HANS FÖLLMER

Calcul d'Ito sans probabilités

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 143-150

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__143_0>

CALCUL D'ITO SANS PROBABILITES

par H. Föllmer

Le but de cette note est de montrer qu'on peut faire le calcul d'Itô « trajectoire par trajectoire », dans le sens strict du terme. Pour cela, nous allons traiter la formule d'Itô, y compris la construction de l'intégrale stochastique $\int F'(X_{s-})dX_s$ à l'aide de sommes de Riemann, comme un exercise d'analyse sur une classe de fonctions réelles à variation quadratique. Nous allons parler de probabilités seulement après, en vérifiant que pour certains processus stochastiques (les semimartingales, les processus à énergie finie, ...) presque toutes les trajectoires appartiennent à cette classe.

Soit x une fonction réelle sur $[0,\infty[$, continue à droite et pourvue de limites à gauche. Nous utilisons la notation $x_t = x(t)$, $\Delta x_t = x_t - x_{t-}$, $\Delta x_t^2 = (\Delta x_t)^2$.

Nous appellerons <u>subdivision</u> toute suite finie $\tau = (t_o,\dots,t_k)$ telle que $0 \leq t_o < \dots < t_k < \infty$, et nous poserons $t_{k+1} = \infty$, $x_\infty = 0$. Soit $(\tau_n)_{n=1,2,\dots}$ une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0 sur tout intervalle compact. Nous dirons que x est <u>à variation quadratique suivant</u> (τ_n) si les mesures ponctuelles

$$(1) \qquad \xi_n = \sum_{t_i \in \tau_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \varepsilon_{t_i}$$

convergent vaguement vers une mesure de Radon ξ sur $[0,\infty[$, dont la partie atomique est donnée par les sauts quadratiques de x :

$$(2) \qquad [x,x]_t = [x,x]_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta x_s^2$$

où $[x,x]$ désigne la fonction de répartition de ξ , et $[x,x]^c$ sa partie continue.

THÉORÈME. <u>Soit x à variation quadratique suivant (τ_n), et soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors on a la formule d'Itô</u>

$$(3)\qquad F(x_t) = F(x_o) + \int_o^t F'(x_{s-})dx_s + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} F''(x_{s-})d[x,x]_s$$

$$+ \sum_{s\le t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-})\Delta x_s - \frac{1}{2}F''(x_{s-})\Delta x_s^2],$$

<u>où on pose</u>

$$(4)\qquad \int_o^t F'(x_{s-})dx_s = \lim_n \sum_{\tau_n\ni t_i\le t} F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}),$$

<u>et où la série est absolument convergente</u>.

REMARQUE. D'après (2), on peut écrire les deux derniers termes de (3) sous la forme

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\int_o^t F''(x_{s-})d[x,x]^c_s + \sum_{s\le t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-})\Delta x_s],$$

et on a

$$(6)\qquad \int_o^t F''(x_{s-})d[x,x]^c_s = \int_o^t F''(x_s)d[x,x]^c_s$$

puisque x est une fonction càdlàg.

<u>Démonstration</u>. Soit $t > 0$. D'après la continuité à droite de x on a

$$F(x_t) - F(x_o) = \lim_n \sum_{\tau_n\ni t_i\le t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})].$$

1) Pour gagner en clarté, nous traitons d'abord le cas particulièrement simple où x est une fonction continue. La formule de Taylor permet d'écrire

$$\sum_{\tau_n\ni t_i\le t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \sum F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum F''(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 + \sum r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}),$$

où

(7) $$r(a,b) \leq \varphi(|b-a|)(b-a)^2 ,$$

$\varphi(\cdot)$ fonction croissante sur $[0,\infty[$, $\varphi(c) \to 0$ lorsque $c \to 0$. Lorsque $n \uparrow \infty$, la seconde somme à droite tend vers

$$\frac{1}{2} \int_{[0,t]} F''(x_s)\,d[x,x]_s = \frac{1}{2} \int_{]0,t]} F''(x_{s-})\,d[x,x]_s$$

d'après la convergence vague des mesures ponctuelles (ξ_n) ; noter que la continuité de x donne la continuité de $[x,x]$, en vertu de (2) . La troisième somme, qui est dominée par

$$\varphi(\max_{\tau_n \ni t_i \leq t} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|) \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 ,$$

tend vers 0 puisque x est continue. On obtient ainsi l'existence de la limite (4) , et la formule d'Itô (3) .

2) Passons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Nous séparons les sauts de x sur $[0,t]$ en deux classes: une classe finie $C_1 = C_1(\varepsilon,t)$, et une classe $C_2 = C_2(\varepsilon,t)$ telle que $\sum_{s \in C_2} \Delta x_s^2 \leq \varepsilon^2$. Écrivons

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \Sigma_1 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] + \Sigma_2 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$$

où Σ_1 indique la sommation sur les $t_i \in \tau_n$, $t_i \leq t$ tels que l'intervalle $]t_i , t_{i+1}]$ contient un saut de la classe C_1 . On a

$$\lim_n \Sigma_1 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \sum_{s \in C_1} [F(x_s) - F(x_{s-})] .$$

D'autre part, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\Sigma_2 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] =$$

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} F''(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2$$

$$- \Sigma_1 [F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \frac{1}{2} F''(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2] + \Sigma_2\, r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}) .$$

On va montrer ci-dessous (9) que la deuxième somme à droite tend vers

$$\frac{1}{2}\int_{]0,t]} F''(x_{s-})d[x,x]_s ,$$

lorsque $n\uparrow\infty$. La troisième somme tend vers

$$\sum_{s\in C_1} [F'(x_{s-})\Delta x_s + \frac{1}{2}F''(x_{s-})\Delta x_s^2] .$$

D'après la continuité uniforme de F'' sur l'ensemble borné des valeurs x_s $(0 \leq s \leq t)$, on peut supposer (7), et cela entraîne

$$\text{(8)} \qquad \limsup_n \Sigma_2\, r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}) \leq \varphi(\varepsilon+)[x,x]_{t+} .$$

Faisons tendre ε vers 0 : alors (8) tend vers 0, et

$$\sum_{s\in C_1(\varepsilon,t)} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-})\Delta x_s] - \frac{1}{2}\sum_{s\in C_1(\varepsilon,t)} F''(x_{s-})\Delta x_s^2$$

tend vers la série dans (3) ; la série est absolument convergente puisque

$$\sum_{s\leq t} |F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-})\Delta x_s| \leq \text{const} \sum_{s\leq t} \Delta x_s^2$$

d'après la formule de Taylor. On obtient ainsi l'existence de la limite en (4), et la formule d'Itô (3).

3) Montrons que

$$\text{(9)} \qquad \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} f(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 = \int_{]0,t]} f(x_{s-})d[x,x]_s$$

pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, et notons z la fonction de répartition pour les sauts dans la classe $C_1 = C_1(\varepsilon,t)$:

$$z_u = \sum_{C_1 \ni s \leq u} \Delta x_s \qquad (u \geq 0) .$$

On a

$$\text{(10)} \qquad \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq u} f(x_{t_i})(z_{t_{i+1}} - z_{t_i})^2 = \sum_{C_1 \ni s \leq u} f(x_{s-})\Delta x_s^2$$

pour tout $u \geq 0$. Notons ζ_n et η_n les mesures ponctuelles associées à z et à $y = x - z$ à la manière de (1). D'après (10), les mesures ζ_n convergent vaguement vers la mesure ponctuelle

$$\zeta = \sum_{s \in C_1} \Delta x_s^2 \, \varepsilon_s .$$

Comme la dernière somme de

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq u} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 =$$

$$\Sigma (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 + \Sigma (z_{t_{i+1}} - z_{t_i})^2 + 2\Sigma (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})(z_{t_{i+1}} - z_{t_i})$$

tend vers 0, les mesures η_n convergent vaguement vers la mesure $\eta = \xi - \eta$, dont la partie atomique a une masse totale $\leq \varepsilon^2$. Or la fonction $f \circ x$ est presque sûrement continue par rapport à la partie continue de η, et cela implique

$$(11) \qquad \limsup_n \Big| \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} f(x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 - \int_{]0,t]} f(x_{s-}) d\eta \Big| \leq 2 \|f\|_t \, \varepsilon^2 ,$$

où $\|f\|_t = \sup \{ f(x_s) \, ; \, 0 \leq s \leq t \}$. Combinant (10) et (11), on obtient (9), et cela achève la démonstration. Soulignons qu'on a suivi de près la démonstration « classique » : voir Meyer [4]. Le seul élément nouveau est l'usage de la convergence vague, qui permet d'en donner une version purement analytique.

REMARQUES. 1) Soit $x = (x^1, \ldots, x^n)$ une fonction càdlàg sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Disons que x est à <u>variation quadratique suivant</u> (τ_n) si toutes les fonctions réelles x^i, $x^i + x^j$ $(1 \leq i, j \leq n)$ le sont. Dans ce cas, notons

$$[x^i, x^j]_t = \tfrac{1}{2}\big([x^i + x^j, x^i + x^j]_t - [x^i, x^j]_t - [x^i, x^j]_t\big)$$

$$= [x^i, x^j]_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta x_s^i \, \Delta x_s^j .$$

Alors on a la formule d'Itô

$$(12) \qquad F(x_t) = F(x_o) + \int_o^t D F(x_{s-}) dx_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_o^t D_i D_j F(x_{s-}) d[x^i, x^j]_s^c$$

$$+ \sum_{s \leq t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - \sum_i D_i F(x_{s-}) \Delta x_s^i]$$

pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, où on pose

(13) $$\int_0^t DF(x_{s-})dx_s = \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} \langle DF(x_{t_i}), x_{t_{i+1}} - x_{t_i} \rangle$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ = produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$). La démonstration est la même, avec des notations plus lourdes.

2) La classe des fonctions à variation quadratique est <u>stable pour les opérations</u> C^1. Précisément: si $x = (x^1,\ldots,x^n)$ est à variation quadratique suivant (τ_n), F une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, alors $y = F \circ x$ est à variation quadratique suivant (τ_n), avec

(14) $$[y,y]_t = \sum_{i,j} \int_0^t D_iF(x_s)D_jF(x_s)d[x^i,x^j]^c_s + \sum_{s\leq t} \Delta y_s^2 .$$

C'est la version analytique d'un résultat de Meyer sur les semimartingales: voir [4] p. 359. La démonstration est analogue à la précédente.

Passons aux processus stochastiques. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale. Alors, pour tout $t \geq 0$, les sommes

(15) $$S_{\tau,t} = \sum_{\tau \ni t_i \leq t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent en probabilité vers

$$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta X_s^2$$

lorsque le pas de la subdivision τ tend vers 0 sur $[0,t]$; voir Meyer [4] p. 358. Pour toute suite, il y a donc une sous-suite (τ_n) telle que, presque sûrement,

(16) $$\lim_n S_{\tau_n,t} = [X,X]_t$$

pour tout t rationnel. Cela implique que <u>presque toutes les trajectoires sont à variation quadratique suivant</u> (τ_n); en plus, la relation (16) est valable pour tout $t \geq 0$, d'après (9). La formule d'Itô (3), appliquée trajectoire par trajectoire, ne dépend pas de la suite (τ_n) ; en particulier, on obtient la convergence en probabilité des sommes de Riemann en (4) vers l'intégrale stochastique $\int_0^t F'(X_{s-})dX_s$, lorsque le pas de τ tend vers 0 sur $[0,t]$.

REMARQUES. 1) Pour le <u>mouvement brownien</u>, et une suite arbitraire de subdivisions (τ_n) dont le pas tend vers 0 sur tout intervalle compact, presque toutes les trajectoires sont à variation quadratique suivant (τ_n) . En fait, d'après le théorème de Lévy on a (16) sans passage aux sous-suites.

2) Pour l'argument ci-dessus, il faut seulement savoir que les sommes (15) convergent en probabilité vers un processus croissant $[X,X]$ dont les trajectoires sont de la forme (2) . La classe de ces <u>processus à variation quadratique</u> est, bien entendu, plus large que la classe des semimartingales: on n'a qu'à prendre un processus déterministe à variation quadratique qui n'est pas à variation bornée. Citons aussi les <u>processus à énergie finie</u> $X = M + A$ où M est une martingale locale et où A est un processus dont les trajectoires sont à variation quadratique 0 suivant les subdivisions dyadiques. Ces processus interviennent dans l'étude probabiliste des espaces de Dirichlet: voir Fukushima [3] .

3) Pour les semimartingales, on sait construire l'intégrale stochastique $\int H_{s-}dX_s$ (H càdlàg adapté) trajectoire par trajectoire comme limite de sommes de Riemann, dans ce sens que les sommes convergent presque sûrement en dehors d'un ensemble exceptionnel qui dépend de H: voir Bichteler [1]. On vient de montrer que, pour les besoins particuliers du calcul d'Itô où $H = f \circ X$ (f de classe C^1), on peut choisir l'ensemble exceptionnel à l'avance, indépendemment de H . On peut aller au-delà de la classe C^1 , par un traitement « trajectoire par trajectoire » du temps local. Mais pas trop: Stricker [5] vient de préciser qu'une extension aux fonctions continues n'est possible que pour les processus à variation finie.

REFERENCES.

[1] BICHTELER, K.: Stochastic Integration and L^p - theory of semimartingales. Technical report No. 5, U. of Texas (1979).

[2] DELLACHERIE, C., et MEYER, P.A.: Probabilités et Potentiel; Théorie des Martingales. Hermann (1980).

[3] FUKUSHIMA, M.: Dirichlet forms and Markov processes. North Holland (1980).

[4] MEYER, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém.Prob.X, LN 511 (1976).

[5] STRICKER, C.: Quasimartingales et variations. Sém.Prob.XV (1980).