SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Une décomposition multiplicative de la valeur absolue d'un mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__234_0>

UNE DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN

Ch. YOEURP (*)

Nous considérons ici un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles, sur lequel est défini un mouvement brownien $W = (W_t)$ issu de 0.

Il n'est pas possible de représenter la sous-martingale positive $W = (|W_t|)$ comme produit d'une martingale locale positive et d'un processus croissant, mais cette représentation est possible pour une sous-martingale positive $X = (X_t)$ telle que X_t et X_{t-} ne s'annulent jamais [3]. Nous avons remarqué qu'une telle représentation est également obtenue en appliquant la formule d'Itô à $\operatorname{Log} X_t$ et en regroupant convenablement les termes, puis en écrivant que $X_t = \exp(\operatorname{Log} X_t)$. Cette remarque suggère, pour remplacer la décomposition multiplicative d'Itô de $|W|$, de chercher des processus prévisibles $\Phi = (\Phi_t)$ tels que les intégrales stochastiques $\int_0^t \Phi_s \, d(\operatorname{Log}(|W_s| \vee \varepsilon))$ convergent, lorsque ε décroît vers 0.

Ce procédé, que l'on pourrait étendre à d'autres fonctions que la fonction logarithme, fait intervenir la valeur principale de Cauchy de certaines intégrales des temps locaux $(L_t^a)_{a \in \mathbb{R}}$ de W.

Avec l'aide et les notations du chapitre VI de [2], nous commençons par écrire une formule d'Itô généralisée. Rappelons tout d'abord que si $Z = (Z_t)$ est une semi-martingale réelle, il existe un processus $(a,t,\omega) \to (L_t^a(\omega))$, appelé processus des temps locaux de Z, défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$, qui est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{F}$ mesurable, et qui vérifie les propriétés suivantes :

(ℓ-1) pour tout $a \in \mathbb{R}$, le processus $(t,\omega) \to L_t^a(\omega)$ est adapté croissant, continu, et la mesure aléatoire $dL_s^a(\omega)$ sur $\mathbb{R}_+$ est portée par l'ensemble $\{s \,/\, Z_s(\omega) = a\}$,

---

(*) Université Paris VI - Laboratoire de Probabilités - 4 place Jussieu - Tour 56
3ème Etage - 75005 PARIS CEDEX

(ℓ-2) pour toute fonction f borélienne, bornée sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^t f(Z_s)\,d\langle Z^c, Z^c\rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)L_t^a\,da \qquad P\text{-p.s.}$$

1. *Proposition :* (cf. la formule 2.6 de [2])

Soit f une fonction réelle, dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure μ. Si f'_g désigne la dérivée à gauche de f en tout point de $\mathbb{R}$ (cette dérivée existe), on a :

$$(1)\quad f(Z_t) = f(Z_o) + \int_0^t f'_g(Z_{s-})\,dZ_s + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(da)L_t^a + \sum_{0<s\leq t}\left(f(Z_s)-f(Z_{s-})-f'_g(Z_{s-})\Delta Z_s\right)$$

Voici un cas particulier du résultat précédent :

2. *Corollaire :*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonction continue partout et de classe C^2 sauf en nombre fini de points $(x_i)_{i\in I}$, où les dérivées f' et f'' ont des discontinuités de première espèce. On note f'_i le saut de f' en x_i : $f'_i = f'(x_i + 0) - f'(x_i - 0)$. On a alors :

$$(2)\quad f(Z_t) = f(Z_o) + \int_0^t f'_g(Z_{s-})\,dZ_s + \frac{1}{2}\left[\int_0^t f''(Z_s)\,d\langle Z^c, Z^c\rangle_s + \sum_{i\in I} f'_i L_t^{x_i}\right]$$

$$+ \sum_{0<s\leq t}\left[f(Z_s)-f(Z_{s-})-f'_g(Z_{s-})\Delta Z_s\right].$$

Démonstration :

La dérivée seconde de f au sens des distributions est donnée par :

$\mu(da) = f''(a)da + \sum_{i\in I} f'_i\,\varepsilon_{x_i}(da)$, où ε_{x_i} désigne la mesure de Dirac en x_i.

La formule (2) découle alors de la formule (1) et de la propriété (ℓ-2). □

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat principal suivant :

3. Théorème :

Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, nulle en 0, et de classe $\mathbb{C}^2$ dans un voisinage de 0. Si $W = (W_t)$ est un mouvement brownien issu de 0, alors, la limite en probabilité de $\int_0^t \Phi_s(W_s)\, d\, \mathrm{Log}(|W_s| \vee \varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, existe et est égale à :

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} dW_s - \frac{1}{2}\, \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da$$

où v.p. désigne valeur principale.

Démonstration :

Nous appliquons la formule (2) à la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(|x| \vee \varepsilon)$ et la semi-martingale $Z = W$:

$$\mathrm{Log}(|W_t| \vee \varepsilon) = \mathrm{Log}\ \varepsilon + \int_0^t \frac{I_{(|W_s|>\varepsilon)}}{W_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{I_{(|W_s|>\varepsilon)}}{W_s^2} ds + \frac{1}{2\varepsilon} (L_t^{\varepsilon} + L_t^{-\varepsilon}).$$

D'où, si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on a :

$$(3) \quad \int_0^t \Phi(W_s) d\, \mathrm{Log}(|W_s| \vee \varepsilon) = \int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} I_{(|W_s|>\varepsilon)} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} (\Phi(\varepsilon) L_t^{\varepsilon} + \Phi(-\varepsilon) L_t^{-\varepsilon}).$$

(l'expression du dernier terme de droite est due à la propriété (ℓ-1) des temps locaux).

a - Il est facile de montrer que le premier terme du second membre de (3) converge en probabilité, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s} dW_s$, d'après les hypothèses sur Φ et d'après l'égalité $\int_0^t I_{(W_s=0)} dW_s = 0$, qui découle de ($\ell$-2).

b - Etudions maintenant la limite du deuxième terme du second membre de (3). D'après la propriété (ℓ-2) des temps locaux on a :

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{\Phi(a)L_t^a + \Phi(-a)L_t^{-a}}{a^2} \right) da$$

Mais, au voisinage de 0, $\dfrac{\Phi(a)L_t^a + \Phi(-a)L_t^{-a}}{a^2}$ est équivalent à $\Phi'(0)\left(\dfrac{L_t^a - L_t^{-a}}{a}\right)$,

car $\Phi(0) = 0$ et $\Phi \in \mathbb{C}^2$. D'autre part, d'après un théorème de Ray ([1] page 70) :

$$P\left[\overline{\lim_{|x-y|=\delta}} \frac{|L_t^x - L_t^y|}{(2\delta \operatorname{Log} \frac{1}{\delta})^{1/2}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |L_t^x|^{1/2} \right] = 1,$$

il existe un voisinage de 0, tel que $|L_t^a(\omega) - L_t^{-a}(\omega)| \leq c_\varepsilon a^{1/4}$, et donc

$$\int_0^t \frac{\Phi(W_s)}{W_s^2} I_{(|W_s|>\varepsilon)} ds \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} L_t^a da.$$

c - Il nous reste à étudier la convergence du dernier terme de (3). Comme précédemment, on voit qu'il est équivalent, lorsque $\varepsilon \to 0$, à : $\frac{1}{2}\Phi'(0)\ (L_t^{\varepsilon} - L_t^{-\varepsilon})$, qui converge vers 0, d'après la continuité de $a \to L_t^a(\omega)$. ([1] page 68-69).

Finalement, en faisant tendre ε vers 0, dans la formule (3), on obtient le résultat désiré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ITÔ, K. ; Mc KEAN, H.P. : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[2] MEYER, P.A. : "Un cours sur les intégrales stochastiques". Sém. Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511, Berlin, Springer, 1976.

[3] MEYER, P.A. ; YOEURP, Ch.: "Sur la décomposition multiplicative des sous-martingales positives". Sém. Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511, Berlin, Springer, 1976.