

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Appendice : « Un résultat de D. Williams »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 133

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__133_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE : UN RESULTAT DE D. WILLIAMS

Williams vient de donner une réponse positive au problème posé à la fin de la section II.3 : le complémentaire de la << sphère >> W_1 est effectivement μ -polaire. Il se peut qu'il rédige lui même ce résultat, et ceci n'est qu'une rédaction provisoire.⁽⁴⁾

Nous fixons s dyadique, posons $t_k^m = sk2^{-m}$. La remarque cruciale de Williams est la suivante :

Si x est une fonction (déterministe) continue à valeurs dans \mathbb{R}^d , la variance de la somme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} (x^i(t_{k+1}^m) - x^i(t_k^m))(B_{t_{k+1}^m}^i - B_{t_k^m}^i) \text{ sous la loi } \mu,$$

vaut $s2^{-m} \sum (x^i(t_{k+1}^m) - x^i(t_k^m))^2$, majoré par $s \cdot \sup_k (x^i(\cdot) - x^i(\cdot))^2$

Nous allons en déduire que, si x n'appartient pas elle même à W_1 , la mesure $P_t(x, \cdot)$ ne charge pas W_1 .

Puisque $x \notin W_1$, il existe un s dyadique, et une composante i , une suite $(p_m) \rightarrow \infty$ (on écrira simplement p pour p_m) tels que

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} (x^i(t_{k+1}^p) - x^i(t_k^p))^2 \rightarrow \sigma \neq s \text{ (} \sigma \text{ peut être } +\infty \text{)}$$

Utilisant la majoration précédente, et la continuité uniforme de (x^i) , nous voyons que la variance écrite plus haut tend vers 0. Le lemme de Borel-Cantelli nous permet d'extraire une suite (q_m) de (p_m) telle que, en écrivant q au lieu de q_m

$$\sum_{k=0}^{2^q-1} (x^i(\cdot) - x^i(\cdot))(B^i(\cdot) - B^i(\cdot)) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Mais alors, soit ω la fonction $e^{-t/2}x + \sqrt{1-e^{-t}}w$, avec $w \in W_1$; on a pour μ -presque tout $w \in W_1$

$$\lim \sum_{k=0}^{2^q-1} (B_{t_{k+1}}^i(\omega) - B_{t_k}^i(\omega))^2 = e^{-t}\sigma + (1-e^{-t})s \neq s$$

et par conséquent $\omega \notin W_1$ (μ -p.s.).

Prenons maintenant comme loi initiale μ , et supposons que le processus (Y_s) rencontre W_1^C avec probabilité positive entre 0 et t . Utilisant le théorème de section, il existe un temps d'arrêt T tel que $T \leq t$, $P\{T < t, Y_T \in W_1^C\} > 0$. Par la propriété de Markov forte et le résultat précédent,

$$P\{Y_t \in W_1^C\} \geq \int_{\{T < t, Y_T \in W_1^C\}} P_{t-T}(Y_T, W_1^C) = P\{T < t, Y_T \in W_1^C\} > 0, \text{ ce qui est absurde,}$$

puisque on sait que $Y_t \in W_1^C$ p.s. (résultat qu'on aurait d'ailleurs pu démontrer directement, par les mêmes considérations que ci-dessus).

1. D. Williams a préféré laisser les choses ainsi. Nous le remercions d'avoir confié ce résultat au Séminaire.