SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLAS BOULEAU

Propriétés d’invariance du domaine du générateur infinitésimal étendu d’un processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 167-188
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__167_0>

PROPRIETES D'INVARIANCE DU DOMAINE DU GENERATEUR INFINITESIMAL ETENDU D'UN PROCESSUS DE MARKOV

par N.BOULEAU

Alors qu'on ne connaît pas pour les domaines des générateurs infinitésimaux au sens fort des semigroupes de Feller de propriétés algébriques remarquables, H.KUNITA [6] a montré l'intérêt à cet égard d'une définition du générateur en un sens plus faible, qui permet en outre d'appliquer les méthodes du calcul intégral stochastique. Une définition voisine, mais qui restitue à la mesure dt sur $\mathbb{R}_+$ le rôle particulier qui apparaît si l'on considère les résolvantes, et que nous adopterons dans le présent travail, a été introduite par P.A.MEYER dans son étude de l'opérateur carré du champ [9] où il montre que le domaine étendu ainsi défini est une algèbre si et seulement si le processus est de type Lebesgue[(1)] (c'est à dire s'il admet la fonctionnelle $K_t \equiv t$ comme fonctionnelle additive canonique) et qu'alors cette algèbre est stable par les fonctions de classe C^2. Cette étude a été reprise ensuite et certains de ses résultats améliorés par G.MOKOBODZKI [15] et D.FEYEL [5] par des méthodes de théorie du potentiel. Nous nous proposons de poursuivre ici l'étude initiée en [9] en montrant que les méthodes probabilistes et particulièrement la théorie des temps locaux des semimartingales sont susceptibles de donner des résultats sensiblement plus fins qui confirment, par les propriétés d'invariance obtenues, l'intérêt de cette notion de générateur étendu.

La première partie est consacrée à l'étude de la stabilité du domaine étendu par composition avec une application. Nous montrons que le processus est de type Lebesgue dès que son domaine étendu contient une algèbre dense (nouvelle démonstration d'un résultat de [15]) ou dès que son domaine étendu est stable par composition avec une fonction différence de fonctions convexes non affine. De plus, si parmi les fonctions qui opèrent sur le domaine étendu existe une fonction convexe dont la dérivée à gauche n'est pas absolument continue (en particulier si les fonctions de classe C^1 opèrent), le processus est (de type Lebesgue et) sans diffusion.

La deuxième partie concerne l'invariance du domaine étendu par changement absolument continu de probabilité, c'est à dire par les transformations par fonctionnelles multiplicatives martingales locales. Il résulte des travaux cités de KUNITA que le domaine étendu est invariant par de telles transfor-

---

(1) P.A.MEYER utilise dans [9] la dénomination "processus de Lévy".

mations si le processus est de type Lebesgue. L'introduction d'un certain type de fonctionnelles multiplicatives martingales locales qui ne font pas intervenir le système de Lévy du processus et pour lesquelles est possible la détermination explicite du domaine étendu du processus transformé, nous permet de montrer que réciproquement si le domaine étendu est invariant par de telles transformations, le processus est de type Lebesgue.

PREMIERE PARTIE

§1. LE GENERATEUR INFINITESIMAL ETENDU

On considère un semigroupe droit (P_t) au sens de [12] d'espace d'état E, de résolvante $(U_p)_{p>0}$. On adopte les notations usuelles pour les tribus et le processus $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t, X_t, P^\mu)$. $\underline{\underline{E}}^*$ est la tribu des sousensembles universellement mesurables de E, on pose $\underline{\underline{F}}_t^{o*} = \sigma\{f(X_s) : 0 \leq s \leq t,\ f \in b\underline{\underline{E}}^*\}$; $\underline{\underline{F}}_t^\mu$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t^{o*}$ et les ensembles $(\underline{\underline{F}}_\infty^{o*}, P^\mu)$-négligeables. On note $\underline{\underline{F}}_t^x$ pour $\underline{\underline{F}}_t^{\varepsilon_x}$.

I.1.<u>Définition</u>. <u>Le générateur infinitésimal étendu</u> (A, DA) <u>de</u> (P_t) <u>est défini par</u> : $u \in DA$ <u>et</u> Au=v <u>si et seulement si</u>

a) $u \in b\underline{\underline{E}}^*$,

b) v <u>est</u> $\underline{\underline{E}}^*$<u>-mesurable telle que</u> $U_p|v|$ <u>soit bornée pour un</u> p>0 (donc pour tout p>0),

c) <u>pour tout</u> p>0 $u = U_p(pu-v)$.

On montre facilement que si u et v vérifient les conditions a) et b), la condition c) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

c') pour tout $x \in E$, $C_t^u = u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t v(X_s)\,ds$ est une $(\underline{\underline{F}}_t^x, P^x)$-martingale de carré intégrable au sens large ($E^x[(C_t^u)^2] < \infty$ $\forall t < \infty$) localement bornée

c") C_t^u est une $(\underline{\underline{F}}_t^x, P^x)$-martingale locale pour tout $x \in E$.

Il résulte aisément de la condition c') que la fonction v est déterminée de façon unique à un ensemble de potentiel nul près, ce qui fait de A une application de son domaine DA dans l'ensemble des classes de fonctions $\underline{\underline{E}}^*$-mesurables égales presque partout. On peut d'ailleurs d'après [13] définir cette application sur son domaine DA par la formule explicite

$$Au = \lim_{n\uparrow\infty} n(u - nU_n u)$$

et même (cf. [14], [1]) par

$$Au = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t u - u)$$

limites qui existent presque partout et vérifient la condition b).

Exemples. Pour le processus de la translation uniforme (droite ou gauche) sur $\mathbb{R}$, DA est constitué des fonctions u bornées absolument continues dont la dérivée de Lebesgue v est telle que $\int_n^{n+1} |v(x)|\, dx$ soit borné pour $n \in Z$.

Pour le mouvement brownien linéaire, DA est constitué des fonctions bornées primitives secondes de fonctions $v \in L^1_{loc}$ telles que $\int_n^{n+1} |v(x)|\, dx$ soit borné pour $n \in Z$.

Notons que DA est un espace vectoriel qui contient les constantes et rappelons le résultat suivant de MEYER [9] qui justifie la dénomination de processus de type Lebesgue lorsque DA est une algèbre.

I.2.Théorème. DA est une algèbre si et seulement si, pour toute loi μ sur E, pour toute M $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t, \mathbb{P}^{\mu})$-martingale de carré intégrable, la mesure aléatoire $d\langle M,M\rangle_t$ sur $\mathbb{R}_+$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dt.

Remarques 1) La plupart des résultats de cette étude serait valable (avec des démonstrations légèrement plus simples) en prenant (comme en [4] §7a) la définition suivante du générateur étendu

i) $u \in b\underline{\underline{E}}^*$

ii) v est $\underline{\underline{E}}^*$-mesurable telle que $\int_0^t |v|(X_s)\, ds < \infty$ $\mathbb{P}^x$p.s. $\forall x \in E$ $\forall t < \infty$

iii) condition c").

Mais il nous paraît plus intéressant d'obtenir ces résultats avec la définition (I.1) étant donnée la simplicité de l'expression du lien entre u et v au moyen de la résolvante par la condition c).

2) Les méthodes de cette étude consistant à appliquer aux processus de Markov des techniques de calcul intégral stochastique, il eût été possible d'utiliser les tribus optionnelle et prévisible au sens de SHARPE et les résultats de [17] [11] et [4] qui permettent de définir les projections, les projections duales et l'intégration stochastique pour toutes les mesures $\mathbb{P}^{\mu}$ à la fois. Cependant comme nous n'utilisons qu'en deux endroits ces résultats, afin de ne pas alourdir l'exposé par des définitions et des rappels, nous raisonnons le plus souvent sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^x_t, \mathbb{P}^x)$ pour chaque x.

§2. PROCESSUS DE TYPE LEBESGUE

Fixons quelques notations. Nous raisonnons sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^x_t, \mathbb{P}^x)$ pour chaque $x \in E$. Si $u_1,\dots,u_d$ sont des éléments de $b\underline{\underline{E}}^*$, on note $\bar{u}$ l'application à valeurs $\mathbb{R}^d$ $\bar{u} = (u_1,\dots,u_d)$ et on écrira $\bar{u} \in DA$ pour dire $u_1,\dots,u_d \in DA$, on note dans ce cas Y_t la semimaringale à valeurs $\mathbb{R}^d$

$$\bar{u}(X_t) = (u_1(X_0)+C_t^{u_1}+\int_0^t Au_1(X_s)ds \;,\dots,\; u_d(X_0)+C_t^{u_d}+\int_0^t Au_d(X_s)ds \;).$$

Notons que Y prend ses valeurs dans un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$.

Si G est une fonction de classe C^2 ou convexe de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, nous écrirons la formule d'Ito sous la forme

$$(I.3)\qquad G(Y_t) = G(Y_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_{]0,t]} G'_i(Y_{s-})\, dY_s^i + K_t(G,Y)$$

où K(G,Y) est un processus à variation finie (croissant si G est convexe) donné par $K(G,Y) = C(G,Y) + B(G,Y)$ avec

$$(I.4)\qquad B_t(G,Y) = \sum_{0<s\leq t} G(Y_s) - G(Y_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} G'_i(Y_{s-})\, \Delta Y_s^i$$

et où C(G,Y) est un processus à variation finie continu, donné si G est de classe C^2 par

$$(I.5)\qquad C_t(G,Y) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t G''_{ij}(Y_s)\, d\langle Y^{ic}, Y^{jc}\rangle_s.$$

I.6.__Lemme__. __Si__ G __est convexe de classe__ C^1 __sur__ $\mathbb{R}^d$ __et si__ $\bar{u} \in DA$, __pour que__ $G\circ\bar{u} \in DA$, (__il faut et) il suffit que pour tout__ $x \in E$ K(G,Y) __admette un compensateur absolument continu__.

__Démonstration__. La nécéssité résulte immédiatement de la formule (I.3) et de la définition (I.1) condition c').

Supposons réciproquement que pour tout $x \in E$ K(G,Y) admette un compensateur absolument continu. Ainsi défini par l'équation (I.3) le processus K(G,Y) dépend de x, mais d'après les faits suivants

– les C^{u_i} sont des fonctionnelles additives martingales locales au sens de [11]

– les processus $G'_i(Y_-)$ sont homogènes sur $]\!]0,\infty[\![$ car les fonctions u_i étant des différences de p-potentiels bornés on a $Y_- = \bar{u}(X_-)$,

il résulte de l'équation (I.3) et du théorème 6 de [11] qu'il existe une version de K(G,Y) optionnelle au sens de Sharpe qui est une fonctionnelle additive croissante, et dont la projection prévisible duale au sens de Sharpe que nous noterons $K^p(G,Y)$ est une fonctionnelle additive croissante qui est, pour tout $x \in E$, une version de la projection prévisible duale de K(G,Y) relativement à $(\underline{\underline{F}}_t^x, \mathbb{P}^x)$.

On a alors d'après le theorème des densités relatives de MOTOO

$$K_t^p(G,Y) = \int_0^t \varphi(X_s)\, ds \qquad \text{où } \varphi \in \underline{\underline{E}}_+^*.$$

Pour montrer que $G\circ\bar{u} \in DA$ il suffit donc d'après la définition (I.1) condition c") de montrer que $U_p\varphi$ est bornée pour un p>0. Or ceci est toujours réalisé en effet :

$$(I.7)\qquad U_p\varphi(x) = \mathbb{E}^x[\int_0^\infty e^{-ps}\, (X_s)ds] = \int_0^\infty pe^{-pt}\, \mathbb{E}^x[\int_0^t (X_s)ds]\,dt$$

et d'après l'équation (I.3)

$$\mathbb{E}^x[\int_0^t \varphi(X_s)ds] = \mathbb{E}^x[K_t(G,Y)] \leq$$

$$\leqslant 2\|G\circ\bar{u}\|_\infty+\sum_{i=1}^d \mathbb{E}^x\left|\int_{]0,t]} G_i'(Y_{s-})dC_s^{u_i}\right| + \sum_{i=1}^d \mathbb{E}^x\left|\int_0^t G_i'(Y_s)Au_i(X_s)ds\right|,$$

des majorations

$$\mathbb{E}^x\left|\int_{]0,t]} G_i'(Y_{s-})dC_s^{u_i}\right| \leqslant \|\ .\ \|_{H_1} \leqslant \|G_i'\circ\bar{u}\|_\infty \quad \mathbb{E}^x\{[C^{u_i},C^{u_i}]_t^{1/2}\}$$

$$\mathbb{E}^x\{[C^{u_i},C^{u_i}]_t^{1/2}\} \leqslant 5\mathbb{E}^x[(C^{u_i})_t^*] \leqslant 10\|u_i\|_\infty + 5\mathbb{E}^x[\int_0^t |Au_i(X_s)|\,ds]$$

on déduit donc

(I.8) $\quad \mathbb{E}^x[\int_0^t \varphi(X_s)ds] \leqslant k_1+k_2\sum_{i=1}^d \mathbb{E}^x[\int_0^t |Au_i(X_s)|\,ds]$

où les constantes $k_1$et k_2 ne dépendent que de G et de $\bar{u}$.

D'où d'après (I.7)

$$U_p\varphi \leqslant k_1+k_2\sum_{i=1}^d U_p\,|Au_i|$$

d'où le lemme puisque les u_i sont dans DA.

(I.9) Remarque. Nous avons montré en [3] que la formule (I.3) s'étend au cas où G est une fonction convexe quelconque sur $\mathbb{R}^d$ si on remplace les G_i' par les composantes d'une pseudo-dérivée de G. Il est facile de voir que le lemme I.6 s'étend alors aux fonctions convexes quelconques, la démonstration s'appliquant sans changement.

Si A_1 et A_2 sont deux processus croissants (càd adaptés nuls en zéro) nous dirons que A_1 est fortement majoré par A_2 et nous noterons $A_1 \prec A_2$ si A_2-A_1 est un processus croissant. Le lemme suivant est évident.

I.10.<u>Lemme</u>. <u>Si deux processus croissants sont tels que</u> $A_1 \prec A_2$ <u>et si</u> A_2 <u>admet un compensateur prévisible absolument continu, il en est de même de</u> A_1.

La proposition suivante (dont la démonstration n'utilise pas le noyau de Lévy et ne fait aucune hypothèse quant à la quasi-continuité à gauche des tribus $\underline{\underline{F}}_t^\mu$) reprend le théorème 2 de [9] et les résultats de [15].

I.11.<u>Proposition</u>. <u>Soit</u> F <u>une fonction réelle de classe</u> $C^2(\mathbb{R})$ <u>telle que</u> $F''>0$,

<u>posons</u> $H = \{u \in DA\ :\ F\circ u \in DA\}$, <u>et</u> $H' = \{u \in DA\ :\ \forall x \in E\quad d^{\mathbb{P}^x}\langle C^u,C^u\rangle_t \ll dt\}$.

<u>Alors</u>

1) $\quad H = H'$

2) $\quad$ H <u>est la plus grande algèbre contenue dans</u> DA <u>et est stable par les fonctions de</u> $\mathbb{R}^d$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>de classe</u> C^1 <u>à dérivées localement lipschitziennes</u>;

3) $\quad$ <u>fixons un</u> $p>0$, <u>si</u> $u \in DA$ <u>et si</u> $\quad pu-Au \in \bigcap_{x\in E} \overline{(pI-A)H}^{\,L^1(\varepsilon_x U_p)}$,

<u>alors</u> $u \in H$;

4) $\quad$ <u>si le noyau potentiel</u> U <u>est tel que</u> $U1<\infty$, <u>alors la propriété</u> 3) <u>est vraie</u> pour $p=0$.

<u>Démonstration</u>. 1) a) Montrons que $H\subset H'$. Soit $u\in H$, on raisonne sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t^x,P^x)$ pour chaque x. Dans la formule d'Ito (I.3) appliquée à la fonction F et à la semimartingale $Y=u(X)$, le processus $K(F,Y)$ est croissant. Le fait que $F\circ u\in DA$ entraîne alors que $K(F,Y)$ admet un compensateur prévisible absolument continu. Comme $F''\geq k>0$ sur $[-\|u\|_\infty,\|u\|_\infty]$, on a

$$2K(F,Y)\succ k(\langle Y^c,Y^c\rangle+\sum_{0<s\leq .}\Delta Y_s^2)=k[C^u,C^u]$$

d'où l'assertion par le lemme (I.10).

b) Si $u\in DA$ et $v\in DA$, on a $u+v\in DA$ et $C^{u+v}=C^u+C^v$. Il résulte alors de l'inégalité de Kunita-Watanabe trajectorielle que H' est un espace vectoriel. En effet

$$\langle C^{u+v},C^{u+v}\rangle=\langle C^u,C^u\rangle+2\langle C^u,C^v\rangle+\langle C^v,C^v\rangle$$

et si R est un processus mesurable on a

$$\int_0^t|R_s|\,|d\langle C^u,C^v\rangle_s|\leq(\int_0^t R_s^2\,d\langle C^u,C^u\rangle_s)^{1/2}\,(\langle C^v,C^v\rangle_t)^{1/2}$$

d'où il résulte que $d\langle C^u,C^v\rangle_t\ll dt$.

c) Soit G une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 à dérivées localement lipschitziennes, montrons que si $u_1,\ldots,u_d\in H'$ et $\bar{u}=(u_1,\ldots,u_d)$ alors $G\circ u\in DA$.

Sur toute boule de $\mathbb{R}^d$ G peut s'écrire comme différence de fonctions convexes à dérivées lipschitziennes, puisque l'application

$$(x_1,\ldots,x_d)\longrightarrow G(x_1,\ldots,x_d)+k(x_1^2+\ldots+x_d^2)$$

est convexe sur la boule pour k suffisamment grand. On est donc ramené au cas où G est convexe.

Régularisons G par des fonctions $\alpha_n\in\mathcal{D}$ positives d'intégrale 1 dont les supports tendent uniformément vers l'origine, en posant $G_n=G*\alpha_n$.

Les fonctions G_n sont convexes de classe C^2 et, sur une boule contenant l'image de la semimartingale $Y=\bar{u}\circ X$, leurs dérivées secondes sont uniformément majorées par une constante k constante de Lipschitz des dérivées G_i' sur une boule suffisamment grande.

Appliquons la formule d'Ito (I.3) aux G_n et à la semimartingale Y. Lorsque $n\uparrow\infty$, $G_n(Y_t)$, $G_n(Y_0)$, et les intégrales stochastiques $\int_{]0,t]}(G_n)_i'(Y_{s-})\,dY_s^i$ convergent en probabilité respectivement vers $G(Y_t)$, $G(Y_0)$, $\int_{]0,t]}G_i'(Y_{s-})dY_s^i$ et donc les processus croissants $K(G_n,Y)$ convergent également vers un processus qui, régularisé à droite est un processus croissant qui n'est autre que $K(G,Y)$, (c'est ainsi qu'on établit l'existence de $K(G,Y)$).

Or les processus $K(G_n,Y)$ sont fortement majorés, et donc $K(G,Y)$ également, par le processus croissant

$$\frac{k}{2}\sum_{i,j}(\langle Y^{ic},Y^{jc}\rangle+\sum_{0<s\leq .}\Delta Y_s^i\Delta Y_s^j)=\frac{k}{2}\sum_{i,j}[C^{u_i},C^{u_j}]=\frac{k}{2}[C^{u_1+\ldots+u_d},C^{u_1+\ldots+u_d}]$$

qui, puisque $u_1+\ldots+u_d\in H'$ d'après le b), admet un compensateur prévisible absolument continu. Il résulte alors du lemme (I.6) que $G\circ\bar{u}\in DA$.

d) La démonstration du 1) et du 2) de la proposition est alors immédiate : Si nous appliquons le c) à la fonction $F\circ G$ qui est à dérivées localement lipschitziennes, nous voyons que $F\circ G\circ\bar{u}\in DA$ et donc $G\circ\bar{u}\in H$. Il en résulte que H est stable par les fonctions à dérivées localement lipschitziennes et est donc une algèbre. Il en résulte aussi que H=H' et H ne dépend donc pas de la fonction F donc $H = \{u\in DA \ : \ u^2\in DA\}$ et H est la plus grande algèbre contenue dans DA.

2) Soit u vérifiant les hypothèses du point 3) de la proposition, pour montrer que $u\in H$ il suffit d'après ce qui précède de montrer que pour tout $x\in E$,

$$d^{\mathbf{P}^x}\langle C^u, C^u\rangle_t \ll dt.$$

Fixons $x\in E$ et $p>0$.

a) Posons $v=pu-Au$ de sorte que $u=U_p v$ et soient $u_n\in H$ telles que les fonctions $v_n=pu_n-Au_n$ tendent vers v dans $L^1(\varepsilon_x U_p)$. Pour tout $(\underline{\underline{F}}^x_t)$-temps d'arrêt T borné, mettons par t_o, on a $C_T^{u_n}\longrightarrow C_T^u$ dans $L^1(\mathbf{P}^x)$.

En effet comme

$$C_T^{u_n} = U_p v_n\circ X_T - U_p v_n\circ X_0 + \int_0^T (v_n - pU_p v_n)\circ X_s\, ds$$
$$C_T^{u} = U_p v\circ X_T - U_p v\circ X_0 + \int_0^T (v - pU_p v)\circ X_s\, ds$$

cela résulte immédiatement des inégalités :

$$\mathbf{P}^x[\,|U_p v_n - U_p v|\circ X_T] \leqslant e^{pt_o}\, U_p|v_n - v|(x)$$
$$\mathbf{P}^x[\int_0^T (v_n - v)\circ X_s\, ds] \leqslant e^{pt_o}\, U_p|v_n - v|(x)$$
$$\mathbf{P}^x[\int_0^T pU_p(v_n - v)\circ X_s\, ds] \leqslant p\int_0^{t_o} e^{ps} ds\; U_p|v_n - v|(x).$$

b) Les martingales C^u, C^{u_n} sont de carré intégrable au sens large et à sauts bornés donc localement bornées. Notons $\mathcal{M}^{ac}$ le sousespace stable des martingales de carré intégrable M telles que $d\langle M,M\rangle_t \ll dt$. Soit T un $(\underline{\underline{F}}^x_t)$-temps d'arrêt borné, si $(C^u)^T = M'+M''$ est la décomposition de la martingale arrêtée $(C^u)^T$ sur le sousespace $\mathcal{M}^{ac}$ et son orthogonal, il résulte du lemme I.12 ci-dessous que M' et M'' sont à sauts bornés donc localement bornées. Il découle alors du a) par localisation que M'' et $(C^u)^T$ sont orthogonales et donc que $(C^u)^T\in\mathcal{M}^{ac}$ d'où le résultat.

c) Si $U1<\infty$ on voit facilement que pour tout $u\in DA$, si $Au=-v$ on a $U|v|<\infty$ et $u=Uv$, et le raisonnement ci-dessus s'applique pour p=0.

I.12. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> N <u>une martingale de carré intégrable et soit</u> $N=N_1+N_2$ <u>sa décomposition sur le sousespace stable</u> $\mathcal{M}^{ac}$ <u>et son orthogonal, alors</u> N_1 <u>et</u> N_2 <u>n'ont pas de sauts communs</u>.

Démonstration. Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible ou prévisible tel que $[\![T]\!] \subset \{(\omega,s) : \Delta N_{1s}(\omega) \neq 0\}$. On sait (cf. [10] chapitre II) que la martingale

$$N'_1 = \widehat{N_{1T}\, 1_{\{\cdot \geq T\}}}^{c}$$

est une martingale purement discontinue continue hors de $[\![T]\!]$ et donc telle que $[N'_1,N'_1] = (\Delta N_{1T})^2\, 1_{\{\cdot \geq T\}}$. L'hypothèse $N_1 \in \mathcal{M}^{ac}$ entraîne donc $N'_1 \in \mathcal{M}^{ac}$ (lemme I.10). L'appartenance à $\mathcal{M}^{ac}$ pour les martingales du type N'_1 s'exprime ainsi : Pour tout K prévisible positif,

$$\int_0^\infty K_s\, ds = 0 \text{ p.s. } \Longrightarrow K_T 1_{\{T<\infty\}} = 0 \quad \text{p.s.}.$$

Il en résulte que la martingale

$$N'_2 = \widehat{N_{2T}\, 1_{\{\cdot \geq T\}}}^{c}$$

appartient également au sousespace $\mathcal{M}^{ac}$ donc est orthogonale à N_2, ce qui s'écrit $\mathbb{E}[(\Delta N_{2T})^2\, 1_{\{T<\infty\}}] = 0$. Donc $[\![T]\!] \cap \{(\omega,s) : \Delta N_{2s}(\omega)=0\}$ est evanescent.

On tire immédiatement de la proposition (I.11) les corollaires suivants :

I.13. Corollaire. Si X est de type Lebesgue, (i.e. si DA est une algèbre), DA est stable par les fonctions de classe $C^1(\mathbb{R}^d)$ à dérivées localement lipschitziennes.

I.14. Corollaire. Si une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde strictement positive opère sur DA, X est de type Lebesgue.

I.15. Corollaire. Soit $p>0$, si DA contient une algèbre H_0 telle que $(pI-A)H_0$ soit dense dans $L^1(\varepsilon_x U_p)$ pour tout $x \in E$, alors X est de type Lebesgue. Cette propriété est vraie pour $p=0$ si $U1<\infty$.

Nous allons voir que le corollaire I.14 peut être sensiblement amélioré, pour cela fixons quelques notations relatives aux temps locaux.

Nous nous plaçons toujours sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^x_t, \mathbb{P}^x)$ pour $x \in E$ fixé.

Soit $u \in DA$ et Y la semimartingale $u \circ X$, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit h la fonction sur $\mathbb{R}$

$$h = -1_{]-\infty,a]} + 1_{]a,+\infty[}.$$

On a alors

$$(I.16) \qquad |Y_t - a| = |Y_0 - a| + \int_{]0,t]} h(Y_{s-})\, dY_s + \mathcal{L}^u_t(a)$$

avec

$$\mathcal{L}^u_t(a) = L^u_t(a) + 2 \sum_{0<s\leq t} 1_{[Y_s \wedge Y_{s-}, Y_s \vee Y_{s-}[}(a)\, |Y_s - a|.$$

D'après [18] il existe une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{P}^x$-mesurable ($\mathcal{P}^x$ tribu prévisible de la famille $\underline{\underline{F}}^x_t$) de $L^u(a)$ telle que pour chaque a ce soit un processus croissant continu, nous utiliserons cette version dans la suite.

I.17. Remarque. Nous n'avons pas besoin ici de l'existence (qui ne résulte pas directement de [18] ni de [11]) d'une version $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{P}$-mesurable ($\mathcal{P}$ tribu prévisible au sens de Sharpe) qui soit une fonctionnelle additive et convienne pour toutes les mesures $\mathbb{P}^x$.

Un calcul analogue à celui utilisé dans la démonstration du lemme I.6 donne la majoration

(I.18) $\quad \forall a\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \mathbb{E}^x[\mathcal{L}^u_t(a)] \leqslant 3\|u\|_\infty + 2\mathbb{E}^x\int_0^t|Au(X_s)|\,ds.$

Notons aussi que

(I.19) $\quad$ si $a\notin[-\|u\|_\infty,\|u\|_\infty]$ on a $\mathcal{L}^u(a)=0$.

Si maintenant F est une fonction sur $\mathbb{R}$ différence de deux fonctions convexes de dérivée à gauche F'_g et admettant pour dérivée seconde au sens des distributions la mesure de radon μ, on a la formule d'Ito-Tanaka :

(I.20) $\quad F(Y_t) = F(Y_0) + \int_{]0,t]} F'_g(Y_{s-})\,dY_s + K_t(\mu,Y)$

où

$$K_t(\mu,Y) = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^u_t(a)\,d\mu(a).$$

D'après (I.18) et (I.19) le processus $K(\mu,Y)$ est à variation intégrable sur tout compact.

Il est clair que si μ est telle que $F\circ u\in DA$, on a aussi $G\circ u\in DA$ pour toute primitive seconde G de μ puisque G ne diffère de F que par une fonction affine. Considérons alors l'espace vectoriel $\mathcal{H}^u$ des mesures bornées μ sur $\mathbb{R}$ dont une primitive seconde F est telle que $F\circ u\in DA$. On a alors

(I.21) Lemme. Une mesure bornée μ appartient à $\mathcal{H}^u$ si et seulement si, pour tout $x\in E$, le processus $K(\mu,Y)$ admet un compensateur prévisible absolument continu.

Démonstration. Il résulte en effet de l'équation (I.20) et du théorème 6 de [11] qu'il existe une version de ce compensateur qui est une fonctionnelle additive et la démonstration est alors semblable à celle du Lemme I.6, l'inégalité (I.18) permettant de voir que la condition imposée par la définition (I.1,b) à la densité de Motoo de ce compensateur est toujours réalisée.

(I.22) $\quad$ Il est clair que si μ et ν sont deux mesures positives telles que $\mu\leqslant\nu$ alors si $\nu\in\mathcal{H}^u$ on a aussi $\mu\in\mathcal{H}^u$. Mais la propriété qui sera essentielle pour la suite est la suivante :

(I.23) Lemme. $\mathcal{H}^u$ est stable par mélange.

Cela signifie que si ρ est une probabilité sur un espace mesurable $(I,\mathcal{J})$ et si $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille mesurable (i.e. telle que pour tout borélien $b\subset\mathbb{R}$ l'application $i\longrightarrow\mu_i(b)$ soit $\mathcal{J}$-mesurable) de mesures de $\mathcal{H}^u$ telle que $\sup_{i\in I}\|\mu_i\|<\infty$ alors la mesure bornée $\nu=\int\mu_i\,d\rho(i)$ est dans $\mathcal{H}^u$.

Démonstration. Les mesures β_i sur $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\underline{\underline{F}}^x\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ associées aux processus $K(\mu_i,Y)$ sont bornées sur $\Omega\times[0,t]$ uniformément en i (inégalité I.18) et sont absolument continues par rapport à $P^x\times dt$ sur la tribu prévisible $\mathcal{P}^x$. Il en résulte en intégrant par rapport à ρ que la mesure $\beta=\int\beta_i d\rho(i)$ est absolument continue par rapport à $P^x\times dt$ sur $\mathcal{P}^x$ et le théorème de Fubini montre que la mesure β est la mesure associée au processus $K(\nu,Y)$.

Ceci nous permet d'établir le résultat suivant :

I.24. Théorème. S'il existe un entier $d\geqslant 1$ et une fonction sur $\mathbb{R}^d$ différence de deux fonctions convexes et non affine qui opère sur DA, alors X est de type Lebesgue.

Démonstration. a) Il est simple de voir que F n'étant pas affine, il existe une droite de $\mathbb{R}^d$ sur laquelle elle n'est pas affine. En restreignant F à cette droite on se ramène au cas d=1.

b) Pour montrer que X est de type Lebesgue, il suffit de montrer la propriété suivante :

(I.25) $\forall u\in DA,\ \exists G_u\in C^2(\mathbb{R})\ :\ G_u''>0$ sur $[\inf u,\ \sup u]$ et $G_u\circ u\in DA$.

En effet le raisonnement de la partie 1)a) de la démonstration de la proposition I.11 montre qu'alors pour toute $u\in DA$ on a

$d^{P^x}\langle C^u,C^u\rangle_t\ll dt$ d'où le résultat.

c) La mesure μ dérivée seconde de F étant non nulle, il existe une fonction α positive indéfiniment dérivable à support dans $[-1,+1]$ d'intégrale 1 telle que la fonction $\alpha*\mu$ soit non nulle ; et donc il existe un intervalle $[a,b]$ $a<b$, sur lequel la fonction $G=\alpha*F$ a une dérivée seconde qui ne s'annule pas et quitte à remplacer F par -F on peut supposer $G''>0$ sur $[a,b]$.

Sur $[a,b]$ la fonction $G''=\alpha*\mu$ coincide avec $\alpha*(1_{[a-1,b+1]}\cdot\mu)$ et la mesure $\alpha*(1_{[a-1,b+1]}\cdot\mu)(x)dx$ est une mélangée des translatées $\tau_x(1_{[a-1,b+1]}\cdot\mu)$ par la probabilité $\alpha(x)dx$.

Soit alors $u\in DA$ et construisons une fonction G_u vérifiant (I.25). Il existe des réels θ,η, $\theta>0$, tels que

$$[\inf\ (\theta u+\eta),\ \sup\ (\theta u+\eta)]\subset[a,b],$$

le fait que F opère entraîne alors que pour tout $x\in[-1,+1]$

$$\tau_x(1_{[a-1,b+1]}\cdot\mu)\in\mathcal{H}^{\theta u+\eta}$$

et il résulte donc du lemme I.23 que

$$\alpha*(1_{[a-1,b+1]}\cdot\mu)(x)dx\in\mathcal{H}^{\theta u+\eta}$$

et finalement que $G(\theta u+\eta)\in DA$, on peut donc prendre $G_u(x)=G(\theta x+\eta)$.

On peut exprimer ce résultat de la façon suivante : Si X n'est pas de type Lebesgue, les seules fonctions différences de fonctions convexes qui opèrent sur DA sont les fonctions affines.

§3. PROCESSUS SANS DIFFUSION

Nous dirons qu'un processus droit est <u>sans diffusion</u>(1) si pour toute $u \in DA$ la partie martingale continue Y^c de la semimartingale $Y = u \circ X$ est nulle (pour $\mathbb{P}^x$ pour tout $x \in E$).

Ceci n'entraîne pas que X soit de type Lebesgue, si cependant c'est le cas, d'après le théorème I.2 la fonctionnelle additive $\Upsilon_t \equiv t$ est canonique et par conséquent pour toute loi μ sur E la famille $\underline{\underline{F}}_t^\mu$ est quasi-continue à gauche. (En effet, si M est une $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$-martingale de carré intégrable, le fait que $\langle M,M\rangle$ soit continu entraîne que pour tout temps $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$-prévisible T borné on a

$$\mathbb{E}(M_T^2|\underline{\underline{F}}_{T-}^\mu) = M_{T-}^2 = \left[\mathbb{E}(M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}^\mu)\right]^2$$

ce qui ne peut avoir lieu que si M_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}^\mu$-mesurable et donc si $M_T = M_{T-}$ en appliquant ceci à $M = \mathbb{E}(1_A|\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ où $A \in \underline{\underline{F}}_T^\mu$ on a $\underline{\underline{F}}_T^\mu = \underline{\underline{F}}_{T-}^\mu$.)

D'après [12] théorème 13 si l'on prend alors sur E la topologie d'un compactifié de Ray, X devient un processus de Hunt (en particulier pourvu de limites à gauches X_{s-} dans E). Il existe alors (cf. [2]) un noyau $N(x,dx)$ sur $(E,\underline{\underline{E}}^*)$ (le noyau de Lévy de X associé à la fonctionnelle $\Upsilon_t \equiv t$) tel que

- $N(x,\{x\}) = 0 \quad \forall x \in E$
- pour tout $x \in E$, pour toute f $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{E}}$-mesurable positive sur $E \times E$ nulle sur la diagonale, la projection prévisible de la mesure aléatoire

$$\sum_s f(X_{s-},X_s)\ \varepsilon_s$$

soit la mesure aléatoire

$$N(X_s,dy)f(X_s,y)\ ds.$$

On a alors le résultat suivant qui justifie le terme "sans diffusion".

I.26.<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> X <u>de type Lebesgue et sans diffusion, soient</u> $u_1,\dots,u_d \in DA$ <u>et</u> $\bar{u} = (u_1,\dots,u_d)$, <u>pour toute fonction</u> G <u>de classe</u> $C^1(\mathbb{R}^d)$ <u>à dérivées localement lipschitziennes</u>,

a) <u>la fonction</u> $y \longrightarrow g(x,y) = G\circ\bar{u}(y) - G\circ\bar{u}(x) - \sum_{i=1}^d G_i'\circ\bar{u}(x)(u_i(y)-u_i(x))$ est $N(x,dy)$-intégrable pour presque tout $x \in E$,

b) <u>on a</u>

$$A(G\circ\bar{u})(x) = \sum_{i=1}^d G_i'\circ\bar{u}(x)Au_i(x) + \int N(x,dy)g(x,y).$$

<u>Démonstration</u>. Ce résultat est presque contenu dans la partie 1)c) de la démonstration de la proposition I.11. On se ramène au cas où G est convexe X étant sans diffusion le processus croissant K(G,Y) (formule I.3) s'écrit par convergence dominée

$$K(G,Y) = \sum_{0<s\leq \cdot}{}' g(X_{s-},X_s)$$

(1) P.A.MEYER a employé en [8]p.136 le terme "purement discontinu"

où on a utilisé le fait que les fonctions u_i étant des différences de p-potentiels bornés, vérifient $(u_i \circ X)_- = u_i \circ X_-$.

La fonction g n'est pas borélienne en général, mais cela ne pose pas de difficulté car les fonctions u_i sont presque boréliennes et on peut appliquer la définition du noyau de Lévy qui dit précisément que la densité de Motoo de la projection prévisible duale de K(G,Y) est la fonction

$$\varphi(x) = \int N(x,dy)g(x,y)$$

fonction qui vérifie $U_p\varphi$ bornée d'après le lemme I.6.

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant :

I.27. Théorème. Si une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée à gauche n'est pas absolument continue opère sur DA, alors X est de type Lebesgue et sans diffusion.

Nous aurons besoin d'un lemme

I.28. Lemme. Soit μ une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$ étrangère à la mesure de Lebesgue, et soient $\mu_h = \tau_h \mu$ ses translatées par $h \in \mathbb{R}$. L'ensemble des réels h tels que μ_h ne soit pas étrangère à μ est Lebesgue-négligeable.

Preuve. Il existe un borélien S Lebesgue-négligeable tel que $\mu(S) = \|\mu\|$. D'après le thèorème de Fubini l'intégrale double

$$\int d\mu(x) \int 1_S(x+y)\ dy = \int dy \int 1_S(x+y)\ d\mu(x)$$

est nulle. La fonction $h \longrightarrow 1_S(x+h)d\mu(x) = \mu_h(S)$ est donc nulle Lebesgue-presque partout. c.q.f.d.

Démonstration du théorème. Il existe une fonction convexe non affine qui opère, donc nous savons déja que X est de type Lebesgue.

D'après la propriété (I.22) des espaces $\mathcal{H}^u$, il existe une mesure μ bornée positive non nulle sur $\mathbb{R}$, étrangère à la mesure de Lebesgue dont les primitives secondes opèrent, les translatées μ_h de μ ont donc leurs primitives secondes qui opèrent également.

Soit $u \in DA$ et $L^u(a)$ le temps local en a de la semimartingale $Y = u \circ X$. Pour tout réel h la mesure aléatoire $\nu_h(\omega, dt)$ associée au processus croissant $\int_{a\in\mathbb{R}} L_t^u(a)\ \mu_h(da)$ est, pour presque tout ω, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et donc sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}^x)$ les mesures $\nu_h \times \mathbb{P}^x$ sont absolument continues par rapport à $dt \times \mathbb{P}^x$. Ces mesures sont uniformément bornées sur $[0,t] \times \Omega$ (inégalité I.18). Il existe donc un ensemble dénombrable $J \subset \mathbb{R}$ tel qu'elles soient toutes absolument continues par rapport à la mesure $\sum_{i\in J} \alpha_j\ \nu_j \times \mathbb{P}^x$ où les α_j sont des réels positifs tels que $\sum_{j\in J} \alpha_j = 1$.

Par ailleurs d'après le lemme pour j fixé dans J, l'ensemble H_j des réels h tels que μ_h ne soit pas étrangère à μ_j est Lebesgue-négligeable.

Or si μ_h et μ_j sont étrangères, les mesures $\nu_h \times P^x$ et $\nu_j \times P^x$ sont étrangères également (et même étrangères sur la tribu prévisible).

En effet soit S_h et S_j deux boréliens disjoints tels que

$$\mu_j(S_j)=\|\mu_j\|, \quad \mu_h(S_h)=\|\mu_h\|,$$

le temps local $L^u(a)$ étant porté par l'ensemble $\{(t,\omega) : Y_{t-}(\omega)=a\}$ (cf. [10] chapitre VI) les mesures $\nu_h \times P^x$ et $\nu_j \times P^x$ sont respectivement portées par $\{(t,\omega) ; Y_{t-}(\omega) \in S_h\}$ et $\{(t,\omega) : Y_{t-}(\omega) \in S_j\}$ qui sont disjoints (et prévisibles).

Il en résulte que si h n'est pas dans l'ensemble $\bigcup_{j \in J} H_j$ la mesure $\nu_h \times P^x$ est à la fois étrangère et absolument continue par rapport à la mesure $\sum_{j \in J} \alpha_j \nu_j \times P^x$ et donc nulle.

L'ensemble $\bigcup_{j \in J} H_j$ étant négligeable-Lebesgue, nous avons

$$\int_{h \in \mathbb{R}} (\nu_h \times P^x)\, dh = 0$$

c'est à dire pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$E^x \int_{h \in \mathbb{R}} dh \int_{a \in \mathbb{R}} L_t^u(a)\, \mu_h(da) = 0.$$

La mesure sur $\mathbb{R}$ $\int \mu_h\, dh$ n'est autre que la mesure $\|\mu\| da$ et donc le processus $\int_{a \in \mathbb{R}} L_t^u(a)\, da$ est evanescent. Comme d'après [10] pour presque tout ω la mesure $L_t^u(a)da$ est l'image par l'application $s \longrightarrow Y_s(\omega)$ de la mesure $d\langle Y^c, Y^c\rangle_s(\omega)$ sur $[0,t]$, on en déduit $\langle Y^c, Y^c\rangle = 0$ d'où $Y^c=0$ c.q.f.d.

Remarque. Joint à (I.13) ce résultat peut s'énoncer ainsi : Si X est de type Lebesgue et n'est pas sans diffusion, les fonctions différences de fonctions convexes qui opèrent sur DA forment une classe intermédiaire entre

1) les fonctions différences de convexes G telles que la mesure $|G''|$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

2) les fonctions différences de convexes G telles que $|G''|$ ait une densité localement bornée par rapport à la mesure de Lebesgue.

Notons que le raisonnement précédent donne aussi bien le résultat suivanr

I.29. Proposition. Sous les conditions habituelles, soit Y une semimartingale réelle et G une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de classe C^1, notons $C_t(G)$ le processus croissant continu tel que

$$G(Y_t)=G(Y_o)+\int_{]0,t]} G'(Y_{s-})dY_s + C_t(G) + \sum_{0<s\leq t} G(Y_s)-G(Y_{s-})-G'(Y_{s-})\Delta Y_s.$$

Si, lorsque G décrit les fonctions convexes de classe C^1, les mesures $P \times dC_t(G)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ muni de la tribu prévisible $\mathcal{P}$ restent absolument continues par rapport à une même probabilité sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$, alors Y est sans partie martingale continue.

§4. PROCESSUS DU TYPE A VARIATION FINIE

Nous dirons que X est du type à variation finie si pour toute $u \in DA$ la semimartingale $Y=u\circ X$ est un processus à variation finie (pour P^x $\forall x \in E$). Il est aisé de voir qu'il faut et il suffit pour cela que X soit sans diffusion et que pour toute $u \in DA$ le processus $\sum_{0<s\leq\cdot} |\Delta(u\circ X)_s|$ soit à valeurs finies P^xp.s. $\forall x \in E$.

I.30. Théorème. Si X est du type à variation finie et du type Lebesgue, alors toutes les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^d$ opèrent.

Démonstration. Soit F convexe de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, la formule de changement de variable dans l'intégrale de Stieltjes donne en posant $Y=\bar{u}\circ X$

$$\text{(I.31)}\qquad F(Y_t)=F(Y_0)+\sum_{i=1}^d \int_{]0,t]} F_i'(Y_{s-})dY_s^i + \sum_{0<s\leq t} F(Y_s)-F(Y_{s-})-\sum_{i=1}^d F_i'(Y_{s-})\, Y_s^i$$

Le terme de sauts est un processus croissant fortement majoré par le processus

$$(2\sum_{i=1}^d \|F_i'\circ\bar{u}\|_\infty) \sum_{0<s\leq t} |\Delta Y_s|$$

localement intégrable puisqu'à sauts bornés. Or le processus $B_t=\sum_{0<s\leq t}|\Delta Y_s|$ a les mêmes instants de sauts que le processus $\sum_{0<s\leq t}(\Delta Y_s)^2$ qui admet un compensateur prévisible absolument continu car X est de type Lebesgue (la fonction $x \longrightarrow x^2$ opère) et il en résulte aisément que B_t admet un compensateur prévisible absolument continu (preuve du lemme I.12) d'où le résultat par le lemme I.6.

Le cas général où F est convexe quelconque se traite de la même façon, la formule (I.31) étant encore valable en remplaçant les F_i' par les composantes d'une pseudo-dérivée de F (voir [3] et la remarque I.9).

Considérons inversement, un processus droit X tel que la fonction valeur absolue opère sur DA, ou plus généralement tel qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ non de classe C^1 opère, alors d'après les raisonnemnts précédents (remarque I.22 et lemme I.23) toutes les fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ opèrent. Dans ce cas X est de type Lebesgue et sans diffusion et DA est une algèbre réticulée. Nous ne pensons pas que cela suffise à entraîner que X soit du type à variation finie, mais nous n'avons pas de résultat dirimant dans cette direction.

En admettant le résultat de mesurabilité évoqué à la remarque I.17, on peut toutefois établir le résultat suivant (à comparer avec I.26)

I.32. Proposition. Soit X tel que toutes les fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ opèrent, alors pour toute $u \in DA$ et pour toute fonction G convexe sur $\mathbb{R}$ on a

$$A(G\circ u)(x) = G_g'\circ u(x)Au(x) + \int N(x,dy)[G\circ u(y)-G\circ u(x)-G_g'\circ u(x)(u(y)-u(x))] + \tfrac{1}{2}G''[\{u(x)\}]\,\varphi_u(x)$$

<u>où</u> G'_g <u>désigne la dérivée à gauche de</u> G, $G''[\{u(x)\}]$ <u>la masse de la mesure de Radon</u> G" <u>au point</u> u(x), <u>et</u> φ_u <u>une fonction positive dont la dépendance en</u> u <u>peut être précisée de la façon suivante</u> :

<u>Si</u> F <u>est une fonction croissante sur</u> $\mathbb{R}$ <u>différence de fonctions convexes on peut prendre pour</u> $\varphi_{F\circ u}(x)$ <u>la fonction</u> $F'_d\circ u(x)\varphi_u(x)$, <u>où</u> F'_d <u>désigne la dérivée à droite de</u> F.

<u>Démonstration</u>. Soit $u\in DA$ et $Y=u\circ X$, dans la formule I.16, puisque la fonction valeur absolue opère, le temps local $L^u_t(a)$ est absolument continu en t. En vertu du résultat admis de mesurabilité, il existe une densité de Motoo $\psi_{u,a}$ dépendant mesurablement de a, de sorte que, d'après le théorème de Fubini, pour une fonction convexe quelconque, le processus croissant C(G,Y) tel que

$$G(Y_t)=G(Y_0)+\int_0^t G'_g(Y_{s-})dY_s+C_t(G,Y)+\sum_{0<s\leq t} G(Y_s)-G(Y_{s-})-G'_g(Y_{s-})\Delta Y_s$$

s'écrit $$C_t(G,Y) = \tfrac{1}{2}\int G''(da)\int_0^t\psi_{u,a}(X_s)ds.$$

Le temps local $L^u(a)$ étant porté par l'ensemble $\{s : Y_s=a\} = \{s : u(X_s)=a\}$, ceci vaut aussi bien

$$= \tfrac{1}{2}\int G''(da)\int_0^t 1_{\{u(X_s)=a\}}\psi_{u,a}(X_s)ds = \tfrac{1}{2}\int_0^t G''[\{u(X_s)\}]\,\psi_{u,u(X_s)}(X_s)ds$$

d'où la première partie de l'énoncé en posant $\varphi_u(x)=\psi_{u,u(x)}(x)$, la seconde résulte alors du résultat général suivant :

I.33. <u>Proposition</u>. (Formule de changement de variable pour les temps locaux) <u>Sous les conditions habituelles, soit</u> Y <u>une semimartingale réelle et</u> F <u>une fonction croissante différence de fonctions convexes</u>. <u>Soit</u> $a\in\mathbb{R}$, <u>posons</u> b=F(a) <u>alors si</u> $L^a(Y)$ <u>désigne le temps local en</u> a <u>de</u> Y, <u>on a</u>

$$L^b(F\circ Y) = F'_d(a)L^a(Y)$$

<u>où</u> F'_d <u>est la dérivée à droite de</u> F.

<u>Démonstration</u>. On obtient la formule par un calcul long à écrire mais élémentaire qui consiste à calculer de deux façons différentes le temps local $L^b(F\circ Y)$ par la formule de changement de variables pour les fonctions convexes en utilisant l'identité suivante qui résulte du fait que F est croissante

$$(F\circ Y_t - b)^+ = F((Y_t-a)^+ + a) - b.$$

<u>Remarques</u>. Si nous avions pris dans la construction des temps locaux les dérivées à droite, nous aurions obtenu la dérivée à gauche dans la formule.

La proposition montre que si Y admet une version de ses temps locaux càd en a, il en est de même de F∘Y (cf. [20]).

DEUXIEME PARTIE

Nous étudions dans cette partie les propriétés d'invariance du domaine DA par changement absolument continu de probabilité obtenu au moyen d'une fonctionnelle multiplicative martingale locale.

§1. LE GENERATEUR INFINITESIMAL DE KUNITA

Les résultats suivants ont été obtenus en 1969 par H.Kunita [6] pour les processus standards vérifiant l'hypothèse L. Mais il résulte par exemple de [12] et de [2] qu'ils sont valables pour les processus droits dont les familles de tribus $\underline{\underline{F}}_t$ sont quasi-continues à gauche.

On dit qu'une fonctionnelle additive K est canonique si pour toute loi μ sur E

i) toute $(\underline{\underline{F}}_t^\mu, P^\mu)$-martingale de carré intégrable M est telle que

$$d^{P^x}\langle M,M\rangle_t \ll dK_t$$

ii) $K_t=t+K'_t$ où K'_t est une FA positive telle que dK'_t soit étrangére à dt.

L'existence de FA canoniques a été démontrée par Motoo et Watanabe [16], (voir aussi [8]). On peut alors poser :

II.1. <u>Définition. Le générateur infinitésimal de Kunita</u> (A_K, DA_K) <u>relatif à la FA canonique</u> K <u>est défini par</u> $u \in DA_K$ <u>et</u> $A_K u=v$ <u>si</u>

a) $u \in b\underline{\underline{E}}^*$

b) v <u>est</u> $\underline{\underline{E}}^*$<u>-mesurable telle que</u> $\int_0^\cdot |v(X_s)|\, dK_s$ <u>soit localement intégrable pour</u> P^μ <u>pour toute</u> μ,

c) $u(X_t)-u(X_0)-\int_0^t v(X_s)dK_s$ <u>est une</u> $(\underline{\underline{F}}_t^\mu, P^\mu)$<u>-martingale locale localement de carré intégrable pour toute</u> μ.

On a alors

(II.2) (A_K, DA_K) est une extension de (A,DA)

(II.3) DA_K est une algèbre stable par les fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$

Le principal résultat de Kunita dans [6] est que par transformation par une fonctionnelle multiplicative martingale locale M strictement positive sur $[\![0,\zeta[\![$ où ζ est la durée de vie de X,

(II.4) K reste canonique pour le M-processus,

(II.5) le domaine DA_K est inchangé,

(II.6) sur ce domaine le nouveau générateur de Kunita A_K^M s'écrit

$$A_K^M = A_K + B_1 + B_2$$

où l'opérateur B_1 a la propriété d'un opérateur de dérivation

$$B_1 uv = uB_1 v + vB_1 u$$

et où B_2 s'exprime explicitement en fonction de M et du noyau de Lévy associé à la FA canonique K.

Nous allons voir que par les transformations par fonctionnelles multiplicatives martingales locales, le domaine DA du générateur étendu lui-même (définition I.1) est en général modifié, et DA n'étant pas une algèbre en général, le résultat (II.6) de Kunita ne donne pas directement la forme du générateur étendu du processus transformé (A^M, DA^M) à moins que X soit de type Lebesgue.

Nous donnons dans le paragraphe suivant une forme particulière de fonctionnelles multiplicatives martingales locales M pour lesquelles, pour un processus droit général, la détermination explicite du générateur étendu transformé est possible et nous étudions quelques propriétés du M-processus correspondant.

§2. UNE FORME REMARQUABLE DE FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES MARTINGALES LOCALES

Nous nous plaçons à nouveau sous les hypothèses de la 1ère partie §1.

II.7. Proposition. Si $f \in b\underline{\underline{E}}^*$ et si g est $\underline{\underline{E}}^*$-mesurable telle que $U_p|g|$ soit bornée $(p>0)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $e^f \in DA$ et $Ae^f = g$

b) $M_t = \exp\left[f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (e^{-f}g)(X_s)\,ds\right]$ est une $(\underline{\underline{F}}_t^x, P^x)$-martingale locale pour tout $x \in E$.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b). Notons m_t la martingale $C_t^{\exp(f)}$, il résulte aisément de la formule d'intégration par partie ([10] p.303) que

$$M_t = 1 + e^{-f}(X_0) \int_{]0,t]} \exp\left[-\int_0^s (e^{-f}g)(X_\alpha)\,d\alpha\right] dm_s$$

donc M est une martingale locale.

b) $\Rightarrow$ a). Un calcul analogue montre que

$$m_t = e^f(X_0) \int_{]0,t]} \exp\left[\int_0^s (e^{-f}g)(X_\alpha)\,d\alpha\right] dM_s$$

d'où le résultat par la définition I.1 condition c").

II.8. Théorème. Soient f et $g \in b\underline{\underline{E}}^*$ telles que $e^f \in DA$ et $Ae^f = g$. La fonctionnelle multiplicative M de la proposition précédente est une $(\underline{\underline{F}}_t^x, P^x)$-martingale. On pose pour toute $u \in b\underline{\underline{E}}^*$ $Q_t u(x) = E^x[M_t . u(X_t)]$. On a alors :

a) (Q_t) est un semigroupe markovien droit définissant la même topologie fine que (P_t)

b) (Q_t) est de Hunt si et seulement si (P_t) est de Hunt,

c) <u>on note</u> A^M <u>le générateur étendu de</u> (Q_t), <u>alors</u>

$$(u \in DA^M,\ A^M u=v) \Leftrightarrow (e^f u \in DA,\ A(e^f u)=e^f v+gu)$$

d) <u>on note</u> $\mathcal{R}$ <u>la réalisation canonique de</u> (P_t), <u>et</u> $T_f(\mathcal{R})$ <u>celle de</u> (Q_t). <u>Soit</u> h <u>bornée telle que</u> $e^h \in DA^M$ <u>et</u> $A^M(e^h)=k$ <u>bornée, alors</u> $e^{f+h} \in DA$, Ae^{f+h} <u>est bornée et on a</u> :

$$T_h(T_f(\mathcal{R})) = T_{f+h}(\mathcal{R}).$$

<u>Démonstration</u>. Les points a) et b) sont laissés au lecteur.

c) Soit $u \in DA^M$ et $A^M u=v$, et soit c une constante telle que $c > \|u\|_\infty$, alors la proposition II.7 appliquée à (Q_t) nous dit que

$$\exp\left[\operatorname{Log}(c+u)(X_t) - \operatorname{Log}(c+u)(X_0) - \int_{]0,t]} \frac{v}{c+u}(X_s)ds\right]$$

est une $(\underline{\underline{F}}^{o*}_{t+}, Q^x)$-martingale locale. Il en résulte en passant à P^x que

$$\exp\left[(f+\operatorname{Log}(c+u))\circ X_t - (f+\operatorname{Log}(c+u)\circ X_0 - \int_0^t (e^{-f}g+\frac{v}{c+u})\circ X_s\, ds\right]$$

est une $(\underline{\underline{F}}^{o*}_{t+}, P^x)$-martingale locale. On voit facilement que, si (V_p) désigne la résolvante de (Q_t), $V_p|v|$ bornée entraîne $U_p|v|$ bornée et en appliquant II.7 dans le sens b) $\Rightarrow$ a) à (P_t) on a

$$(c+u)e^f \in DA \quad \text{et} \quad A[(c+u)e^f] = (c+u)g+e^f v$$

d'où $\qquad ue^f \in DA \quad \text{et} \quad A(ue^f) = ug+e^f v.$

L'implication dans l'autre sens se traîte de façon analogue.

d) Soit h comme dans l'énoncé, en appliquant le raisonnement du c) avec $u=e^h$ on obtient que

$$e^{f+h} \in DA \quad \text{et} \quad Ae^{f+h} = e^h g + e^f k \quad \text{qui est bornée}$$

et si M'_t est la $(\underline{\underline{F}}^{o*}_{t+}, Q^x)$-martingale

$$\exp\left[h(X_t)-h(X_0)-\int_0^t (e^{-h}k)(X_s)ds\right]$$

on a

$$M_t M'_t = \exp\left[(f+h)\circ X_t - (f+h)\circ X_0 - \int_0^t e^{-(f+h)}(e^h g+e^f k)\circ X_s\, ds\right]$$

c'est à dire

$$T_h(T_f(\mathcal{R})) = T_{f+h}(\mathcal{R}).$$

§3. INVARIANCE DU DOMAINE PAR TRANSFORMATIONS MULTIPLICATIVES

Nous désignerons par le sigle FMML les processus qui sont des fonctionnelles multiplicatives martingales locales relativement à $(\underline{\underline{F}}^\mu_t, P^\mu)$ pour toute loi μ et qui sont strictement positives sur $[\![0,\zeta[\![$ où ζ est la durée de vie de X.

II.9. <u>Thèorème</u>. X <u>est de type Lebesgue si et seulement si</u> DA <u>est invariant par les transformations par</u> FMML.

Démonstration. Si X est de type Lebesgue, les résultats de Kunita s'appliquent et DA est invariant par les transformations par FMML.

Réciproquement supposons DA invariant par les transformations par FMML, DA est alors aussi le domaine du générateur étendu du semigroupe $e^{-pt}P_t$, on peut donc supposer le noyau potentiel borné.

Il résulte du thèorème II.8 que pour toute $f \in b\underline{\underline{E}}^*$,

$\exp f \in DA$ et $Ae^f \; b\underline{\underline{E}} \Longrightarrow e^f DA = DA$.

En particulier en prenant $f=\mathrm{Log}(u+2\|u\|)$, si $u \in DA$ et $Au \in b\underline{\underline{E}}^*$ on a

$$(u+2\|u\|)DA = DA$$

d'où $u^2 \in DA$.

L'algèbre $H=\{u \in DA \; : \; u^2 \in DA\}$ contient donc les potentiels de fonctions bornées donc AH est dense dans $L^1(\varepsilon_x U_p)$ pour tout $x \in E$. D'où le résultat par le corollaire I.15.

§4. UNE PROPRIETE D'ITERATION DE L'EXPONENTIELLE $\mathcal{E}_\infty$

Les fonctionnelles multiplicatives martingales locales introduites au §2 pour un processus droit général, peuvent, dans le cas particulier d'un processus de type Lebesgue, s'exprimer grâce à l'exponentielle $\mathcal{E}_\infty$(voir la définition de $\mathcal{E}_\infty$ci-dessous).

En effet si X est de type Lebesgue et si $u \in DA$, alors $\exp u \in DA$ et les martingales locales

$$C_t^u = u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t Au(X_s)\, ds$$
$$M_t^u = \exp\left\{u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t (e^{-u}Ae^u)(X_s)\, ds\right\}$$

sont reliées par

$$M^u = \mathcal{E}_\infty[C^u].$$

La propriété d) du thèorème II.8 peut donc s'exprimer au moyen de l'exponentielle $\mathcal{E}_\infty$. Nous montrons dans ce paragraphe que ceci provient d'une propriété de l'exponentielle $\mathcal{E}_\infty$ appliquée aux martingales locales quasi-continues à gauche.

Sous les conditions habituelles, soit U une martingale locale quasi-càg nulle en zéro, telle que le processus

$$\sum_{0<s\leq \cdot} (e^{\Delta U_s} - \Delta U_s - 1)$$

soit localement intégrable. Alors (cf. [19]) le processus

$$\mathcal{E}_\infty^{\mathbf{P}}[U] = \exp\left\{U - \tfrac{1}{2}\langle U^c, U^c\rangle - \left[\sum_{0<s\leq \cdot} (e^{\Delta U_s} - \Delta U_s - 1)\right]^{(p,\mathbf{P})}\right\}$$

(où $[.]^{(p,\mathbf{P})}$ désigne la projection prévisible duale par rapport à $\mathbf{P}$) est une martingale locale.

Nous supposons que $\mathcal{E}_\infty^{\mathbf{P}}[U]$ est uniformément intégrable et nous définissons une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}_\infty)$ par $\mathbb{Q} = (\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U])_\infty . \mathbb{P}$, comme $\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U]_t > 0$ pour tout $t<\infty$, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes sur chaque $\underline{\underline{F}}_t$. Les conditions habituelles ne sont pas en général vérifiées pour $\mathbb{Q}$, mais si $s<t$, $\underline{\underline{F}}_s$ contient les $\mathbb{Q}$-négligeables de $\underline{\underline{F}}_t$ ce qui suffit.

Les deux lemmes suivants sont des conséquences aisées du théorème de Girsanov pour les semimartingales (cf. [7]).

II.10. Lemme. Soit V une $\mathbb{P}$-martingale locale telle que le processus

$$\sum_{0<s\leq \cdot} |(e^{\Delta U_s}-1)\Delta V_s|$$

soit localement $\mathbb{P}$-intégrable, alors le processus

$$\tilde{V} = V - \langle V^c, V^c \rangle - \Big[\sum_{0<s\leq \cdot} (e^{\Delta U_s}-1)\Delta V_s\Big]^{(p,\mathbb{P})}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

II.11. Lemme. Soit A un processus à variation finie tel que $\int_0^\cdot e^{\Delta U_s}|dA_s|$ soit localement $\mathbb{P}$-intégrable, alors A est à variation localement $\mathbb{Q}$-intégrable et $\Big[\int_0^\cdot e^{\Delta U_s}\, dA_s\Big]^{(p,\mathbb{P})}$ est une version de $A^{(p,\mathbb{Q})}$.

Nous pouvons alors démontrer la propriété d'iteration suivante

II.12. Proposition. Soient U et V deux $\mathbb{P}$-martingales locales quasicàg, à sauts bornés, nulles en zéro. On suppose $\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U]$ uniformément intégrable. Si $\mathbb{Q}$ est la probabilité $\mathbb{Q} = (\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U])_\infty . \mathbb{P}$ on a

$$\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}]\,\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U] = \mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U+V]$$

où $\tilde{V}$ est défini au lemme II.10.

Démonstration. On sait (cf. [10]) que

$${}^{\mathbb{Q}}\langle (V)^c_{\mathbb{Q}}, (V)^c_{\mathbb{Q}} \rangle = {}^{\mathbb{P}}\langle (V)^c_{\mathbb{P}}, (V)^c_{\mathbb{P}} \rangle = \langle V^c, V^c \rangle$$

donc d'après l'expression de $\tilde{V}$, on a

$$\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}] = \exp\Big\{V - \langle V^c, V^c \rangle - \Big[\sum_{0<s\leq \cdot} (e^{\Delta U_s}-1)\Delta V_s\Big]^{(p,\mathbb{P})} - \tfrac{1}{2}\langle V^c, V^c \rangle - \Big[\sum_{0<s\leq \cdot} (e^{\Delta V_s}-\Delta V_s-1)\Big]^{(p,\mathbb{Q})}\Big\}.$$

D'où d'après l'expression de la projection prévisible duale par rapport à $\mathbb{Q}$ (lemme II.11),

$$\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}] = \exp\Big\{V - \langle V^c, U^c \rangle - \tfrac{1}{2}\langle V^c, V^c \rangle - \Big[\sum_{0<s\leq \cdot} e^{\Delta U_s+\Delta V_s} - e^{\Delta U_s} - \Delta V_s - 1\Big]^{(p,\mathbb{P})}\Big\}.$$

Le résultat est alors immédiat compte tenu de l'expression de $\mathcal{E}_\infty^{\mathbb{P}}[U]$.

<u>Remarque</u>. La propriété d'itération qu'on peut schématiser ainsi

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \arrow[dr, "\mathcal{E}^{\mathbb{P}}_{\infty}[U]"] \arrow[ddrr, bend left, "\mathcal{E}^{\mathbb{P}}_{\infty}[U+V]"] & & \\
U \arrow[ur, dashed] & \mathbb{Q} \arrow[dr, "\mathcal{E}^{\mathbb{Q}}_{\infty}[\tilde{V}]"] & \\
V \arrow[r, dashed] & \tilde{V} \arrow[ur, dashed] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

n'est pas vérifiée en général par l'exponentielle $\mathcal{E}$ de Doléans-Dade. Elle peut être considérée comme la propriété limite obtenue dans le procédé de construction des exponentielles successives $\mathcal{E}_n$ de Yor [19]. On peut voir en effet que si Y est une martingale locale quasicàg à sauts bornés, ces exponentielles vérifient :

$$\mathcal{E}_n[\tilde{Y}]\,\mathcal{E}_n[Y] = \mathcal{E}_{2n}[2Y]$$

où $$\tilde{Y} = Y - \int_0^{\cdot} \frac{1}{\mathcal{E}_n[Y]_{s-}}\, d\langle \mathcal{E}_n[Y],\, Y\rangle_s .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.AIRAULT et H.FOLLMER Relative densities of semimartingales. Invent. math. 27 299-327 (1974)

[2] A.BENVENISTE et J.JACOD Système de Lévy des processus de Markov Invent. math. 21 183-198 (1973)

[3] N.BOULEAU Semimartingales à valeurs $\mathbb{R}^d$ et fonctions convexes Note C.R.A.S. (à paraître)

[4] E.CINLAR, J.JACOD, P.TROTTER et M.J.SHARPE Semimartingales and Markov processes (à paraître)

[5] D.FEYEL Propriétés de permanence du domaine d'un générateur infinitésimal. Sém. Th. du potentiel n°4 Lecture notes 713 Springer

[6] H.KUNITA Absolute continuity of Markov processes and generators. Nagoya J. Math. 36 1-26 (1969)

[7] E.LENGLART Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilité. Z.f.W. 39 65-70 (1977)

[8] P.A.MEYER Intégrales stochastiques. Exposés III et IV Sém. Prob. I Lecture notes 39 Springer

[9] P.A.MEYER Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Exposé II Sém. Prob. X Lecture notes 511 Springer

[10] P.A.MEYER Un cours sur les intégrales stochastiques Sém. Prob. X Lecture notes 511 Springer

[11] P.A.MEYER Martingales locales fonctionnelles additives I. Sém. Prob. XII Lecture notes 649 Springer

[12] P.A.MEYER et J.B.WALSH Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. math. 14 143-146 (1971)

[13] G.MOKOBODZKI Densité relative de deux potentiels comparables. Sém. Prob. IV Lecture notes 124 Springer

[14] G.MOKOBODZKI Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs. Sém. Prob. IV Lecture notes 124 Springer

[15] G.MOKOBODZKI Sur l'algèbre contenue dans le domaine étendu d'un générateur infinitésimal. Sém. Th. Pot. n°3 Lecture notes 681 Springer

[16] M.MOTOO et S.WATANABE On a class of additive functionals of Markov processes. J. Math. Kyoto Univ. 4 429-469 (1965)

[17] M.J.SHARPE Fonctionnelles additives de Markov Cours de 3$^{\text{ème}}$ cycle, Univ. Paris VI 1973/74

[18] C.STRICKER et M.YOR Calcul stochastique dépendant d'un paramêtre. Z.f.W. 45 109-133 (1978)

[19] M.YOR Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sém. Prob. X Lecture notes 511 Springer

[20] M.YOR Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. S.M.F. Astérisque n°52-53 23-35 (1978)

N.BOULEAU
Centre de Mathématiques
de l'Ecole polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex