PAUL-ANDRÉ MEYER

Géométrie stochastique sans larmes, I

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 44-102
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__44_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

GEOMETRIE STOCHASTIQUE SANS LARMES

par P.A. Meyer

Il y a une quinzaine d'années, alors que les relations entre la théorie des processus de Markov et la théorie du potentiel étaient en plein développement, P. Cartier avait dit qu'il ne suffisait pas de faire des probabilités sur les espaces localement compacts, qu'il fallait en faire sur des structures riches, et en particulier sur les variétés. Il semble que sa prédiction soit en train de se réaliser : dans un congrès international comme celui organisé à Durham, en Juillet 1980, par la London Mathematical Society, et consacré aux intégrales stochastiques, un bon tiers des exposés avaient un rapport avec la géométrie différentielle, et en particulier avec le " Malliavin Calculus" , c'est à dire les méthodes inventées par Malliavin pour établir des résultats d'hypoellipticité de manière probabiliste.

Le texte qui suit, et dont l'intérêt est surtout pédagogique, a pour but de faciliter aux probabilistes l'abord de la géométrie différentielle. Le point de vue adopté est celui de Schwartz : le langage naturel pour travailler sur les processus à valeurs dans les variétés **n'**est pas celui que l'on utilise le plus couramment en géométrie différentielle, mais celui des <u>vecteurs tangents et des formes d'ordre 2</u>. Je n'ai pas cherché à aller très loin, mais j'espère que cette présentation permettra d'aborder sans trop de peine les travaux de Malliavin et de son école, de L. Schwartz, le livre en préparation de J.M. Bismut. Un autre texte d'introduction, de beaucoup plus grande ampleur, devrait paraître prochainement : le livre de N. Ikeda et S. Watanabe " Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes"[2].

Cet exposé doit beaucoup à des conversations avec d'autres mathématiciens, ou à la communication de travaux non encore publiés. Tous mes remerciements vont donc, à L. Schwartz d'abord, pour de fructueuses discussions (l'une d'entre elles a fourni le thème principal), puis à J. M. Bismut, N. Ikeda et S. Watanabe, P. Malliavin ; D. Williams et R.J. Elliott enfin, pour leur invitation à participer au congrès de Durham[1].

1. Le volume des Proceedings de Durham contiendra une version de ce texte, en anglais, plus courte et rédigée dans un esprit assez différent.
2. Voir aussi le cours de Malliavin à Montréal (1978), "Géométrie différentielle stochastique" .

TABLE DES MATIERES

1. VECTEURS ET FORMES DU SECOND ORDRE

Nous désignons par V une variété de dimension ν, de classe C^∞ (nous ne considérerons dans la suite que des variétés, fonctions, champs, formes... de classe C^∞). L'algèbre $C^\infty(V)$ des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur V sera simplement désignée par C, la plupart du temps.

Nous utiliserons presque toujours la convention de sommation d'Einstein, consistant à omettre le symbole Σ_i lorsque l'indice i est répété, une fois en position supérieure et une fois en position inférieure (nombreux exemples plus bas). Dans les cas douteux, les symboles Σ seront complètement écrits.

a) Rappelons quelques notations et définitions de géométrie différentielle élémentaire.

i) Soit $a\in V$. On appelle <u>vecteur tangent</u> en a un opérateur différentiel du premier ordre en a, sans terme constant, c'est à dire une forme linéaire u sur C possédant les propriétés

1) $u(1)=0$

2) Si $f\in C$ a un zéro double en a (i.e. s'annule en a, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 1 dans une carte locale quelconque), on a $u(f)=0$.

Soit (x^i) une carte locale autour de a ; nous noterons D_i, dans toute la suite, les opérateurs de dérivation partielle $\partial/\partial x^i$. Alors les applications $f \mapsto (D_i f)_a$ sont des vecteurs tangents en a, et la formule de Taylor à l'ordre 1 entraîne que tout $u\in T_a(V)$[1] s'écrit de manière unique $u=u^iD_i$ (convention de sommation).

On note T(V) la somme de tous les espaces $T_a(V)$, pour $a\in V$: un élément de T(V) est donc un couple (a,u) avec $a\in V$, $u\in T_a(V)$. Si U est un ouvert de V, on identifie T(U) à une partie de T(V) ; en particulier, si U est le domaine de la carte locale (x^i), un élément de T(U) est uniquement repéré par les coordonnées a^i de a et les coordonnées u^i de u ($u=u^iD_i$), et T(U) est en bijection avec $U\times\mathbb{R}^\nu$. Nous n'insistons pas sur la manière triviale dont on munit T(V) d'une structure de variété C^∞ .

ii) On note $T^*_a(V)$ le dual de $T_a(V)$, et $T^*(V)$ la somme des $T^*_a(V)$ (les éléments de $T^*_a(V)$ sont les <u>vecteurs cotangents</u>, ou <u>formes</u>, au point a). Soit $f\in C$; nous notons df_a (resp. df) l'application $u\mapsto u(f)$ sur $T_a(V)$ (resp. $(a,u)\mapsto u(f)$ sur T(V)), et cette application est appelée la <u>différentielle</u> de f (au point a, ou sur la variété). Par exemple, les fonctions u^i considérées plus haut sur T(U) sont simplement les dx^i, de sorte qu'à toute carte locale (x^i) de domaine U est associée une carte (x^i,dx^i) sur T(U).

Les différentielles de fonctions sont des exemples de <u>formes différentielles</u>, i.e. de fonctions C^∞ sur T(V), linéaires sur chaque $T_a(V)$.

1. J'ai oublié de dire qu'on note ainsi l'espace tangent à V en a !

La restriction à $T(U)$ d'une forme différentielle s'écrit de manière unique $u_i dx^i$, où les fonctions u_i sont C^∞ dans U.

iii) Soit h une application d'une variété W dans V, et soit $c \in W$, $a=h(c)$. On peut associer à h une application $h_* : T_c(W) \longrightarrow T_a(V)$, définie par

$$< h_*(u), df >_a \; = \; < u, d(f \circ h) >_c \quad \text{si } u \in T_c(W),\ f \in C^\infty(V)$$

En particulier, prenons $W=\mathbb{R}$: h est alors une <u>courbe</u> dans V. En tout point t de $\mathbb{R}$, désignons par D_t le vecteur tangent correspondant à la dérivée usuelle : le vecteur tangent $h_*(D_t)$ au point $h(t) \in V$ est appelé le <u>vecteur vitesse</u> de la courbe à l'instant t, et noté $\dot{h}(t)$. Si l'on prend une carte locale (x^i) autour de $a=h(t)$, et si l'on pose $h^i=x^i \circ h$ au voisinage de t, on a

$$\dot{h}(t) = \dot{h}^i(t) D_i \quad \text{au point } a .$$

b) <u>Etendons maintenant au second ordre toutes les définitions précédentes</u>

> Divers auteurs ont étudié l'extension de ces définitions à un ordre n quelconque : il y a en fait des différences assez profondes entre les ordres ≤ 2 et ≥ 3, et il est heureux que nous n'ayons pas à dépasser l'ordre 2.

i) Soit a un point de V. Un <u>vecteur tangent du second ordre</u> en a est un opérateur différentiel au point a, sans terme constant, d'ordre ≤ 2, i.e. une application λ de C dans $\mathbb{R}$, linéaire, telle que

1) $\lambda(1)=0$

2) Si $f \in C$ a un zéro triple en a (i.e. s'annule en a, ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 dans une carte locale quelconque), on a $\lambda(f)=0$.

L'espace des vecteurs tangents du second ordre en a est noté $\tau_a(V)$. Notons tout de suite qu'un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 est aussi d'ordre ≤ 2 : on a donc $T_a(V) \subset \tau_a(V)$. La somme de tous les espaces $\tau_a(V)$ est notée $\tau(V)$. Si U est un ouvert de V, nous identifions $\tau(U)$ à une partie de $\tau(V)$.

Regardons comment s'écrivent les vecteurs tangents d'ordre 2 : prenons une carte locale (x^i) autour de a, en supposant pour simplifier que les x^i s'annulent en a. Les opérateurs de dérivation partielle D_i et D_{ij} au point a sont des vecteurs tangents du second ordre, indépendants ($i \leq j$), car

$$D_i(x^\alpha) = \delta_i^\alpha \quad , \; D_i(x^\alpha x^\beta) = 0$$
$$D_{ij}(x^\alpha) = 0 \quad , \; D_{ij}(x^\alpha x^\beta) = \delta_{ij}^{\alpha\beta} + \delta_{ij}^{\beta\alpha}$$

où δ est un symbole de Kronecker, comme d'habitude. D'autre part, la condition 2) ci-dessus entraîne que ces vecteurs engendrent $\tau_a(V)$. Tout élément de $\tau_a(V)$ s'écrit donc de manière unique

(1) $$\lambda = \lambda^i D_i + \lambda^{ij} D_{ij}$$

où la seconde sommation se fait, non sur les couples (i,j), $i \leq j$, mais sur tous les couples (i,j), et la condition $\lambda^{ij}=\lambda^{ji}$ est imposée pour l'unicité.

Dans une seconde carte locale $(x^{i'})$ autour de a, le même opérateur s'écrira $\lambda = \lambda^{i'} D_{i'} + \lambda^{i'j'} D_{i'j'}$, la formule de transformation étant d'une part

(2) $$\lambda^{i'j'} = D_i x^{i'} D_j x^{j'} \lambda^{ij}$$

de sorte que les λ^{ij} se transforment comme les composantes d'une forme bilinéaire (nous y reviendrons plus loin), et d'autre part

(3) $$\lambda^{i'} = D_i x^{i'} \lambda^i + D_{ij} x^{i'} \lambda^{ij}$$

ce qui signifie que la formule de transformation des λ^i fait intervenir aussi les λ^{ij}. Autrement dit, les λ^i ne sont pas les composantes d'un vecteur tangent du premier ordre. Ou encore, il n'existe pas, sur une variété, de manière naturelle de décomposer un vecteur tangent d'ordre 2 en un vecteur tangent d'ordre 1 et un vecteur tangent "purement d'ordre 2" , comme on peut le faire dans $\mathbb{R}^n$ grâce à la structure linéaire (dans la formule (3), le second terme à droite s'annule dans les changements de cartes linéaires). Nous y reviendrons plus loin également.

Ces formules de changement de carte montrent que $\tau(V)$ peut être muni d'une structure de variété C^∞ : si les (x^i) forment une carte locale sur V de domaine U, les $(x^i, \lambda^i, \lambda^{ij})$ avec $i \leq j$ définiront une carte sur l'ouvert $\tau(U)$ de $\tau(V)$.

ii) On appelle forme d'ordre 2 toute fonction C^∞ sur $\tau(V)$, linéaire sur chaque $\tau_a(V)$. Notons tout de suite que la restriction à $T(V)$ d'une forme d'ordre 2 est une forme différentielle ordinaire.

L'exemple fondamental en est le suivant : si $f \in C$, nous noterons $d^2 f_a$ (resp. $d^2 f$) l'application $\lambda \mapsto \lambda(f)$ sur $\tau_a(V)$ (resp. $(a,\lambda) \mapsto \lambda(f)$ sur $\tau(V)$) et nous l'appellerons différentielle seconde de f, au point a ou sur V. Il est clair que $d^2 f$ est une forme d'ordre 2, et il en est de même de $g d^2 f$, où g est une fonction C^∞ sur V .

Pour écrire la différentielle seconde en coordonnées locales, nous introduirons encore la notation suivante : étant données deux fonctions $f \in C$, $g \in C$, nous définissons la forme d'ordre 2

(4) $$df.dg = \frac{1}{2}(d^2(fg) - f d^2 g - g d^2 f)$$

Alors :

LEMME. On a dans le domaine de la carte locale (x^i)

(5) $$d^2 f = D_i f \, d^2 x^i + D_{ij} f \, dx^i . dx^j$$

En effet, soit $a=(a^i)$ un point du domaine. On a

$$d^2x^i = d^2(x^i-a^i) \quad , \quad dx^i.dx^j = \tfrac{1}{2}d^2((x^i-a^i)(x^j-a^j))$$

de sorte que la formule à démontrer s'écrit

$$d^2\left(f - D_if(a)(x^i-a^i) - \tfrac{1}{2}D_{ij}f(a)(x^i-a^i)(x^j-a^j) \right) = 0$$

et elle se réduit à la formule de Taylor au second ordre.

La formule (5) a une longue histoire : elle figure dans les anciens cours d'analyse, par exemple, chez Goursat, comme un moyen très commode de manier le système des dérivées secondes de f dans les changements de variables, puisque le côté gauche de la formule est intrinsèque. Il est vrai que les vieux auteurs défigurent (5) en décidant que $d^2x^i=0$ lorsque les x^i sont les "variables indépendantes", ce qui ne veut rien dire. L'exposé le plus clair que j'aie trouvé est celui d'Hadamard (cours d'analyse de l'école polytechnique, 1917[1]) , qui appelle (5) la différentielle seconde <u>complète</u>, et en souligne bien le caractère invariant. Les auteurs modernes, à la suite de Bourbaki et de Dieudonné, ne conservent que la partie bilinéaire de la différentielle seconde (Dieudonné, FAM, VIII. 12). A mon avis, les deux notions sont nécessaires.

[1] Comment ce cours de 1917 figure-t'il dans notre bibliothèque avec le tampon " Reichsuniversität Strasburg" ? Encore une trahison des intellectuels ?

Noter les formules

(6) $$d^2f|_{T(V)} = df \quad , \quad df.dg|_{T(V)} = 0 \ .$$

Les formes d'ordre 2 $dx^i.dx^j$ ($i\leq j$) et d^2x^i constituent en tout point a une base de l'espace $\tau^*_a(V)$ dual de $\tau_a(V)$. On en déduit qu'une forme d'ordre 2 s'écrit localement

(7) $$\omega = a_id^2x^i + a_{ij}dx^i.dx^j$$

avec des coefficients a_i, a_{ij} de classe C^∞ dans le domaine de la carte, et de manière unique si l'on impose que $a_{ij}=a_{ji}$. Contrairement à ce qui se produisait pour les opérateurs différentiels, c'est la partie du premier ordre qui est ici intrinsèque :

$$\omega|_{T(V)} = a_idx^i$$

tandis que l'expression $a_{ij}dx^i.dx^j$ ne se transforme pas comme une forme bilinéaire dans les changements de cartes arbitraires.

Soit L un champ de vecteurs tangents du second ordre (ou, comme on dit le plus souvent, un opérateur différentiel du second ordre). On a $<L,d^2f> =L(f)$, donc aussi

(8) $$< L, df.dg > = \tfrac{1}{2}(L(fg)-fLg-gLf)$$

On reconnaît là l'«opérateur carré du champ» associé à L . En particulier, si $L = \lambda^iD_i + \lambda^{ij}D_{ij}$, on a

$$< L, df.dg > = \lambda^{ij}D_ifD_jg$$

En tout point a, l'espace des différentielles df_a est en bijection avec T^*_a. L'application $(df_a, dg_a) \mapsto \lambda^{ij}D_if(a)D_jg(a)$ étant intrinsèque, on voit que L définit une forme bilinéaire symétrique intrinsèque sur l'espace cotangent T_a^* : cela "explique" la formule (2)

Nous reviendrons plus loin sur les formes d'ordre 2.

> Soit f une fonction nulle au point a : connaître d^2f_a revient à connaître les dérivées partielles premières et secondes de f en a, ou encore ce que l'on nomme le <u>2-jet</u> de f-f(a) en a. La formule (4) peut s'interpréter ainsi : <u>si</u> f <u>et</u> g <u>sont nulles en</u> a, le 2-jet de fg en a ne dépend que des 1-jets de f et g en a, d'où une opération qui associe à deux 1-jets (deux différentielles premières) un 2-jet (une différentielle seconde). Nous n'utilisons pas ce point de vue dans la suite.

iii) Soit h une application d'une variété W dans V, et soit $c \in W$, $a=h(c)$. On peut associer à h une application linéaire $h_* : \tau_c(W) \longrightarrow \tau_a(V)$ de la manière suivante :

$$< h_*(\lambda), d^2f >_a = < \lambda, d^2(f\circ h) >_c \qquad (\lambda\in\tau_c(W),\ f\in C^\infty(V)).$$

En particulier, prenons $W=\mathbb{R}$. En tout point t de $\mathbb{R}$, soit D_t^2 le vecteur tangent d'ordre 2 correspondant à la dérivée seconde usuelle : le vecteur tangent d'ordre 2 $h_*(D_t^2)$ au point h(t) est appelé le <u>vecteur accélération</u> de la courbe à l'instant t, et noté $\ddot{h}(t)$. Il s'écrit en coordonnées locales

(9) $$\ddot{h} = \ddot{h}^i D_i + \dot{h}^i\dot{h}^j D_{ij} \text{ au point } h(t) \quad .$$

> Il est amusant de remarquer que la connaissance de $\ddot{h}$ détermine celle de tous les produits $\dot{h}^i\dot{h}^j$, donc celle de la vitesse $\dot{h}$ <u>au signe près</u>.

2. LE PRINCIPE DE SCHWARTZ

Soit X un processus stochastique (sur Ω, $\underline{\underline{F}}$, P, $(\underline{\underline{F}}_t)$ comme d'habitude), à trajectoires <u>continues</u> - <u>il en sera ainsi dans toute la suite</u>, sauf mention expresse du contraire - et à valeurs dans V. Nous dirons que X est une <u>semimartingale</u> si, pour toute fonction $f\in C^\infty$, le processus réel $f\circ X$ est une semimartingale ordinaire par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

a) Soit U le domaine d'une carte locale (x^i), et soit $f\in C=C^\infty(V)$. Ecrivons la formule d'Ito dans l'ouvert aléatoire prévisible $\{X\in U\}$:

$$d(f\circ X)_t = D_if\circ X_t\, dX_t^i + \tfrac{1}{2}D_{ij}f\circ X_t\, d\langle X^i,X^j\rangle_t$$

> D'un point de vue pédagogique, nous recommandons au lecteur de ne pas s'embarrasser du problème de localisation, et de raisonner comme si V était munie de coordonnées <u>globales</u> x^i : les idées essentielles ressortiront bien plus clairement.

Le côté gauche de cette formule ne fait intervenir aucune carte locale. Le côté droit est donc indépendant de la carte utilisée, et cela suggère que l'<< opérateur différentiel au point X_t >>

(10) $$dX_t^i\, D_i + \frac{1}{2}\, d\langle X^i,X^j\rangle_t\, D_{ij}$$

que nous noterons d^2X_t dans la suite - est indépendant de la carte locale, autrement dit, est un vecteur tangent du second ordre au point X_t, intrinsèquement associé au processus. Qu'est ce que cela veut dire ? Rien de plus que la formule d'Ito elle même : que si nous prenons une fonction $f\in C$, un processus prévisible borné (H_t), l'intégrale stochastique

$$\int_0^t I_{\{X_s\in U\}} H_s < d^2X_s, f> = \int_0^t I_{\{X_s\in U\}} H_s (D_i f\circ X_s dX_s^i + \tfrac{1}{2} D_{ij} f\circ X_s d<X^i,X^j>_s)$$

a une signification intrinsèque. Le caractère invariant du vecteur tangent d'ordre 2 d^2X_t ne peut avoir qu'une interprétation heuristique, en raison du dX_t^i qui figure en tête, et qui n'est même pas un véritable élément différentiel. Néanmoins, ce caractère invariant, découvert par L. Schwartz, fournit un fil conducteur extrêmement utile pour le calcul stochastique dans les variétés. Nous l'appellerons principe de Schwartz dans la suite.

b) Soit Y_t une semimartingale continue réelle ; alors Y_t se décompose de manière unique en somme d'un processus à variation finie continue $\tilde{Y}_t$ (nul en 0 pour fixer les idées) et d'une martingale locale continue $\overset{c}{Y}_t$. Suivant la terminologie de Jacod, les processus à variation finie $\tilde{Y}_t$ et $<Y,Y>_t = <\overset{c}{Y},\overset{c}{Y}>_t$ sont appelés les caractéristiques locales de Y. Si Y n'est connue que dans un ouvert aléatoire prévisible A, on peut calculer les mesures aléatoires $I_A d\tilde{Y}_t$ et $I_A d<Y,Y>_t$, que l'on appelle les caractéristiques locales de Y dans A . L'extension au cas vectoriel est immédiate.

En particulier, prenons pour Y_t la semimartingale réelle $f\circ X_t$, dans l'ouvert prévisible $A=\{X\in U\}$. Nous avons dans A

$$d\tilde{Y}_t = D_i f\circ X_t \, d\tilde{X}_t^i + \tfrac{1}{2} D_{ij} f\circ X_t \, d<X^i,X^j>_t$$

Le côté gauche étant indépendant de toute carte locale, il doit en être de même du côté droit, ce qui signifie que le vecteur tangent du second ordre

(11) $$d^2\tilde{X}_t = d\tilde{X}_t^i \, D_i + \tfrac{1}{2} \, d<X^i,X^j>_t \, D_{ij} \quad \text{au point } X_t$$

est intrinsèquement associé au processus X. Nous l'appellerons le vecteur tangent d'ordre 2 des caractéristiques locales de X .

La signification intuitive de ce fait est la suivante : formellement, on a $d\tilde{Y}_t = E[dY_t|\underline{\underline{F}}_t]$ pour une semimartingale réelle. Ici, conditionnellement à $\underline{\underline{F}}_t$, les divers vecteurs tangents d^2X_t sont tous au même point X_t de V ; on peut donc en prendre l'intégrale, et on a

$$d^2\tilde{X}_t = E[d^2X_t|\underline{\underline{F}}_t] \quad (\text{ formellement ! }) .$$

Contrairement à (10), on peut donner à (11) un sens précis : choisissons un processus croissant réel (H_t) continu, tel que les mesures $d\tilde{X}_t^i$, $d<X^i,X^j>_t$ sur l'ouvert aléatoire $\{X\in U\}$ soient absolument continues par rapport à (H_t) - le plus souvent, on aura $H_t=t$ dans les applications . Désignons par λ_t^i une densité de $d\tilde{X}_t^i/dH_t$, par λ_t^{ij} une densité de $d<X^i,X^j>_t/dH_t$.

Alors le *vrai* vecteur tangent du second ordre

$$\lambda_t^i D_i + \tfrac{1}{2}\lambda_t^{ij} D_{ij} \quad \text{au point} \quad X_t$$

sur l'ensemble $\{X \in U\}$, est intrinsèquement associé au processus, au sens suivant : si l'on change de carte locale sur U, les vecteurs tangents d'ordre 2 correspondants ne diffèrent que sur un ensemble dH -négligeable.

c) Les deux vecteurs tangents du second ordre d^2X_t et $d^2\tilde{X}_t$ étant placés au même point, on peut considérer leur différence, qui s'écrit

(12) $$d^2\overset{c}{X}_t = d\overset{c}{X}_t \, D_i$$

C'est en fait un vecteur tangent du *premier* ordre. Cette remarque a été faite par Schwartz dans son livre [1], p. 66 et suivantes.

REMARQUE. La semimartingale X est à variation finie (dans l'ouvert aléatoire $\{X \in U\}$) si et seulement si les crochets $d\langle X^i, X^j\rangle_t$ sont nuls dans cet ouvert. Cela revient à dire que d^2X_t (ou $d^2\tilde{X}_t$) est constamment du premier ordre dans l'ouvert. Il faut donc se garder d'interpréter d^2X_t comme une accélération : c'est bien une vitesse, et les termes du second ordre proviennent du caractère " brownien" de la trajectoire.

3. CONNEXIONS

La notion de connexion marque la frontière de la géométrie différentielle véritable, et c'est une idée relativement difficile à assimiler. Nous espérons convaincre notre lecteur, dans ce paragraphe, qu'il s'agit d'une idée *particulièrement simple et intuitive pour les probabilistes*, à condition de disposer du langage du second ordre.

a) Plaçons nous d'abord sur $\mathbb{R}^n$, et considérons un opérateur du second ordre à coefficients constants, générateur d'un " mouvement brownien" X . Cet opérateur s'écrit (en supposant nul le terme d'ordre 0)

$$\lambda = \lambda^i D_i + \lambda^{ij} D_{ij}$$

où la forme bilinéaire de coefficients λ^{ij} est positive, mais peut être dégénérée. Si les λ^i sont tous nuls, X est une martingale, le mouvement moyen de X est nul. L'addition de $\lambda^i D_i$ correspond alors à celle d'une *dérive* déterministe (ou drift, comme on dit en franglais). Sur une variété, on ne sait pas définir de manière intrinsèque la " partie du premier ordre " d'un opérateur du second ordre, et cela nous empêche de définir le mouvement moyen instantané d'une semimartingale, et la notion de martingale. Nous introduisons donc la notion qui nous est nécessaire :

DEFINITION 3.1. *On appelle* connexion *au point* a *de* V *une application linéaire* $\Gamma_a : \tau_a(V) \to T_a(V)$, *qui induit l'identité sur* $T_a(V)$. *Si* λ *est un vecteur tangent d'ordre* 2 *en* a, $\Gamma_a(\lambda)$ *est appelé la* dérive *de* λ .

Soit $\lambda = \lambda^i D_i + \lambda^{ij} D_{ij}$ un vecteur du second ordre en a ; pour savoir calculer $\Gamma_a(\lambda)$ il suffit de connaître $\Gamma_a(D_i)=D_i$ et $\Gamma_a(D_{ij})$: on pose

(13) $$\Gamma_a(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k(a) D_k$$

avec $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$ puisque $D_{ij}=D_{ji}$ (en langage de géométrie différentielle, nous ne considérons ici que des connexions <u>sans torsion</u>). Les coefficients $\Gamma_{ij}^k(a)$ sont appelés les <u>symboles de Christoffel</u> de la connexion au point a (dans la carte (x^i)).

Il est alors facile de définir ce qu'est une <u>connexion sur</u> V : c'est un champ de connexions en chaque point de V, les symboles de Christoffel étant des fonctions C^∞ dans le domaine de chaque carte locale.

Explicitons une propriété évidente, mais fondamentale, des connexions : soit L un opérateur du second ordre sur V (i.e. un champ de vecteurs du second ordre) : alors $\Gamma(L)$ est un champ de vecteurs du premier ordre, et l'on a pour toute fonction f sur V

(14) $$\Gamma(fL) = f\Gamma(L)$$

En particulier, soient X et Y deux champs de vecteurs du premier ordre ; leur produit XY $((XY)f = X(Yf)$: rappelons qu'un vecteur tangent est un opérateur différentiel !) est un champ de vecteurs du second ordre, et $\Gamma(XY)$ est à nouveau un champ de vecteurs ordinaire. On pose

(15) $$\Gamma(XY) = \nabla_X Y$$

et on l'appelle la <u>dérivée covariante</u> du champ Y suivant le champ X. Calculons la explicitement , en posant $X=\xi^i D_i$, $Y=\eta^j D_j$

$$Yf = \eta^j D_j f \quad ; \ XYf = \xi^i D_i(\eta^j D_j f) = \xi^i D_i \eta^j D_j f + \xi^i \eta^j D_{ij} f$$

$$XY = \xi^i D_i \eta^j D_j + \xi^i \eta^j D_{ij}$$

$$\Gamma(XY) = \xi^i D_i \eta^j D_j + \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k D_k \quad \text{ou} \quad \xi^i (D_i \eta^k + \eta^j \Gamma_{ij}^k) D_k$$

> La définition la plus usuelle des connexions - plus précisément, des connexions <u>linéaires</u> - car il y en a d'autres, que nous rencontrerons <u>plus loin</u> - part de la notion de dérivée covariante. Celle que nous avons donnée remonte à Ambrose, Palais et Singer, Sprays, Anais Acad. Bras. Ciencias 32, 1960, p. 163.

Il sera souvent avantageux pour nous de considérer une connexion, non pas comme un opérateur qui transforme les vecteurs d'ordre 2 en vecteurs d'ordre 1 en induisant l'identité sur T(V) , mais dualement, comme un opérateur qui transforme les formes d'ordre 1 en formes d'ordre 2, en préservant la restriction à T(V). Ainsi

(16) $$\Gamma(dx^i) = d^2x^i + \Gamma_{jk}^i dx^j . dx^k \qquad (\text{ et } \Gamma(f\omega) = f\Gamma(\omega) \text{ si } f \in C) .$$

b) Illustrons maintenant la simplicité de cette notion de connexion par divers exemples, empruntés soit à la géométrie différentielle, soit aux probabilités.

i) La notion de géodésique . Soit une courbe $h : \mathbb{R} \to V$. On dit que h est une géodésique (pour la connexion Γ) si $\Gamma(\ddot{h}(t)) = 0$ tout le long de la courbe. Ayant calculé $\ddot{h}$ (formule (9)), nous voyons que l'équation des géodésiques est

$$\ddot{h}^k + \dot{h}^i \dot{h}^j \Gamma^k_{ij} \circ h = 0 \quad (k=1,\dots,\nu) \tag{17}$$

Voir plus bas : note sur l'équation des géodésiques.

ii) Application à la mécanique . Prenons $V=\mathbb{R}^3$, et considérons l'équation de la dynamique newtonienne, sous sa forme "naïve"

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)) \quad (\text{ ou } F(x(t), \dot{x}(t)))$$

F désignant un champ de forces (vecteurs d'ordre 1). Nous avons vu plus haut qu'une accélération n'est pas un vecteur d'ordre 1, donc cette équation n'est pas homogène : on doit donc l'écrire

$$m\Gamma(\ddot{x}(t)) = F(x(t)) \quad (\text{ ou } F(x(t), \dot{x}(t)))$$

où Γ est la connexion sur $\mathbb{R}^3$ dont tous les symboles de Christoffel sont nuls, dans les coordonnées usuelles sur $\mathbb{R}^3$. Cette forme de l'équation de la dynamique est maintenant invariante par les difféomorphismes de $\mathbb{R}^3$ (la connexion Γ étant la connexion riemannienne de $\mathbb{R}^3$, nous verrons plus loin que cela revient à écrire les équations de Lagrange).

iii) Martingales (locales) à valeurs dans une variété. Soit X une semimartingale à valeurs dans V. Le principe de Schwartz nous dit que d^2X_t et $d^2\tilde{X}_t$ se transforment comme des vecteurs tangents du second ordre : on peut donc leur appliquer Γ . Nous dirons que X est une martingale (locale) à valeurs dans V si $\Gamma(d^2\tilde{X}_t)=0$, autrement dit, si pour toute carte locale (x^i) de domaine U, pour tout $k=1,\dots,\nu$

(18) $\quad dX^k_t + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}(X_t)d\langle X^i,X^j\rangle_t$ est une différentielle de martingale locale réelle, dans l'ouvert prévisible $\{X\in U\}$.

Ainsi, les martingales (locales) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour la connexion usuelle, sont les martingales locales usuelles. Les martingales proprement dites ne pouvant être définies dans les variétés générales, le mot " locale" sera presque toujours supprimé. Nous remettons les exemples à plus tard.

Cette notion est due à J.M. Bismut, bien qu'il n'utilise pas lui même la terminologie des "martingales à valeurs dans V" : je l'ai apprise de lui au cours d'un exposé à Paris en Décembre 79, et ne puis pas pour l'instant donner de référence plus exacte.

Note sur l'équation des géodésiques

c) Ceci est une digression, destinée à présenter aux probabilistes peu familiers avec la géométrie différentielle quelques résultats classiques de cette discipline, dont nous nous servirons plus tard à l'occasion. On trouvera par la suite une ou deux autres digressions de ce genre.

Commençons par le cas où $V=\mathbb{R}^\nu$, muni d'une connexion Γ dont les symboles de Christoffel sont C^∞ à support compact. Le système géodésique s'écrit

$$\frac{dx^k}{dt} = \dot{x}^k \qquad \frac{d\dot{x}^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on peut se fixer les conditions initiales $x^k(0)=\alpha^k$, $\dot{x}^k(0)=\xi^k$. On ne peut appliquer à ce système la théorie de l'existence et de l'unicité pour les systèmes lipschitziens, car il n'est que localement lipschitzien. Néanmoins, on sait qu'il existe une solution maximale $x(t)$ unique, définie dans un intervalle $]a,b[$ avec $a<0<b$, telle que

$$x^k(0)=\alpha^k,\ \dot{x}^k(0)=\xi^k\ ,\ \lim_{t\to a}|x(t)|=\infty\ ,\ \lim_{t\to b}|x(t)|=\infty$$

Mais en fait les Γ^k_{ij} sont à support compact, donc la trajectoire s'éloignant à l'infini finit par entrer et rester dans l'ensemble où ils sont nuls, et se réduit donc pour t assez grand à une droite parcourue d'un mouvement uniforme. Il en résulte que $a=-\infty$, $b=+\infty$, et les solutions n'explosent pas.

Ce point étant acquis, on désigne par $\mathrm{Exp}_\alpha(s\xi)$ la valeur à l'instant s de la solution $x(t)$ telle que $x(0)=\alpha$, $\dot{x}(0)=\xi$, et on vérifie que

$$\mathrm{Exp}_\alpha(s(t\xi)) = \mathrm{Exp}_\alpha((st)\xi)$$

L'application $\mathrm{Exp}_\alpha(s\xi)$ est C^∞ en ses trois arguments. En particulier, calculons l'application linéaire A tangente à $\xi\mapsto\mathrm{Exp}_\alpha(\xi)$ en 0 (s=1). On a $A(\xi) = \frac{d}{ds}\mathrm{Exp}_\alpha(s\xi)|_{s=0} =\xi$, donc A est l'identité, et le théorème des fonctions implicites entraîne que Exp_α induit un homéomorphisme d'un voisinage $|\xi|<r$ de 0 dans $\mathbb{R}^\nu$ sur un voisinage de α dans $\mathbb{R}^\nu$.

Ce résultat étant de nature locale, nous pouvons revenir au cas d'une variété V quelconque, dont nous fixons un point α (nous munissons $T_\alpha(V)$ d'une distance euclidienne). Etant donné $\xi\in T_\alpha(V)$, nous désignons par $s\mapsto\mathrm{Exp}_\alpha(s\xi)$ la géodésique maximale $x(t)$ telle que $x(0)=\alpha$, $\dot{x}(0)=\xi$ (a priori, cette géodésique n'est définie que sur un intervalle $]a,b[$, $a<0<b$). Alors il existe $r>0$ telle que, pour $|\xi|<r$

- $\mathrm{Exp}_\alpha(s\xi)$ soit définie sur un voisinage $]-1-\varepsilon,1+\varepsilon[$ de $[-1,1]$
- $\xi\mapsto\mathrm{Exp}_\alpha(\xi)$ soit un homéomorphisme de $\{|\xi|<r\}$ sur un voisinage W_α de α dans V.

Définissons alors une carte - dite carte normale, ou carte exponentielle - au voisinage de α, de la manière suivante : choisissons des coordonnées linéaires y^i sur $T_\alpha(V)$ (relatives à une base orthonormale pour la distance euclidienne utilisée) et posons sur W_α

$$x^i = y^i\circ\mathrm{Exp}_\alpha^{-1}$$

Alors W_α est représenté dans la carte par la boule $|x|<r$, et la propriété essentielle de la carte normale s'écrit ainsi : pour tout ξ, $|\xi|\leqq r$, la courbe $x^i=t\xi^i$ ($-1<t<1$) est géodésique, c'est à dire

$$\Gamma^k_{ij}(t\xi)\xi^i\xi^j = 0 \qquad k=1,\dots,\nu$$

Faisons d'abord $t=0$: comme les ξ^i sont arbitraires, et $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$, nous pouvons en déduire que $\Gamma^k_{ij}(0)=0$: tous les symboles de Christoffel relatifs à une carte normale s'annulent au centre de la carte. Dérivons ensuite la relation précédente par rapport à t :

$$D_\ell \Gamma^k_{ij}(t\xi)\xi^\ell \xi^i \xi^j = 0$$

d'où en faisant t=0 la relation

(19) $$D_\ell \Gamma^k_{ij}(0) + D_i \Gamma^k_{j\ell}(0) + D_j \Gamma^k_{\ell i}(0) = 0 \quad (k=1,\dots,\nu) .$$

Cela suffit pour l'instant, mais nous aurons sans doute l'occasion de revenir là dessus par la suite.

4. INTEGRALES DE STRATONOVITCH ET D'ITO

Dans ce paragraphe, nous allons intégrer des formes déterministes très régulières sur des 1-chaînes aléatoires très irrégulières (des morceaux de chemins tracés par une semimartingale). En fait, ceci n'est que le début d'une théorie très riche, que l'on trouvera développée dans les travaux de Bismut : la partie présentée ici semble parvenue à maturité, tandis que le reste est en pleine croissance.

L'idée générale du paragraphe est la suivante : l'"accroissement infinitésimal" d'une semimartingale étant un objet du second ordre, les êtres que l'on sait naturellement intégrer le long des trajectoires sont les formes du second ordre. Ceci dit, le langage usuel de la géométrie différentielle n'est pas du second ordre, mais du premier : il faut donc savoir transformer les formes du premier ordre en formes du second ordre, pour les intégrer. Il y a pour cela deux procédés naturels, de caractère géométrique, non probabiliste. Le premier donne lieu à l'intégrale de Stratonovitch, et le second à l'intégrale d'Ito.

a) Compléments sur les formes du second ordre . Nous avons défini au § 1, b), les formes du second ordre, la différentielle d^2f, le produit $df.dg$ de deux différentielles. Nous allons maintenant étendre le domaine des opérations d et . .

LEMME. Etant données deux formes du premier ordre ω,σ, on peut définir des formes du second ordre, notées $d\omega$, $\omega.\sigma$, de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites

1) L'application d est $\mathbb{R}$-linéaire ; $d(f\omega) = fd\omega + df.\omega$ ($f\in C$) ; $d(df)=d^2f$.
2) L'application . est $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique, et on a $(f\omega).\sigma = f(\omega.\sigma)$ $(f\in C)$
3) Si U est ouvert dans V, on a $(\omega|_U).(\sigma|_U)= (\omega.\sigma)|_U$ et $d(\omega|_U)=d\omega|_U$.[1]

et ces deux propriétés caractérisent uniquement les deux opérations.

Démonstration (triviale). D'après 1), nous avons $d(fdg)=fd^2g+df.dg$, de même $d(gdf)= gd^2f+df.dg$, et on en déduit que $df.dg$ a bien sa valeur donnée par la formule (4). Ainsi, ces conditions déterminent uniquement $df.dg$ (donc aussi $(adf).(bdg)$ pour $a,b,f,g \in C$), et donc aussi $d(fdg)$ d'après 1).

1. En fait, la condition 3 est inutile.

Soit U le domaine d'une carte (x^i) ; dans U ω et σ s'écrivent $\omega_i dx^i$ et $\sigma_j dx^j$ respectivement. Alors on a dans U, d'après la condition 3)

$$d\omega = \omega_i d^2x^i + d\omega_i . dx^i \quad , \quad \omega.\sigma = \omega_i \sigma_j dx^i . dx^j$$

d'où l'unicité dans U, et dans V en recouvrant la variété par des domaines de cartes locales. Quant à l'existence, l'unicité qui vient d'être établie entraîne que les expressions qui viennent d'être données en coordonnées locales sont en fait intrinsèques : elles se recollent donc bien, et la vérification des propriétés 1), 2), 3) est facile.(1)

b) Intégration d'une forme du second ordre le long d'une semimartingale.

X désigne à nouveau une semimartingale à valeurs dans V. Rappelons qu'en théorie de l'intégration sur les variétés, on intègre des formes, non seulement sur des chemins, mais sur des chaînes , qui sont des sommes de chemins, multipliés formellement par des coefficients convenables. Ici, nos multiplicateurs seront des processus prévisibles réels bornés.

Donnons nous donc une forme du second ordre π, un processus prévisible borné K. Nous allons définir un processus réel $Y_t = \int_{K\bullet X_0^t} \pi$, qui sera une semimartingale ordinaire, satisfaisant formellement à

(20) $$dY_t = K_t < d^2X_t, \pi > \quad \text{et} \quad Y_0=0 \quad .$$

Pour définir Y, nous adopterons une convention : lorsque nous parlerons d'une carte locale (x^i) de domaine U, nous supposerons que les x^i sont des fonctions appartenant à C, et formant une carte locale sur tout un voisinage de $\overline{U}$; ainsi, les processus $X^i = x^i \circ X$ seront des semimartingales réelles, définies sur tout $\mathbb{R}_+$, et non dans un ouvert aléatoire $\{X \in U\}$.

Construction de Y. Soit d'abord U le domaine d'une carte locale (x^i) (au sens précédent). Dans U, nous pouvons écrire

$$\pi = a_i d^2x^i + a_{ij} dx^i . dx^j$$

avec des coefficients a_i, a_{ij} de classe C^∞ au voisinage de $\overline{U}$. Nous définissons alors

$$\int_{KI_{\{X\in U\}}\bullet X_0^t} \pi = \Sigma_i \int_0^t K_s I_{\{X_s \in U\}} a_i(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \int_0^t K_s I_{\{X_s \in U\}} a_{ij}(X_s) d<X^i, X^j>_s$$

et le principe de Schwartz nous permet d'affirmer que ceci est indépendant de la carte (x^i) de domaine U, utilisée dans cette représentation.

Considérons ensuite un recouvrement localement fini (U_α) par des domaines de cartes locales, et considérons une partition de l'unité (h_α) subordonnée. Posons $H_t^\alpha = h_\alpha \circ X_t$, de sorte que $H^\alpha = H^\alpha I_{\{X \in U^\alpha\}}$, et que nous pouvons définir par le precédé ci-dessus

$$Y_t^\alpha = \int_{KH^\alpha \bullet X_0^t} \pi$$

1. Noter la formule $\frac{d}{dt} < \dot{h}(t), \omega > = < \ddot{h}(t), d\omega >$ pour toute courbe h(t).

Nous posons maintenant $Y = \Sigma_\alpha Y^\alpha$, ce qui a un sens, car une trajectoire $X_\cdot(\omega)$ ne rencontre, sur un intervalle compact $[0,t]$, qu'un nombre fini de domaines U_α de cartes locales : soit P_n la loi P conditionnée par l'événement

$$\{\ X_\cdot \text{ ne rencontre que n ouverts } U_\alpha \text{ au plus sur } [0,t]\ \}$$

Alors Y est une semimartingale sous la loi P_n, sur $[0,t]$, et d'après un théorème de Jacod, Y est une semimartingale sous la loi $P \ll \Sigma_n 2^{-n}P_n$.

Reste à vérifier que Y ne dépend pas du recouvrement, ni de la partition de l'unité utilisés. Plutôt que de passer du temps à des choses de ce genre, dressons un catalogue des propriétés utiles de l'intégrale stochastique de formes du second ordre.

c) Quelques propriétés

1) D'une manière générale, si l'on connaît $Y_t = \int_{X_0^t} \pi$, on a

$$\int_{K\bullet X_0^t} \pi = \int_0^t K_s dY_s$$

Cela nous permettra de nous passer du multiplicateur la plupart du temps.

2) Si $a \in C$, on a

$$\int_{K\bullet X_0^t} a\pi = \int_{a(X)K\bullet X_0^t} \pi$$

3) On a

$$\int_{X_0^t} d^2 f = f(X_t) - f(X_0)$$

4) On a $\displaystyle\int_{X_0^t} df.dg = < f(X), g(X) >_t$

5) Soient V et W deux variétés, h une application de V dans W, Z la semimartingale $h \circ X$ à valeurs dans W . Alors on a

$$\int_{Z_0^t} \pi = \int_{X_0^t} h^*\pi$$ où π est une forme du second ordre sur W, et $h^*\pi$ est son image réciproque sur $V^{(1)}$.

6) Si X est à variation finie, $\int_{X_0^t} \pi = \int_{X_0^t} \pi_1$, où π_1 est la restriction de π à $T(V)$, forme du premier ordre, intégrable au sens de Stieltjes sur tout chemin à variation finie.

Les démonstrations sont laissées au lecteur.

1. Définie par $< \lambda, h^*\pi > = < h_*\lambda, \pi >$ si λ est un vecteur tangent d'ordre 2 sur V - en fait, le calcul est immédiat : $h^*(d\omega) = d(h^*\omega)$, $h^*(\omega.\sigma) = h^*\omega.h^*\sigma$, $h^*(d^2 f) = d^2(f\circ h)$, et $h^*(f\omega) = f\circ h\ h^*(\omega)$. Incidemment, citons une formule agréable pour le calcul de $h_*(\lambda)$: si λ est au point a de V, et si les y^α sont les coordonnées locales sur W autour de h(a), on a $h_*(\lambda) = \lambda(h^\alpha)D_\alpha + \lambda(h^\alpha,h^\beta)D_{\alpha\beta}$, où $h^\alpha = y^\alpha \circ h$ et $\lambda(.,.)$ est la forme bilinéaire associée à λ.

REMARQUE. L'emploi du " multiplicateur " K pourrait être remplacé par une notion plus générale : on pourrait définir sans difficulté $\int_0^t \langle d^2X_s, \pi_s \rangle$, où (π_s) est un processus prévisible à valeurs dans l'espace des formes d'ordre 2 sur V. Nous n'avons pas eu besoin de cette extension, et nous la laissons de côté.

7) Enfin, sans insister non plus, signalons que si l'on pose $Y_t = \int_{K \bullet X_0^t} \pi$,
de sorte que, formellement

$$dY_t = K_t < d^2X_t,\ \pi >$$

on peut calculer la décomposition de la semimartingale Y, au moyen du vecteur tangent d'ordre 2 des caractéristiques locales de X :

$$d\tilde{Y}_t = K_t < d^2\tilde{X}_t\ ,\ \pi > \quad , \text{ et donc } \quad d\overset{c}{Y}_t = dY_t - d\tilde{Y}_t = K_t < d^2X_t - d^2\tilde{X}_t,\ \pi_1 > .$$

(cf. (11), (12)). On peut aussi donner une expression intrinsèque à $\langle Y,Y \rangle$: soit toujours $\pi_1 = \pi|_{T(V)}$; on a

$$\langle Y,Y \rangle_t = 2\int_{K^2 \bullet X_0^t} \pi_1 . \pi_1 \qquad \text{(voir aussi (24) plus bas)}$$

Ces formules n'ont pas d'intérêt particulier (sauf pour donner des problèmes d'examen).

d) Intégrales de Stratonovitch et d'Ito. Nous définissons maintenant l'intégrale d'une forme ω d'ordre 1 sur les trajectoires d'une semimartingale X .

DEFINITION. On appelle intégrale de Stratonovitch de ω sur la chaîne $K \bullet X$ la semimartingale

$$\int_{K \bullet X_0^t} \omega = \int_{K \bullet X_0^t} d\omega$$

Soit Γ une connexion sur V. On appelle intégrale d'Ito de ω la semimartingale

$$(\Gamma)\int_{K \bullet X_0^t} \omega = \int_{K \bullet X_0^t} \Gamma\omega$$

Les formes du second ordre $d\omega$ et $\Gamma\omega$ ont été définies de manière purement géométrique : $\Gamma\omega$ au paragraphe 3 (cf (16)), et $d\omega$ au début de ce paragraphe. Les deux intégrales sont ici présentées sur le même pied : noter toutefois que si l'on travaillait sur des formes ω peu régulières, la formation de $d\omega$ exigerait plus de différentiabilité que celle de $\Gamma\omega$; cela correspond à l'assertion usuelle, suivant laquelle l'intégrale de Stratonovitch est " moins générale" que l'intégrale d'Ito.

Expliquons la terminologie par un exemple simple : prenons $V = \mathbb{R}^2$ (avec la connexion Γ dont les symboles de Christoffel sont nuls dans la carte usuelle) et prenons $X=(Y,Z)$, où Y et Z sont des semimartingales réelles, et

$\omega = ydz$, de sorte que

$$d\omega = yd^2z + dy.dz \qquad \Gamma\omega = yd^2z$$

Alors $\qquad (\Gamma)\int_{X_0^t} \omega = \int_0^t Y_s dZ_s$

l'intégrale stochastique ordinaire $Y\cdot Z$ au sens d'Ito, tandis que

$$(21) \qquad \int_{X_0^t} \omega = \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}< Y,Z >_t$$

qui est l'expression usuelle de l'intégrale de Stratonovitch, que nous noterons $Y{*}Z$ dans la suite. De manière encore plus concrète, si X est une semimartingale réelle, et ω est la forme $f(x)dx$, on a

$$(\Gamma)\int_{X_0^t} \omega = \int_0^t f(X_s)dX_s \quad , \quad \int_{X_0^t} \omega = \int_0^t f(X_s){*}dX_s = \int_0^t f(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)d<X,X>_s .$$

Avant d'étudier de manière plus détaillée les propriétés des deux intégrales, remarquons que $d\omega - \Gamma\omega$ est une forme dont la restriction à $T(V)$ est nulle, donc $\int_{X_0^t} d\omega - \Gamma\omega$ ne fait intervenir qu'une intégration par rapport aux crochets de X. Les deux intégrales ne diffèrent donc que d'une semimartingale à variation finie.

Propriétés : Intégrale de Stratonovitch

1) La propriété fondamentale de l'intégrale de Stratonovitch, celle qui la rend plus importante en fait que l'intégrale d'Ito, est la suivante :

$$(22) \qquad \text{Si } f \in C \ , \quad \int_{X_0^t} df = f(X_t) - f(X_0)$$

Cela résulte de la propriété 3) de l'intégrale stochastique des formes d'ordre 2, deux pages plus haut.

2) Nous allons étendre cette propriété. Il est bien connu en géométrie différentielle que l'on peut définir l'intégrale d'une forme fermée le long d'un chemin continu (alors que pour une forme quelconque le chemin doit être supposé différentiable). Cela donne un sens à la tautologie apparente

$$(23) \qquad \underline{\text{Si } \theta \text{ est fermée}} \ , \quad \int_{X_0^t} \theta = \int_{X_0^t} \theta \quad \text{p.s.}$$

(du côté gauche, on a une intégrale stochastique de Stratonovitch, du côté droit, une intégrale calculée de manière déterministe, trajectoire par trajectoire). Dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, ce résultat est dû à Yor, et il a été étendu aux variétés par Ikeda et Manabe .

Démonstration. Recouvrons V par des ouverts U_α possédant la propriété suivante : il existe $f_\alpha \in C$ telle que $\Theta = df_\alpha$ dans U_α . Désignons aussi par (t_i^n) la n-ième subdivision dyadique de $[0,t]$ $(0 \leq i \leq 2^n)$. Pour toute application φ de $\{0,\dots,2^n-1\}$ dans l'ensemble des indices α désignons par A_φ^n l'événement

$$\{\ \omega : \text{pour tout } i,\ X_t(\omega) \in U_{\varphi(i)} \text{ pour } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]\ \}$$

et soit $A_n = \cup_\varphi A_{n,\varphi}$. Un argument de continuité uniforme montre que $A_n \uparrow \Omega$.

Soit φ tel que $P(A_{n,\varphi}) \neq 0$, et soit $P_{n,\varphi}$ la loi P conditionnée par $A_{n,\varphi}$. La propriété 1) de l'intégrale de Stratonovitch entraîne que, $P_{n,\varphi}$-p.s.

$$\int_{X_0^t} \Theta = \Sigma_i\ f_{\varphi(i)}(X_{t_{i+1}^n}) - f_{\varphi(i)}(X_{t_i^n})$$

ce qui est aussi la valeur de l'intégrale déterministe de Θ le long de la trajectoire. La relation (23) ayant lieu $P_{n,\varphi}$-p.s. pour tout couple n,φ tel que $P(A_{n,\varphi}) \neq 0$ a aussi lieu P-p.s..

Cette démonstration fait usage à plusieurs reprises de l'invariance de l'intégrale stochastique par changement de loi absolument continu (Dellacherie-Meyer, Probabilités et Potentiel, n°VIII.12), qui s'étend évidemment au cas des variétés.

3) Considérons deux formes ρ et σ , et deux semimartingales

$$Y_t = \int_{K \cdot X_0^t} \rho \quad , \quad Z_t = \int_{L \cdot X_0^t} \sigma$$

Alors on a

(24) $$< Y, Z >_t = 2\int_{KL \cdot X_0^t} \rho . \sigma$$ (ce résultat s'applique aussi aux intégrales d'Ito)

En effet, il suffit de montrer que $I_{\{X \in U\}} . \langle Y, Z\rangle = 2\int_{I_{\{X \in U\}} KL \cdot X_0^t} \rho . \sigma$ pour tout ouvert U, domaine d'une carte (x^i). Remplaçant alors K,L par $KI_{\{X \in U\}}$, $LI_{\{X \in U\}}$ sans changer de notation, écrivant $\rho = r_i dx^i$, $\sigma = s_j dx^j$, on a

$$Y_t \sim \int_0^t K_u r_i(X_u) dX_u^i \quad , \quad Z_t \sim \int_0^t L_u s_j(X_u) dX_u^j$$

(le symbole $\sim$ signifiant que l'on néglige des termes à variation finie)

donc $$< Y, Z >_t = \int_0^t K_u L_u r_i(X_u) s_j(X_u) d\langle X^i, X^j\rangle_u$$

tandis que $\int_{KL \cdot X_0^t} \rho . \sigma = \frac{1}{2}\int_0^t K_u L_u\ r_i(X_u) s_j(X_u) d\langle X^i, X^j\rangle_u$.

4) Supposons connue la semimartingale $Y_t = \int_{X_0^t} \omega$, et soit $f \in C$. Peut on calculer la semimartingale $Z_t = \int_{X_0^t} f\omega$? La réponse est

(25) $$Z_t = \int_0^t f(X_s) * dY_s \ .$$

On a en effet $Z_t = \int_{X_0^t} fd\omega + df.\omega$. Le premier terme vaut $\int_0^t f(X_s) dY_s$.

Le second vaut $\frac{1}{2}< f(X),Y >_t$ d'après (24). En ajoutant on obtient bien l'intégrale stochastique de Stratonovitch $f(X)*Y$.

5) Soient V et W deux variétés, h une application de V dans W, Y la semi-martingale $h\circ X$ à valeurs dans W ; alors pour toute forme ω sur W on a

$$\int_{X_0^t} h^*\omega \;=\; \int_{Y_0^t} \omega$$

(évident).

Propriétés : Intégrales d'Ito.

1) Certaines propriétés sont évidentes, par exemple la formule (24) ou l'analogue de (25) : si $Y_t = (\Gamma)\int_{X_0^t} \omega$, $Z_t = (\Gamma)\int_{X_0^t} f\omega$, alors $Z_t=\int_0^t f(X_s)dY_s$.

2) L'intérêt de l'intégrale d'Ito vient surtout de ses rapports avec la notion de martingale à valeurs dans V . On a en effet le résultat suivant : pour que X soit une martingale à valeurs dans V (pour la connexion Γ), il faut et il suffit que, pour toute forme ω du premier ordre, $Y_t = (\Gamma) \int_{X_0^t} \omega$ soit une martingale locale réelle.

En effet, soit U le domaine d'une carte locale (x^i). Ecrivons dans U $\omega=a_i dx^i$; on a

$$I_{\{X_t\in U\}}dY_t \;=\; a_i(X_s)(\, dX_s^i + \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(X_s)d<X^j,X^k>_s \,)$$

et l'énoncé en résulte sans peine, compte tenu de (18) .

3) Terminons ce long paragraphe sur la forme intrinsèque de la formule d'Ito (due à Bismut, sous une forme un peu différente, comme l'essentiel des résultats de ce paragraphe). C'est tout simplement la formule

$$\int_{X_s^t} \omega \;=\; (\Gamma)\int_{X_s^t} \omega \;+\; \int_{X_s^t} (d\omega-\Gamma\omega) \tag{26}$$

En effet, prenons $\omega=df$; le côté gauche se réduit alors à $f(X_t)-f(X_s)$. Du côté droit, le terme de droite est un processus à variation finie, ne contenant que les crochets de X, et le premier terme est une martingale locale réelle si X est une martingale à valeurs dans V. En particulier, si $V=\mathbb{R}^n$ avec la connexion triviale, on obtient exactement la formule d'Ito classique.

5. UN PEU DE GEOMETRIE RIEMANNIENNE

La suite logique du paragraphe 4 est le paragraphe 6, mais nous préférons nous interrompre, pour introduire un peu de diversité, et quelques exemples aussi (de connexions et de processus).

a) On sait que la donnée d'une structure riemannienne sur V est celle d'un produit scalaire $(\;|\;)_a$ sur l'espace tangent $T_a(V)$, en tout point de V . En coordonnées locales, si $x=x^iD_i$ et $y=y^iD_i$ sont deux vecteurs tangents en a , on écrit

$$(x|y)_a = g_{ij}(a)x^iy^j$$

et on suppose que les coefficients $g_{ij}(a)$ sont C^∞ dans le domaine de la carte. On considère aussi le cas où la forme bilinéaire symétrique (|) est non dégénérée en tout point, mais non nécessairement positive, et on parle alors de structure <u>pseudo-riemannienne</u>.

La donnée d'une forme bilinéaire non dégénérée sur $T_a(V)$ équivaut à celle d'un isomorphisme entre $T_a(V)$ et $T^*_a(V)$, ou encore à celle d'une forme bilinéaire non dégénérée sur $T^*_a(V)$ (algèbre linéaire élémentaire !). Si $u=u_idx^i$ et $v=v_idx^i$ sont deux vecteurs cotangents en a, on écrit

$$(u|v)_a = g^{ij}(a)u_iv_j \qquad \text{avec } g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$$

Cette forme bilinéaire sur $T^*(V)$ est peut être plus importante pour les probabilistes que la forme bilinéaire sur T(V). En effet

i) Soit L un opérateur différentiel du second ordre (en coordonnées locales , $L=\lambda^iD_i + \lambda^{ij}D_{ij}$) . Introduisons l'opérateur carré du champ associé, déjà vu dans la formule (4)

$$(df|dg)_L = < L,\ df.dg > = \tfrac{1}{2}(L(fg)-fLg-gLf\ ) = \lambda^{ij}D_ifD_jg$$

Les vecteurs cotangents au point a étant exactement les df_a , nous voyons que L détermine une forme bilinéaire symétrique sur $T^*_a(V)$

(27) $$(u|v)_L = \lambda^{ij}u_iv_j \qquad (\ u=u_idx^i,\ v=v_idx^i\ )$$

Dans le cas des opérateurs associés aux diffusions, cette forme bilinéaire est <u>positive</u>, mais elle est fréquemment <u>dégénérée</u>, de sorte qu'il ne lui correspond pas une forme bilinéaire symétrique sur $T_a(V)$, i.e. une structure riemannienne. L'étude de la géométrie associée à un tel opérateur L n'a pas été poussée très loin, semble t'il.

ii) Considérons encore un produit scalaire (u|v), positif, mais éventuellement dégénéré, sur les espaces $T^*_a(V)$: il existe pour tout a une mesure gaussienne unique μ_a sur $T_a(V)$, centrée, et telle que

$$\int_{T_a(V)} <x,u><x,v>d\mu_a(x) = (u|v)_a$$

Bien entendu, on pourrait faire la même chose dans l'autre sens, mais il est plus naturel, semble t'il, que l'on voie apparaître une loi de probabilité sur $T_a(V)$ que sur $T^*_a(V)$.

Une dernière remarque : étant données une forme bilinéaire g sur $T_a(V)$ (en coordonnées locales, $g(x,y)=g_{ij}x^iy^j$), une forme bilinéaire λ sur $T^*_a(V)$ ($\lambda(u,v)= \lambda^{ij}u_iv_j$), l'expression $<g,\lambda> = g_{ij}\lambda^{ji}$ est intrinsèque.

Soit en effet $\hat{g}$ l'opérateur de $T_a(V)$ dans $T^*_a(V)$ associé à g : $\hat{g}(x) = x^ig_{ij}dx^j$, et $\hat{\lambda}$ l'opérateur de $T^*_a(V)$ dans

$T_a(V)$ associé à λ : $\hat{\lambda}(u)= u_j\lambda^{jk}D_k$, alors $\hat{\lambda}\hat{g}$ est un opérateur sur $T_a(V)$, $x\mapsto x^i g_{ij}\lambda^{jk}D_k$, dont $< g,\lambda >$ est la trace.

En particulier, si λ est un vecteur tangent du second ordre en a, l'expression $g_{ij}\lambda^{ji}$ est intrinsèque : autrement dit, on peut aussi considérer g comme forme du second ordre dont la restriction au premier ordre est nulle : cette forme s'écrit $g_{ij}dx^i.dx^j$ (une belle trivialité !).

Une conséquence qui m'a été signalée par Emery : si X est une semimartingale à valeurs dans V, variété munie de la structure (pseudo)riemannienne g, l'expression

$$\int_0^t g_{ij}(X_s)d\langle X^i,X^j\rangle_s$$

est intrinsèque, et représente une sorte de longueur naturelle pour le processus. Par exemple, le mouvement brownien naturel de $\mathbb{R}^2$ est de longueur nulle pour la métrique de Lorentz dx^2-dy^2.

b) Connexion associée à une structure riemannienne .

Le théorème le plus important de toute la géométrie différentielle est peut être celui qui associe, à toute structure riemannienne, la "connexion de Levi-Civita" correspondante. Nous allons en donner ici une démonstration tout à fait fantaisiste, au moyen du langage du second ordre (pour la démonstration classique , voir n'importe quel traité de géométrie différentielle). Cette démonstration utilise, pour la première fois, une dérivée de Lie : on consultera à ce sujet, à la fin du paragraphe, la note sur les dérivées de Lie.

Revenons à la définition des connexions (définition 3.1). Pourquoi la dérive d'un vecteur du second ordre doit elle être un vecteur du premier ordre plutôt qu'une forme du premier ordre ? Donnons donc le nom fantaisiste de nexion au point a à une application linéaire G_a : $\tau_a(V) \to T^*_a(V)$. Une telle nexion est déterminée par les " symboles de Christoffel"

$$G_a(D_i) = g_{ij}dx^j \quad , \; G_a(D_{ij}) = g_{kij}dx^k \; (\; g_{kij}=g_{kji} \;)$$

La forme bilinéaire $g(x,y) = \langle G_a(x),y \rangle = g_{ij}x^iy^j$ et la nexion G sont dites associées l'une à l'autre. Une nexion sur V est un champ G de nexions en tout point de V, dont les symboles de Christoffel sont des fonctions C^∞ dans le domaine de toute carte locale. Dualement, une nexion sur V est un opérateur qui transforme un champ de vecteurs X en une forme d'ordre 2 G(X), linéairement en tout point, avec $G(fX)=fG(X)$ si $f\in C$.

Ces définitions étant posées, le théorème fondamental s'énonce ainsi : THEOREME. *Soit g une forme bilinéaire symétrique. On définit une nexion G associée à g en posant* (formule classique des symboles de Christoffel)

$$(28) \qquad g_{kij} = \tfrac{1}{2}(D_ig_{kj} + D_jg_{ki} - D_kg_{ij})$$

(l'ordre des indices est le même du côté gauche, et dans le terme précédé du signe - à droite).

<u>Démonstration</u>. Nous allons calculer directement $G(X)$ pour un champ de vecteurs X, de manière intrinsèque . Nous introduisons la forme du premier ordre correspondant à X par la forme g :

$$\text{si } X = \xi^i D_i \, , \quad \tilde{X} = \xi^i g_{ij} dx^j$$

L'opération $X \mapsto \tilde{X}$ est parfaitement intrinsèque, et $d\tilde{X}$ est une forme du second ordre. Introduisons aussi la forme du second ordre

$$T = \tfrac{1}{2} g_{ij} dx^i . dx^j$$

Sa dérivée de Lie $\mathcal{L}_X T$ (voir plus bas) est une forme du second ordre, et nous posons

$$(29) \qquad G(X) = d\tilde{X} - \mathcal{L}_X T$$

et vérifions que c'est la nexion cherchée. Pour cela, nous écrivons

$$d\tilde{X} = \xi^i g_{ij} d^2 x^j + \xi^k D_i g_{kj} dx^i . dx^j + D_i \xi^k \, g_{kj} dx^i . dx^j$$

$$\mathcal{L}_X T = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_X(g_{ij}) dx^i . dx^j + \tfrac{1}{2} g_{ij} (\mathcal{L}_X dx^i) . dx^j + \tfrac{1}{2} g_{ij} dx^i . (\mathcal{L}_X dx^j)$$

Or $\mathcal{L}_X f = \langle X, df \rangle$, donc $\mathcal{L}_X(g_{ij}) = \xi^k D_k g_{ij}$. De même, $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$, donc $\mathcal{L}_X(dx^k) = d\xi^k = D_i \xi^k \, dx^i$. Ainsi

$$G(X) = \xi^i g_{ij} d^2 x^j + \xi^k (D_i g_{kj} - \tfrac{1}{2} D_k g_{ij}) dx^i . dx^j$$
$$+ D_i \xi^k (\, g_{kj} dx^i . dx^j - \tfrac{1}{2} g_{kj} dx^i . dx^j - \tfrac{1}{2} g_{jk} dx^i . dx^j)$$

Le dernier terme disparaît en raison de la symétrie, et en récrivant correctement le second terme (symétrie entre i et j) il reste

$$G(X) = \xi^k (\, g_{ki} d^2 x^i + \tfrac{1}{2}(D_i g_{kj} + D_j g_{ki} - D_k g_{ij}) dx^i . dx^j \,)$$

Le côté gauche est intrinsèque, du côté droit on a une forme d'ordre 2, et on lit que $G(fX) = fG(X)$. ▯

Ayant défini la nexion G, nous définissons la connexion Γ en transformant les formes en vecteurs grâce à la forme bilinéaire g : si $\omega = a_i dx^i$, $\tilde{\omega}$ est le champ de vecteurs $a_i g^{ij} D_j$, et $\Gamma(\omega) = G(\tilde{\omega})$, de sorte que

$$\Gamma(dx^k) = G(g^{kr} D_r) = g^{kr} g_{ri} d^2 x^i + g^{kr} g_{rij} dx^i . dx^j$$
$$= d^2 x^k + \Gamma^k_{ij} dx^i . dx^j \qquad \text{avec } \Gamma^k_{ij} = g^{kr} g_{rij}$$

En particulier, nous avons $\tilde{\tilde{\omega}} = \omega$, et la formule (29) devient, pour la connexion Γ elle même

$$(30) \qquad \Gamma\omega = d\omega - \mathcal{L}_{\tilde{\omega}} T$$

REMARQUE. La démonstration ci-dessus n'est pas aussi fantaisiste qu'on l'a dit : au lieu de dire que X est un champ, appelons le <u>déplacement virtuel</u>, et notons δx^i ses composantes. Considérons d'autre part une courbe

$h(t)$, et appelons <u>force vive</u> l'expression $< T, \dot{h} > = g_{ij}\dot{h}^i\dot{h}^j$. Alors on a

$$< G(X), \ddot{h} > = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial h^i}\right)\delta x^i$$

et on a tout simplement traduit en langage du second ordre le caractère intrinsèque des équations de Lagrange. Cette relation entre la connexion riemannienne et la mécanique est tout à fait classique (E. Cartan, espaces de Riemann, p. 41-42).

Il y a une propriété de la connexion riemannienne qui est fondamentale, et que nous n'avons pas obtenue par cette méthode, c'est la suivante :

(31) $$(\nabla_X Y|Z)+(Y|\nabla_X Z) = X(Y|Z)$$ où X,Y,Z sont trois champs de vecteurs

(à droite, on a l'opérateur différentiel X, appliqué à la fonction $(Y|Z)$; le côté droit est souvent noté $\nabla_X(Y|Z)$. Voir plus bas la note sur l'<u>extension de la dérivée covariante</u>). Le mieux est de faire la vérification à la main

$$\nabla_X Y = (\xi^i D_i \eta^k + \xi^i\eta^j\Gamma^k_{ij})D_k \quad , \quad (\nabla_X Y|Z) = g_{\ell k}\zeta^\ell(\xi^i D_i\eta^k+\xi^i\eta^j\Gamma^k_{ij}) \ldots$$

La démonstration classique procède en sens inverse : elle part de (31) et du calcul omis ci-dessus pour aboutir à (28), puis aux symboles de Christoffel de la connexion. La connexion riemannienne est donc caractérisée comme la seule connexion (sans torsion) satisfaisant à (31).

Signalons une conséquence des formules (28). L'équation des géodésiques de la connexion riemannienne s'écrit

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad g_{ri}\ddot{x}^i + g_{rjk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

Plaçons nous alors au centre d'une carte normale (§ 3, d)). Nous avons $g_{rjk}(0) = 0$ pour tout rjk, ce qui (compte tenu de (28)) entraîne

(32) $$D_r g_{jk}(0)=0 \quad \text{pour tout triplet } r,j,k$$

Ensuite, à la manière de (19), nous avons

(33) $$D_\ell g_{kij} + D_i g_{kj\ell} + D_j g_{k\ell i} = 0 \text{ au centre de la carte .}$$

c) <u>Le mouvement brownien d'une variété riemannienne</u>. La plus célèbre caractérisation du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ affirme que toute martingale continue X, telle que $<X^i,X^j>_t = \delta^{ij}t$, est un mouvement brownien. Par analogie, on définit sur une variété riemannienne V (métrique g) :

DEFINITION. On appelle <u>mouvement brownien</u> à valeurs dans V toute semimartingale (continue !) X, qui est une <u>martingale à valeurs dans</u> V, et qui satisfait à

(34) $$d<X^i,X^j>_t = g^{ij}(X_t)dt \text{ .}$$

Plus généralement, une semimartingale ou martingale X telle que $d<X^i,X^j>_t = g^{ij}(X_t)dC_t$, où C est un processus croissant réel, est dite <u>conforme</u>.

Soit X un mouvement brownien dans V : écrivons la "formule d'Ito" (26),

$$\int_{K\bullet X_0^t} \omega = (\Gamma)\int_{K\bullet X_0^t} \omega + \int_{K\bullet X_0^t} (d-\Gamma)\omega$$

Le premier terme au second membre est une martingale locale réelle. Pour étudier le second, prenons une carte locale (x^i) de domaine U, supposons que $\omega = a_i dx^i$ dans U ($a_i \in C$), et prenons K nul hors de l'ouvert aléatoire $\{X \in U\}$. Alors

$$\alpha = (d-\Gamma)\omega = (D_j a_i - a_k \Gamma^k_{ij})\, dx^i . dx^j \underset{\text{déf.}}{=} \alpha_{ij} dx^i . dx^j \quad \text{dans U}$$

$$\int_{K\bullet X_0^t} (d-\Gamma)\omega = \frac{1}{2}\int_0^t K_s \alpha_{ij}(X_s) d\langle X^i, X^j\rangle_s$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t K_s \alpha_{ij}(X_s) g^{ij}(X_s) ds$$

En tout point, la forme α du second ordre est réduite à une forme quadratique, et l'expression $\alpha_{ij} g^{ij}$ est la <u>trace</u> de α par rapport à la forme fondamentale g (i.e., si des vecteurs e_i forment une base orthonormale/g, on a $Tr(\alpha) = \alpha_{ij} g^{ij} = \Sigma_i\ \alpha(e_i, e_i)$). J'ai appris dans Ikeda-Manabe [1] que l'expression

$$Tr(d-\Gamma)\omega = g^{ij}(D_j a_i - a_k \Gamma^k_{ij})$$

est égale à $-\delta\omega$, où δ est l'opérateur de codifférentiation (de Hodge) sur les formes de degré 1, qui les change en formes de degré 0, i.e. en fonctions. Nous avons donc établi la jolie formule d'Ikeda-Manabe pour le mouvement brownien (le multiplicateur K est omis)

$$(35) \qquad \int_{X_0^t} \omega = \text{martingale locale} - \frac{1}{2}\int_0^t \delta\omega(X_s) ds$$

En particulier, prenons $\omega = df$ ($f \in C$). Nous avons

$$(36) \qquad Tr(d-\Gamma)df = g^{ij}(D_{ij} f - \Gamma^k_{ij} D_k f) \underset{\text{déf.}}{=} \Delta f \ (1)$$

où $\Delta f = -\delta df$ est l'<u>opérateur de Laplace-Beltrami</u> de la variété riemannienne V (nous verrons plus loin que cette définition coïncide avec la définition plus usuelle $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$), et la formule (35) nous donne

$$(37) \qquad f\circ X_t - f\circ X_0 = \text{martingale locale} + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s) ds$$

ce qui signifie que <u>le mouvement brownien de</u> V <u>est</u> (comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$!) <u>une diffusion gouvernée par l'opérateur</u> $\frac{1}{2}\Delta$.

Nous n'avons rien dit quant à l'<u>existence</u> du mouvement brownien d'une variété riemannienne : l'exemple trivial des ouverts de $\mathbb{R}^n$ montre que ce problème n'est bien posé que si l'on permet au processus d'avoir une durée de vie finie. J'espère revenir plus tard sur cette question.

1. Il est clair sur cette expression que Δ est un opérateur de dérive nulle.

d) <u>Note sur les dérivées de Lie</u>

Soit X un champ de vecteurs sur V. Comme on va faire une étude locale autour d'un point a, on peut supposer que X est nul hors d'un voisinage compact K de a, contenu dans le domaine U d'une carte locale identifiant a à l'origine de $\mathbb{R}^\nu$, U à un ouvert de $\mathbb{R}^\nu$: nous pouvons donc aussi interpréter X comme un champ de vecteurs de support K sur $\mathbb{R}^\nu$.

La théorie des équations différentielles ordinaires entraîne l'existence d'un groupe à un paramètre (p_t) de difféomorphismes de $\mathbb{R}^\nu$, tel que pour tout $z\in\mathbb{R}^\nu$ on ait $D_t p_t(z)=X(z)$ pour t=0. Ce groupe laisse fixes tous les points de $\mathbb{R}^\nu\backslash K$. Nous pouvons donc lui associer un groupe de difféomorphismes de V, laissant fixes tous les points de $V\backslash K$, que nous noterons encore p_t . Nous aurons maintenant <u>sur V</u> $D_t p_t(z)|_{t=0}=X(z)$.

Les p_t étant des difféomorphismes de V donnent lieu par transport de structure à des difféomorphismes des variétés $T(V)$, $T^*(V)$, $\tau(V)$... le principe de l'opération « dérivée de Lie » consiste à faire agir le groupe p_t sur des objets de toute nature, et à prendre la dérivée pour t=0, ce qui fournit un objet de même nature.

Illustrons cela par des exemples multiples, et importants.

1) Soit f une fonction sur V. Nous avons par définition des p_t

(38) $$\frac{d}{dt} f\circ p_t|_{t=0} = Xf = \langle X,df\rangle$$

<u>et nous notons cela</u> $\mathcal{L}_X f$. Rien de plus naturel que la convention $\mathcal{L}_X f=Xf$, cependant, en considérant le cas où $V=\mathbb{R}$, $p_t(x)=x+t$, $X(t)=D_t$ (translation vers la droite à la vitesse 1) on s'aperçoit que $f\circ p_t$ n'est pas la translatée de f par t vers la droite, mais vers la gauche : dans le transport de structure, $f\circ p_t = p_{-t}f$, et il faudra y prendre garde plus loin.

La valeur de $\mathcal{L}_X f$ en un point a ne dépend que des germes de f et de X au point a, donc $\mathcal{L}_X f$ peut être défini pour un champ X qui n'est pas à support compact, avec les mêmes expressions locales : si $X=\xi^i D_i$ autour de a, $\mathcal{L}_X f= \xi^i D_i f$ au point a. Nous laisserons de côté ce genre de remarques dans la suite.

2) <u>Formes d'ordre 1</u>. Les applications p_t : $V\to V$ ont une prolongation en p_{t*} : $T(V)\to T(V)$. Nous posons, pour une forme ω d'ordre 1 considérée comme fonction sur T(V), et par analogie avec (39)

$$\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt}(\omega\circ p_{t*})|_{t=0}$$

autrement dit, si u est un vecteur tangent au point a, $\langle u,\mathcal{L}_X\omega\rangle= \frac{d}{dt}\langle u,p_t^*\omega\rangle|_{t=0}$. Si $\omega=df$, on a

$$p_t^*(df) = d(f\circ p_t)$$

d'où simplement

(39) $$\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f) = d\langle X,df\rangle$$

Pour savoir calculer $\mathcal{L}_X\omega$ en général, il suffit de savoir calculer $\mathcal{L}_X(gdf)$, ce qui résulte de la formule évidente

(40) $$\mathcal{L}_X(g\omega) = (\mathcal{L}_X g)\omega + g(\mathcal{L}_X\omega) .$$

En coordonnées locales, si $\omega=a_i dx^i$, on a

(41) $$\mathcal{L}_X\omega = (a_i D_k\xi^i+D_i a_k\xi^i)dx^k$$

3) <u>Formes d'ordre 2</u>. De la même manière, les p_t ont une prolongation à $\tau(V)$.

Les principes du calcul sont les mêmes que ci-dessus :

(42) $$\mathcal{L}_X(d^2f) = d^2(\mathcal{L}_Xf) \quad , \quad \mathcal{L}_X(g\theta) = \langle X,dg\rangle\theta + g\mathcal{L}_X\theta$$

$$\mathcal{L}_X(\rho.\sigma) = \rho.\mathcal{L}_X\sigma + \mathcal{L}_X\rho.\sigma$$

C'est grâce à ces règles que nous avons pu calculer la formule (29).

4) <u>Champ de vecteurs du premier ordre</u> : <u>le crochet</u>. Soit Y un champ de vecteurs du premier ordre ; le moyen le plus rapide pour calculer $\mathcal{L}_XY$ consiste à appliquer une formule de bilinéarité

(43) $$< \mathcal{L}_XY,\omega > + < Y, \mathcal{L}_X\omega > = \mathcal{L}_X<Y,\omega>$$

Prenant $X=\xi^iD_i$, $Y=\eta^iD_i$, $\omega=dx^k$, on trouve aussitôt

(44) $$(\mathcal{L}_XY)^k = \xi^iD_i\eta^k-\eta^iD_i\xi^k$$

On pose $\mathcal{L}_XY=[X,Y]$, le <u>crochet de Lie</u> de X et Y : le champ de vecteurs $[X,Y]$ est l'opérateur différentiel, en apparence du second ordre, mais en réalité du premier

(45) $$[X,Y]f = XYf-YXf \ .$$

Il importe seulement de se rappeler notre convention de départ (38), implicite dans la formule de bilinéarité (43) : $\mathcal{L}_XY$ vaut $\frac{d}{dt}(p_{-t}Y)|_{t=0}$, donc $\frac{d}{dt}(p_tY)|_{t=0}$ vaut $-\mathcal{L}_XY = -[X,Y]=[Y,X]$! Quant au champ p_tY, sa valeur au point a se calcule ainsi : on regarde la valeur de Y au point $b=p_{-t}a$, et on la ramène en a en appliquant p_{t*} .

5) <u>Champ de vecteurs du second ordre</u> . Si L est un champ de vecteurs du second ordre, on peut montrer que

$$\mathcal{L}_XL = XL-LX = [X,L]$$

opérateur en apparence du 3e ordre, mais en réalité du second. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

e) <u>Note sur l'extension de l'opération</u> ∇_X . Nous avons défini par la formule (15) la dérivée covariante d'un champ de vecteurs Y. Les géomètres différentiels l'appliquent couramment à des champs de tenseurs de nature quelconque. Nous ne ferons ici qu'aborder ce sujet, en définissant la dérivée covariante d'une forme ω .

On commence par introduire la notation $\nabla_Xf=Xf=\langle X,df\rangle$ pour une fonction. On cherche alors à définir $\nabla_X\omega$ par la formule

(46) $$< \nabla_X\omega,Y > + < \omega,\nabla_XY > = \nabla_X<\omega,Y>$$

signifiant que ∇_X se comporte comme une dérivation par rapport à l'application bilinéaire $\langle\omega,Y\rangle$. Un calcul simple en coordonnées locales montre que, si $\omega=a_idx^i$, $X=\xi^iD_i$, on a

(47) $$\nabla_X\omega = \xi^j(D_ja_i-a_k\Gamma^k_{ji})dx^i$$

L'extension à des objets plus compliqués se fait de même, en exigeant que ∇ soit une dérivation par rapport aux opérations $\otimes,\wedge$... Il y a une opération bilinéaire par rapport à laquelle ∇ n'est pas une dérivation, c'est le crochet de Lie $[X,Y]$ de deux champs de vecteurs : l'expression

$$\nabla_X[Y,Z] - [\nabla_X Y, Z] - [Y, \nabla_X Z]$$
est liée à la courbure de la connexion Γ . Nous ne cherchons pas non plus à définir la dérivée covariante de champs ou de formes d'ordre 2.

6. CHAMPS DE p-PLANS ET SEMIMARTINGALES

a) Champ de p-plans. Nous appelons champ de p-plans sur V la donnée, en tout point a de V, d'un sous-espace H_a de dimension p dans l'espace tangent $T_a(V)$. Il faut exprimer que H_a dépend de a de manière C^∞ , ce que nous ferons de la manière suivante : désignons par $H_a^\perp$ l'ensemble des éléments de $T_a^*(V)$ nuls sur H_a, qui est un sous-espace de $T_a^*(V)$ de dimension n-p.

HYPOTHESE. Pour tout point $a\in V$, il existe un voisinage U de a, et n-p formes θ^α ($\alpha=1,\dots,n-p$) de classe C^∞ dans V, telles que pour tout $x\in U$ les formes θ_x^α constituent une base de $H_x^\perp$.

Nous dirons que le champ H est défini dans U par le système d'équations $\theta^\alpha=0$. Ce système n'est pas unique, mais soit θ une forme C^∞ , orthogonale à H au voisinage de a ; on peut écrire au voisinage de a

$$\theta_x = f_\alpha(x)\theta_x^\alpha \qquad \text{de manière unique}$$

puisque les θ_x^α forment une base de $H_x^\perp$, et il n'est pas difficile de voir que les $f_\alpha(x)$ sont C^∞ au voisinage de a. Autrement dit, on passe d'un système d'équations à un autre ($\theta^{\alpha'}$) au voisinage de a, par une transformation

$$\theta^{\alpha'} = f_\alpha^{\alpha'}\theta^\alpha$$

où les $f_\alpha^{\alpha'}$ forment, au voisinage de a, une matrice C^∞ et inversible.

Comme on peut toujours multiplier une forme par une fonction C^∞ de support assez petit, on voit qu'il existe suffisamment de formes C^∞ - sur V tout entier - orthogonales à H en tout point de V, pour constituer localement des systèmes d'équations de H. Nous désignerons par $H^\perp$ l'espace des formes C^∞ sur V, orthogonales à H en tout point.

Nous appelons variété intégrale du champ (au voisinage de a) une sous variété $W\subset U$ (où U est un voisinage ouvert de a), de dimension $k\leq p$, telle que $T_x(W)\subset H_x$ pour tout $x\in W\cap U$. Il existe par tout point des courbes intégrales du champ, mais il y a des champs qui refusent d'admettre des variétés intégrales de dimension >1. A l'opposé, le champ est dit complétement intégrable si l'on peut trouver, pour tout point $a\in V$, une variété intégrale au voisinage de a, passant par a et de dimension maximale p. Cela revient à dire que H admet, au voisinage de tout point a, un système d'équations du type

(48) $$df^1=0,\dots,\ df^{n-p}=0 \qquad (\ f^1,\dots,f^{n-p}\in C\ )$$

et les variétés intégrales de dimension maximale sont alors données par

$$f^1=Cte,\dots,\ f^{n-p}=Cte \quad \text{au voisinage de a .}$$

L'un des plus célèbres théorèmes de géométrie différentielle, le théorème de Frobenius, donne une condition nécessaire et suffisante pour que le champ soit complètement intégrable. Voici la règle : on regarde au voisinage d'un point quelconque a un système d'équations du champ

$$\theta^{\alpha} = 0 \quad , \ \alpha=1,\ldots,n-p$$

on forme les différentielles extérieures $\partial\theta^{\alpha}$ (1), et on examine si elles sont combinaisons linéaires des 2-formes $\theta^{\alpha}\wedge\theta^{\beta}$. Si oui, le système est complètement intégrable (dans le cas de (48), la condition est trivialement satisfaite, car $\partial df=0$ pour $f\in C$).

Un exemple . Nous prenons $V=\mathbb{R}^3$ (coordonnées x,y,z) et le champ H de plans (2-plans !) associé à l'unique équation

(49) $$\theta = dz - xdy + ydx = 0$$

Ce champ n'est pas complètement intégrable. Il nous servira plus loin à illustrer les divers résultats probabilistes.

b) Semimartingales intégrales d'un champ de p-plans.

Considérons d'abord une courbe h(t) : pour exprimer que h est une courbe intégrale du champ de p-plans H (i.e. que sa vitesse $\dot{h}(t)$ appartient à $H_{h(t)}$ à tout instant t) nous pouvons écrire que

(50) $$\int_{h_0^t} \theta = 0 \quad \text{pour toute forme } h\in H^{\perp}$$

Cette écriture indique aussitôt comment exprimer qu'une semimartingale X est une "intégrale" du champ H : on écrit que, pour toute forme $\theta\in H^{\perp}$

(51) $$\int_{X_0^t} \theta = 0$$

Cette condition est indépendante de tout choix des coordonnées, ou d'équations pour le champ. Mais supposons que l'on ait, dans un ouvert U, un système d'équations $\theta^{\alpha}=0$; supposons que l'on ait pour tout α

$$Y_t^{\alpha} = \int_{I_{\{X\in U\}}\bullet X_0^t} \theta^{\alpha} = 0$$

et soit $\theta\in H^{\perp}$; dans U, on peut écrire $\theta=f_{\alpha}\theta^{\alpha}$, et d'après (25)

$$\int_{I_{\{X\in U\}}\bullet X_0^t} \theta = \int_0^t f_{\alpha}(X_s)*dY_s^{\alpha} = 0$$

En particulier, lorsque le champ H est globalement défini par un système d'équations, il suffit d'écrire (51) pour les formes du système. On a ici un 'principe de transfert' permettant d'écrire, pour des semimartingales, beaucoup de conditions de nature géométrique que l'on écrit, pour des courbes,

1. Nous utilisons la notation ∂ pour la différentielle extérieure, la notation usuelle d étant déjà prise pour la "vraie" différentielle.

en géométrie différentielle.

Cette idée d'un "principe de transfert", et le mot lui même, sont empruntés à Malliavin. Nous avons fait cela de manière assez formelle : la méthode de Malliavin est différente, et sans doute d'une portée plus générale : il régularise la semimartingale (par convolution, mais on peut aussi utiliser une méthode d'interpolation linéaire) pour en obtenir une approximation différentiable au moins par morceaux ; puis il écrit les équations usuelles de la géométrie différentielle - ici, (50) - et passe à la limite. Ce procédé est parfait pour les semimartingales browniennes, mais plus délicat pour les semimartingales quelconques.

REMARQUE. Supposons donnée une connexion Γ sur V : alors les équations

$$(\Gamma)\int_{X_0^t} \Theta = 0 \quad \text{pour toute forme } \Theta\in H^{\perp}$$

$$(\Gamma)\int_{X_0^t} \Theta = \text{martingale locale} \quad \text{pour tout } \Theta\in H^{\perp}$$

se réduisent toutes deux à (50) dans le cas déterministe, car une martingale locale (continue) déterministe est constante. Supposons pour un instant (pour simplifier) que le système soit défini par des équations globales $\Theta^{\alpha}=0$; alors une démonstration presque identique à celle que l'on vient de présenter montre qu'il suffit d'écrire les propriétés ci-dessus pour les formes Θ^{α}.

Ces deux manières de traduire (50) ne paraissent pas très intéressantes. En revanche, la terminologie suivante est commode : nous dirons qu'une forme Θ est une <u>intégrale première</u> pour la semimartingale X si

(52) $$\int_{X_0^t} \Theta \quad \text{est une martingale locale}$$

L'intégrale étant prise au sens de Stratonovitch, cela n'entraîne pas que $f\Theta$ soit une intégrale première pour tout $f\in C$ - et si c'est le cas, la martingale locale $Y_t = \int_{X_0^t} \Theta$ est en fait nulle. En effet (cf. (25))

$$\int_{X_0^t} f\Theta - \int_0^t f(X_s)dY_s = \frac{1}{2}< f\circ X,Y >_t$$

est une martingale locale à variation finie, donc nulle. Ceci ayant lieu pour tout f, on peut en déduire que $Y=0$. Supposons en effet, pour simplifier, que V admette des coordonnées globales x^i, de sorte que $\Theta=a_i dx^i$; on a $Y_t= \int_0^t a_i dX^i$ + termes à variation finie, et $<X^i,Y>=0$ pour tout i, donc $<Y,Y>=0$, et enfin $Y=0$.

La terminologie précédente permet de poursuivre l'analogie entre <u>équations différentielles</u> et <u>diffusions</u>. Soit $\bar{V}$ la variété $V\times\mathbb{R}$, soit X un champ de vecteurs sur V (pouvant dépendre du temps t), et soit h une courbe dans V ; h est solution de l'équation différentielle $\dot{h}(t)=X(h(t),t)$ si et seulement si

$$\int_{\bar{h}_0^t} \Theta = 0 \qquad \text{pour } \Theta = df-Xfdt \quad (f\in C)$$

où $\bar{h}$ est la courbe $(h(t),t)$ à valeurs dans $\bar{V}$. De même, soit L un opérateur différentiel du second ordre (C^∞, pouvant dépendre du temps) ; une semimartingale Z à valeurs dans V est une <u>diffusion gouvernée par L</u> si et seulement si

(53) $$\int_{\bar{Z}_0}^{\bar{Z}_t} \Theta = \text{martingale locale} \quad (\Theta = df-Lfdt,\ f\in C)$$

où $\bar{Z}_t$ est la semimartingale (Z_t,t) à valeurs dans $\bar{V}$. C'est une manière compliquée d'énoncer la condition usuelle

$$f(Z_t) - \int_0^t Lf(Z_s)ds = \text{martingale locale}^{(1)}$$

c) <u>Exemples</u>

Nous allons donner trois exemples de semimartingales intégrales de champs de k-plans : le premier est trivial, et prendra quelques lignes. Le second est déjà beaucoup plus intéressant. Quant au troisième (le transport parallèle stochastique et ses variantes) il nous occupera pendant plusieurs paragraphes.

i) Le premier exemple est celui de la distribution de plans dans $\mathbb{R}^3$ associée à la forme $\Theta = dz-xdy+ydx$ (cf (49)). Pour toute semimartingale (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et toute v.a. Z_0 , il existe une semimartingale réelle Z et une seule, se réduisant à Z_0 pour t=0, et telle que (X,Y,Z) soit intégrale du champ de plans : sa troisième composante est donnée par

(54) $$Z_t = Z_0 + \int_0^t X_s{*}dY_s - Y_s{*}dX_s$$

Par exemple, si (X,Y) est un mouvement brownien plan, on peut remplacer le symbole $*$ par l'intégrale stochastique ordinaire, et Z_t est l'"aire brownienne" étudiée par P. Lévy. Lévy a déterminé la loi jointe des trois variables aléatoires (X,Y,Z), et montré que celle-ci admet une densité continue et >0 dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi le processus (X,Y,Z), qui est de " dimension stochastique 2" puisqu'il s'exprime au moyen de deux mouvements browniens indépendants, est de " dimension géométrique 3" puisque sa probabilité de présence est répartie sur l'espace entier. Si le champ de plans était complètement intégrable, le point (X,Y,Z) se promènerait sur la surface intégrale passant par (X_0,Y_0,Z_0), et le processus serait donc de "dimension géométrique 2" .

Une bonne partie du travail récent sur la théorie des diffusions consiste à généraliser cet exemple.

ii) Soit X une diffusion gouvernée par un opérateur L du second ordre, de classe C^∞ (ne dépendant pas du temps). Nous savons que pour $f\in C$, le processus

1. Cela peut s'énoncer aussi en disant que le vecteur tangent d'ordre 2 des caractéristiques locales de Z est
$$d^2\tilde{Z}_t = L_{Z_t}dt$$

(55) $$C_t^f = f\circ X_t - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

est une martingale locale, et même une vraie martingale. Si $g\in C$, on a aussi

(56) $$< C^f, C^g >_t = 2\int_0^t L(f,g)\circ X_s ds \qquad (L(f,g) = \frac{1}{2}(L(fg)-fLg-gLf))$$

Rappelons brièvement comment cela se démontre : le signe $\sim$ désignant l'égalité modulo les martingales locales, on a

$$d(f\circ X_t) \sim Lf\circ X_t dt, \quad , d(g\circ X_t) \sim Lg\circ X_t dt$$

d'autre part

$$d(fg\circ X_t) = f\circ X_t d(g\circ X_t)) + g\circ X_t d(f\circ X_t) + d< f(X), g(X)>_t$$
$$\sim f\circ X_t Lg\circ X_t dt + g\circ X_t Lf\circ X_t dt + d< C^f, C^g>_t$$

mais $d(fg\circ X_t) \sim L(fg)\circ X_t dt$, car $fg\in C$. Donc par différence

$$d< C^f, C^g>_t \sim 2L(f,g)\circ X_t dt$$

et entre processus à variation finie $\sim$ équivaut à =.

Un problème plus délicat de théorie des diffusions consiste à montrer que toute martingale locale orthogonale aux C_t^f , $f\in C$, est constante[1].

Soit maintenant une forme θ de classe C^∞ ; la généralisation de (55) est

(57) $$C_t^\theta = \int_{X_0^t} \theta - \int_0^t < L, d\theta>(X_s)ds$$

est une martingale locale, et si ρ et σ sont deux telles formes

(58) $$< C^\rho, C^\sigma>_t = 2\int_0^t < L, \rho.\sigma>(X_s)ds$$

La démonstration est laissée au lecteur (démontrer d'abord les propriétés dans un ouvert aléatoire $\{X\in U\}$, où U est le domaine d'une carte (x^i)).

Nous définissons maintenant un champ de variétés linéaires, naturellement associé à L, de la manière suivante. Soit $a\in V$; rappelons que L définit un produit scalaire $L(u,v)$, positif mais peut être dégénéré, sur $T_a^*(V)$. Il est donc équivalent de dire qu'une forme $v\in T_a^*(V)$ satisfait à $L(.,v)_a=0$, ou à $L(v,v)_a=0$, et l'ensemble des v possédant cette propriété est un sous-espace $H_a^\perp$ de $T_a^*(V)$, dont nous désignons par H_a l'orthogonal dans $T_a(V)$.

Dire que L est non dégénérée revient à dire que $H_a=T_a(V)$ en tout point. Nous avons associé à L, au début du § 5, une mesure gaussienne μ_a sur $T_a(V)$: H_a en est le support.

Le champ $a\mapsto H_a$, que nous désignons par H, n'est pas nécessairement un champ de p-plans au sens de a) : il n'est même pas imposé que la dimension de H_a soit constante. Laissant ce problème de côté, supposons qu'il existe une forme θ de classe C^∞, nulle sur H (i.e. $\theta\in H_a^\perp$ en tout point) et cherchons

1. Cela équivaut à une condition d'<u>extrémalité</u> des lois de la diffusion dans un problème de martingales, condition réalisée chaque fois qu'il y a unicité en loi, et en particulier lorsque L est elliptique. Voir Jacod-Yor, ZW 38, 1977, p. 119-124.

ce qu'on peut dire de Θ relativement à la semimartingale X.

Tout d'abord, en toute généralité quant à L, on a

$$<C^\Theta, C^\Theta>_t = 2\int_0^t < L,\Theta.\Theta>(X_s)ds = 0$$

donc la martingale locale C^Θ est nulle, autrement dit

(59) $$\int_{X_0^t} \Theta = \int_0^t < L, d\Theta >(X_s)ds$$

Pour dire des choses un peu plus précises, supposons L donné sous la forme étudiée par Hörmander :

(60) $$L = Y_0 + \Sigma_\alpha Y_\alpha Y_\alpha$$

où Y_0 et les Y_α ($\alpha=1,\ldots,p$) sont des champs de vecteurs sur V. Un calcul simple montre qu'alors, pour toute forme ω d'ordre 1

(61) $$< L, d\omega > = < Y_0, \omega > + \Sigma_\alpha Y_\alpha < Y_\alpha, \omega >$$

et aussi

(62) $$< L, \rho.\sigma > = \Sigma_\alpha <Y_\alpha, \rho><Y_\alpha, \sigma>$$

Dans ce cas, on voit que H_a est simplement le sous-espace engendré, en tout point a de V, par les vecteurs $Y_\alpha(a)$; si Θ est orthogonale aux Y_α, la comparaison entre (59) et (61) montre que

$$\int_{X_0^t} \Theta = \int_0^t < Y_0, \Theta >(X_s)ds$$

et en particulier, <u>si</u> Θ <u>est orthogonale à</u> Y_0 <u>et aux</u> Y_α, <u>on a</u> $\int_{X_0^t} \Theta = 0$.

Si Θ est la différentielle d'une fonction f, cela signifie que X se promène dans une sous-variété f=Cte. Une condition nécessaire pour que X " soit de dimension géométrique maximale ν " est donc la suivante

| il n'existe aucune forme fermée Θ non triviale, orthogonale aux champs Y_0, Y_α

(une forme fermée est une forme Θ dont la différentielle extérieure $\partial\Theta$ est nulle : cela revient à dire qu'elle est localement la différentielle d'une fonction).

Avec un peu de Frobenius, on s'aperçoit que cette condition est "à peu près équivalente" à la suivante[1], connue sous le nom de <u>condition de Hörmander</u>

(63) | l'algèbre de Lie engendrée par Y_0 et les Y_α est, en tout point, du rang maximal ν .

(Dans l'un des sens, c'est évident : une forme fermée orthogonale à Y_0 et aux Y_α est orthogonale à l'algèbre de Lie engendrée : voir plus bas la formule (71)).

Un théorème célèbre, dû à Hörmander, affirme que sous la condition précédente, la diffusion "remplit tout l'espace" en un sens beaucoup plus fort : ses résolvantes admettent une densité C^∞. Le plus grand succès des méthodes de Malliavin a consisté à fournir une méthode d'approche probabiliste pour les théorèmes de ce type.

1. Il se peut que ces deux conditions soient vraiment équivalentes, mais je ne connais pas assez bien ce sujet pour sortir du vague.

d) <u>Aspects déterministes de la théorie précédente</u>.

Revenons aux notations du début de b) : nous avons défini ce qu'est une semimartingale intégrale d'un champ de p-plans H. Faisant fonctionner le principe de Schwartz en sens inverse, nous allons introduire une notion géométrique : celle de <u>vecteur tangent d'ordre</u> 2 <u>intégral pour</u> H, ou de champ de vecteurs d'ordre 2 intégral.

Que signifie explicitement (51) ? Que pour toute forme $\theta \in H^{\perp}$ on a $\langle d^2X_t, d\theta \rangle = 0$ tout le long de la trajectoire. Nous dirons donc qu'un vecteur tangent d'ordre 2 $\lambda \in \tau_a(V)$ est <u>intégral</u> si l'on a

(64) $\qquad \langle \lambda, d\theta \rangle = 0$ pour toute forme $\theta \in H^{\perp}$

Remplaçant θ par $f\theta$ ($f \in C$), on en déduit $\langle \lambda, fd\theta - d(f\theta) \rangle = 0$, soit $\langle \lambda, df.\theta \rangle = 0$, et finalement

(65) $\qquad \langle \lambda, \omega.\theta \rangle = 0$ pour $\theta \in H^{\perp}$, ω quelconque .

Si l'on a un système d'équations $\theta^{\alpha} = 0$ pour H au voisinage de a, on voit sans peine que les équations (64) sont équivalentes à

(66) $\qquad \langle \lambda, d\theta^{\alpha} \rangle = 0, \qquad \langle \lambda, dx^i.\theta^{\alpha} \rangle = 0$

où les (x^i) sont des coordonnées locales autour de a. On définit de la même manière un champ de vecteurs tangents d'ordre 2, intégral pour H.

Un champ de p-plans admet il des vecteurs tangents d'ordre 2 intégraux ? Oui, car si $h(t)$ est une courbe intégrale ($\langle \dot{h}(t), \theta \rangle = 0$ pour $\theta \in H$), le vecteur tangent du second ordre $\ddot{h}(t)$ est intégral tout le long de la courbe, comme le prouve la relation $\langle \ddot{h}(t), d\theta \rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{h}(t), \theta \rangle$. Considérons maintenant deux champs du premier ordre intégraux X et Y : nous allons prouver

(67) $\qquad$ Le champ du second ordre $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY+YX)$ est intégral .

A cet effet, nous prouvons quelques formules importantes .

LEMME. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux champs de vecteurs</u>, θ, ρ, σ <u>des formes d'ordre</u> 1. <u>On a</u> ($\partial\theta$ étant la différentielle extérieure de θ)

(68) $\qquad \langle XY, d\theta \rangle = X\langle Y, \theta \rangle - \frac{1}{2}\langle X \wedge Y, \partial\theta \rangle$

(69) $\qquad \langle XY, \rho.\sigma \rangle = \frac{1}{2}(\langle X, \rho \rangle \langle Y, \sigma \rangle + \langle Y, \rho \rangle \langle X, \sigma \rangle)$

<u>On déduit en particulier de</u> (68)

(70) $\qquad \langle XY+YX, d\theta \rangle = X\langle Y, \theta \rangle + Y\langle X, \theta \rangle$

<u>et la formule classique</u>

(71) $\qquad \langle [X,Y], \theta \rangle = X\langle Y, \theta \rangle - Y\langle X, \theta \rangle - \langle X \wedge Y, \partial\theta \rangle$.

Démonstration. Posons $X = \xi^i D_i$, $Y = \eta^i D_i$, $\theta = a_i dx^i$, $XY = \xi^j D_j \eta^i D_i + \xi^i \eta^j D_{ij}$, $d\theta = a_i d^2x^i + D_j a_i dx^j.dx^i$, donc en écrivant <u>correctement</u> XY <u>ou</u> $d\theta$ avec les coefficients symétrisés

$$\langle XY, d\theta \rangle = \xi^j D_j \eta^i a_i + \tfrac{1}{2}\xi^i \eta^j (D_j a_i + D_i a_j)$$
$$X\langle Y, \theta \rangle = \xi^j D_j \eta^i a_i + \xi^i \eta^j D_i a_j$$
$$\langle X \wedge Y, \partial\theta \rangle = \langle \xi^i \eta^j D_i \wedge D_j, D_j a_i dx^j \wedge dx^i \rangle$$

d'où (68), puis (70) et (71) par somme et différence. Nous laissons (69) au lecteur.

e) Encore quelques trivialités sur les espaces tangents.

Il nous faut revenir ici aux faits très élémentaires du § 1, concernant la variété tangente T(V). Nous désignerons par p l'application canonique de T(V) sur V (qui à un vecteur tangent t au point a de V associe son "point d'attache" a). Nous ferons toujours la convention, étant donnée une fonction f sur V, de désigner aussi par la même lettre f la fonction f∘p sur T(V). Avec cette notation, on peut dire que si des fonctions $x^i \in C$ (définies sur V entière) constituent une carte locale sur un ouvert U de V, les fonctions x^i et dx^i sur T(V) constituent une carte locale sur l'ouvert T(U) de T(V) (identifiant T(U) à $U \times \mathbb{R}^\nu$).

Grimpons un échelon de plus, et considérons la seconde variété tangente TT(V) : nous faisons la même convention sur TT(V) que sur T(V), de sorte que la lettre f va encore désigner une fonction sur TT(V). De même qu'une fonction g sur V admet une différentielle dg, qui est une fonction sur T(V), une fonction h sur T(V) admet une différentielle, qui est une fonction sur TT(V). Pour la clarté des notations, nous la désignerons par δh . Avec ces notations, on peut dire que les fonctions (x^i, dx^i, δx^i, δdx^i) forment un système de coordonnées sur l'ouvert TT(U) de TT(V). Si f est une fonction sur V, on a

dans T(U) $\qquad df = D_i f dx^i$

dans TT(U) $\qquad \delta df = D_i f \delta dx^i + D_{ji} f \delta x^j dx^i$

où les conventions précédentes sont appliquées, et $\delta x^j dx^i$ est un vrai produit de fonctions sur TT(V). De même, si ω est une forme sur T(V)

dans T(U) $\qquad \omega = a_i dx^i$

dans TT(U) $\qquad \delta\omega = a_i \delta dx^i + D_j a_i \delta x^j dx^i$

L'analogie avec le calcul sur $\tau(V)$ est évidente, et se traduit par le fait mathématique suivant : il existe une application naturelle φ de TT(V) dans $\tau(V)$, que l'on décrit ainsi. Soit γ un vecteur tangent au point (a,u) de T(V), de coordonnées locales

$$x^i=a^i \ , \quad dx^i=u^i \ , \quad \delta x^i=v^i \ , \quad \delta dx^i=w^i$$

Soit $f \in C$; on a $< \delta df, \gamma > \ = \ D_i f(a) w^i + D_{ij} f(a) v^i u^j$. Le côté gauche est un opérateur différentiel du second ordre au point a en f, donc un élément $\varphi(\gamma)$ de $\tau(V)$. Ainsi

$$\varphi(\gamma) = w^i D_i + v^i u^j D_{ij}$$

satisfait à $< d^2 f, \varphi(\gamma) > \ = \ < \delta df, \gamma >$ pour tout $f \in C$.

Nous avons vu qu'il y a une application naturelle p de T(V) sur V ; en coordonnées locales, p s'écrit $(x^i, dx^i) \mapsto (x^i)$. L'application tangente

p_* applique TT(V) dans T(V) : en coordonnées locales elle s'écrit

$$(x^i, dx^i, \delta x^i, \delta dx^i) \mapsto (x^i, \delta x^i)$$

(ou si l'on préfère $(x^i, u^i, v^i, w^i) \mapsto (x^i, v^i)$). En particulier, le vecteur tangent γ est dit vertical si $p_*(\gamma) = 0$, ce qui s'écrit en coordonnées locales $v^i=0$.

Supposons que l'on change de coordonnées locales dans U , les nouvelles coordonnées étant notées $x^{i'}$. On a alors pour les nouvelles coordonnées sur TT(V)

$$dx^{i'} = D_i x^{i'} dx^i \ , \quad \delta x^{i'} = D_i x^{i'} \delta x^i \ , \quad \delta dx^{i'} = D_i x^{i'} \delta dx^i + D_{ji} x^{i'} \delta x^j dx^i$$

Sur ces formules, on peut constater plusieurs choses : on peut vérifier à nouveau le caractère intrinsèque de la condition de verticalité (nullité des δx^i) ; on peut vérifier la symétrie entre les d et les δ (il existe une application C^∞ de TT(V) dans elle même, qui s'écrit en coordonnées locales $S(x^i,u^i,v^i,w^i) = (x^i,v^i,u^i,w^i)$. Enfin, étant donné un vecteur tangent $t=(x^i,v^i) \in T_x(V)$, on peut définir son relèvement vertical au point (x,u) de T(V), qui admet comme coordonnées $(x^i,u^i,0,v^i)$, et on obtient ainsi un isomorphisme intrinsèque entre $T_x(V)$ et le sous-espace vertical de $T_{x,u}(T(V))$.

Donnons nous maintenant une connexion Γ ; le vecteur tangent γ sera dit horizontal si $\Gamma(\varphi(\gamma))=0$, ce qui s'écrit en coordonnées locales

(72) $$w^k + \Gamma^k_{ij} v^i u^j = 0 \quad (k=1,\dots,\nu) .$$

Notons les faits suivants :

i) L'espace tangent $T_{a,u}(T(V))$ est somme directe des sous-espaces horizontal et vertical.

ii) Tout vecteur tangent t à V au point x (coordonnées : x^i,v^i) admet un relèvement horizontal unique au point (x,u) de T(V), que nous noterons $H(\gamma)$, de coordonnées

(73) $$H(\gamma) = (x^i,u^i,v^i, w^i= -\Gamma^i_{jk} v^j u^k)$$

Une connexion détermine un champ de ν-plans sur T(V), à savoir les sous-espaces horizontaux $H_{x,u}$ en chaque point (x,u) de T(V). Ce champ n'est que très exceptionnellement complètement intégrable (cela correspond à l'annulation de la courbure de la connexion, dont on parlera plus loin). Ce champ est défini localement par l'annulation des formes sur T(V)

(74) $$\theta^i = \delta u^i + \Gamma^i_{kj} u^j \delta x^k \quad (i= 1,\dots,\nu)$$

en notant (x^i,u^i) les coordonnées (x^i,dx^i) sur T(V).

Considérons maintenant une courbe $h(t)$ dans V, et un vecteur tangent u au point $h(0)$; nous allons définir le transport parallèle du vecteur le long de la courbe $h(t)$. Ce sera une courbe $(h(t),u(t))$ tracée dans $T(V)$ "au dessus" de $h(t)$, telle que $u(0)=u$, et que $\nabla_{\dot{h}(t)}u(t)=0$ tout le long de la courbe - nous ne tenterons pas de justifier cette notation, nous l'écrirons simplement en coordonnées locales :

$$\dot{u}^i + \dot{h}^j u^k \Gamma^i_{jk}(h) = 0 \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

qui signifie, d'après (72), que le vecteur tangent à la courbe $(h(t),u(t))$: $(h(t), u(t), \dot{h}(t), \dot{u}(t))$, est horizontal. La théorie des équations différentielles linéaires montre que

- le transport parallèle est possible de manière unique le long de la courbe h,
- l'application $u \mapsto u(t)$ est un isomorphisme de $T_{h(0)}(V)$ sur $T_{h(t)}(V)$.

Notre but, dans la section suivante, va être l'extension de ce résultat au transport parallèle stochastique, le long des trajectoires d'une semimartingale. Mais auparavant, nous voudrions mettre le problème sous une forme un peu plus générale - et en fait, plus simple.

Au lieu de la variété $T(V)$, et de sa projection p sur V, nous considérons une variété W quelconque, munie d'une application $p : W \longmapsto V$ surjective. Nous maintenons la convention faite plus haut, de désigner par une même lettre une fonction f sur V et la fonction "relevée" $f\circ p$ sur W. Nous faisons l'hypothèse suivante :

Autour de tout point z de W il existe un système de coordonnées locales de la forme (x^i,u^α), où les x^i forment un système de coordonnées locales autour de $x=p(z)$, et les u^α sont des fonctions C^∞ sur W autour de z .

Cela s'applique à $W=T(V)$, ou plus généralement à n'importe quel "fibré vectoriel" au dessus de V, ou à $W=V\times U$, où U est une variété quelconque. Nous désignerons par D_i l'opérateur différentiel $\partial/\partial x^i$, aussi bien sur V que sur W. Avec cet abus de notation, on a $p_*(D_i)=D_i$, le côté gauche s'entendant sur W, le côté droit sur V.

Un vecteur tangent γ à W au point z est dit vertical si $p_*(\gamma)=0$, ce qui signifie que γ est combinaison linéaire des D_α . Par définition, la donnée d'une connexion sur W est celle, en tout point z, d'un sous-espace $H_z \subset T_z(W)$, supplémentaire du sous-espace vertical, et appelé sous-espace horizontal. Comme H_z ne rencontre pas le noyau de p_*, $p_*|_{H_z}$ est un isomorphisme de H_z sur $T_x(V)$, et il revient au même de se donner H_z, ou l'isomorphisme réciproque, appelé relèvement horizontal, et que nous noterons

(75) $\quad \mathbb{H}_z : T_x(V) \to T_z(W)$, déterminé par $\quad \mathbb{H}(D_i) = D_i - \Gamma^\alpha_i(z)D_\alpha$

La terminologie et les notations s'accordent avec celles que nous avons utilisées pour les connexions usuelles (et en particulier le signe -, cf.

la formule (73)). Etant donnée maintenant une courbe $h(t)$ dans V, telle que $h(0)=x$, on peut définir son <u>relèvement horizontal</u>, qui sera une courbe $\tilde{h}(t)$, à valeurs dans W, telle que $h(t)=p(\tilde{h}(t))$, $\tilde{h}(0)=z$, et que $\dot{\tilde{h}}(t)$ soit en tout point un vecteur tangent horizontal à W. Autour de z, cette courbe est déterminée par

(76) $$\dot{\tilde{h}}^\alpha + \Gamma_i^\alpha(\tilde{h}(t))\dot{h}^i(t) = 0 \qquad (\alpha = 1,\dots)$$

Nous noterons aussi $\tilde{u}$ au lieu de $\mathbb{H}_z(u)$ le relèvement horizontal du vecteur tangent $u \in T_x(V)$, lorsque ce sera agréable.

L'équation (76) n'est pas aussi excellente dans le cas général que dans le cas de $T(V)$, puisqu'elle n'est plus linéaire : on ne peut donc affirmer que la trajectoire relevée est définie pour tout t.

D'autre part, même dans le cas où $W=T(V)$, la notion de connexion introduite ici est plus générale que celle que nous avons considérée plus haut : elle contient en particulier les connexions avec torsion.

f) <u>Relèvement d'une semimartingale par une connexion</u>

Les définitions précédentes étant posées, nous allons chercher à relever dans W, non plus des vecteurs tangents ou courbes déterministes, mais

- les trajectoires d'une semimartingale X (ce sera notre troisième exemple de semimartingales, intégrales d'un champ de ν-plans),
- et, parallèlement, les vecteurs tangents d'ordre 2 sur V ; du même coup, nous verrons apparaître l'une des notions fondamentales de la géométrie différentielle, celle de <u>courbure</u> d'une connexion.

<u>Semimartingales</u> .

Soit X une semimartingale à valeurs dans V. Supposons <u>pour simplifier</u> que les (x^i) et (u^α) soient des coordonnées globales sur W . La semimartingale relevée horizontale de X étant notée $Z=(X^i,U^\alpha)$, nous avons à écrire (cf. (51)) que

$$\int_{Z_0}^{Z_t} (du^\alpha + \Gamma_i^\alpha dx^i) = 0 \qquad (\text{ tout } \alpha) \quad (1)$$

soit encore $dU_s^\alpha + \Gamma_i^\alpha(Z_s)*dX_s^i = 0$. Rappelons comment on transforme cette équation de Stratonovitch en équation d'Ito : on écrit successivement

$$dU_s^\alpha + \Gamma_i^\alpha(Z_s)dX_s^i + \tfrac{1}{2}d\langle \Gamma_i^\alpha(Z),X^i\rangle_s = 0$$
$$dU_s^\alpha + \Gamma_i^\alpha(Z_s)dX_s^i + \tfrac{1}{2}D_j\Gamma_i^\alpha(Z_s)d\langle X^j,X^i\rangle_s + \tfrac{1}{2}D_\beta\Gamma_i^\alpha(Z_s)d\langle U^\beta,X^i\rangle_s = 0$$

Nous tirons $\langle U^\beta,X^i\rangle$ de la première équation, car $dU_s^\beta = -\Gamma_j^\beta(Z_s)dX_s^j$ + processus à variation finie, et il reste finalement les équations suivantes pour déterminer le processus inconnu U, puis ses crochets :

(77) $$dU_s^\alpha = -\Gamma_i^\alpha(Z_s)dX_s^i - \tfrac{1}{2}(D_j\Gamma_i^\alpha(Z_s) - \Gamma_j^\beta(Z_s)D_\beta\Gamma_i^\alpha(Z_s))d\langle X^j,X^i\rangle_s$$
$$d\langle U^\alpha,X^i\rangle_s = -\Gamma_j^\alpha(Z_s)d\langle X^j,X^i\rangle_s \quad , \quad d\langle U^\beta,U^\alpha\rangle_s = \Gamma_j^\beta(Z_s)\Gamma_i^\alpha(Z_s)d\langle X^j,X^i\rangle_s$$

1. On verra plus loin ((112), note 2) une autre manière d'écrire cela.

L'équation différentielle stochastique (77) peut être explosive. Il n'en est heureusement pas ainsi dans le cas des connexions usuelles, pour lesquelles on a (les indices α et i étant en même nombre ν, et les u^α étant les dx^α)

(78) $$\Gamma_i^\alpha(x,u) = \Gamma_{i\beta}^\alpha(x)u^\beta$$

de sorte que (77) est une équation linéaire en les U^α, X étant donnée.

Intéressons nous à ce cas particulier du "transport parallèle stochastique", en conservant les mêmes notations. Nous continuons à supposer, pour simplifier - cela n'a rien d'essentiel - que les x^i sont des coordonnées globales sur V. Les indices i et α étant en nombre égal, nous pouvons écrire (77) sous la forme vectorielle

$$U_t = U_0 + \int_0^t dY_s \cdot U_s$$

où le . désigne un produit matriciel, et Y_s est une matrice carrée semimartingale, qui est donnée, et qu'il est inutile d'expliciter en fonction des X^i et $<X^i,X^j>$. La solution de cette équation se représente comme une exponentielle de Catherine Doléans matricielle $U_t=\mathcal{E}(Y)_t \cdot U_0$ (cf. Ibero, Bull. SMF 100, 1976, et Emery, ZfW 41, 1978). Formellement, $\mathcal{E}(Y)$ est une intégrale multiplicative stochastique

$$\mathcal{E}(Y)_t = \prod_{s\leq t} (I+dY_u)$$

de sorte que le déterminant Δ_t de $\mathcal{E}(Y)_t$ satisfait lui aussi à une équation linéaire

$$\Delta_u = 1 + \int_0^u \Delta_s dT_s \text{ , où } T_s=Tr(Y_s),^{(1)} \text{ soit } \Delta_u=\exp(T_u - \tfrac{1}{2}<T,T>_u)$$

<u>et ne s'annule jamais</u>. La conclusion géométrique est que, pour presque tout $\omega\in\Omega$, le transport parallèle stochastique le long de la trajectoire $X_\cdot(\omega)$ définit un isomorphisme de $T_{X_0(\omega)}$ sur $T_{X_t(\omega)}$, quel que soit $t\in\mathbb{R}_+$.

Lorsque la connexion Γ est associée à une structure riemannienne, la formule (31) entraîne sans difficulté que, si l'on transporte simultanément le long d'une même courbe déterministe h(t) deux vecteurs tangents $u\in T_{h(0)}(V)$, $v\in T_{h(0)}(V)$, on a $\frac{d}{dt}(u(t)|v(t))=0$: <u>le transport parallèle conserve le produit scalaire</u>. Nous laissons au lecteur l'extension de ce résultat au transport parallèle stochastique.

> Le transport parallèle stochastique est l'une des plus anciennes questions étudiées en géométrie stochastique. Il remonte à Ito, McKean, Dynkin, Gangolli... pour le mouvement brownien. Il a été très utilisé par Malliavin et son école. L'extension aux semimartingales quelconques est due à Schwartz.

Ainsi, toute semimartingale X sur V peut se relever en une <u>semimartingale horizontale</u>, soit sur T(V), soit sur la <u>variété des repères</u> (<u>un repère en a est une base</u> de $T_a(V)$; pour transporter le repère, on transporte

(1). Note sur les épreuves : on n'a $T_s=Tr(Y_s)$ que dans le cas déterministe. En général il y a des termes complémentaires renfermant les crochets.

chacun des vecteurs de la base ; on peut travailler aussi sur la variété des repères orthonormaux). Notons $\tilde{X}$ ce relèvement ; il n'est pas difficile de voir que, si X est une diffusion gouvernée par un générateur L, $\tilde{X}$ est une diffusion (très dégénérée) sur T(V) ou la variété des repères, gouvernée par un opérateur $\tilde{L}$ que l'on peut extraire des formules (77)-(78). En particulier, si L est le laplacien Δ d'une variété riemannienne, et Γ est la connexion riemannienne, $\tilde{\Delta}$ est appelé le laplacien horizontal, sur T(V) ou sur la variété des repères.

L'intérêt des variétés de repères est le suivant : tout tenseur admet un système de composantes dans un repère donné, donc, lorsqu'on sait transporter les repères, on sait aussi transporter les tenseurs de type quelconque (il suffit d'écrire que les composantes du tenseur transporté dans le repère transporté restent égales aux composantes initiales).

La section suivante nous donnera une méthode de relèvement d'opérateurs du second ordre, plus efficace que l'emploi de (77).

Aspect déterministe.

Revenons au paragraphe relatif aux champs de p-plans. Nous avons vu (cf. (64), (65)) ce qu'est un vecteur tangent d'ordre 2 intégral pour un champ de p-plans. Ici, nous nous posons le problème suivant

Soit $z\in W$, soit $x=p(z)$, et soit $\lambda\in\tau_x(V)$. Existe t'il un vecteur tangent d'ordre 2 $\tilde{\lambda}\in\tau_z(W)$, horizontal (i.e. intégral pour le champ des ν-plans horizontaux), et tel que $p_*(\tilde{\lambda})=\lambda$ (ce qui s'écrit simplement $\tilde{\lambda}(f)=\lambda(f)$ pour toute fonction $f\in C^\infty(V)$).

La réponse est positive, $\tilde{\lambda}$ existe et est unique, et les formules qui le donnent sont identiques à (77) : on a $\tilde{\lambda}=(\lambda^i D_i+\lambda^{ij}D_{ij})+\lambda^\alpha D_\alpha+2\lambda^{i\alpha}D_{i\alpha}+\lambda^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}$ (sommation sur tous les i et α, mais on a regroupé $i\alpha$ et αi), avec

(77') $$\lambda^\alpha+\Gamma_i^\alpha\lambda^i+(D_j\Gamma_i^\alpha-D_\beta\Gamma_i^\alpha\Gamma_j^\beta)\lambda^{ij}=0\ ,\ \lambda^{i\alpha}+\Gamma_j^\alpha\lambda^{ji}=0,\ \lambda^{\alpha\beta}-\Gamma_i^\alpha\Gamma_j^\beta\lambda^{ij}=0\ .$$

Nous écrirons aussi $\tilde{\lambda}=\mathbb{H}(\lambda)$.

Si X est une semimartingale sur V, Z sa relevée sur W, le principe de Schwartz s'écrit ici
$$d^2Z_t=\mathbb{H}(d^2X_t)$$
et de même pour les caractéristiques locales. Les résultats de ce paragraphe sont dus pour l'essentiel à Malliavin ([1], p. 87) et à Schwartz.

Remarquons que nous savons calculer $\mathbb{H}$ pour les vecteurs du premier ordre. En effet, il suffit pour cela de savoir calculer $\tilde{D}_i=\mathbb{H}(D_i)$, qui vaut $D_i-\Gamma_i^\alpha D_\alpha$ (75). Pour savoir calculer $\mathbb{H}$ pour les vecteurs tangents d'ordre 2, il suffit donc de calculer $\mathbb{H}(D_{ij})$. Maintenant, regardons (67) : le champ $\mathbb{H}(D_i)\mathbb{H}(D_j)+\mathbb{H}(D_j)\mathbb{H}(D_i)$ est intégral pour le champ de ν-plans horizontal, et sur les fonctions $f\in C^{\infty}(V)$ il opère comme $D_iD_j+D_jD_i=2D_{ij}$. Nous avons donc établi

(78) $$\mathbb{H}(D_{ij}) = \frac{1}{2}(\tilde{D}_i\tilde{D}_j+\tilde{D}_j\tilde{D}_i)$$

et plus généralement, si X et Y sont deux champs sur V

(79) $$\mathbb{H}(XY+YX) = \mathbb{H}(X)\mathbb{H}(Y) + \mathbb{H}(Y)\mathbb{H}(X)$$

Nous en déduisons la formule suivante, plus agréable sans doute que (77'): si $L = \lambda^iD_i+\lambda^{ij}D_{ij}$ avec $\lambda^{ij}=\lambda^{ji}$, on a

(80) $$\tilde{L} = \lambda^i\tilde{D}_i + \lambda^{ij}\tilde{D}_i\tilde{D}_j \ .$$

Comme $XY-YX=[X,Y]$ est un champ d'ordre 1, nous pouvons déduire de (79) la valeur de $\mathbb{H}(XY)$:

(81) $$\mathbb{H}(XY)= \mathbb{H}(X)\mathbb{H}(Y) - \frac{1}{2}\rho(X,Y)$$

où $\rho(X,Y)$ est un vecteur tangent d'ordre 1, vertical, donné par

(82) $$\rho(X,Y) = \mathbb{H}(X)\mathbb{H}(Y)-\mathbb{H}(Y)\mathbb{H}(X)-\mathbb{H}([X,Y])$$

ρ est appelé la courbure de la connexion Γ.

> Nous avons écrit ρ, non R, parce que ρ n'est pas exactement le "tenseur de courbure" usuel, que nous rencontrerons plus loin. Nous sommes d'ailleurs ici dans une situation plus générale de "connexion non linéaire". Cf. Grifone [1].

Il est facile de vérifier sur (82) que si f et g appartiennent à $C^{\infty}(V)$, on a $\rho(fX,gY)=fg\rho(X,Y)$, et $\rho(X,Y)=-\rho(Y,X)$. Donc si $X=\xi^iD_i$, $Y=\eta^iD_i$, on a $\rho(X,Y)= \xi^i\eta^j\rho(D_i,D_j) = \xi^i\eta^j\rho^{\alpha}_{ij}D_{\alpha}$, et $\rho(D_i,D_j)=[\tilde{D}_i,\tilde{D}_j]$, donc

(83) $$\rho^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\beta}_iD_{\beta}\Gamma^{\alpha}_j-\Gamma^{\beta}_jD_{\beta}\Gamma^{\alpha}_i -D_i\Gamma^{\alpha}_j+D_j\Gamma^{\alpha}_i \ .$$

> La signification intuitive de la courbure est la suivante : prenons une petite courbe fermée dans V, d'origine et d'extrémité x, et relevons la dans W à partir de z : la courbe relevée ne se referme pas : elle revient en un autre point z' au dessus de x, d'où un petit déplacement vertical. Assimilant la courbe fermée à un parallélogramme élémentaire de côtés X et Y , et le petit déplacement à un vecteur tangent vertical v, on a $v=\rho(X,Y)$. Ce genre de description n'est pas facile à justifier rigoureusement, mais il est agréable et utile.

Note : lien avec le tenseur de courbure usuel.

Plaçons nous dans le cas où $W=T(V)$: le point $z\in W$ tel que $p(z)=x$ est alors un vecteur tangent à V au point x, que nous préférons noter par une majuscule : $Z=\zeta^iD_i$; nous explicitons la dépendance de $\rho(X,Y)$ par rapport à Z en le notant $\rho_Z(X,Y)$; enfin, nous avons $\Gamma^{\alpha}_i(x,z)=\Gamma^{\alpha}_{i\gamma}(x)\zeta^{\gamma}$ (78). En développant alors (83), et en comparant aux expressions classiques du tenseur de courbure, nous trouvons

(84) $$\rho^{\alpha}_{ij} = -\zeta^{\gamma}R^{\alpha}_{\gamma ij} \quad .$$ Comment comprendre cela ?

Premièrement, de même que X et Y, considérons Z comme appartenant à un champ défini sur V tout entier. L'expression classique du tenseur de courbure, qui figure dans tous les traités de géométrie différentielle, est

(85) $$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = z^i R^k_{imn} x^m x^n D_k$$

Pour tout a, $R(X,Y)_a$ est un opérateur linéaire de $T_a(V)$ dans lui même, ou, dualement, de $T^*_a(V)$ dans lui même . Mais lorsqu'il opère sur les formes, on a (cf. le signe - de (47))

(85') $$-R(X,Y)\omega = \nabla_X\nabla_Y\omega - \nabla_Y\nabla_X\omega - \nabla_{[X,Y]}\omega$$

Une forme ω sur V est aussi une fonction ω sur T(V), possédant la propriété d'être linéaire sur chaque $T_a(V)$. La formule (82) représente un champ de vecteurs tangents verticaux sur T(V), donc un opérateur différentiel, opérant sur les fonctions sur T(V), et préservant les formes. Si l'on remarque maintenant que, pour tout champ de vecteurs X sur V et toute forme ω

(85") $$\mathbb{H}(X)\omega = \nabla_X\omega$$

(le côté gauche contient ω, considérée comme fonction sur T(V), à laquelle est appliquée l'opérateur différentiel $\mathbb{H}(X)$; le côté droit contient ω considérée comme forme sur V), les formules (82) et (85') se trouvent identifiées.

Deux remarques : la formule (85") présente la dérivée covariante comme une dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{H}(X)}$, sur T(V). Cela permet de mieux comprendre l'extension de la dérivée covariante à des objets autres que les vecteurs tangents (cf.(47)).

D'autre part, on peut montrer en toute généralité qu'un champ A d'opérateurs linéaires de $T^*_a(V)$ dans lui même peut toujours être interprété comme un champ α de vecteurs tangents verticaux à T(V), avec $\alpha\omega = A\omega$ pour toute forme ω. Nous laissons cela au lecteur, en lui suggérant aussi de mettre cela en rapport avec l'isomorphisme vertical, mentionné avant la formule (72).

7. REPERES QUELCONQUES, EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

a) Repères quelconques en géométrie différentielle.

Jusqu'à maintenant, chaque fois que nous avons rapporté V à des coordonnées locales (x^i), nous avons rapporté $T_a(V)$ au repère correspondant (D_i). Il est souvent plus commode d'utiliser d'autres repères (H_i) : $H_1,\dots H_\nu$ sont des champs de vecteurs (globalement définis, pour simplifier), linéairement indépendants en tout point. Le champ de repères dual dans l'espace cotangent est noté (ω^i). Nous posons $H_{ij} = H_i\cdot H_j = \frac{1}{2}(H_iH_j + H_jH_i)$ (1)

LEMME. Les formes $d\omega^i$ et $\omega^i\cdot\omega^j$ $(i\leq j)$ forment en tout point une base de l'espace des formes du second ordre. De même les H_i et $H_i\cdot H_j$ $(i\leq j)$ forment en tout point une base de l'espace des vecteurs du second ordre. Si l'on a $\lambda = \lambda^i H_i + \lambda^{ij}H_i\cdot H_j$, $\Theta = a_i d\omega^i + a_{ij}\omega^i.\omega^j$ (sommation sur tous les i,j ; $\lambda^{ij} = \lambda^{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$) on a $\langle\lambda,\Theta\rangle = \lambda^i a_i + \lambda^{ij}a_{ij}$.

1. On pose $X\cdot Y = (XY+YX)/2$, pour deux champs quelconques X,Y .

<u>Démonstration</u>. Nous commençons par changer le nom des indices, pour avoir des notations plus agréables : nous utilisons des indices grecs pour les H_α , et nous écrivons

(86) $\omega^\alpha = h^\alpha_i dx^i$, $dx^i = h^i_\alpha \omega^\alpha$ $H_\alpha = h^i_\alpha D_i$, $D_i = h^\alpha_i H_\alpha$

la matrice (h^α_i) étant C^∞ et d'inverse (h^i_α) C^∞ . Nous avons alors

$$dx^i.dx^j = h^i_\alpha h^j_\beta \omega^\alpha.\omega^\beta \quad , \quad d^2x^i = h^i_\alpha d\omega^\alpha + D_j h^i_\alpha dx^j.\omega^\alpha$$
$$= h^i_\alpha d\omega^\alpha + h^j_\beta D_j h^i_\alpha \omega^\beta.\omega^\alpha$$

Il en résulte que toute forme d'ordre 2 s'exprime au moyen des $d\omega^\alpha$ et $\omega^\alpha.\omega^\beta$. Nous avons aussi

$$< H_\alpha, d\omega^\beta > = < H_\alpha, \omega^\beta > = \delta^\beta_\alpha \quad , \quad < H_\alpha, \omega^\beta.\omega^\gamma > = 0 \quad (\text{ cf. } (6))$$
$$< H_{\alpha\beta}, d\omega^\gamma > = 0 \quad (\text{ cf. } (70)) \quad , \quad < H_{\alpha\beta}, \omega^\sigma.\omega^\tau > = \tfrac{1}{2}(\delta^\sigma_\alpha\delta^\tau_\beta + \delta^\tau_\alpha\delta^\sigma_\beta) \quad (\text{ cf. } (69))$$

Le reste est immédiat (<u>l'une</u> des deux symétries $\lambda^{ij}=\lambda^{ji}$, $a_{ij}=a_{ji}$ suffit même).

Continuons la description : d'autres quantités importantes sont (en revenant aux indices latins)

(87) $[H_i, H_j] = c^k_{ij} H_k$

permettant de calculer des dérivées de Lie dans les repères (H_i) ; si l'on a une structure riemannienne, on posera

(88) $(H_i | H_j) = g_{ij}$

Enfin, si l'on a une connexion Γ (sans torsion) sur V, la notation traditionnelle des "symboles de Christoffel" est la suivante [NB : elle est valable aussi pour les connexions tordues]

(89) $\nabla_{H_i} H_j = \Gamma^k_{ij} H_k$, d'où $\Gamma(H_{ij}) = \hat\Gamma^k_{ij} H_k$ avec $\hat\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$ (1)

Traduisons cela au moyen des formes ω^i . La formule (87) s'écrit

(91) $\partial\omega^k = -\frac{1}{2} c^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$

(vérifier que les deux membres ont même valeur sur $H_i \wedge H_j$, grâce à (71)). En ce qui concerne (88), le produit scalaire s'écrira $g_{ij}\omega^i\omega^j$, et l'on posera dans l'espace cotangent $(\omega^i|\omega^j) = g^{ij}$. En ce qui concerne la connexion Γ (sans torsion) on introduit les formes ω^k_j par la formule $\nabla_X H_j = \omega^k_j(X) H_k$, donc $\omega^k_j(X) = \omega^i(X)\Gamma^k_{ij}$; on a aussi (cf. (46))

(92) $\nabla_X \omega^j = -\omega^j_i(X)\omega^i$

Les relations (89) : $\Gamma(H_i) = H_i$, $\Gamma(H_{ij}) = \hat\Gamma^k_{ij} H_k$ s'écrivent aussi, dualement,

(93) $\Gamma(\omega^k) = d\omega^k + \hat\Gamma^k_{ij}\omega^i.\omega^j$

1. Le lecteur vérifiera immédiatement que

(90) $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\hat\Gamma^k_{ij} + c^k_{ij})$

relation qui s'écrit aussi

(94) $\Gamma(\omega^k) = d\omega^k + \omega^k_i . \omega^i$

mais qui ne caractérise pas entièrement les formes ω^k_i, puisqu'elle ne donne que les symétrisés $\hat{\Gamma}^k_{ij}$. Il faut encore caractériser les parties antisymétriques $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ qui, d'après (90), sont les c^k_{ij}. On écrira donc la <u>première équation de structure de Cartan</u>, équivalente à (90) en vertu de (91)

(95) $0 = \partial\omega^k + \omega^k_i \wedge \omega^i$

Si la connexion présente de la torsion, le côté gauche n'est pas 0, mais la << forme de torsion >>. L'analogie entre (94) et (95) s'éclaircit lorsqu'on introduit les formes d'ordre 2 non symétriques, qui contiennent à la fois les formes d'ordre 2 et les 2-formes extérieures : (94) et (95) sont alors les parties symétrique et antisymétrique d'une même formule.

Je me demande si cela s'étend à la seconde équation, plus bas.

Enfin, soit h(t) une courbe ; indiquons la formule qui donne son accélération dans les repères (H_i) :

(96) $\ddot{h} = < \ddot{h}, d\omega^i > H_i + < \ddot{h}, \omega^i . \omega^j > H_{ij}$

$= \frac{d}{dt} < \dot{h}, \omega^i > H_i + < \dot{h}, \omega^i > < \dot{h}, \omega^j > H_{ij}$

<u>Note</u>. <u>La seconde équation de structure de Cartan</u>.

Tous les résultats un peu fins de géométrie riemannienne (stochastique ou non) font apparaître, d'une manière ou d'une autre, la courbure de la variété, et la façon la plus commode de faire apparaître celle-ci est la relation

(97) $\partial\omega^k_\ell + \omega^k_m \wedge \omega^m_\ell = \frac{1}{2} R^k_{\ell ij} \omega^i \wedge \omega^j$

appelée <u>seconde équation de structure</u>. La démonstration est très simple. On part de la formule (92)

$$-\nabla_Y \omega^k = < Y, \omega^k_j > \omega^j$$

d'où l'on tire

$$\nabla_X \nabla_Y \omega^k = -X < Y, \omega^k_j > \omega^j + \omega^k_j(Y) \omega^j_\ell(X) \omega^\ell$$ de même

$$-\nabla_Y \nabla_X \omega^k = Y < X, \omega^k_j > \omega^j - \omega^k_j(X) \omega^j_\ell(Y) \omega^\ell$$

$$-\nabla_{[X,Y]} \omega^k = < [X,Y], \omega^k_j > \omega^j$$

et en utilisant du côté gauche les relations (82) à (85')

$$(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) \omega^k = \rho(X,Y) \omega^k = - \omega^i(X) \omega^j(Y) R^k_{\ell ij} \omega^\ell$$

Du côté droit, on trouve à droite $-< X \wedge Y, \omega^k_j \wedge \omega^j_\ell > \omega^\ell$, et en premier d'après (71), $-< X \wedge Y, \partial\omega^k_\ell > \omega^\ell$ (le nom de l'indice j est changé). Reste donc

$$< X \wedge Y, \partial\omega^k_\ell + \omega^k_j \wedge \omega^j_\ell > = \omega^i(X) \omega^j(Y) R^k_{\ell ij} = \frac{1}{2} < X \wedge Y, R^k_{\ell ij} \omega^i \wedge \omega^j >$$

puisque $R^k_{\ell ij} = -R^k_{\ell ji}$.

EXEMPLE. Le choix le plus évident de repères (H_i) mieux adaptés à la géométrie que les repères (D_i) est celui des <u>repères orthonormés</u> en géométrie riemannienne, pour lesquels on a $(\omega^i|\omega^j)=\delta^{ij}$. La relation $\nabla_{H_i}(H_j|H_k)=0$ nous donne alors $\Gamma^k_{ij}+\Gamma^j_{ik}=0$, soit

(98) $$\omega^k_j+\omega^j_k = 0 \quad .$$

Il y aurait énormément à dire sur tous ces sujets, du point de vue de la géométrie différentielle. Revenons plutôt aux probabilités.

b) <u>Equations différentielles stochastiques</u>

Commençons par définir ce qu'est la <u>lecture d'une semimartingale</u> X (à valeurs dans V) dans le repère (H_i) : c'est l'ensemble $Z=(Z^i)$ des semimartingales réelles

(99) $$Z^i_t = \int_{X_0^t} \omega^i$$

> On voit pourquoi nous avons supposé, pour simplifier, le champ de repères défini sur V entier, et non sur des ouverts U : on ne pourrait considérer alors que les dZ^i_t sur les ouverts aléatoires $\{X\in U\}$, et cela entraînerait quelques difficultés de présentation.

Le problème des équations différentielles stochastiques est, à peu de choses près, celui de la <u>reconstruction de</u> X <u>à partir de</u> Z.

Pour résoudre ce problème, reprenons les notations (86), en attribuant des indices grecs aux H_i, ω^i, Z^i . Nous avons $dx^i=h^i_\alpha\omega^\alpha$, donc

$$X^i_t-X^i_0 = \int_{X_0^t} dx^i = \int_{X_0^t} h^i_\alpha\omega^\alpha = \int_0^t h^i_\alpha(X_s)*dZ^\alpha_s \qquad (25)$$

Ceci est une équation différentielle stochastique de Stratonovitch. Rappelons brièvement comment on la ramène à une équation d'Ito. On l'écrit (en omettant le X^i_0)

$$dX^i_t = h^i_\alpha(X_s)dZ^\alpha_s + \tfrac{1}{2}d\langle h^i_\alpha(X_s),Z^\alpha_s\rangle$$

puis $d\langle h^i_\alpha(X_s),Z^\alpha_s\rangle = D_jh^i_\alpha(X_s)d\langle X^j_s,Z^\alpha_s\rangle$, et enfin $d\langle X^j,Z^\alpha\rangle_s = h^j_\beta(X_s)d\langle Z^\beta,Z^\alpha\rangle_s$

D'où la forme définitive de l'équation

$$dX^i_t = h^i_\alpha(X_s)dZ^\alpha_s + \tfrac{1}{2}D_jh^i_\alpha(X_s)h^j_\beta(X_s)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_s$$

La notation symbolique pour cette équation différentielle stochastique est

(100) $$dX_t = dZ^\alpha_t*H_\alpha(X) \quad \text{(provisoirement : cf. (113), n.1)}$$

Mais il est clair que l'équation (100) doit avoir un sens pour des champs de vecteurs H_α <u>qui ne forment pas un repère</u> : leur nombre n pouvant être distinct de ν, et aucune condition d'indépendance n'étant imposée. Nous allons essayer de présenter cela de manière intrinsèque, et sous une forme un peu plus générale (les idées essentielles sont dues à Schwartz).

Pour généraliser l'équation (100), nous nous donnons un entier n, et sur la variété V n champs de vecteurs H_α (indépendants ou non). Cela revient à se donner, pour tout a∈V, une application h_a de $T_0(\mathbb{R}^n)$ dans $T_a(V)$, avec

$$h_a(D_\alpha) = H_\alpha(a) = h^i_\alpha(a)D_i$$

Nous prolongeons cette application en une application de $\tau_0(\mathbb{R}^n)$ dans $\tau_a(V)$, encore notée h_a, telle que

(101) $$h(D_\alpha) = H_\alpha \quad , \quad h(D_{\alpha\beta}) = H_\alpha \cdot H_\beta = h^{ij}_{\alpha\beta}D_{ij} + h^i_{\alpha\beta}D_i$$

Etant donnée une semimartingale Z à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous recherchons alors une semimartingale X à valeurs dans V, avec X_0 donnée, et satisfaisant à

(102) $$d^2X_t = h_{X_t}(d^2Z_t)$$

(du côté droit, d^2Z_t appartient à $\tau_{Z_t}(\mathbb{R}^n)$, mais on identifie cet espace à $\tau_0(\mathbb{R}^n)$ par translation). L'équation intrinsèque (101) s'écrit en coordonnées locales

$$dX^i_t = h^i_\alpha(X_t)dZ^\alpha_t + \tfrac{1}{2}h^i_{\alpha\beta}(X_t)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_t$$
$$d\langle X^i,X^j\rangle_t = h^i_\alpha(X_t)h^i_\beta(X_t)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_t$$

mais la seconde équation est une conséquence de la première, compte tenu du fait que $2h^{ij}_{\alpha\beta} = h^i_\alpha h^j_\beta + h^i_\beta h^j_\alpha$. De plus, connaissant la valeur de $h^i_{\alpha\beta}$ dans (101), qui est $2h^i_{\alpha\beta} = h^k_\alpha D_k h^i_\beta + h^k_\beta D^k h^i_\alpha$, la première équation s'écrit $dX^i_t = h^i_\alpha(X_t)*dZ^\alpha_t$, d'où la notation symbolique traditionnelle (avec les scalaires à gauche), mais que nous n'utiliserons pas nous mêmes (cf. (113), note 1)

(103) $$dX_t = dZ^\alpha_t * H_\alpha(X_t)$$

On peut aussi présenter cela d'une autre manière : posons $U=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^n\times V$, $p(z,x)=z$ pour $z\in\mathbb{R}^n$, $x\in V$, et posons par analogie avec (75), au point (z,x) de W

$$\mathrm{H}(D_\alpha) = D_\alpha + h^i_\alpha(x)D_i$$

par rapport à (75), les indices grecs et latins, les rôles des lettres z et x, sont <u>intervertis</u> : V qui était la "base" est devenue la "fibre". Nous avons ainsi défini une connexion sur W, à la manière du § 6, e)-f). Alors la semimartingale (Z,X) apparaît comme le <u>relèvement horizontal</u> de la semimartingale Z.

> Ce point de vue suggère que la courbure de la connexion doit apparaître quelque part dans la théorie des équations différentielles stochastiques.

Nous ne donnerons pas de détails sur l'existence des solutions et leurs propriétés, questions qui sont traitées dans un travail à paraître de Schwartz, et dans le livre d'Ikeda-Watanabe. Une remarque (figurant dans ces deux travaux) permet d'ailleurs de se rendre compte qu'il ne peut y avoir là de difficultés majeures : V se plongeant dans $\mathbb{R}^N$ pour N suffisamment grand, il suffit de prolonger les champs à $\mathbb{R}^N$, de résoudre une équation classique dans $\mathbb{R}^N$, et de vérifier que la solution issue d'un point de V reste dans V.

REMARQUE. Il existe des équations différentielles stochastiques du type (102) qui ne sont pas du type (103). Reprenons l'expression (101) de la fonction $h_a : \tau_0(\mathbb{R}^n) \longmapsto \tau_a(V)$, et demandons nous quelle doit être la forme des coefficients $h^{ij}_{\alpha\beta}$, $h^i_{\alpha\beta}$ pour que (102) ait un sens. Nous avons vu que l'on doit avoir $2h^{ij}_{\alpha\beta} = h^i_\alpha h^j_\beta + h^j_\alpha h^i_\beta$; cette condition est bien intrinsèque, et signifie que la transposée de h satisfait à $h'(\omega.\theta)=h'(\omega).h'(\theta)$. Supposant qu'elle est satisfaite, on voit que $h(D_{\alpha\beta})-H_\alpha.H_\beta = U_{\alpha\beta}$ est en réalité un vecteur tangent du premier ordre, et que l'équation (102) s'écrit

(104) $$dX^i_t = h^i_\alpha(X_t)*dZ^\alpha_t + \tfrac{1}{2}u^i_{\alpha\beta}(X_t)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_t$$

Il n'est pas difficile de voir que le système $(u^i_{\alpha\beta})$ représente une application linéaire de $T_0(\mathbb{R}^n)\times T_0(\mathbb{R}^n)$ dans $T_a(V)$, mais cela ne présente pas d'intérêt spécial pour la suite.

Indiquons quelques formules. Soit ω une forme sur V ; on a

$$\int_{X_0^t} \omega = \int_0^t \langle H_\alpha(X_s),\omega\rangle * dZ^\alpha_s + \frac{1}{2}\int_0^t \langle U_{\alpha\beta}(X_s),\omega\rangle \, d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_s$$

En particulier, supposons que l'on ait $n<\nu$, les H_α constituant en tout point une base d'un champ de n-plans. Si les $U_{\alpha\beta}$ sont nuls (équation (103)), et si la forme ω est orthogonale aux H_α, $\int_X \omega=0$, donc X est une s.m. intégrale du champ. D'autre part, si l'on prend pour Z un mouvement brownien à n dimensions, que l'on régularise par convolution pour le rendre différentiable, Malliavin montre que les solutions de (103) au sens déterministe convergent vers les courbes X_t solutions de (103) pour le brownien. Donc celles-ci sont des <u>limites</u> de courbes intégrales du champ, au sens usuel de ce terme. Cela justifie un peu notre définition très formelle des semimartingales intégrales d'un n-champ.

Autre formule : on a dans tous les cas

$$\langle X^i,X^j\rangle_t = \int_0^t h^i_\alpha h^j_\beta(X_s)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_s$$

En particulier, si Z est un mouvement brownien ν-dimensionnel $(n=\nu)$ et si le repère (H_α) est orthonormé, on a $d\langle X^i,X^j\rangle_s = h^i_\alpha h^j_\beta(X_s)\delta^{\alpha\beta}ds = g^{ij}(X_s)ds$.

Supposons toujours que Z soit un mouvement brownien à n dimensions. Il est facile de vérifier que X est alors une diffusion, gouvernée par l'opérateur

$$L = \tfrac{1}{2}\Sigma_\alpha H_\alpha H_\alpha + \tfrac{1}{2}\Sigma_\alpha U_{\alpha\alpha}$$

(on peut aussi faire apparaître le terme de droite en faisant figurer dans Z une composante $Z^0_t=t$, tous les champs $U_{\alpha\beta}$ étant nuls).

<u>Application</u>. Il est maintenant facile de construire le mouvement brownien d'une variété riemannienne <u>admettant un champ global de repères</u>. En effet,

on en déduit aussitôt un champ de repères (H_α) orthonormés. La solution de l'équation (104), Z étant le mouvement brownien de $\mathbb{R}^\nu$, est alors un processus X satisfaisant à $d\langle X^i, X^j\rangle_s = g^{ij}(X_s)ds$. Pour que ce soit aussi une martingale à valeurs dans V, il faut et il suffit que l'on ait pour tout i

$$(h^i_{\alpha\beta} + \Gamma^i_{jk} h^i_\alpha h^k_\beta + u^i_{\alpha\beta}) \delta^{\alpha\beta} = 0$$

qui admet par exemple la solution $U_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\nabla_{H_\alpha} H_\beta + \nabla_{H_\beta} H_\alpha) = -\Gamma(H_\alpha . H_\beta)$.

Si V n'admet pas un champ global de repères, le mouvement brownien doit être construit localement et recollé, ce qui est bien intuitif, mais toujours délicat à présenter rigoureusement. Nous ne tenterons pas de le faire.

c) Développement le long d'une courbe

Ce paragraphe coûtera sans doute un peu plus de larmes que les autres, et je pense qu'on peut l'omettre sans grand inconvénient (la notion de développement joue toutefois un rôle important dans les travaux de Bismut).

> Ici, elle sert plutôt comme prétexte pour introduire diverses notions plus ou moins intéressantes : ce que je fais est plus compliqué que ce qu'a fait Bismut.

Notre but est le suivant : nous allons essayer de décrire le mouvement d'un repère mobile aléatoire $(X_t, (\dot{H}_{\alpha t}))$, où les vecteurs tangents $H_{\alpha t}$ au point X_t ne sont pas donnés, comme précédemment, comme valeur en X_t d'un champ H_α sur V - par exemple, $H_{\alpha t}$ pourra être défini par transport parallèle le long de la trajectoire $X_\bullet$, et dépendra donc de tout le passé de celle-ci.

i. Commençons par le cas déterministe. Rappelons qu'au paragraphe 6, e) nous avons défini une application de TT(V) dans T(V), de la manière suivante : soit χ un vecteur tangent à T(V) au point (x,u) $(u \in T_x(V))$, donné par

$$\chi = (x^i, u^i, v^i, w^i) \quad ;$$

nous lui avons associé $\varphi(\chi) = w^k D_k + v^i u^j D_{ij} \in \tau_x(V)$, puis $\Gamma(\varphi(\chi)) \in T_x(V)$, que dans ce paragraphe nous noterons simplement $\Gamma(\chi)$; c'est

(105) $$\Gamma(\chi) = (w^k + v^i u^j \Gamma^k_{ij}) D_k$$

Considérons maintenant une courbe $z(t) = (x(t), u(t))$ à valeurs dans T(V) (un transport non nécessairement parallèle : $u(t) \in T_{x(t)}(V)$). Sa vitesse $\dot{z}(t) = (x^i, u^i, \dot{x}^i = v^i, \dot{u}^i = w^i)$ est un élément de TT(V), que l'on peut ramener à T(V) par l'opération (105)

(105') $$\Gamma(\dot{z}) = \nabla_{\dot{x}} u = (\dot{u}^k + \dot{x}^i u^j \Gamma^k_{ij}) D_k \quad \text{au point } x(t)$$

La notation agréable $\nabla_{\dot{x}} u$ vient du cas où $u(t) = U_{x(t)}$, U étant un champ sur la variété ; alors $\Gamma(\dot{z}) = \nabla_{\dot{x}(t)} U$. Si l'on connaît la courbe x(t), et en chaque point la valeur de $\nabla_{\dot{x}} u$, reconstruire le transport revient à résoudre une équation différentielle linéaire.

L'opération Γ peut être présentée de manière duale : si ω est une forme d'ordre 1 sur V au point x, $\omega=a_i dx^i$, nous lui associons une forme $\Gamma\omega$ sur T(V) au point (x,u)

$$\Gamma(\omega) = a_i\delta dx^i + a_k\Gamma^k_{ij}\delta x^i dx^j$$

(les dx^i sont, rappelons le, des fonctions sur T(V), comme les x^i, et les δdx^i, δx^i sont leurs différentielles, fonctions sur TT(V)). On a alors $<\Gamma(\chi),\omega> = <\chi,\Gamma\omega>$, ou encore, $\Gamma(\chi)$ est l'opérateur différentiel d'ordre 1 au point x $f \longmapsto <\chi,\Gamma df>$.

<u>Extension à l'ordre 2</u> : faisons une digression, pour prolonger Γ en $\overline{\Gamma}$ allant de $\tau(T(V))_{x,u}$ dans $\tau(V)_x$: il suffit, étant donné un opérateur λ d'ordre 2 au point (x,u) de T(V), de noter $\overline{\Gamma}(\lambda)$ l'opérateur différentiel d'ordre 2 en x défini par $\overline{\Gamma}(\lambda)f = <\lambda, \delta\Gamma df>$. On a alors pour toute forme ω sur V

(106) $$<\overline{\Gamma}(\lambda), d\omega>_x = <\lambda, \delta\Gamma\omega>_{x,u}$$

<u>Calcul</u> (peut être omis). Nous notons (x^i,u^α) les coordonnées sur T(V), ce qui permet de noter D_i et D_α les dérivées partielles. L'indice grec correspondant à l'indice latin i est noté $\hat{i}$: $dx^i=u^{\hat{i}}$, et de même pour $\hat{\alpha}$, qui est un indice latin. On peut alors écrire

$$\lambda = \lambda^i D_i + \lambda^\alpha D_\alpha + \lambda^{ij}D_{ij} + 2\lambda^{i\alpha}D_{i\alpha} + \lambda^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}$$

(symétries usuelles en ij, $\alpha\beta$; il n'y a pas de terme en αi, d'où le facteur 2). On écrit successivement

$$df = D_i f\, u^{\hat{i}} \ , \ \Gamma df = D_i f\, \delta u^{\hat{i}} + D_k f\Gamma^k_{ij}\delta x^i u^{\hat{j}}$$
$$\delta\Gamma df = D_{\hat{\alpha}}f\delta^2 u^\alpha + D_k f\Gamma^k_{ij}u^{\hat{j}}\delta^2 x^i + D_{j\hat{\alpha}}f\delta x^j\delta u^\alpha + D_k f\Gamma^k_{i\hat{\alpha}}\delta x^i\delta u^\alpha$$
$$+ D_\ell(D_k f\Gamma^k_{ij})u^{\hat{j}}\delta x^\ell\delta x^i$$

et enfin (en omettant les $\hat{}$ inutiles)

(107) $$\overline{\Gamma}(\lambda) = \overline{\lambda}^k D_k + \overline{\lambda}^{mp}D_{mp} \ \text{avec} \ \overline{\lambda}^k = \lambda^{\hat{k}} + (\lambda^i u^j + 2\lambda^{i\hat{j}})\Gamma^k_{ij} + \lambda^{\ell i}u^j D_\ell\Gamma^k_{ij}$$
$$\overline{\lambda}^{mp} = 2\lambda^{m\hat{p}} + \lambda^{mi}u^j\Gamma^p_{ij} \ \text{(à symétriser)}$$

Si l'on relève horizontalement en (x,u) un vecteur tangent d'ordre 1 en x, puis qu'on le redescend en x par $\overline{\Gamma}$, on trouve 0. Il n'en est pas de même pour un vecteur tangent d'ordre 2.

ii. Restons toujours dans le cas déterministe, et considérons une courbe $(x(t), u_1(t),\dots,u_\nu(t))$ à valeurs dans l'espace des <u>repères</u> sur V. Nous poserons, avec des notations maintenant familières

$$u_\alpha(t) = h^i_\alpha(t)D_i \ , \ D_i = h^\alpha_i(t)u_\alpha(t) \ \text{au point } x(t)$$

Rapportons les vecteurs tangents $\dot{x}(t)$ et $\nabla_{\dot{x}}u_\alpha$ <u>au repère mobile lui même</u>, en posant

(108) $$\dot{x}(t) = a^\alpha(t)u_\alpha(t) \quad , \text{ et de même } \nabla_{\dot{x}}u_\alpha = a^\beta_\alpha u_\beta \ .$$

Résolvons maintenant le système différentiel suivant, où $\xi(t)$, $\upsilon_\alpha(t)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^\nu$

(109) $$d\xi(t) = a^\alpha(t)\upsilon_\alpha(t)dt \quad , \quad d\upsilon_\alpha(t) = a_\alpha^\beta(t)\upsilon_\beta(t)dt$$
$$\xi(0)=\xi \ , \ \upsilon_\alpha(0)=\upsilon_\alpha \quad (\text{ repère arbitraire dans } \mathbb{R}^\nu)$$

Nous construisons un mouvement qui a, dans la connexion plate de $\mathbb{R}^\nu$, les mêmes "caractéristiques infinitésimales" que la courbe $(x(t),u_1(t),..u_\nu(t))$ dans l'espace des repères. Si V est munie d'une structure riemannienne, et les repères $(u_\alpha(t))$ sont orthonormés, la matrice (a_α^β) est antisymétrique. On en déduit que, si le repère initial (υ_α) est orthonormé dans $\mathbb{R}^\nu$, le repère $(\upsilon_\alpha(t))$ reste orthonormé dans $\mathbb{R}^\nu$. L'idée est alors que l'on fait "rouler" la variété riemannienne V sur l'espace euclidien, en appliquant(1) à chaque instant t le point $x(t)$ sur le point $\xi(t)$, le repère $(u_\alpha(t))$ sur le repère $(\upsilon_\alpha(t))$. Si le repère $(u_\alpha(t))$ est en transport parallèle tout le long de la courbe $x(t)$, les $a_\alpha^\beta(t)$ sont nuls, et le repère $(\upsilon_\alpha(t))$ garde une orientation fixe. Quant à la courbe $\xi(t)$ elle même, on l'appelle le <u>dévelop-pement de la courbe</u> $x(t)$ <u>sur l'espace euclidien</u>.

> Nous avons dit sur ce sujet aussi peu de choses que possible, de manière aussi élémentaire que possible. Voir E. Cartan, Espaces de Riemann, p. 105-109, et les traités modernes de géométrie différentielle pour les idées générales sous-jacentes à la " méthode du repère mobile".

iii. Nous nous proposons maintenant d'étendre ces résultats déterministes aux semimartingales. Commençons par une semimartingale $(Z_t)=(X_t,U_t)$ à valeurs dans $T(V)$, avec $U_t = u_t^iD_i$ au point X_t (les u_t^i sont des semimartingales réelles ; nous continuons à supposer, pour simplifier, l'existence de coordonnées globales). Les développements de i), et le principe de Schwartz, nous montrent le caractère intrinsèque du " vecteur tangent d'ordre 2 au point X_t" $\Gamma(d^2Z_t)$, et le calcul de (107) permet d'écrire

(110) $$\Gamma(d^2Z_t) = dM_t^kD_k + \tfrac{1}{2}d\langle X^m,M^p\rangle_tD_{mp} \text{ au point } X_t$$
$$\text{avec } dM_t^k=dU_t^k+dX_t^i*(U_t^j\Gamma_{ij}^k(X_t))$$

que nous noterons naturellement $\nabla_{dX}U_t$. Pour avoir des notations parlantes, nous conviendrons de poser, si les Y_t^i sont des semimartingales réelles

(111) $$dY_t^i*D_i(X_t) = dY_t^iD_i + \tfrac{1}{2}d\langle Y^i,X^j\rangle D_{ij} \quad \text{au point } X_t$$

de sorte que $d^2X_t = dX_t^i*D_i(X_t)$ et

(112) $$\nabla_{dX}U_t = dM_t^i*D_i(X_t) \ (2)$$

Si $\omega = a_idx^i$ est une forme sur V, nous avons $\int_{Z_0}^{Z_t}\Gamma\omega = \int_0^t\langle \nabla_{dX}U_s,d\omega\rangle$ (106).

---

1. L'identité des coefficients a_α et a_α^β dans les deux mouvements exprime que V " roule sur $\mathbb{R}^\nu$ sans glissement ni rotation".
2. Le transport parallèle ((77),(78)) s'exprime par $\nabla_{dX}U_t=0$, naturellement.

Avant de passer au cas des repères, nous allons généraliser (111) : soit Y_t une semimartingale réelle, nous allons définir un "vecteur tangent d'ordre 2 au point X_t", qui sera

(113) $$dY_t * U_t = (U_t^k dY_t + \frac{1}{2} d\langle U^k, Y\rangle_t) D_k + \frac{1}{2} U_t^i d\langle Y, X^j\rangle D_{ij}$$ [1]

Pour voir que ceci est intrinsèque, on remarque que sa valeur sur $f \in C$ est déterminée par

$$< dY_t * U_t,\, d^2 f > = \quad \langle U_t, df\rangle * dY_t$$

Nous n'insistons pas sur les détails, pour ne pas prendre une place démesurée : notons tout de même que, si K_t est une semimartingale scalaire, on a

(114) $$dY_t * (K_t U_t) = (K_t * dY_t) * U_t \ , \ (K_t dY_t) * U_t = K_t (dY_t * U_t) \ .$$

Je n'ai pas trouvé d'opération déterministe correspondant à cette construction stochastique.

iv. Considérons maintenant un repère mobile stochastique $(X_t, H_{\alpha t})$, avec

$$H_{\alpha t} = h^i_{\alpha t} D_i \ , \quad D_i = h^\alpha_{it} H_{\alpha t} \quad \text{au point } X_t$$

où les $h^i_{\alpha t}$, h^α_{it} sont des semimartingales réelles. Nous introduisons les semimartingales réelles a^α_t et $a^\beta_{\alpha t}$ telles que

(115) $$d^2 X_t = da^\alpha_t * H_{\alpha t} \quad , \quad \nabla_{dX} H_{\alpha t} = da^\beta_{\alpha t} * H_{\beta t}$$

Ces semimartingales existent bien : il suffit de poser $\nabla_{dX} H_{\alpha t} = dM^i_{\alpha t} * D_i$ (112) et de prendre $da^\alpha_t = h^\alpha_{it} * dX^i_t$, $da^\beta_{\alpha t} = h^\beta_{it} * dM^i_{\alpha t}$. On peut les appeler les composantes du déplacement infinitésimal du repère stochastique.

Si les $H_{\alpha t}$ sont de la forme $H_\alpha(X_t)$ pour des champs H_α sur V, les a^α_t constituent la <u>lecture</u> de X dans le repère (cf.(99)). Cela vaudrait en général si l'on avait défini l'intégrale de Stratonovich $\int_{X_0}^{X_t} \omega_t$ pour une forme semimartingale (s.m. à valeurs dans l'espace cotangent).

Il est maintenant très simple de développer la trajectoire sur l'espace euclidien : on résout les équations différentielles stochastiques correspondant à (109) :

(116) $$d\xi_t = da^\alpha_t * \upsilon_{\alpha t} \quad , \quad d\upsilon_{\alpha t} = da^\beta_{\alpha t} * \upsilon_{\beta t} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \ .$$

avec des conditions initiales $\xi(0)$, $\upsilon_\alpha(0)$ arbitraires . Si les $(\upsilon_\alpha(0) | \upsilon_\beta(0))$ dans $\mathbb{R}^\nu$ sont égaux aux $(H_{\alpha 0} | H_{\beta 0})$ dans V,[2] on a la même propriété tout au long, et on peut montrer que la courbe $\xi(t)$ dépend seulement - à un déplacement de $\mathbb{R}^\nu$ près - de la courbe X_t, et non des repères utilisés.

1. La formule (103) doit maintenant s'écrire $d^2 X_t = dZ^\alpha_t * H_\alpha(X_t)$.
2. Nous supposons pour simplifier que le repère initial est fixé, non aléatoire .

Nous démontrons maintenant un joli résultat, dû à Bismut : <u>la semimartingale X_t est une martingale à valeurs dans V si et seulement si son développement ξ_t est une martingale locale dans $\mathbb{R}^\nu$</u>. Nous supposons pour simplifier que $X_0=x$ est fixe, et nous prenons comme repère $(H_{\alpha\cdot})$, le transport parallèle d'un repère orthonormé fixé au point x, le long de la trajectoire $X_\cdot$. Alors le repère $(\upsilon_{\alpha t})$ reste orthonormé, de direction fixe dans $\mathbb{R}^\nu$: supprimant t, l'équation (116) s'écrit simplement

$$d\xi_t = da_t^\alpha \upsilon_\alpha$$

Il reste à calculer da_t^α . Nous posons $H_{\alpha t}=h_{\alpha t}^i D_i$, $D_i=h_{it}^\alpha H_\alpha$, et alors $da_t^\alpha=h_{it}^\alpha * dX_t^i$. Un peu de manipulation à partir des relations

$$dh_{\beta t}^k+(h_{\beta t}^j\Gamma_{ij}^k)*dX_t^i \quad \text{et} \quad h_{\beta t}^k h_{mt}^\beta=\delta_m^k \text{ , d'où } h_{\beta t}^k * dh_{mt}^\beta + h_{mt}^\beta * dh_{\beta t}^k = 0$$

(la première exprime le parallélisme de $H_{\beta t}$ le long de X) entraîne

$$d\Phi_{it}^\alpha = dh_{it}^\alpha - (h_{jt}^\alpha \Gamma_{ik}^j)*dX^k = 0$$

(cela exprime le parallélisme de $\omega_t^\alpha=h_{jt}^\alpha dx^j$ le long de X). Posons alors

$$M_t^i = dX_t^i + \tfrac{1}{2}\Gamma_{jk}^i d\langle X^j,X^k\rangle_t$$

il est facile de voir que

$$(117) \qquad da_t^\alpha=h_{it}^\alpha * dX_t^i = h_{it}^\alpha dM_t^i + \tfrac{1}{2}d\langle \Phi_i^\alpha, X^i\rangle_t = h_{it}^\alpha dM_t^i$$

ainsi, les a_t^α sont des martingales locales si et seulement si les M_t^i en sont.

Supposons que X soit le mouvement brownien de V ; on a alors $d\langle M^i,M^j\rangle_s = d\langle X^i,X^j\rangle_s = g^{ij}(X_s)ds$, donc $d\langle a^\alpha,a^\beta\rangle_s = h_{it}^\alpha h_{it}^\beta g_{ij}(X_s)ds = \delta^{\alpha\beta}ds$: <u>le mouvement brownien de V se développe selon le mouvement brownien ordinaire de $\mathbb{R}^\nu$</u>. Intuitivement, cela signifie que pour construire le mouvement brownien sur une variété V, on fait rouler sans glisser V sur $\mathbb{R}^\nu$ le long d'une trajectoire brownienne ordinaire, après avoir mis un peu d'encre sur $\mathbb{R}^\nu$, et la trajectoire apparaît en noir sur V.

> Cette manière de voir le mouvement brownien est tout à fait classique, et remonte aux premiers travaux de McKean et Ito sur la question.

DIGRESSION. Revenons au cas déterministe i), et au vecteur tangent à T(V), $\chi=(x^i,u^i,v^i,w^i)$. On peut considérer $\varphi(\chi)=w^iD_i+v^iu^jD_{ij} \in \tau(V)$ comme la partie symétrique de χ, tandis que la partie antisymétrique de χ est le bivecteur intrinsèque $v^iu^jD_i\wedge D_j$. Etant donné un transport $z(t)=(x(t),u(t))$, il lui correspond donc une courbe intrinsèque $\dot{x}(t)\wedge u(t)$ dans $\Lambda(V)$ (bivecteur au point x(t)). Existe t'il une notion analogue pour une semimartingale $Z_t=(X_t,U_t)$?

Donnons nous une 2-forme extérieure $\Theta= a_{ij}dx^i\wedge dx^j$ sur V ($a_{ij}=-a_{ji}$), que nous interprétons comme 1-forme sur T(V) : $\Theta=a_{ij}(\delta x^i dx^j-\delta x^j dx^i)$ =

$\Theta=a_{ij}(x)(u^j\delta x^i-u^i\delta x^j)$; on peut maintenant calculer

$$(118)\quad \int_{Z_0^t}\Theta=\int_0^t a_{ij}(X_s)(U_s^j dX_s^i-U_s^i dX_s^j)+\frac{1}{2}\int_0^t a_{ij}(X_s)(d[U^j,X^i]_s-d[U^i,X^j]_s)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t D_k a_{ij}(X_s)(U_s^j d\langle X^i,X^k\rangle_s-U_s^i d\langle X^j,X^k\rangle_s)$$

qui est une intégrale stochastique intrinsèque le long du transport, et dans le cas d'une courbe C^∞ se réduit à $\int_0^t \langle \dot{x}(s)\wedge u(s),\, \Theta\rangle\, ds$. En fait, c'est $\int_0^t a_{ij}(X_s)*(U_s^j * dX_s^i-U_s^i * dX_s^j)$, conformément au principe de transfert usuel.

d) Note : les "coordonnées polaires géodésiques" .

Voici un exemple classique d'utilisation d'un champ de repères, qui est utilisé en probabilités, lorsque l'on veut faire des estimations précises sur le mouvement brownien au voisinage d'un point d'une variété riemannienne. Nous ne donnerons pas ces estimations, mais nous l'appliquerons plus loin à un autre calcul sur le mouvement brownien de V, où nous verrons apparaître, pour la première fois, le rôle de la courbure sectionnelle.

Nous suivons à peu près l'exposé de Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, p. 46 et p.70 et suivantes (1e édition).

Nous nous plaçons autour d'un point a fixé de V, et nous choisissons une base orthonormale (D_i) de $T_a(V)$. Nous désignons par G une boule ouverte de $T_a(V)$, de centre 0 et de rayon c, telle que l'application exponentielle soit un homéomorphisme de G sur un ouvert de V, que nous identifions à G. En particulier, un vecteur tangent à V au point $x\in G$ a deux longueurs : sa longueur riemannienne (notée $\|\ \|$), et sa longueur euclidienne (notée $|\ |$). La notation (x^i) désigne le système des coordonnées euclidiennes, et (D_i) est le repère naturel associé (translation des D_i à l'origine). Nous désignons par $H_i(x)$ le vecteur en x obtenu par transport parallèle de $D_i(0)$ le long de la géodésique $t\mapsto tx$; nous emploierons presque toujours des lettres grecques pour noter ce repère, et nous noterons $\hat{\imath}$ l'indice "grec" égal à l'indice "latin" i (ainsi $H_{\hat{\imath}}(0)=D_i$), et inversement pour $\hat{\alpha}$. Le repère (H_α) est orthonormé au sens riemannien. On pose comme toujours

$$H_\alpha=a_\alpha^i D_i\ ,\quad D_i=a_i^\alpha H_\alpha\ ,\quad \omega^\alpha=a_i^\alpha dx^i\ ,\quad \nabla_{H_\alpha}H_\beta=\Gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon H_\varepsilon\ ,\quad \omega_\alpha^\beta=\omega^\varepsilon\Gamma_{\varepsilon\alpha}^\beta$$

Identités de départ. Considérons la courbe $h(t)=ty$, $y\in G$. Le transport $t\mapsto(ty,\ H_\alpha(ty))$ étant parallèle pour tout α, il en est de même du transport $t\mapsto(ty,\ y^{\hat{\alpha}}H_\alpha(t))$. Mais pour t=0, ce vecteur est la vitesse de la courbe. Une géodésique transportant parallèlement sa vitesse, il coincide avec la vitesse tout au long de la courbe, soit

$$(119)\qquad y^i D_i(ty) = y^{\hat{\alpha}}H_\alpha(ty) \quad \text{ou encore}\quad y^{\hat{\alpha}}a_\alpha^i(ty)=y^i$$

Mais alors, l'équation de transport parallèle $\nabla_{\hat{h}(t)}H_\beta(ty)=0$ s'écrit

(120) $$y^{\hat\varepsilon}\Gamma^\beta_{\varepsilon\alpha}(ty) = 0 \quad \text{identiquement en } y\in G,\ t\in[-1,1],\alpha,\beta.$$

Nous faisons maintenant le changement de variables $x=ry$, avec $y\in G$, $r\in\,]-1,1[$. Par ce changement de variables, les $\omega^\alpha(x,dx)$, $\omega^\alpha_\beta(x,dx)$ deviennent des formes $\overset{*}{\omega}{}^\alpha(ry, dr,dy)$, $\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta$, qui satisfont encore aux équations de structure de Cartan, (95) et (97)

$$\partial\overset{*}{\omega}{}^\alpha = -\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta\wedge\overset{*}{\omega}{}^\beta \quad , \quad \partial\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta = -\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\varepsilon\wedge\overset{*}{\omega}{}^\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}R^\alpha_{\beta\lambda\mu}\overset{*}{\omega}{}^\lambda\wedge\overset{*}{\omega}{}^\mu$$

Ecrivons ces formes en tenant compte de (119) et (120)

$$\overset{*}{\omega}{}^\alpha = a^\alpha_i(ry)(rdy^i+y^idr) = y^{\hat\alpha}dr+ra^\alpha_i(ry)dy^i \quad (\ y^ia^\alpha_i(ry)=y^{\hat\alpha} :(119))$$

$$\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta = \overset{*}{\omega}{}^\varepsilon\Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}(ry) = ra^\varepsilon_i(ry)\Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}(ry) \quad (\ y^{\hat\varepsilon}\Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}(ry)=0 : (120))$$

Nous poserons dans la suite $\theta^\alpha_\beta = \overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta$, $\theta^\alpha = \overset{*}{\omega}{}^\alpha - y^{\hat\alpha}dr$, formes qui ne contiennent pas dr. Notons explicitement

(121) $$\theta^\alpha(r,y,dy)= ra^\alpha_i(ry)dy^i \ , \ \theta^\alpha_\beta(r,y,dy)=ra^\varepsilon_i(ry)\Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}(ry)dy^i$$

et la relation d'antisymétrie $\theta^\alpha_\beta+\theta^\beta_\alpha=0$. Nous avons le résultat fondamental suivant, qui montre que le mouvement du repère H_α est entièrement déterminé par la courbure ; y et dy étant fixés,

(122) $$D_r\theta^\alpha(r,y,dy) = dy^{\hat\alpha} + y^{\hat\beta}\theta^\alpha_\beta \quad ; \ \theta^\alpha(0,y,dy) = 0$$
$$D_r\theta^\alpha_\beta(r,y,dy) = R^\alpha_{\beta\lambda\mu}y^{\hat\lambda}\theta^\mu \quad ; \ \theta^\alpha_\beta(0,y,dy) = 0 .$$

Démonstration. Pour les conditions initiales à droite, appliquer (121). Pour les équations principales, recopier les équations de Cartan, en remplaçant $\overset{*}{\omega}{}^\alpha_\beta$ par θ^α_β , $\overset{*}{\omega}{}^\alpha$ par $y^\alpha dr+\theta^\alpha$, et identifier dans les deux membres les termes contenant dr, sans s'occuper des autres : d'après les règles usuelles de différentiation extérieure

$$\partial\theta^\alpha = dr\wedge D_r\theta^\alpha + \text{termes sans } dr \ , \ \partial\theta^\alpha_\beta = dr\wedge D_r\theta^\alpha_\beta + \text{termes sans } dr.$$

Les formules (122) sortent toutes seules.

Exercice sur la courbure. Les résultats suivants figurent dans tous les cours de géométrie différentielle, avec de meilleures démonstrations. Ici, nous les avons sous la main.

1) Vérifier que $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\theta^\alpha(ry)=dy^{\hat\alpha}$. Calculer de deux manières $\lim_r \frac{1}{r^2}\theta^\alpha_\beta(ry)$ pour obtenir le tenseur de courbure à l'origine

(*) $$\frac{1}{2}R^\alpha_{\beta\lambda\mu}(0) = D_{\hat\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}(0) \quad (\text{dérivée p.r. à la coordonnée } x^{\hat\lambda})$$

2) On rappelle l'antisymétrie en λ,μ. Montrer que $R^\alpha_{\beta\lambda\mu}=-R^\beta_{\alpha\lambda\mu}$. Montrer que le sens intrinsèque de cette relation est que, si l'on pose

$$K(X,Y\ ;Z,T) = (X,R(Z,T)Y) \quad (=K_{\alpha\beta\lambda\mu}x^\alpha y^\beta z^\lambda t^\mu,\ K_{\alpha\beta\lambda\mu}=g_{\alpha\varepsilon}R^\varepsilon_{\beta\lambda\mu}\ )$$

(tenseur de Riemann-Christoffel), K est antisymétrique en (Z,T).

3) Vérifier l'identité de Bianchi $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$ (dans le repère à l'origine, cela s'écrit

$$R^\alpha_{\varepsilon\lambda\mu}(0)+R^\alpha_{\lambda\mu\varepsilon}(0)+R^\alpha_{\mu\varepsilon\lambda}(0) = 0$$

déduire cela de la relation $y^{\hat{\lambda}}y^{\hat{\mu}}\Gamma^{\varepsilon}_{\lambda\mu}(ry)=0$ (120), dérivée en r et écrite pour $r=0$.

4)(moins important et plus compliqué) : déduire des deux antisymétries vues pour $K(X,Y;Z,T)$ et de l'identité de Bianchi que $K(X,Y;Z,T)=K(Z,T;X,Y)$.

Passage en coordonnées polaires. Nous continuons à poser $x=ry$, mais cette fois y va varier sur une sphère euclidienne de $\mathbb{R}^{\nu}$ - la sphère unité par exemple - tandis que r variera entre $-c$ et c, parfois entre 0 et c. Les différentielles dy^i seront donc liées par la relation $\Sigma_i\, y^i dy^i=0$. Pour pouvoir continuer à omettre les Σ , nous identifierons $\mathbb{R}^{\nu}$ à son dual par le produit scalaire euclidien, de sorte que nous pouvons écrire $y^i=y_i$, $dy^i=dy_i$ à volonté (coordonnées cartésiennes seulement).

La première équation (122) nous donne alors

$$y_{\hat{\alpha}}D_r\theta^{\alpha} = y_{\hat{\alpha}}dy^{\hat{\alpha}} + y_{\hat{\alpha}}y^{\beta}\theta^{\alpha}_{\beta} = 0$$ (le premier terme par la relation précédente, le second par antisym.)

Comme la valeur à l'origine est nulle, on a

$$y_{\hat{\alpha}}\theta^{\alpha}(ry,dy) = 0 \tag{123}$$

Considérons ensuite un vecteur tangent à $\mathbb{R}\times S^1$, de coordonnées dr,dy^i ; par l'application $(r,y)\longmapsto ry$ il lui correspond un vecteur tangent u au point $x=ry$ de V, de coordonnées $dx^i=rdy^i+y^i dr$. Calculons la longueur riemannienne de u :

$$\|u\|^2_{ry} = \Sigma_{\alpha}\, \omega^{\alpha}(x,u)^2 = \Sigma_{\alpha}\, \overset{*}{\omega}{}^{\alpha}(x,dr,dy)^2 = \Sigma_{\alpha}\, (y^{\hat{\alpha}}dr+\theta^{\alpha}(ry,dy))^2 \tag{124}$$

$$= dr^2 + \Sigma_{\alpha}\, \theta^{\alpha}(ry,dy)^2 \quad \text{d'après (123).}$$

Courbure sectionnelle, et application fondamentale. Considérons un plan $P\subset T_x(V)$, et choisissons deux vecteurs X,Y engendrant P, orthogonaux et unitaires (au sens riemannien). Alors les propriétés d'antisymétrie de K entraînent que $k(X,Y)=K(X,Y;X,Y)$ ne dépend que de P, non de X et Y. On l'appelle la courbure sectionnelle de V en x suivant P. La variété

V est dite à courbure négative si $k(X,Y)\leqq 0$ en tout point et suivant tout plan.

Considérons un vecteur tangent v à la sphère unité, au point y, de composantes $dy^i=v^i$ ($y_i v^i=0$). Le vecteur tangent $u=rv$ au point $x=ry$ a des composantes dans le repère $H_{\alpha}(x)$

$$u^{\alpha} = rv^i a^{\alpha}_i(rx) = \theta^{\alpha}(ry,v)$$

Voici le lemme fondamental :

LEMME. Si V est à courbure négative, pour y et v fixés la fonction $r\mapsto\|rv\|_{ry}$ est convexe.

Démonstration. On utilise un lemme élémentaire : si $r\mapsto z(r)$ est une courbe dans $\mathbb{R}^{\nu}$ (r joue simplement le rôle d'un paramètre), et si $z(r)\cdot\ddot{z}(r)\geqq 0$, alors $r\longmapsto |z(r)|$ est convexe. On l'applique à $z(r)=\theta^{\alpha}(ry,v)e_{\alpha}$ (repère e_{α} fixe) de sorte que $|z(r)|=\|rv\|$.

D'après (122) :

$$\dot{z}^{\alpha}(r) = dy^{\alpha}+y^{\beta}\Theta^{\alpha}_{\beta}(ry,dy) \ , \ \ddot{z}^{\alpha}(r) = y^{\beta}R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}y^{\lambda}\Theta^{\mu}(ry,dy)$$

$$z(r).\ddot{z}(r) = \Sigma_{\alpha}\ R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\Theta^{\alpha}y^{\beta}y^{\lambda}\Theta^{\mu} = K(u,y,y,u)=-K(u,y;u,y)$$

(y étant considéré ici comme vecteur tangent radial au point x). Les vecteurs u et y sont orthogonaux, le premier de norme riemannienne $\|rv\|$, le second de norme riemannienne 1 (puisqu'il a aussi pour composantes y^{α} dans le repère orthonormé $H_{\alpha}(x)$). Ainsi

(125) $\quad z(r).\ddot{z}(r) = -c(u,y)\|rv\|^2$ où c(u,y) est la courbure sectionnelle suivant le plan déterminé par u,y en x .

REMARQUE. Si l'on s'intéresse à $\|rv\|^2_{ry} = \Sigma_{\alpha}\ \Theta^{\alpha}(ry,v)^2$, on a le résultat tout à fait évident

(126) $$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}\|rv\|^2_{ry} = \dot{z}(r)^2+z(r).\ddot{z}(r) \geqq -c_{ry}(u,y)\,\|rv\|^2_{ry}$$

APPLICATION. Ce résultat a beaucoup d'applications géométriques. Signalons en une : la fonction $r\mapsto\|rv\|_{ry}$ est convexe, nulle pour r=0, et sa dérivée à l'origine est $\lim_r \frac{1}{r}\|\Theta^{\alpha}(ry,v)\| = |v|$ (121). Donc $\|rv\|\geqq|rv|$. Ce résultat s'étend par (124) à un vecteur tangent quelconque au point x. Donc <u>la longueur riemannienne d'une courbe est toujours supérieure à sa longueur euclidienne</u> en coordonnées normales (si V est à courbure ≤ 0).

e) <u>Application probabiliste</u>.

Pour simplifier, <u>nous supposons maintenant que</u> $V=\mathbb{R}^{\nu}$ <u>entier</u>, avec une structure riemannienne à courbure négative pour laquelle les droites issues de 0 sont des géodésiques. La coordonnée polaire r est alors, d'après l'application précédente, la distance à l'origine, au sens riemannien aussi bien qu'euclidien. Décalquant une démonstration d'Helgason, p.72-73, nous prouvons :

PROPOSITION. <u>Soit</u> (X_t) <u>une martingale à valeurs dans la variété riemannienne</u> V, <u>ne passant jamais par</u> 0. <u>Alors</u> $|X_t|$ <u>est une sousmartingale locale au sens usuel</u> (i.e. $|X_t|$= martingale locale + processus croissant).

En particulier, soit $s\mapsto h(s)$ une géodésique ($s\in[0,a]$) et soit b_t le mouvement brownien sur l'intervalle [0,a] (arrêté aux extrémités). On vérifie sans aucune peine que le processus $h(b_t)$ à valeurs dans V est une martingale. Donc $|h(b_t)|$ est une sous-martingale locale ; comme c'est aussi l'image du m^{vt} brownien sur [0,a] par une application C^{∞}, sa partie martingale est une vraie martingale, et c'est une vraie sousmartingale. Cela signifie que la fonction $s\mapsto|h(s)|$ est convexe sur [0,a].

<u>Démonstration</u>. Nous représentons X_t en coordonnées polaires $X_t=R_tY_t$, les deux termes étant des semimartingales puisque X ne passe pas par 0. Posons $Z^{\alpha}_t = (\Gamma)\int_{X_0}^{X_t}\omega^{\alpha}$, au sens d'Ito, donc Z^{α} est une martingale locale réelle. Il en est alors de même de $M_t = \sum_{\alpha}\int_0^t Y^{\alpha}_s dZ^{\alpha}_s$. Calculons ceci d'une autre

manière. M_t est l'intégrale le long de X de la forme du second ordre $\Sigma_\alpha\ y^\alpha(d\omega^\alpha + \omega^\alpha_\beta.\omega^\beta)$ (1). Passant en polaires, M_t est intégrale le long de (R,Y) de la forme $\Sigma_\alpha\ y^\alpha(\ d(y^\alpha dr+\Theta^\alpha) + \Theta^\alpha_\beta.(y^\beta dr+\Theta^\beta))$. Développons en commençant par la gauche :

$\Sigma_\alpha\ y^\alpha dy^\alpha.dr$: donne 0, car $\Sigma_\alpha\ y^\alpha dy^\alpha = 0$ sur la sphère unité.

$\Sigma_\alpha\ y^\alpha y^\alpha d^2r = d^2r$.

$\Sigma_\alpha\ y^\alpha d\Theta^\alpha = -\ \Sigma_\alpha\ \Theta^\alpha.dy^\alpha$ d'après (123)

$\Sigma_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \Theta^\alpha_\beta.dr = 0$, par l'antisymétrie $\Theta^\beta_\alpha+\Theta^\alpha_\beta = 0$

Quant au dernier terme, nous échangeons le nom des indices α,β et remplaçons Θ^β_α par $-\Theta^\alpha_\beta$. Il reste donc finalement

$$M_t\ (\text{ mart. loc. }) = r(X_t)-r(X_0) - \int_{R,Y} \Sigma_\alpha\ \Theta^\alpha.(dy^\alpha+y^\beta\Theta^\alpha_\beta)$$

et il suffit de démontrer que cette dernière intégrale est un processus croissant. Or posons $\Theta^\alpha = ra^\alpha_i(ry)dy^i$ (121), $dy^\alpha+y^\beta\Theta^\alpha_\beta = b_i(r,y)dy^i = D_r\Theta^\alpha$ (122). Fixons y et dy=v ; nous avons

$$\Sigma_\alpha\ ra^\alpha_i(ry)b_j(r,y)v^iv^j = \tfrac{1}{2}D_r(\ \Sigma_\alpha\ \Theta^\alpha(ry,v)^2\ ) = \tfrac{1}{2}D_r\|rv\|^2_{ry}$$

Pour la clarté des notations, posons

$$\|rv\|^2_{ry} = p_{ij}(r,y)v^iv^j\quad ,\quad D_r\|rv\|^2_{ry} = q_{ij}(r,y)v^iv^j$$

Le processus auquel nous nous intéressons est

$$(*)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^t q_{ij}(R_s,Y_s)d\langle Y^i,Y^j\rangle_s$$

Commençons par démontrer simplement l'énoncé, i.e. le fait que ce processus est croissant. Nous savons (lemme de convexité) que la fonction $r\mapsto\|rv\|_{ry}$ est convexe positive nulle en 0, donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc son carré est une fonction croissante, et en dérivant

$$q_{ij}(r,y)v^iv^j \geqq 0 \quad \text{pour tout vecteur } v \text{ tel que } \Sigma_i\ y^iv^i=0$$

On a alors aussi, pour toute forme quadratique positive λ telle que $\Sigma\ \lambda^{ij}y^iy^j=0$

$$q_{ij}(r,y)\lambda^{ij} \geqq 0$$

(décomposer λ en sommes de carrés). Alors (*) est croissant : introduire des densités λ^{ij}_s de $d\langle Y^i,Y^j\rangle_s$ par rapport à un processus croissant fixe ; comme $\Sigma_i\ Y^{i2}_s=1$, $\Sigma_i\ Y^i_s dY^i_s$ est à variation finie, donc son crochet est nul, et on a $\Sigma_{ij}\ Y^i_sY^j_s d\langle Y^i,Y^j\rangle_s = 0$.

<u>Amélioration</u> (Selon Azencott, Bull. SMF, t. 102, 1974, p.221). Nous commençons par étendre le lemme de convexité : si λ est une forme comme ci-dessus, la fonction $f(r) = (\ p_{ij}(r,y)\lambda^{ij})^{1/2}$ est convexe croissante. Ce n'est pas difficile : on décompose λ en somme de m carrés, et on revient à la démonstration du lemme, en prenant le vecteur z(r) dans $\mathbb{R}^{m\nu}$ au lieu de $\mathbb{R}^\nu$ afin d'interpréter f(r) comme sa norme $|z(r)|$. Ceci étant établi, on a

$f(r) \leqq rf'(r)$, ce qui s'écrit ici

$$q_{ij}(r,y)\lambda^{ij} \geqq 2rp_{ij}(r,y)\lambda^{ij}$$

Autrement dit, le processus croissant (*) est minoré par

$$\int_0^t R_s p_{ij}(R_s,Y_s)d\langle Y^i,Y^j\rangle_s$$

Or on a d'après (124), si $y^i = rdt$, $\Sigma_i\ y^{i2}=1$

$$g_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2 p_{ij}(r,y)dy^i dy^j$$

et il reste finalement que

$$R_t = R_0 + M_t + \int_0^t \frac{1}{R_s}(g_{ij}(X_s)d\langle X^i,X^j\rangle_s - d\langle R,R\rangle_s) + A_t$$

où A_t est un processus croissant.

Lorsque X est le mouvement brownien de V, il n'est pas difficile de voir que M est un mouvement brownien réel , donc $\langle M,M\rangle_t = \langle R,R\rangle_t = t$, et R_t est solution de l'équation différentielle stochastique

$$R_t = R_0 + M_t + A_t + \int_0^t \frac{(\nu-1)ds}{R_s}$$

tandis que la partie radiale du mouvement brownien usuel dans $\mathbb{R}^\nu$ satisfait à une équation analogue, mais sans A_t. Il est alors possible de montrer que le mouvement brownien de V "s'éloigne plus vite" que celui de $\mathbb{R}^\nu$ - mais nous n'entrerons pas dans ce sujet.

Nous avons admis implicitement que le mouvement brownien de V ne passe jamais par l'origine, i.e. que les points sont polaires. Je pense qu'avec un peu plus de travail on doit pouvoir affranchir la proposition du début du paragraphe de cette hypothèse gênante.

Note (Novembre 1980). La rédaction est interrompue par la date limite de dépôts des manuscrits pour le volume XV . En particulier, diverses questions qui figuraient dans les rédactions préliminaires n'ont pu être abordées dans celle-ci. J'espère qu'il y aura une suite...

REFERENCES.

1. Géométrie différentielle

Pour la géométrie différentielle usuelle, nous renvoyons à la première édition de

HELGASON (S.). Differential Geometry and Symmetric Spaces. Acad. Press 1962.

Pour la géométrie différentielle du second ordre, il y a une littérature considérable, mais inabordable pour les probabilistes (en tout cas, pour moi). Je me bornerai donc à deux références qui m'ont été utiles.

DOMBROWSKI (P.). Geometry of the tangent bundle. J. Reine Angew. Math. 210, 1962, p. 73-88.

GRIFONE (J.). Structure presque-tangente et connexions. Ann. Inst. Fourier, 22-1, 1972, p. 287-344.

Je ne crois pas que les géomètres différentiels aient jamais étudié les formes d'ordre 2, et encore moins d'ordre >2. Pourtant elles existent. puisque j'ai écrit dessus un gros papier (pour me débarrasser du sujet[1]).

2. Géométrie différentielle stochastique

BISMUT (J.). [1]. Principes de mécanique aléatoire. A paraître.

----------- [2]. Notes aux CR, t. 290, 1980 : Formulation géométrique du calcul d'Ito, relèvement de connexions et calcul des variations (p.427-429) ; Flots stochastiques et formule d'Ito-Stratonovich généralisée (p. 483-486) ; Intégrales stochastiques non monotones et calcul différentiel stochastique (p. 625-628).

--- [3]. A generalized formula of Ito on stochastic flows. Prepubl. Orsay, Mars 1980.

--- [4]. Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander conditions. A paraître, Proceedings of the LMS Symposium on stochastic differential equations, Durham, Juillet 1980 (LN in Math. ?).

DYNKIN (E. B.). Diffusion of tensors. Dokl. A.N. SSSR, 179,1968 . Traduction anglaise, 9, 1968, p. 532-535.

IKEDA (N.) et MANABE (S.). Integral of differential forms along paths of diffusion processes. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15, 1979, p. 827-852.

IKEDA (N.) et WATANABE (S.). Stochastic differential equations and diffusion processes. A paraître.

ITO (K.). [1]. The brownian motion and tensor fields in riemannian geometry. Proc. Int. Congress Math., Stockholm 1962, p. 536-539.

--- [2]. Stochastic parallel displacement. Proc. Victoria Conf. 1974, LN 451, p. 1-7.

1. Formes différentielles d'ordre n>1. Non publié !

MALLIAVIN (P.). [1]. Géométrie différentielle stochastique. Presses de l' Université de Montréal, 1978.

--- [2]. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proc. Int. Conf. on SDE, Kyoto, 1976, p. 195-263 (distr. Wiley, 1978).

--- [3]. Notes aux CRAS, Paris. Paramétrix trajectorielle pour un opérateur hypoelliptique et repère mobile stochastique (t.281, 1975, p. 241). Un principe de transfert et son application au calcul des variations (t.284, 1977, p. 187). Champs de Jacobi stochastiques (t. 285, 1977, p. 789).

SCHWARTZ (L.). [1]. Semimartingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in M. 780, 1980.

--- [2]. Articles à paraître. (titre provisoire : Equations différentielles stochastiques sur des variétés. Relèvements des éq. diff. stoch. et des semimartingales par des connexions).

TAYLOR (J.C.). Some remarks on Malliavin's comparison lemma and related topics. Sem. Prob. XII, 1978, p. 446-456, LN. 649.

YOR (M.). [1]. Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens. Bull. SMF 105, 1977, p. 3-31.

---. [2]. Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. Sém. Prob. XI, 1977, p. 518-528.