Paul-André Meyer

Appendice : « Un résultat de D. Williams »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 133

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__133_0>

APPENDICE : UN RESULTAT DE D. WILLIAMS

Williams vient de donner une réponse positive au problême posé à la fin de la section II.3 : le complémentaire de la << sphêre >> W_1 est effectivement μ-polaire. Il se peut qu'il rédige lui même ce résultat, et ceci n'est qu'une rédaction provisoire.[1]

Nous fixons s dyadique, posons $t^m_k=sk2^{-m}$. La remarque cruciale de Williams est la suivante :
Si x est une fonction (déterministe) continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la variance de la somme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} (x^i(t^m_{k+1})-x^i(t^m_k))(B^i_{t^m_{k+1}}-B^i_{t^m_k}) \quad \text{sous la loi } \mu ,$$

vaut $s2^{-m}\sum (x^i(t^m_{k+1})-x^i(t^m_k))^2$, majoré par s. $\sup_k (x^i(\ )-x^i(\ ))^2$
Nous allons en déduire que, si x n'appartient pas elle même à W_1 , la mesure $P_t(x,.)$ ne charge pas W_1.

Puisque $x\notin W_1$, il existe un s dyadique, et une composante i, une suite $(p_m) \to \infty$ (on écrira simplement p pour p_m) tels que

$$\sum_{k=0}^{2^p-1} (x^i(t^p_{k+1})-x^i(t^p_k))^2 \to \sigma \neq s \quad (\sigma \text{ peut être } +\infty)$$

Utilisant la majoration précédente, et la continuité uniforme de (x^i), nous voyons que la variance écrite plus haut tend vers 0. Le lemme de Borel-Cantelli nous permet d'extraire une suite (q_m) de (p_m) telle que, en écrivant q au lieu de q_m

$$\sum_{k=0}^{2^q-1} (x^i(\ )-x^i(\ ))(B^i(\ )-B^i(\ )) \to 0 \text{ p.s.}$$

Mais alors, soit ω la fonction $e^{-t/2}x + \sqrt{1-e^{-t}}w$, avec $w\in W_1$; on a pour μ-presque tout $w\in W_1$

$$\lim \sum_{k=0}^{2^q-1} (B^i_{t^m_{k+1}}(\omega)-B^i_{t^m_k}(\omega))^2 = e^{-t}\sigma + (1-e^{-t})s \neq s$$

et par conséquent $\omega\notin W_1$ (μ-p.s.).

Prenons maintenant comme loi initiale μ , et supposons que le processus (Y_s) rencontre W_1^c avec probabilité positive entre 0 et t. Utilisant le théorême de section, il existe un temps d'arrêt T tel que $T\leqq t$, $P\{T<t, Y_T\in W_1^c\}> 0$. Par la propriété de Markov forte et le résultat précédent, $P\{Y_t\in W_1^c\} \geqq \int_{\{T<t,Y_T\in W_1^c\}} P_{t-T}(Y_T,W_1^c) = P\{T<t,Y_T\in W_1^c\} > 0$, ce qui est absurde, puisqu'on sait que $Y_t\in W_1^c$ p.s. (résultat qu'on aurait d'ailleurs pu démontrer directement, par les mêmes considérations que ci-dessus).

1. D. Williams a préféré laisser les choses ainsi. Nous le remercions d'avoir confié ce résultat au Séminaire.