que</u> B <u>ne contienne pas de point régulier pour lui-même et qu'il porte une mesure bornée</u> m <u>telle que tout</u> $H\varepsilon\underline{\underline{E}}$ <u>inclus dans</u> B <u>et</u> m-<u>négligeable soit polaire</u>.

Il est bien connu que la condition de l'énoncé est nécessaire. Pour démontrer la suffisance, il est clair, d'après la caractérisation (3), qu'on peut supposer B compact et non polaire. D'autre part, quitte à remplacer la mesure m de l'énoncé par la mesure $m+m'$, m' définie par

$$m'(H) = \sum_n 2^{-n} P\{X_{T^n-} \varepsilon H \cap B\} \text{ pour } H\varepsilon\underline{\underline{E}}$$

où (T^n) est une suite de temps d'arrêt épuisant les sauts de (X_t), on peut supposer que, pour $H\varepsilon\underline{\underline{E}}$ inclus dans B, le fait que $m(H)=0$ implique que $P\{\exists t\ X_t\varepsilon H \text{ ou } X_{t-}\varepsilon H\}$ est nul, ce qui est (un peu) mieux que le fait que H soit polaire. Ceci dit, nous démontrons la suffisance en deux étapes.

<u>1ère étape</u> : Fixons $k\varepsilon\mathbb{N}$ et soit F le compact aléatoire défini par

$$x\varepsilon F_\omega \quad \text{ssi} \quad x\varepsilon B \text{ et } \exists t\leq k \ (X_t(\omega)=x \text{ ou } X_{t-}(\omega)=x)$$

puis C_ω,C les capacités associées à cette situation. L'existence de notre mesure m équivaut au fait que, pour tout k, la capacité C (dépendant de k) est sans épaisseur. Le corollaire du théorème 5 entraine alors que presque toutes les coupes F_ω sont dénombrables et donc que l'ensemble $\{x\varepsilon B : \exists t\ X_t(\omega)=x\}$ est dénombrable pour presque tout ω. Autrement dit, presque toutes les trajectoires rencontrent "spatialement" B suivant un ensemble dénombrable, et, d'après la caractérisation (1), il nous reste à démontrer qu'alors presque toutes les trajectoires rencontrent "temporellement" B suivant un ensemble dénombrable. C'est clairement le cas si presque toutes les trajectoires sont injectives (par exemple, si (P_t) est le semi-groupe de la chaleur). Le cas général demande encore du travail.

<u>2ème étape</u> : Nous raisonnons par l'absurde : nous supposons que B contient un borélien finement fermé A, non vide, tel que tout $x\varepsilon A$ soit régulier pour A (cf la caractérisation (2)) et montrons qu'il existe alors un $x\varepsilon A$ régulier pour lui-même, ce qui est exclu par hypothèse. Pour presque tout ω, l'ensemble $\{t : X_t(\omega)\varepsilon A\}$ est un parfait (non vide si ω rencontre A) pour la topologie droite sur $\mathbb{R}_+$ (cf [13]) et l'ensemble $\{x\varepsilon A : \exists t\ X_t(\omega)=x\}$ est dénombrable. Fixons un tel ω rencontrant A : le théorème de Baire pour la topologie droite entraine alors l'existence d'un $x\varepsilon A$ et d'un intervalle non vide $]u,v[$ de $\mathbb{R}_+$ tels qu'on ait $X_u(\omega)=x$ et $\{t\varepsilon]u,v[: X_t(\omega)\varepsilon A\} = \{t\varepsilon]u,v[: X_t(\omega)=x\}$, la perfection impliquant de plus que ce dernier ensemble est non vide. Laissons de nouveau ω varier et définissons un temps d'arrêt T par

$$T(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega)\varepsilon A \text{ et } X_t(\omega)\neq X_0(\omega)\} ,$$

puis, pour tout $r\in\mathbb{Q}_+$, deux temps d'arrêt U_r et V_r par

$U_r(\omega) = \inf\{t\geq r : X_t(\omega)\in A\}$, $V_r(\omega) = U_r(\omega) + (T\circ\theta_{U_r})(\omega)$

où (θ_t) est le semi-groupe des translations sur Ω. On est assuré par ce qui précède qu'il existe un r tel que $P\{U_r<V_r\}$ soit >0 ; fixons un tel r et définissons un (dernier) temps d'arrêt S par $S = U_r$ sur $\{U_r<V_r\}$ et $S = +\infty$ ailleurs. On a $X_S\in A$ et $T\circ\theta_S > 0$ sur $\{S<+\infty\}$ et la propriété de Markov forte entraine alors l'existence d'un $x\in A$ tel que $P^x\{T>0\}$. Or la définition de T , jointe au fait que x est régulier pour A , implique que cet x est régulier pour lui-même : c'est fini.

REMARQUE.- Supposons pour simplifier qu'aucun $x\in E$ ne soit régulier pour lui-même et soit c la capacité classique sur E définie pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$ par $c(H) = E[\exp -T_H]$ où T_H est le temps d'entrée dans H. Nous venons de montrer qu'un compact K est semi-polaire ssi il est d'épaisseur nulle pour c . Or, si K est semi-polaire, on sait qu'il est, à un ensemble polaire près, la réunion d'une suite de compacts K_n ayant chacun un 1-potentiel d'équilibre majoré par une constante <1 , et il est (plus ou moins) bien connu que la restriction de c à un tel K_n est séquentiellement continue. Donc la capacité c (qui, étant alternée d'ordre infini provient d'une situation canonique d'après [4]) vérifie la propriété évoquée à la fin du §3.

5. ETUDE DE L'EPAISSEUR

Nous allons commencer par dégager un mode de calcul intéressant de l'épaisseur e_c d'une capacité normale c et, à cette fin, nous revenons d'abord sur la notion de témoin (cf proposition 3). Nous munissons l'ensemble $\underline{\underline{K}}(E\times W)$ des parties compactes de $E\times W$ de la topologie de Hausdorff et dirons qu'un élément L de cet ensemble est un <u>témoin</u> si c'est le graphe d'une application continue Ψ d'une partie compacte de E sur W. Ainsi, L_w désignant la coupe de L selon $w\in W$, L est un témoin ssi on a

$$\forall w\ L_w \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall w\ \forall w' \ (w\neq w' \Rightarrow L_w\cap L_{w'} = \emptyset)$$

d'où l'on déduit sans peine

LEMME 7.- <u>L'ensemble $\underline{\underline{T}}$ des témoins est une partie $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{K}}(E\times W)$.</u>

Par ailleurs, la définition de l'épaisseur jointe à la proposition 3 entraine immédiatement le résultat suivant

PROPOSITION 5.- <u>Soient c une capacité normale et e_c son épaisseur. Pour tout borélien B, on a</u>

$$e_c(B) = \sup_{L\in\underline{\underline{T}}} \int c(B\cap L_w)\, dw$$

<u>où dw est la mesure du jeu de pile ou face sur W.</u>

Nous passons amintenant à l'étude de la mesurabilité de l'application $c\to e_c$. On pourrait aborder cela en partant, comme plus haut, d'une famille mesurable $(c_\omega)_{\omega\varepsilon\Omega}$ de capacités normales, mais nous préférons ici voir les choses "canoniquement" en munissant l'ensemble des capacités normales d'une bonne topologie de sorte qu'une famille mesurable $(c_\omega)_{\omega\varepsilon\Omega}$ soit tout simplement une application mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ dans cet ensemble muni de la tribu borélienne induite.

Pour simplifier, nous ne considérerons que des capacités normales c telles que $c(E)\leq 1$ et munissons l'ensemble $\underline{\underline{N}}$ de ces capacités de la <u>topologie vague</u> définie comme suit. Désignant par $\underline{\underline{C}}$ l'ensemble des fonctions continues sur E et par $\underline{\underline{S}}$ celui des formes sous-linéaires p sur $\underline{\underline{C}}$ telle que $0\leq p(f)=p(f^+)\leq \|f\|$, on définit une application $p\to\hat{p}$ de $\underline{\underline{S}}$ dans $\underline{\underline{N}}$ par $\hat{p}(B)=\sup_{m\varepsilon\underline{\underline{M}},m\leq p} m(B)$ pour $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$, application qui est clairement surjective (mais non injective malgré le théorème de Hahn-Banach : voir l'appendice), et on identifie $\underline{\underline{N}}$ au quotient de $\underline{\underline{S}}$ par la relation $\hat{p}=\hat{q}$. On munit alors $\underline{\underline{N}}$ de la topologie induite par la topologie de la convergence simple sur $\underline{\underline{C}}$; c'est une topologie métrisable compacte et c'est aussi la topologie la moins fine sur $\underline{\underline{N}}$ de sorte que, pour tout compact K (resp tout ouvert U) de E, la fonction $c\to c(K)$ (resp $c\to c(U)$) soit s.c.s. (resp s.c.i.). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier nos assertions (passées ou à venir) concernant la topologie de $\underline{\underline{N}}$, toutes (plus ou moins) bien connues : par exemple, le fait que la fonction $(c,K)\to c(K)$ est s.c.s. sur $\underline{\underline{N}}\times\underline{\underline{K}}$, que les fonctions $c\to c(K)$, $K\varepsilon\underline{\underline{K}}$, engendrent la tribu borélienne de $\underline{\underline{N}}$ et que l'ensemble $\{(m,c):m\leq c\}$ est compact dans $\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{N}}$. La seconde assertion implique évidemment la mesurabilité de $\omega\to c_\omega$ si la famille $(c_\omega)_{\omega\varepsilon\Omega}$ est mesurable, et la troisième implique aisément la réciproque en écrivant, pour B borélien,

$$c_\omega(B)>t \quad \text{ssi} \quad \exists m\varepsilon\underline{\underline{M}} \quad m\leq c_\omega \text{ et } m(B)>t$$

car $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est complet. On prendra garde que, pour $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$, la fonction $c\to c(B)$ est en général seulement <u>analytique</u> (i.e. l'ensemble $\{c:c(B)>t\}$ est analytique dans $\underline{\underline{N}}$ pour tout réel t), ce qui ne l'empêche pas d'être, comme chacun sait, universellement mesurable.

Les points b),c) du théorème suivant permettent de compléter la démonstration du théorème 5 (mesurabilité de $(e_\omega)_{\omega\varepsilon\Omega}$, normalité de $\int e_\omega\, d\omega$). On désigne par $\underline{\underline{N}}_2$ l'ensemble des $c\varepsilon\underline{\underline{N}}$ qui sont fortement sous-additives (dites aussi "alternées d'ordre 2") : c'est un compact de $\underline{\underline{N}}$.

THEOREME 6.- a) <u>La fonction</u> $(c,K)\to e_c(K)$ <u>est analytique sur</u> $\underline{\underline{N}}\times\underline{\underline{K}}$ <u>et, pour tout borélien</u> B, <u>la fonction</u> $c\to e_c(B)$ <u>est analytique sur</u> $\underline{\underline{N}}$.

b) <u>Il existe une partie analytique</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>de</u> $\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{N}}$ <u>telle que, pour</u> c <u>fixée, on ait</u> $e_c(B)=\sup_{(m,c)\varepsilon A} m(B)$ <u>pour tout borélien</u> B.

c) <u>Pour toute probabilité</u> Q <u>sur</u> $\underline{\underline{N}}$, <u>la sous-mesure</u> $f=\int e_c\, dc$ <u>est normale</u> (<u>et est égale à l'épaisseur de</u> $\int c\, dc$ <u>si</u> Q <u>est portée par</u> $\underline{\underline{N}}_2$).

DEMONSTRATION. On voit sans peine que $(c,K,L,w) \to c(K\cap L_w)$ est une fonction s.c.s. sur $\underline{\underline{N}}\times\underline{\underline{K}}\times\underline{\underline{K}}(E\times W)\times W$ si bien que $(c,K,L) \to \int c(K\cap L_w)\,dw$ est une fonction s.c.s. sur $\underline{\underline{N}}\times\underline{\underline{K}}\times\underline{\underline{K}}(E\times W)$. D'après la proposition 5, on a

$$e_c(K) > t \quad \text{ssi} \quad \exists L \; L\varepsilon\underline{\underline{T}} \text{ et } \int c(K\cap L_w)\,dw > t$$

d'où l'analyticité de $(c,K) \to e_c(K)$ en utilisant le lemme 7. Pour achever la démonstration de a), nous rappelons l'une des formes du théorème de capacitabilité de Choquet : pour $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$, il existe une partie analytique $\underline{\underline{B}}$ de $\underline{\underline{K}}$ constituée de compacts contenus dans B telle que, pour toute capacité g, on ait $g(B) = \sup_{K\varepsilon\underline{\underline{B}}} g(K)$. Cette égalité vaut donc pour toute mesure bornée g, et finalement pour toute sous-mesure normale g. Comme, pour c fixée, e_c est une sous-mesure normale, on a donc

$$e_c(B) > t \quad \text{ssi} \quad \exists K \; K\varepsilon\underline{\underline{B}} \text{ et } e_c(K) > t$$

d'où l'analyticité de $c \to e_c(B)$ pour $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$ fixé. Passons au point b). Nous prenons pour $\underline{\underline{A}}$ la partie de $\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{N}}$ définie par

$$(m,c)\varepsilon\underline{\underline{A}} \quad \text{ssi} \quad \exists L \; (L\varepsilon\underline{\underline{T}} \text{ et } m \leq \int c_w\,dw)$$

où c_w est l'élément $B \to c(B\cap L_w)$ de $\underline{\underline{N}}$; comme $\{(c,L,m) : m \leq \int c_w\,dw)$ est une partie compacte de $\underline{\underline{N}}\times\underline{\underline{K}}(E\times W)\times\underline{\underline{M}}$, l'ensemble $\underline{\underline{A}}$ est analytique. Et l'égalité $e_c(B) = \sup_{(m,c)\varepsilon\underline{\underline{A}}} m(B)$ pour c fixée a été vue au cours de la démonstration du théorème 1 (c'est elle qui nous a permis d'affirmer que la sous-mesure e_c est normale). Démontrons enfin le point c). Fixons $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$ et soit $c \to u(c)$ une fonction borélienne positive majorée partout et égale Q-p.p. à la fonction universellement mesurable $c \to e_c(B)$. Puis, pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit $\underline{\underline{H}}$ la partie analytique de $\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{N}}$ définie par

$$(m,c)\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}} \quad \text{ssi} \quad (m,c)\varepsilon\underline{\underline{A}} \text{ et } m(B) > u(c) - \varepsilon$$

où $\underline{\underline{A}}$ a été définie ci-dessus. D'après un théorème classique de section, il existe une application Q-mesurable $c \to m_c$ de $\underline{\underline{N}}$ dans $\underline{\underline{M}}$ de graphe contenu dans $\underline{\underline{H}}$, et la mesure $m = \int m_c\,dc$ est alors une mesure majorée par f telle que $m(B) > f(B) - \varepsilon$, d'où la normalité de f. Quant à la parenthèse du point c), c'est évidemment un rappel, dans notre contexte canonique, de l'énoncé du théorème 5.

REMARQUES.- 1) La "mesurabilité" de $(c,K) \to e_c(K)$ ne peut être améliorée. Si c est la capacité telle que $c(B) = 0$ ou 1 suivant que B est vide ou non, alors on a $e_c(B) = 0$ ou 1 suivant que B est dénombrable ou non, et il est bien connu que, pour E non dénombrable, l'ensemble des compacts non dénombrables est une partie analytique non borélienne de $\underline{\underline{K}}$.

2) Le lecteur aura soupçonné, à juste titre, que, dans les propositions 3 et 5 et dans le théorème 6, on peut prendre plus généralement B analytique après avoir étendu convenablement c et e_c aux ensembles analytiques - nous verrons en appendice que toute extension "convenable" de c et e_c aux analytiques fournit le même résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANCONA (.), MOKOBODZKI (G.) : Exposé au Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, Nov 1981 (à paraitre aux L.N.)

[2] ANGER (B.) : Kapazitaeten und obere Einhuellende von Massen (je n'ai qu'un preprint de cet article, datant de 1972)

[3] CALBRIX (J.) : Mesures non σ-finies : désintégrations et quelques autres propriétés (Ann Inst H. Poincaré, Section B, 17, p 75-95, 1981)

[4] CHOQUET (G.) : Theory of Capacities (Ann Inst Fourier Grenoble 5, p 131-295, 1955)

[5] DELLACHERIE (C.) : Ensembles aléatoires I,II (Sém Proba III, L.N. n°88, p 97-136, Springer 1969)

[6] : Capacités et Processus stochastiques (Springer, Ergebn. der Math. N°67, Heidelberg 1972)

[7] : Une conjecture sur les ensembles semi-polaires (Sém Proba VII, L.N. n°321, p 51-57, Springer 1973)

[8] : Appendice à l'exposé de Mokobodzki (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 509-511, Springer 1978)

[9] : La structure des ensembles semi-polaires (manuscrit semi-clandestin de 1979, devrait paraitre un jour...)

[10] FEYEL (D.) : Ensembles singuliers associés aux espaces de Banach réticulés (Ann Inst Fourier Grenoble 31, p 196-223 1981)

[11] : Exposé au Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, Nov 1981 (à paraitre aux L.N.)

[12] HANSEN (W.) : Semi-polar sets and Quasi-balayage (à paraitre ; j'ai un preprint de 1981)

[13] MEYER (P.A.) : Processus de Markov (L.N. n°26, 189 pages, Springer 1967)

[14] MOKOBODZKI (G.) : Ensembles à coupes dénombrables et capacités dominées par une mesure (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 491-508, Springer 1978)

[15] TALAGRAND (M.) : Sur deux résultats de Mokobodzki concernant les ensembles à coupes dénombrables (à paraitre ; j'ai un preprint de 1980)

[16] : Sur les résultats de Feyel concernant les épaisseurs (dans ce volume)