NICOLE EL KAROUI

Une propriété de domination de l'enveloppe de Snell des semimartingales fortes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 400-408
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__400_0>

UNE PROPRIETE DE DOMINATION DE L'ENVELOPPE DE SNELL DES SEMIMARTINGALES FORTES

par Nicole EL KAROUI

Dans la résolution par les inéquations variationnelles, ([1]), du problème d'arrêt optimal, on montre par des méthodes d'analyse, que si la fonction de gain du problème d'optimalité est le α-potentiel positif d'une fonction non nécessairement positive, la plus petite fonction α-excessive qui la majore est un α-potentiel. Ce résultat dont l'importance pratique est evidente, a été étendu par d'autres auteurs à des situations markoviennes plus générales que celles des processus de diffusions. ([2]) et ([3]) .

La théorie des réduites par rapport à un cône de fonctions α-surmédianes permet de résoudre, sous des hypothèses de régularité assez fortes de la résolvante, le même problème. ([4]).

Nous nous proposons de généraliser ces résultats, dans le cadre de la Théorie générale des processus, en montrant grâce aux techniques du balayage, que la plus petite surmartingale forte, c'est-à-dire <u>l'enveloppe de Snell</u>, qui majore une semimartingale forte de la classe (D), est, sous certaines hypothèses, engendrée par un processus croissant dominé par la variation totale de celui qui engendre la semimartingale. Nous interprétons ensuite les résultats obtenus dans le cadre markovien.

RAPPELS ET NOTATIONS

Pour tout ce qui concerne les notions de surmartingales, semimartingales fortes, etc..., nous renvoyons le lecteur à ([5]), où il trouvera entre autres la preuve du résultat fondamental suivant:

Si Z est une surmartingale forte de la classe (D), Z se décompose de manière unique en $Z = M - A^{-} - B$, où M est une martingale uniformément intégrable, A un processus croissant optionnel, et B un processus croissant prévisible, purement discontinu, admettant éventuellement un saut à l'infini si Z est défini jusqu'à l'infini.

Ces processus constituent la décomposition canonique de Z .

Si maintenant Y est une semimartingale forte de la classe (D), Y admet de la même façon une décomposition en :

$Y = M - C^{-} - K$ où les processus C et K sont des processus à variation intégrable, respectivement optionnel et purement discontinu prévisible.

Nous rappelons maintenant, en suivant les résultats de ([6]), les propriétés fondamentales de l'enveloppe de Snell J d'un processus optionnel Y de la classe (D), limité à droite et à gauche, défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$, satisfaisant aux conditions habituelles.

Nous désignons par H l'ensemble aléatoire :

$$H = \{ J^{-} = Y^{-} \text{ , ou } J = Y \text{ , ou } J^{+} = Y^{+} \}$$

Pour tout t.a. T, nous notons D_T le début de l'ensemble $[T,+\infty[\cap H$.

Les ensembles $\underline{\underline{F}}_{D_T}$-mesurables suivants précisent à quelle partie de H le début appartient :

$H_T^- = \{ J_{D_T}^- = Y_{D_T}^- \}$ $\qquad H_T = (H_T^-)^c \cap \{J_{D_T} = Y_{D_T}\}$

$$H_T^+ = (H_T^- \cap H_T^+)^c$$

La proposition suivante les propriétés essentielles de l'enveloppe de Snell. Elle est établie dans ([6].p.135.)

PROPOSITION 1: Avec les notations précisées ci-dessus, si J est l'enveloppe de Snell d'un processus Y làdlàg de la classe (D), les relations suivantes sont satisfaites:

a) Pour tout t.a. T,

$$(1) \quad \begin{aligned} E(J_T) &= \sup_{S \geqq T} E(Y_S) = E(1_{H_T^-} Y_{D_T}^- + 1_{H_T} Y_{D_T} + 1_{H_{D_T}^+} Y_{D_T}^+) \\ &= E(1_{H_T^-} J_{D_T}^- + 1_{H_T} J_{D_T} + 1_{H_T^+} J_{D_T}^+) \end{aligned}$$

b) Si A et B sont les processus croissants qui interviennent dans la décomposition canonique de J

(2) $\{ A - A^- > 0 \} \subseteq \{ J = Y \}$ et $\{ B - B^- > 0 \} \subseteq \{ J^- = Y^- \}$

c) Le t.a. D_T restreint à H_T^- est prévisible

Le processus J est donc associé au "balayage" de la semimartingale Y sur H . Pour préciser cette notion, nous introduisons deux processus croissants qui décrivent les passages hors de H.

Le premier est le processus D_t défini ci-dessus comme le début après t de l'ensemble H, qui est un ensemble fermé.

Les paliers de ce processus croissant continu à gauche correspondent aux excursions hors de H, dont les extrémités droites sont des valeurs prises par D .

Les extrémités gauches sont repérées symétriquement par le processus $L_t = \sup\{ s \geqq t;\ s \in H$ si $\sup\{\emptyset\} = \infty$

L'intervalle $[t, D_t[$ est identique à l'ensemble $\{ u;\ L_u < t \leq u \}$, ce qui entraine : $s < D_t \rightleftarrows L_s < t$.

Nous désignons par L^ε_n et T^ε_n les extrémités gauches et droites des intervalles contigus à H, de longueur plus grande que ε , et par U^ε_n la v.a. $L^\varepsilon_n + \varepsilon$. Il est bien connu que les v.a. U^ε_n et T^ε_n sont des t.a., et que $T^\varepsilon_n = D_{U^\varepsilon_n}$.

L'ensemble $\{ L_s + \varepsilon < s \}$ s'exprime comme : $\bigcup_n [U^\varepsilon_n, T^\varepsilon_n[$

A tout processus V à variation finie, continu à gauche, on associe son balayé V^H , égal à $V_{D.} - V_{D_o}$. Les remarques précédentes nous permettent de décomposer V^H en:

$$V^H_t = \int_{[0,t[} 1_{\{L_s = s\}} dV_s + \lim_{\varepsilon \to 0} \Sigma_n 1_{\{L^\varepsilon_n < t\}} (V_{T^\varepsilon_n} - V_{U^\varepsilon_n})$$

Si nous travaillons avec des processus croissants continus à droite, nous aurons plutôt besoin des processus:

$$l_t = \sup\{ s < t;\ s \in H \} \qquad \text{et} \qquad T_t = \inf\{ s > t;\ s \in H \}$$

Le processus $l.$ est croissant et prévisible. L'ensemble $\{ l_s = s \}$ décrit les points de H, qui sont points d'accumulation à gauche; il est donc inclus dans $\{ Y^- = J^- \}$.

Nous désignons par $H^{\rightarrow}$ la réunion des graphes des v.a. L^ε_n pour tout n et tout ε de Q^+ . C'est l'ensemble des extrémités gauches des excursions hors de H.

On vérifie aisément que : $\{ l_s < s \} = \bigcup_{g \in H^{\rightarrow}}] g, T_g]$

Les outils sont en place pour établir le principal résultat de ce travail:

THEOREME 2: <u>Soit Y une semimartingale forte optionnelle, positive et de la classe (D), de décomposition canonique</u>:

<u>Soit J l'enveloppe de Snell de Y, de décomposition</u> $J = M - A^{-} - B$.
<u>Si le processus prévisible, purement discontinu K est décroissant, le processus B est nul, et le processus croissant A absolument continu par rapport à la variation totale de C</u> .

Preuve: Nous commençons par montrer que B est nul si K est décroissant. En effet, les sauts de K sont liés à la projection prévisible Y^p de Y par la relation : $K - K^{-} = \Delta K = Y^{-} - Y^p$.
L'hypothèse de décroissance faite sur K entraine donc que: $Y^{-} \leqq Y^p$ et que : $Y^{-} \leqq Y^p \leqq J^p \leqq J^{-}$. Mais, d'après la proposition 1, un saut de B ne peut avoir lieu que si à cet instant $Y^{-} = J^{-}$; les inégalités précédentes montrent qu'on a aussi $J^{-} = J^p$, relation qui montre que le saut de B est nul. Le même argument montre que le processus ΔK est nul sur $\{ Y^{-} = J^{-} \}$

Avant de préciser la décomposition de J, nous remarquons que , quitte à soustraire une martingale (u.i.) à Y, et donc à J, on peut supposer que Y et J s'annulent à l'infini, et que Y est la projection optionnelle du processus $C_\infty - C^{-}_{.} + K_\infty - K$.
La proposition 1 nous permet d'exprimer $E(J_T)$ en fonction de C^H_-

$$E(J_T) = E(C^H_\infty - C^{-H}_T + K_\infty - K_{D_T} - 1_{H^+_T} \Delta C_{D_T})$$

$$= E(\int_{[T,\infty[} 1_{\{L_s=s\}} dC_s + K_\infty - K_{D_T} - 1_{H^+_T} \Delta C_{D_T}) \tag{5}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} E(\Sigma_n 1_{\{T \leqq L^\varepsilon_n\}} (C^{-}_{T^\varepsilon_n} - C^{-}_{U^\varepsilon_n}))$$

Nous allons transformer ce dernier terme afin d'étudier son signe.

$$E(1_{\{T\leqq L^\varepsilon_n\}} (C^{-}_{T^\varepsilon_n} - C^{-}_{U^\varepsilon_n})) = E\left[1_{\{T\leqq L^\varepsilon_n\}} (C^{-}_{T^\varepsilon_n} + K_{T^\varepsilon_n} - C^{-}_{U^\varepsilon_n} - K_{U^\varepsilon_n} + 1_{H^+_{U^\varepsilon_n}} \Delta C_{T^\varepsilon_n})\right]$$

$$- E\left[1_{\{T\leqq L^\varepsilon_n\}} (K_{T^\varepsilon_n} - K_{U^\varepsilon_n} + 1_{H^+_{U^\varepsilon_n}} \Delta C_{T^\varepsilon_n})\right]$$

ce qui compte-tenu de la relation (5) appliquée aux t.a. U^ε_n et $T^\varepsilon_n = D_{U^\varepsilon_n}$

entraine que:

$$E\left(1_{\{T\leqq L_n^\varepsilon\}}(C^-_{T_n^\varepsilon} - C^-_{U_n^\varepsilon})\right) = E\left[1_{\{T\leqq L_n^\varepsilon\}}(Y_{U_n^\varepsilon} - J_{U_n^\varepsilon} - (K_{T_n^\varepsilon}-K_{U_n^\varepsilon}) - 1_{H^+_{U_n^\varepsilon}} \Delta C_{T_n^\varepsilon})\right]$$

Comme J majore Y,il reste à étudier les processus:

$$S_t^\varepsilon = \Sigma_n\, 1_{\{L_n^\varepsilon \geqq t\}}(K_{U_n^\varepsilon} - K_{T_n^\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \hat{S}_t^\varepsilon = -\Sigma_n\, 1_{\{L_n^\varepsilon \geqq t\}}\, 1_{H^+_{U_n^\varepsilon}}\, \Delta C_{T_n^\varepsilon}$$

Nous transformons l'écriture de S_t^ε en faisant intervenir l'ensemble $H^{\to}$:

$$S_t^\varepsilon = \Sigma_{g\in H^{\to}}\, 1_{\{g\geqq t\}}\, 1_{\{g+\varepsilon\leqq T_g\}}(K_{g+\varepsilon} - K_{T_g})$$

Mais K est un processus décroissant. Le théorème de Fubini prouve alors:

$S_t^\varepsilon = -\int dK_s\, 1_{\{t\leqq l_s < l_s+\varepsilon < s\}}$, processus qui tend en croissant vers

$S_t = -\int dK_s\, 1_{\{t\leqq l_s < s\}} = -\int dK_s\, 1_{\{t\leqq l_s\}}$

car nous avons vu que K ne charge pas l'ensemble $\{l_s = s\}$.

Nous comparons maintenant S_t au processus croissant $K_\infty - K_{D_t}$

$$K_\infty - K_{D_t} + S_t = \int dK_s\, 1_{\{l_s < t \leqq L_s\}} - \Delta K_{D_t}$$

Le deuxième membre vaut:

si $l_t < t < D_t$ $\quad \int dK_s\, 1_{\{s=D_t\}} - \Delta K_{D_t} = 0$

si $l_t < t$ et $t\in H$ $\quad \int dK_s\, 1_{\{s=t\}} - \Delta K_{D_t} = 0$ car $t = D_t$

si $l_t = t$, la première intégrale est nulle et $\Delta K_{D_t} = \Delta K_t$ aussi.

Les deux processus croissants $K_\infty - K_{D_t}$ et $-S_t$ sont identiques.

De la même façon, nous transformons l'écriture de $\hat{S}_t^\varepsilon$ en:

$\hat{S}_t^\varepsilon = -\Sigma_{g\in H^{\to}}\, 1_{\{g\geqq t\}}\, 1_{\{g+\varepsilon\leqq T_g\}}\, 1_{H^+_{g+\varepsilon}}\, \Delta C_{T_g}$ qui est un processus croissant car sur $H^+_{g+\varepsilon}$, ΔC_{T_g} est négatif , puisque $\Delta C = Y - Y^+$

Ces processus convergent donc en croissant vers un processus $\hat{S}_t$ que l'on peut d'écrire par : $\hat{S}_t = -\Sigma\, 1_{\{l_s \geqq t\}}\, 1_{\{l_s < s = L_s\}}\, 1_{\{Y_s^- < J_s^-\ Y_s \leq J_s\ Y_s^+ = J_s^+\}}\, \Delta C_s$

Le processus $\hat{S}_t$ ne charge pas l'ensemble $\{l_s = s\}$ et des arguments tout à fait analogue à ceux que nous avons employés ci-dessus montrent que:

$\hat{S}_t - 1_{H_t^+}\, \Delta C_{D_t} + \Sigma_{s\geqq D_t}\, 1_{H_s^+}\, 1_{\{s = L_s\}}\, \Delta C_s$ est nul .

Nous pouvons maintenant réecrire la relation (5) de la manière suivante:

$$E(J_T) = E\int_{[T,\infty[} 1_{\{L_s=s\}}(1-1_{\hat{H}_s^+})\, dC_s + \lim_{\varepsilon\to o} E(\Sigma_n 1_{\{T\leq L_n^\varepsilon\}}(Y_{U_n^\varepsilon}-J_{U_n^\varepsilon}))$$

si on pose:

$\hat{H}_s^+ = H_s \cap \{L_s=s, \Delta C_s \neq o\}$ et $R_t^\varepsilon = \Sigma_n 1_{t<L_n^\varepsilon}(Y_{U_n^\varepsilon} - J_{U_n^\varepsilon})$

Cette relation vraie pour tout t.a., est encore vraie en espérance conditionnelle, car les processus S_t^ε et $\hat{S}_t^\varepsilon$ convergent en croissant.

Les surmartingales fortes, projection optionnelle des processus décroissants R_t^ε convergent en croissant vers une surmartingale forte Z, qui d'après tout ce que nous venons de voir ne peut être que régulière.

Elle est engendrée par un processus croissant continu à gauche U_t.

L'unicité de la décomposition de J prouve immédiatement que:

$$A_t = -U_t + \int_{[o,t[} 1_{\{L_s=s\}}(1-1_{\hat{H}_s^+})\, dC_s$$

ce qui entraine évidemment que A admet une densité par rapport à la variation totale de C . CQFD.

REMARQUE: Si nous supposons la semimartingale forte Y, continue à droite et régulière, soit engendrée par un processus à variation finie continu, la démonstration que nous venons de faire se rapproche beaucoup de celle de ([7]), sur le balayage des semimartingales.

On peut effectivement déduire, dans ce cas, notre théorème, mais après quelques ajustements, de la proposition 3 de l'article cité, appliquée à la semimartingale J - Y , balayée sur l'ensemble de ses zéros.

Il nous reste à énoncer le paralèle markovien du théorème 2

THEOREME 3 : <u>Soit</u> $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, X_t, P^\mu)$ <u>une réalisation d'un semi-groupe droit, à valeurs dans un espace lusinien E.</u>

<u>Nous considérons deux</u> α<u>-potentiels gauches</u> v_1 et v_2 , <u>réguliers, et un</u> α<u>-potentiel k naturel.</u>

<u>On pose</u> $g = v_1 - v_2 - k$, <u>et on suppose g positive.</u>

<u>La plus petite fonction</u> α<u>-excessive qui majore g est un</u> α<u>-potentiel</u>

gauche, engendrée par une fonctionnelle additive gauche fortement dominée par celle qui engendre v_1 .

PREUVE:Notons q la plus petite fonction α-excessive qui majore g.
Il est montré en ([6]), que le processus $e^{-\alpha t}\, q(X_t)$ est l'enveloppe de Snell, pour toute loi P^{μ} du processus $Y_t = e^{-\alpha t} g(X_t)$.
Il suffit de remarquer que les hypothèses faites sur v_1, v_2 et k impliquent que le processus Y_t satisfait aux hypothèses du théorème 2.
La relation de domination énoncée est alors une simple conséquence de la décomposition de J faite au cours de la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

([1]) A. Bensoussan, J.L.Lions — Applications des inéquations variationnelles au contrôle stochastique. Dunod 1978

([2]) J.M.Bismut — Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Mém. Am. Math.Soc. 4 -1;130- 1976

([3]) S.R.Pliska — A semigroup représentation of the maximum expected reward in continuous parameter Markov Décision Theory. SIAM.J.of CONTROL and OPTIMIZATION, Vol 13 (1975)

([4]) G.Mokobodski — Densité relative de deux potentiels comparables. Sem. de Proba. n°4. Lectures Notes in Mathématics n°124. Springer Verlag.

([5]) E.Lenglart — Tribu de Meyer et théorie générale des processus. Sém. Proba XIV .Lect.Notes en Math. Springer Verlag n° 784 p. 500-546 1980.

([6]) N.El Karoui Les aspects probabilistes du contrôle stochastique
Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour
Lect. Notes in Math. n° 876
Springer Verlag 1980

([7]) N. El Karoui Temps local et balayage des semimartingales
Sém. Proba XIII . Lect. Notes in Math n° 721
Springer Verlag 1979.

Nicole EL KAROUI

E.N.S. de Fontenay aux Roses
5, rue Boucicaut
92260 Fontenay- aux Roses