PAUL-ANDRÉ MEYER

Flot d'une équation différentielle stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 103-117

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__103_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

FLOT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE
(d'après Malliavin, Bismut, Kunita)

par P.A. Meyer

Cet exposé peut être considéré comme un paragraphe détaché de la "géométrie stochastique sans larmes" . L'étude des flots d'équations stochastiques est un outil essentiel dans les travaux géométriques de Malliavin et de Bismut. Mais nous avons essayé ici de présenter ce qui peut être dit aussi dans le cas des semimartingales discontinues, et cela nous éloigne de l'esprit de la "géométrie stochastique".

De quoi s'agit il ? Tout d'abord, d'étudier la différentiabilité des solutions d'une équation différentielle stochastique en fonction des conditions initiales. Le résultat fondamental dans cette direction dit que, si l'on considère la solution $X(t,\omega,x)$ d'une très bonne équation différentielle stochastique, correspondant à la valeur initiale x, il en existe une version qui <u>pour presque tout</u> ω <u>est</u> C^{∞} <u>en</u> x. Ce résultat est dû à Malliavin, pour les équations du type classique sur les variétés, et constitue l'une des étapes importantes dans sa démonstration probabiliste des résultats d'hypoellipticité. Nous le démontrerons dans $\mathbb{R}^n$, pour une équation gouvernée par une semimartingale discontinue (l'extension est un exercice sans difficulté, sur les inégalités de la théorie des équations différentielles stochastiques).

Les applications $\phi_t(\omega,.)$: $x \to X(t,\omega,x)$ sont alors analogues au "flot" d'une équation différentielle ordinaire. Dans le cas déterministe, ce flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes. Pour les équations différentielles stochastiques générales, on ne peut espérer l'injectivité que dans le cas où la semimartingale est continue. Dans le cas où il s'agit du processus de Wiener, Malliavin l'a effectivement démontrée, au moyen de l'argument naturel de retournement du temps, et Bismut a démontré aussi la surjectivité (dans le cas de $\mathbb{R}^n$). Ce n'est que tout récemment (1980) que le cas général a été traité, sans retournement du temps, par Kunita (exposé du congrès de Durham, à paraître[1]).

Enfin, les développements récents du sujet concernent aussi l'étude des processus de la forme $\phi_t(\omega,Z_t(\omega))$, où le processus $Z_t(\omega)$ substitué à x est une semimartingale : Bismut a montré que ce sont des semimartingales, et les a exprimés au moyen d'une "formule d'Ito" très intéressante. Nous n'avons pas tenté de présenter cette question.

1. H. Kunita m'a signalé que les résultats présentés ici ont été obtenus en collaboration avec S.R.S. Varadhan.

Il existe plusieurs techniques pour traiter les équations différentielles stochastiques. Pour ne citer que les auteurs récents , nous avons celles de C. Doléans-Dade, Emery, Protter, Jacod, Métivier-Pellaumail... La plus accessible pour moi (et pour les strasbourgeois) est celle de Doléans revue par Emery (ZfW 41, 278, p. 241-262). Nous allons en rappeler l'essentiel.

RAPPELS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Les équations étudiées par Emery sont du type suivant, où le processus inconnu X est un processus càdlàg. adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et le processus conducteur Z une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^m$:

(1) $$X_t = H_t + \int_0^t F(X)_{s-}dZ_s$$ [1]

Ici H est un processus càdlàg. donné à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et F est une fonctionnelle, appliquant les processus càdlàg. adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dans les processus càdlàg. adaptés à valeurs matricielles (n,m), et telle que

i. Pour tout t.d'a. T , $X^{T-}=Y^{T-} \Rightarrow F(X)^{T-}=F(Y)^{T-}$

ii. $(F(X)-F(Y))^* \leq c(X-Y)^*$ (condition Lip(c))

(cf. Emery, p. 248), auxquelles il est très commode d'ajouter

iii. $F(0) = 0$ (<u>hypothèse faite dans toute la suite</u>).

Comme d'habitude , X^* désigne $\sup_s|X_s|$.

L'équation que nous désirons étudier est d'un type bien plus classique : ce sera[2]

(2) $$X^i_t = x^i + \int_0^t a^i_\alpha(X_{s-})dZ^\alpha_s \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ \alpha=1,\dots,m \end{matrix}$$

avec la convention de sommation usuelle, les coefficients a^i_α étant très réguliers. Ramenons cette équation à la forme (1). Soit $A(x)$ la matrice $(a^i_\alpha(x))$. Alors

(3) $$X^x_t = H^x_t + \int_0^t F(X^x)_{s-}dZ_s$$

avec $H^x_t = x + A(0)(Z_t-Z_0)$ et $F(Y)_t = A(Y_t)-A(0)$ pour tout processus Y càdlàg . De même, la différence X^x-X^y de deux solutions de (2) est solution en y, pour x fixé, de l'équation du type (1)

(4) $$\bar{X}_t = y-x + \int_0^t \bar{F}(\bar{X})_{s-}dZ_s \quad \text{avec } \bar{X}_t=X^y_t-X^x_t \text{ , } \bar{F}(Y)=F(X^x+Y)-F(Y)=A(X^x+Y)-A(X^x)$$

---

1. L'intégrale est sur $]0,t]$, de sorte que la valeur initiale de Z est indifférente. On pourrait la supposer nulle.
2. Toutefois, considérons l'équation (1) générale $X^x_t=H^x_t+\int_0^t F(X^x_s)_-dZ_s$, où x parcourt un $\mathbb{R}^k$ et l'application $x \mapsto H^x$ est lipschitzienne au sens de la convergence uniforme. Le même raisonnement montrera qu'il en existe une version à trajectoires <u>continues en x</u>.

Le principe de la méthode de Doléans-Dade et Emery consiste alors à

- choisir un exposant p (ici, on choisira p>n), et travailler dans l'espace $\underline{\underline{S}}^p$ des processus càdlàg. adaptés (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^m$) Y, tels que $|Y|^* \in L^p$ (1).
- Supposer la norme de la semimartingale Z petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$: plus précisément, majorée par une quantité k(c,p) dépendant de l'exposant p et de la constante de Lipschitz c de F, et dont la valeur ne nous intéresse pas.

Dans ces conditions, on a la majoration fondamentale (lemme 3, p. 248)

(5) $$\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq 2\| H \|_{\underline{\underline{S}}^p}$$

et de plus X peut se construire par la méthode du point fixe (la constante 2 n'a aucune signification particulière : elle dépend du choix explicite des normes, sur $\underline{\underline{H}}^\infty$ et les espaces $\underline{\underline{S}}^p$ matriciels, utilisées par Emery).

Ensuite, on s'affranchit de la restriction sur Z, en construisant une suite croissante de temps d'arrêt T_n , telle que $T_0=0$, $T_n \uparrow \infty$, et qui " découpent Z en tranches petites dans $\underline{\underline{H}}^\infty$ " : chacune des semimartingales Z^n égales à

$$0 \text{ pour } t<T_n \;,\; Z_t - Z_{T_n} \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1}$$
$$Z^{T_{n+1}-} - Z^{T_n} \text{ pour } t \geq T_{n+1}$$

a une norme $\leq$ k(c,p) dans $\underline{\underline{H}}^\infty$. La solution globale se construit alors par récurrence sur n : le processus $X^1 = X^{T_1-}$ satisfait une équation du type (1) par rapport à Z^1, puis le processus $X^{T_2-} - X^1 = X^2$ satisfait une équation du type (1) par rapport à Z^2, etc. Ce raccordement des solutions ne présente que des difficultés de notation, et <u>en général nous le laisserons de côté dans la suite</u>.

UN THEOREME DE NEVEU

La clef de tous les résultats de différentiabilité est un résultat de <u>continuité</u> de la solution par rapport à la donnée initiale x. Ce résultat a été établi par Neveu dans son cours de 3e cycle " Equations différentielles stochastiques et applications" , Paris 1973, pour les équations (2) du type classique (i.e. gouvernées par des termes en dB_t et dt).

THEOREME 1. <u>Dans l'équation (2), supposons que les coefficients</u> $a^i_\alpha(.)$ <u>soient lipschitziens sur</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Alors il existe une fonction</u> X(t,ω,x) <u>sur</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

1) <u>Pour tout</u> x, <u>le processus</u> $X^x_t(\omega) = X(t,\omega,x)$ <u>est solution de</u> (2).

2) <u>Pour presque tout</u> ω, <u>l'application</u> $x \mapsto X(.,\omega,x)$ <u>de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}^n)$ <u>est continue</u>.

1. Ces espaces sont appelés R^p dans la nouvelle édition du livre "probabilités et potentiel". Nous gardons ici les notations d'Emery.

[On désigne par $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\underline{\underline{D}}([0,t],\mathbb{R}^n)$) l'espace des applications càdlàg. de $\mathbb{R}$ (resp. $[0,t]$) dans $\mathbb{R}^n$, avec la convergence compacte (uniforme)]

DEMONSTRATION. Conformément à ce que nous avons dit au début, nous laisserons de côté les problèmes de raccordement[1], et raisonnerons seulement dans le cas où Z est très petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, de sorte que l'estimation (5) est valable. D'après celle-ci, appliquée à la différence $X^x - X^y$ (cf. (4)) on a

$$E[(\sup_s |X^y_s - X^x_s|)^p] \leqq 2^p |x-y|^p$$

Comme $p>n$, nous sommes dans les conditions d'applications du lemme de Kolmogorov, dont voici l'énoncé :

Soit Δ l'ensemble des dyadiques de $\mathbb{R}^n$, et soit E un espace métrique complet pour une distance d. Pour tout $x\in\Delta$, soit ξ_x une v.a. à valeurs dans E. On suppose qu'il existe des constantes $\varepsilon>0$, $C>0$, $p>n$ telles que

$$E[d(\xi_x,\xi_y)^\varepsilon] \leqq C|x-y|^p$$

Alors, pour presque tout ω, l'application $x \mapsto \xi_x(\omega)$ sur Δ est prolongeable en une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans E.

Ici, nous appliquons cela avec $E=\underline{\underline{D}}([0,\infty],\mathbb{R}^n)$, $\xi_x(\omega)=X(.,\omega,x)$. Pour obtenir l'énoncé, il suffit de vérifier que le prolongement est solution de (2) pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, et non seulement pour $x\in\Delta$: c'est très facile.

REMARQUE. Supposant toujours Z petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, on peut démontrer un résultat un peu meilleur. Nous avons en effet $X^y_t - X^x_t = y-x + \int_0^t (A(X^y_{s-})-A(X^x_{s-}))dZ_s$ et $\|A(X^y)-A(X^x)\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leqq c\|X^y-X^x\|_{\underline{\underline{S}}^p}$ (condition de Lipschitz). Or nous avons (Emery, prop. 1 p. 244) $\|U\cdot Z\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq c_p \|U\|_{\underline{\underline{S}}^p}\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$, d'où finalement, par (5), une inégalité $\|X^x-X^y\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq c|x-y|$, et $\|X^x-X^y\|^p_{\underline{\underline{H}}^1} \leqq c|x-y|^p$. On applique alors le lemme de Kolmogorov dans l'espace $\underline{\underline{H}}^1$ de semimartingales (d'où par ex. l'existence de versions continues en x pour la partie martingale et la partie à variation finie de X^x séparément. Attention : le raccordement des parties martingales ne se fait pas bien si Z n'est pas continue, de sorte qu'on ne peut globaliser ce résultat sans précaution).

Supposons maintenant que les coefficients de l'équation (2) soient seulement localement lipschitziens, et montrons qu'il existe alors une solution, peut être explosive, mais " aussi continue que possible" .

Nous considérons une suite (h_i) de fonctions C^∞ à support compact, comprises entre 0 et 1, tendant vers 1 en croissant de telle sorte que les intérieurs des compacts $U_i=\{h_i=1\}$ recouvrent $\mathbb{R}^n$. Pour chaque i, soit $X_i(t,\omega,x)$ la solution continue, fournie par le théorème 1, de l'équation différentielle lipschitzienne obtenue en remplaçant la matrice A(x)

1.Il faut un peu d'attention pour les sauts aux instants de raccordement.

par la matrice $h_i(x)A(x)$. Soit aussi $S_i(\omega,x)=\inf\{t : X^i(t,\omega,x)\notin U_i\}$.
Pour tout i, et tout x fixé, on a p.s.

(*) $\qquad X^i(.,\omega,x)=X^{i+1}(.,\omega,x)$ sur $[0,S_i(\omega,x)[$

ces deux processus étant solutions de la même équation sur cet intervalle. Jetant hors de Ω un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer que (*) a lieu identiquement, pour tout i, tout ω et tout x rationnel. On a alors la même propriété pour tout $y\in\mathbb{R}^n$. En effet, si des y_n rationnels convergent vers y, on a $S_i(\omega,y)\leq \liminf_n S_i(\omega,y_n)$, et la relation (*) écrite pour les y_n passe à la limite.

En particulier, on a $S_i(\omega,x)\leq S_{i+1}(\omega,x)$. Si nous notons $\zeta(\omega,x)$ la limite de cette suite, nous avons les propriétés suivantes

- $\zeta(\omega,.)$ est s.c.i. et partout >0 ;
- il existe sur $[0,\zeta(\omega,x)[$ une fonction $X(.,\omega,x)$ unique, qui est égale à $X^i(.,\omega,x)$ sur $[0,S_i(\omega,x)[$ pour tout i ;
- Sur $[0,\zeta(\omega,x)[$, $X(.,\omega,x)$ satisfait à l'équation (2). En effet, on a sur $[0,S_i(\omega,x)[$ $X(.,\omega,x)=X^i(.,\omega,x)\in U_i$, donc $h_i(X^i(.,\omega,x))=1$, et X^i satisfait à (2) sur l'intervalle.
- L'une des quantités $X(S_i(\omega,x),\omega,x)$, $X(S_i(\omega,x)-,\omega,x)$ appartient à U_i^c. En effet, posons $S_i(\omega,x)=s$, $X(s-,\omega,x)=X^i(s-,\omega,x)=u$, et supposons $u\in U_i$. Alors $h_i(u)=1$, et les deux processus ont même saut à l'instant s, et donc aussi la même valeur : celle ci appartient à U_i^c par définition de S_i.

Il est clair d'après la dernière propriété que ζ joue bien le rôle d'une "durée de vie" : la trajectoire s'éloigne à l'infini à cet instant, sur l'ensemble $\{\zeta<\infty\}$. Si x est tel que $\zeta(\omega,x)>t$, d'autre part, on peut affirmer que $\zeta(\omega,y)>t$ pour y suffisamment voisin de x, et que $X(.,\omega,y)$ converge uniformément vers $X(.,\omega,x)$ sur $[0,t]$ lorsque $y\to x$. Le résultat est donc aussi satisfaisant que possible.

Je ne suis pas parvenu à démontrer la conjecture suivante : si pour tout x il existe une solution non explosive, alors pour presque tout ω on a $\zeta(\omega,.)=+\infty$. Il se pourrait bien qu'elle soit fausse : cela signifierait que la fonction $X(.,\omega,.)$ a des "pôles" pour certaines valeurs de (t,x), si aigus et mobiles que pour x fixé on ne passe p.s. pas par un "pôle". Remarquer cependant que la fonction $\zeta(\omega,.)$ est s.c.i. et strictement positive, donc localement bornée inférieurement : il existe donc pour t petit toute une bande sans "pôles" , et leur apparition ultérieure est un peu contraire à l'intuition.

Nous passons à l'étude de la différentiabilité, due pour l'essentiel à Malliavin.

LE THEOREME DE DIFFERENTIABILITE

Nous noterons $U(t,\omega,x,u)$ la dérivée de $X(t,\omega,.)$ dans la direction du vecteur u, si elle existe, c'est à dire

$$U(t,\omega,x,u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(X(t,\omega,x+\varepsilon u)-X(t,\omega,x))$$

et en particulier, la k-ième dérivée partielle de $X(t,\omega,.)$ sera notée $U\ (t,\omega,x\ )$. Un calcul formel montre que le couple (X,U) devrait être solution de l'équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$(6)\qquad \begin{aligned} X^i_t &= x^i + \int_0^t a^i_\alpha(X_{s-})dZ^\alpha_s \\ U^i_t &= u^i + \int_0^t D_k a^i_\alpha(X_{s-})U^k_{s-}dZ^\alpha_s \end{aligned} \qquad \text{convention de sommation en } k \text{ et } \alpha$$

qui est du même type que (1), mais avec deux nuances importantes : d'une part, X étant calculé, la seconde équation est <u>linéaire</u> en U, donc particulièrement excellente. D'autre part, si l'on considère (6) comme une équation différentielle stochastique du type (1), celle-ci n'est <u>jamais</u> globalement lipschitzienne.

Le théorème 2 s'étendra immédiatement aux ordres de différentiabilité supérieurs.

THEOREME 2. <u>On suppose les coefficients</u> a^i_α <u>pourvus de dérivées partielles d'ordre 1 localement lipschitziennes</u> (donc localement lipschitziens !). <u>Alors, pour presque tout</u> ω, <u>la fonction</u> $X(t,\omega,x)$ <u>possède les propriétés suivantes</u> :

1) <u>Pour tout</u> t, $X(t,\omega,.)$ <u>est continûment dérivable</u>[1] <u>dans l'ouvert</u> $\{x: \zeta(\omega,x)>t\}$
2) <u>Si l'on note</u> $U_k(t,\omega,x)$ <u>sa</u> k-<u>ième dérivée partielle</u>, <u>et</u> $U(t,x,\omega,u) = \Sigma_k u^k U_k(t,\omega,x)$, <u>alors pour tout</u> (x,u) <u>le processus</u> $(X(.,\omega,x),U(.,\omega,x,u))$ <u>est càdlàg identiquement, et solution de</u> (6) <u>sur</u> $[0,\zeta(.,x)[$.

DEMONSTRATION. Nous fixons une constante N. L'ouvert $\{\zeta(\omega,.)>N\}$ étant réunion dénombrable de boules fermées de centre et de rayon rationnels, il nous suffit de démontrer que

Pour toute boule fermée B (de centre et de rayon rationnels, mais peu importe), pour presque tout ω <u>tel que</u> $\zeta(\omega,x)>N$ <u>pour tout</u> $x\in B$, la fonction $X(t,\omega,.)$ est continûment dérivable [1].

Soit J l'événement { pour tout $x\in B$, $\zeta(\omega,x)>N$}. D'après le théorème 1, pour tout $\omega\in J$ l'ensemble des trajectoires $X(.,\omega,x)$ sur $[0,N]$, x parcourant B, est compact dans $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}^n)$, donc contenu dans une boule $B(0,R)$ pour R assez grand. Nous pouvons donc nous borner à raisonner sur les ω tels que cette propriété ait lieu <u>avec R fixé</u>. Désignons par H l'ensemble de ces ω, et

1. En fait, on démontre un peu mieux : l'application qui à x associe la trajectoire $X(.,\omega,x)\in\underline{\underline{D}}([0,t],\mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 sur $\{\zeta(\omega,.)>t\}$.

remplaçons - sans changer de notation - la loi P par la loi conditionnelle P_H (sous laquelle Z est restée une semimartingale). Nous pouvons donc établir le théorème sous les deux hypothèses supplémentaires suivantes

Pour tout $x \in B$, on a $\zeta(\omega,x)>N$, et la trajectoire $X(.,\omega,x)$ reste dans $B(0,R)$ sur $[0,N]$.

Remplaçons alors - toujours sans changer de notation - les fonctions a^i_α par ha^i_α , où h est C^∞ à support compact, égale à 1 sur $B(0,R)$, et Z par la semimartingale arrêtée Z^N : nous nous trouvons ramenés à <u>l'étude sur</u> $[0,\infty[$, <u>dans le cas globalement lipschitzien</u> .

Enfin, comme dans la démonstration du théorème 1, nous pouvons supposer la norme de Z arbitrairement petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, quitte à faire ensuite un recollement - que nous négligerons comme plus haut.

Commençons alors la démonstration proprement dite. Nous allons résoudre l'équation différentielle stochastique

$$U^i_k(t,\omega,x) = \delta^i_k + \int_0^t D_k a^i_\alpha(X^x_{s-})U^k_{s-}dZ^\alpha_s \tag{7}$$

où X^x est déjà connu, et montrer qu'il en existe une version càdlàg. dépendant continûment de x (même, $x \longmapsto U_k(.,\omega,x)$ continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}^n)$.

Nous montrerons ensuite que $U_k(t,\omega,.)$ est dérivée partielle k-ième de $X_k(t,\omega,.)$, au sens des distributions, pour t rationnel fixé. Il en résultera, puisque nous avons déjà établi la continuité , que l'application $x \longmapsto X(.,\omega,x)$ à valeurs dans $\underline{\underline{D}}(\mathbb{R}^n)$ est fortement différentiable, et admet comme différentielle $U = \Sigma_k u^k U_k$.

1) <u>Continuité de</u> U_k <u>en</u> x . Posons $V_s(\omega)= U_k(s,\omega,y)-U_k(s,\omega,x)$. Alors

$$\begin{aligned} V^i_t &= \int_0^t (D_j a^i_\alpha(X^x_{s-})U^{jx}_{ks-} - D_j a^i_\alpha(X^y_{s-})U^{jy}_{ks-})dZ^\alpha_s \\ &= \int_0^t (D_j a^i_\alpha(X^x_{s-}) - D_j a^i_\alpha(X^y_{s-}))U^{jx}_{ks-}dZ^\alpha_s + \int_0^t D_j a^i_\alpha(X^y_{s-})V^j_{s-}dZ^\alpha_s \\ &= H^i_t + \int_0^t V^i_{s-}dY^i_{ks} \quad , \text{ avec } \quad Y^i_{ks} = \int_0^s D_k a^i_\alpha(X^y_{s-})dZ^\alpha_s \end{aligned}$$

Soit C une borne des $D_k a^i_\alpha$ sur $B(0,R)$; alors les Y^i_{ks} sont dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, avec une norme $\leq C_1\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ (C_1 s'exprime en fonction de C et de la dimension m). Donc la majoration fondamentale (5) nous donne (la fonctionnelle est ici l'identité, donc lipschitzienne de rapport 1)

$$\|V\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq C_2\|H\|_{\underline{\underline{S}}^p} \quad \text{(si } \|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \text{ est assez petit)}$$

Revenons à l'expression de H comme intégrale stochastique : on a d'après les inégalités de base (Emery, prop. 1)

$$\|H\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq C_3\|J\|_{\underline{\underline{S}}^p}\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \qquad \text{où } \quad J^i_{\alpha s} = (D_j a^i_\alpha(X^y_{s-}) - D_j a^i_\alpha(X^x_{s-}))U^{jx}_{ks-}$$

Si donc nous pouvons prouver une inégalité du genre $\|J\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq c|x-y|$, nous aurons $\|V\|^p_{\underline{\underline{S}}^p} \leq C_4|x-y|^p$, et le lemme de Kolmogorov nous donnera à nouveau le résultat de continuité cherché.

Pour majorer $\|J\|_{\underline{\underline{S}}^p}$, il nous suffit de savoir majorer les normes dans $\underline{\underline{S}}^{2p}$ des processus

$$D_j a^i_\alpha(X^y_s) - D_j a^i_\alpha(X^x_s) \qquad \text{et} \qquad U^{jx}_{ks}$$

et d'appliquer l'inégalité de Schwarz. Pour le premier, nous appliquons le caractère lipschitzien des $D_j a^i_\alpha$ sur B(0,R), et la majoration de $|X^y - X^x|$ dans $\underline{\underline{S}}^{2p}$ donnée par le théorème 1 (nous nous sommes ramenés au cas globalement lipschitzien ! Noter aussi que l'exposant p a doublé, et il faut découper Z en morceaux plus petits). Pour le second, nous écrivons que U^{jx}_{kt} est solution d'une équation exponentielle

$$U^{jx}_{kt} = \delta^j_k + \int_0^t U^{ix}_{ks-} dY^j_{is} \quad , \quad Y^j_{it} = \int_0^t D_i a^j_\alpha(X^x_s) dZ^\alpha_s$$

Or les Y sont petits dans $\underline{\underline{H}}^\infty$ (déjà vu plus haut), la donnée initiale est de norme ≤ 1 , donc la norme de U^{jx}_k est uniformément bornée.

2) <u>Dérivabilité faible de</u> X(t,ω,.). Avant d'établir cela, faisons une remarque : l'existence de versions continues de $U_k(t,\omega,.)$ jusqu'à la durée de vie étant complètement établie, nous pouvons <u>ajouter</u> à notre construction du début, par conditionnement, la propriété que les $|U_k(s,\omega,x)|$ sont eux aussi bornés par R pour $s \leq N$, $x \in B$, comme nous l'avons fait pour les $|X(s,\omega,x)|$.

Emery a démontré la convergence de la méthode de Cauchy pour la solution des équations différentielles stochastiques : désignons par $\overset{n}{Z}$ la semimartingale qui vaut $Z_{k.2^{-n}}$ sur $[k.2^{-n},(k+1).2^{-n}[$, et par $\overset{n}{X}$, $\overset{n}{U}$ les solutions correspondantes de (6). La relation

$$D_k \overset{n}{X}(t,\omega,.) = \overset{n}{U}_k(t,\omega,.)$$

est évidente, car notre "équation différentielle" (6) est alors triviale, tout s'exprimant par des sommes finies, que l'on dérive en x terme à terme. Le théorème sera donc établi si nous prouvons que, le long d'une sous-suite convenable, on a p.s.

$$\overset{n}{X}(t,\omega,.) \to X(t,\omega,.) \quad , \quad \overset{n}{U}_k(t,\omega,.) \to U_k(t,\omega,.)$$

au sens des distributions.

Pour la simplicité des notations, nous ne démontrerons que le résultat concernant X, mais il vaudra en fait aussi pour (X,U) tout entier. En effet, d'après notre hypothèse auxiliaire concernant U , le processus (X,U) tout entier <u>prend ses valeurs dans un compact</u>, et satisfait donc à une équation à coefficients globalement lipschitziens.

Nous appliquons le résultat d'Emery concernant la convergence de la méthode de Cauchy (prop. 5, p. 252) sur l'espace élargi $\bar{\Omega}=\mathbb{R}^n\times\Omega$, muni de la mesure produit $\bar{P}=\lambda\times P$, où λ est la mesure de Lebesgue normalisée sur la boule $B(0,R)$ où le processus X prend ses valeurs. On désigne par j la projection de $\bar{\Omega}$ sur $\mathbb{R}^n$, par π la projection sur Ω, et comme d'habitude on désigne par la même notation une fonction h sur Ω, et la fonction $h\circ j$ sur $\bar{\Omega}$. On adjoint à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ la tribu indépendante engendrée par j, et on considère l'équation différentielle stochastique sur $\bar{\Omega}$

$$X_t = j + \int_0^t F(X)_{s-}dZ_s$$

dont la solution est $X(t,\pi(\bar{\omega}),j(\bar{\omega}))$. Le théorème d'Emery affirme que (la norme de Z étant petite dans $\underline{\underline{H}}^{\infty}$), X^n-X tend vers 0 dans $\underline{\underline{S}}^p$ sur $\bar{\Omega}$. Par conséquent, pour une suite (n_k) convenable

$$\Sigma_k \ \sup_t \ | X^{n_k}(t,\omega,x)-X(t,\omega,x)| \ \in L^1(\lambda(dx)\times P(d\omega))$$

Notant $\Sigma(\omega,x)$ cette fonction, nous avons pour presque tout ω $\Sigma(\omega,.)\in L^1(\lambda)$. Alors $X^{n_k}(t,\omega,.) \rightarrow X(t,\omega,.)$ λ-p.p. en restant borné par $\Sigma(\omega,.)+|X(t,\omega,.)|$, qui est intégrable sur la boule $B(0,R)$, et donc nous avons bien la convergence au sens des distributions.

Cette démonstration me gêne un peu, car l'argument de conditionnement que nous avons utilisé pour nous ramener au cas borné est typiquement "semimartingalesque" et ne s'applique pas au mouvement brownien. Je ne sais pas comment les autres auteurs s'en tirent (sauf Malliavin, dont la méthode repose sur des estimations browniennes beaucoup plus précises). Peut être existe t'il une démonstration plus simple ?

LE THEOREME D'INJECTIVITE

Nous laissons de côté la différentiabilité, et revenons à l'équation (5) sous l'hypothèse lipschitzienne locale. L'exemple des équations différentielles ordinaires suggère la question suivante : les trajectoires $X(.,\omega,x)$ et $X(.,\omega,y)$ issues de valeurs initiales différentes peuvent elles se rencontrer ? A priori, un résultat de non-confluence de trajectoires peut revêtir deux formes probabilistes :

Forme faible : pour x et y distincts et fixés, $P\{\omega : \exists t, X(t,\omega,x)=X(t,\omega,y)\}$ est nulle.

Forme forte : pour presque tout ω, l'application $x\mapsto X(t,\omega,x)$ est injective pour tout t.

Ces deux énoncés sont à modifier légèrement lorsqu'il y a une durée de vie finie. Il n'y a aucun espoir d'établir la forme forte de la non-confluence dans le cas où Z est discontinue (par exemple, pour l'équation exponentielle à une dimension , $X_t = x + \int_0^t X_{s-}dZ_s$, toutes les trajectoires confluent en 0 après le premier saut de Z égal à -1). Cela tient au phénomène suivant : plaçons nous en un temps d'arrêt T. Alors

(8) $\quad X_T^y - X_T^x = X_{T-}^y - X_{T-}^x + (a_\alpha(X_{T-}^y) - a_\alpha(X_{T-}^x))\Delta Z_T^\alpha$

(sommation en α comme d'habitude). Si pour un ω donné l'équation $v-u + (a_\alpha(v)-a_\alpha(u))\Delta Z_T^\alpha = 0$ admet une solution (u,v) avec $u\neq v$, il suffira de déterminer x et y tels que $X_{T-}^x(\omega)=u$, $X_{T-}^y(\omega)=v$ pour observer une confluence de trajectoires. En revanche, la forme faible peut être espérée : en effet, pour x et y fixés (8) est une liaison $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable imposée au saut ΔZ_T , i.e. une restriction imposée à la mesure de Lévy de Z : si celle-ci est "très diffuse", on peut penser que les trajectoires issues de x et y ne se rencontreront pas.

Après ces considérations heuristiques, revenons au cas vraiment intéressant et supposons Z continue. La forme faible de l'injectivité a été établie indépendamment par Emery (sém. XIV) et Uppman[1] . La forme forte a été établie, pour les équations classiques, par Malliavin, Bismut. Pour les équations générales, nous suivons toujours l'exposé de Kunita à Durham (résultats de Kunita et Varadhan) .

THEOREME 3. Les coefficients a_α^i sont supposés localement lipschitziens, et la semimartingale Z continue. Alors pour presque tout ω, la fonction $X(t,\omega,x)$ possède la propriété suivante :

si x et y sont deux éléments distincts de l'ouvert $\{\zeta(\omega,.)>N\}$, on a $\inf_{s\leq N} |X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)|>0$.

DEMONSTRATION. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des réunions finies de cubes fermés à centre et côté rationnel. Il nous suffit de démontrer que, pour tout élément K de $\mathcal{K}$, on a la propriété suivante :

pour presque tout ωeK tel que $\zeta(\omega,u)>N$ pour tout élément de K , on a $\inf_{s\leq N} |X(s,\omega,x)-X(s,\omega,y)| > 0$ pour tout couple (x,y) d'éléments de K.

Ayant ainsi fixé K compact, et N, nous faisons un travail préparatoire comme pour le théorème 2 : on peut se ramener au cas où les coefficients a_α^i sont globalement lipschitziens (et la durée de vie est donc infinie). On n'a pas besoin d'une préparation plus raffinée.

Nous adoptons alors les notations suivantes : p est un exposant positif suffisamment grand et fixé (p>6n par exemple), et q=-p ; ε est un nombre, d'abord >0, puis nul à la fin de la démonstration, et $r(x)=(\varepsilon+|x|^2)^{1/2}$. Nous désignons par C une quantité qui peut varier de place en place, dépendre des coefficients a_α^i , des dimensions, et de p, mais non de ε. Nous posons enfin

$$W_t^{xy} = X_t^y - X_t^x = y-x + \int_0^t H_{\alpha s} dZ_s^\alpha \quad , \quad H_{\alpha s} = a_\alpha(X_s^y) - a_\alpha(X_s^x)$$

Voici l'estimation fondamentale .

1. A. Uppman, CRAS Paris, t. 290 (1980), p. 661-664.

LEMME. Pour $x\in K$, $y\in K$, on a

(9) $$E[\ \sup_{s\leqq N} r^q(W_s^{xy})\ ] \leqq C|x-y|^q$$

à condition que $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leqq C$, suffisamment petit.

Montrons d'abord comment ce lemme entraîne le théorème. Tout d'abord, la restriction concernant $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ ne nous gêne pas : on s'y ramène en découpant Z en tranches. Faisant tendre ε vers 0 dans (9), nous voyons que, pour x et y fixés, W^{xy} ne s'annule pas sur $[0,N]$, et nous pouvons donc poser pour $u=(x,y)$, $x\neq y$, et $t\leqq n$

$$M_t^u = |X_t^y-X_t^x|^{-1}$$

Nous allons appliquer le lemme de Kolmogorov à M^u dans $K\times K$ privé de la bande $|x-y|<\delta$ autour de la diagonale : il en résultera que pour presque tout ω $\sup_{(x,y)\in K\times K,|x-y|\geq\delta} \sup_{s\leqq N} |X_s^y-X_s^x|^{-1} < \infty$, le résultat cherché. Considérons donc $u=(x,y)$, $u'=(x',y')$; un calcul simple montre que

$$|M_s^u-M_s^{u'}| \leqq (\ |X_s^y-X_s^{y'}|+|X_s^x-X_s^{x'}|\ )\ |X_s^y-X_s^x|^{-1}|X_s^{y'}-X_s^{x'}|^{-1}$$

Nous passons au $\sup_s$ sur $[0,N]$, et appliquons l'inégalité de Hölder avec des exposants égaux à p. Il vient

$$E[(\ \sup_s\ |M_s^u-M_s^{u'}|\ )^{p/3}]^{3/p} \leqq \|\ldots\|_{L^p}E[\sup_s\ r^q(W_s^{xy})]^{1/p}E[\sup_s\ r^q(W_s^{x'y'})]^{1/p}$$

Les deux derniers termes se majorent par (9), et restent uniformément bornés si $|x-y|\geqq\delta$, $|x'-y'|\geqq\delta$. Le premier terme est relatif à un exposant p positif, et le calcul fait pour le théorème 1 (rappelons que nous nous sommes ramenés au cas lipschitzien) nous permet de le majorer par $C(|x-x'|+|y-y'|)\leqq C|u-u'|$. Elevant alors à la puissance $p/3$, nous pouvons appliquer l'énoncé rappelé avec le th. 1, avec l'exposant $p/3$ dans les deux membres, et comme $p/3>2n$, la dimension de l'espace, on peut conclure.

Il reste donc à prouver (9). Pour cela, nous appliquons la formule du changement de variables à la fonction r^q, qui est de classe C^2 et bornée lorsque $\varepsilon>0$:

(10) $$r^q(W_t) = r^q(x-y) + \Sigma_i\int_0^t D_ir^q(W_s)dW_s^i + \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij}\int_0^t D_{ij}r^q(W_s)d\langle W^i,W^j\rangle_s$$

Désignons par V^i , V^{ij} les termes au second membre. Si nous pouvons montrer pour chacun d'eux une inégalité du type

(11) $$E[\ \sup_s|V_s^i|\ ] \leqq CE[\ \sup_s\ r^q(W_s)\ ]\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \qquad (\text{ de même pour } V^{ij}\ )$$

nous aurons pour le côté gauche de (9), que nous notons A pour simplifier

$$A \leqq r^q(x-y) + CA\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$$

donc l'inégalité (9) si $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ est assez petit (on sait que $A<\infty$, car r^q est bornée) Prouvons donc (11). Pour cela on écrit $D_ir(x) = x^i/r$, donc $D_ir^q(x)=qr^{q-2}(x)x^i$, et $D_{ji}r^q(x)=q(q-2)r^{q-4}(x)x^ix^j +qr^{q-2}(x)\delta_i^j$.

On en tire des majorations du type $|D_i r^q| \leq C r^{q-1}$, $|D_{ij} r^q| \leq C r^{q-2}$. Les termes du premier type (V^i) s'écrivent alors

$$\Sigma_\alpha \int_0^t D_i r^q(W_s) H^i_{\alpha s} dZ^\alpha_s \quad \text{où} \quad |D_i r^q(W_s)|\,|H^i_{\alpha s}| \leq C r^{q-1}(W_s)|W_s| \leq C r^q(W_s)$$

(condition de Lipschitz), et l'inégalité (11) est conséquence de (5) écrite pour p=1.

Les termes du second type (V^{ij}) s'écrivent de même

$$\Sigma_{\alpha\beta} \int_0^t D_{ij} r^q(W_s) H^i_{\alpha s} H^j_{\beta s} d\langle Z^\alpha, Z^\beta\rangle_s$$

dont le sup sur $[0,N]$ est majoré par

$$(\sup_{s\leq N} |D_{ij} r^q(W_s) H^i_{\alpha s} H^j_{\beta s}|).\int_0^N |d\langle Z^\alpha, Z^\beta\rangle_s|$$

Par définition de la norme $\underline{\underline{H}}^\infty$, le second facteur est <u>majoré p.s.</u> par une constante $C\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$. Quant au second facteur, il est majoré par $C\sup_{s\leq N} r^q(W_s)$ pour les mêmes raisons que ci-dessus. Le théorème est établi.

REMARQUE SUR LE CAS DISCONTINU. Si l'on ne fait pas l'hypothèse de continuité de Z, la formule (10) est modifiée de la manière suivante : une modification triviale (remplacement de W_s par W_{s-} , de $d\langle W^i, W^j\rangle_s$ par $d[W^i, W^j]^c_s$) qui n'altère pas ce qui précède, et une modification non triviale, i.e. l'addition du terme de sauts

$$V_t = \Sigma_{s\leq t}(r^q(W_s) - r^q(W_{s-}) - \Sigma_i D_i r^q(W_{s-})\Delta W^i_s)$$

Supposons que nous puissions établir pour V_t une inégalité comparable à (11) ; nous pourrons alors par le même raisonnement établir le théorème d'injectivité <u>lorsque</u> $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ <u>est assez petit</u> (sous les hypothèses auxiliaires de la démonstration : condition de Lipschitz globale).Il est vrai, comme on l'a dit au début, que les sauts interdisent de raccorder les injectivités locales. Mais précisément, on démontre ainsi un résultat général qui a peut être un intérêt : <u>dans le cas discontinu, les confluences de trajectoires ne peuvent se produire qu'en des instants de sauts de la semimartingale directrice</u> Z. (Uppman avait déjà remarqué cela).

Prouvons donc l'inégalité relative à V_t : nous écrivons

$$(12) \qquad |r^q(W_s) - r^q(W_{s-}) - \Sigma_i D_i r^q(W_{s-})\Delta W^i_s| \leq C|\Delta W_s|^2 \sup_{\substack{i j\\ x\in I_s}} |D_{ij} r^q(x)|$$

où I_s est le segment d'extrémités W_{s-}, W_s . Majorant $|D_{ij} r^q|$ par Cr^{q-2}, et remarquant que le maximum de $r^{q-2}(x)$ est atteint à l'une des extrémités du segment, et que $\Delta W_s = \Sigma_\alpha H^i_{\alpha s}\Delta Z^\alpha_s$, avec $|H^i_{\alpha s}| \leq C|W_{s-}| \leq Cr(W_s)$, il nous reste pour le côté gauche de (12) une majoration du type

$$C(r^{q-2}(W_s) \vee r^{q-2}(W_{s-}))r^2(W_{s-})|\Delta Z_s|^2$$

qui se majore simplement par $\sup_{s\leq N} r^q(W_s).|\Delta Z_s|^2$. Il ne reste plus qu'à sommer en s sur $[0,N]$.

LE COMPORTEMENT À L'INFINI

Nous continuons à présenter les résultats de Kunita. Nous supposons les coefficients $a^i_\alpha(x)$ globalement lipschitziens, et nous allons continuer les calculs précédents, avec $\varepsilon>0$ fixé ($\varepsilon=1$ par exemple). La condition de Lipschitz globale va intervenir seulement par le fait que

(12) $\quad |a^i_\alpha(x)| \leq Cr(x) \quad$ (car $|a^i_\alpha(x)-a^i_\alpha(0)|\leq c|x|$!)

> Il est d'ailleurs classique que la condition de Lipschitz locale, et la condition précédente, entraînent l'absence d'explosion pour x fixé. En regardant d'un peu plus près la démonstration du théorème 1, on peut montrer qu'elle entraîne que p.s. $\zeta(\omega,x)$ ∞ identiquement. Nous laisserons cette question de côté, et resterons sous l'hypothèse lipchitzienne globale pour simplifier.

Notre but est de montrer

THEOREME 4. Sous les hypothèses précédentes, on a pour tout N fini, et pour presque tout ω

$$\lim_{x\to\infty} \inf_{s\leq N} |X(s,\omega,x)| = +\infty$$

DEMONSTRATION. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que la valeur initiale x est prise hors d'une boule fixe B, et que les coefficients $a^i_\alpha(x)$ sont nuls sur B. Les trajectoires $X(.,\omega,x)$ ne dépassent alors jamais la frontière de B, et nous pourrons considérer tranquillement le processus $1/X^x_t$. Notons enfin que notre procédé usuel de raccordement permet de se ramener au cas où $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}\leq C$, constante à choisir.

LEMME. Soit $q<0$. On a pour $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ suffisamment petit

(13) $\quad E[\ \sup_s r^q(X^x_s)\ ] \leq Cr^q(x)$

Appliquons en effet la formule du changement de variables

$$r^q(X^x_t) = r^q(x) + \Sigma_{i\alpha} \int_0^t D_i r^q(X^x_s)a^i_\alpha(X^x_s)dZ^\alpha_s$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma_{ij\alpha\beta} \int_0^t D_{ij}r^q(X^x_s)a^i_\alpha a^j_\beta(X^x_s)d\langle Z^\alpha,Z^\beta\rangle_s$$

on applique les inégalités $|D_i r^q|\leq Cr^{q-1}$, $|D_{ij}r^q|\leq Cr^{q-2}$, $|a^i_\alpha|\leq Cr$, et on procède comme dans la démonstration précédente.

Passons à la démonstration proprement dite. Posons $M^x_t = 1/r(X^x_t)$ sorte que $|M^x_t-M^y_t| \leq |X^x_t-X^y_t|r(X^x_t)^{-1}r(X^y_t)^{-1}$. Passons au sup en t, appliquons une inégalité de Hölder avec des exposants égaux à $p>3n$, le lemme avec $q=-p$ et l'inégalité (5). Il vient

$$E[\ \sup_t |M^x_t-M^y_t|^{p/3}]^{3/p} \leq C|x-y||x|^{-1}|y|^{-1}$$

du côté droit nous avons une distance $d(x,y)$ compatible avec la topologie du compactifié d'Alexandrov de B^c, et si l'on ajoute le lemme, on a la même inégalité au point à l'infini compris. Ce compactifié s'identifiant à une calotte sphérique, on peut appliquer le lemme de Kolmogorov à l'infini, et le théorème en résulte aussitôt.

REMARQUE. Comme dans la démonstration du théorème 3, la première partie de la démonstration marche aussi lorsque Z est discontinue. Mais le raccordement ne marche pas bien, comme le montre l'exemple de l'application exponentielle : si Z a un saut égal à -1 à l'instant t, on a $X_s^x(\omega)=0$ pour tout x si $s \geqq t$, et donc $X_s^x(\omega)$ ne s'éloigne pas à l'infini lorsque $x \to \infty$.

APPLICATION. Restons toujours sous les hypothèses précédentes, et donnons le merveilleux raisonnement dû à Kunita, qui va permettre d'établir aussi la surjectivité de l'application $X(t,\omega,.)$ pour t fixé (t est arbitraire, et peut donc dépendre de ω).

- l'application $X(t,\omega,.)=f(.)$ est continue (th.1), injective (th. 3).
- l'image de $\mathbb{R}^n$ est fermée. En effet, soit $y \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$, et soient des x_n tels que $f(x_n) \to y$; les x_n ne pouvant s'éloigner à l'infini (th.4), prenons en une valeur d'adhérence x. Par continuité on a $f(x)=y$.
- f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$. En effet, cela revient à dire que si des $y_n=f(x_n)$ convergent vers $y=f(x)$, alors $x_n \to x$. Mais x est la seule valeur d'adhérence possible pour (x_n) dans le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ (th.4).

D'après le théorème d'invariance du domaine, tout sous-espace de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à une variété de dimension n est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est aussi ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Celui-ci étant connexe, $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

La surjectivité avait été auparavant établie par Bismut, dans un cas moins général et par une démonstration délicate. Noter que, lorsque les coefficients a_α^i sont assez différentiables, on peut établir directement que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert : il suffit de regarder le jacobien et de vérifier qu'il est $\neq 0$ en tout point ; cf. le th. 2 . On n'a donc pas besoin en général du résultat de topologie un peu raffinée qu'est le théorème d'invariance du domaine.

Il est peut être intéressant aussi de noter que le raisonnement s'applique au cas discontinu, si $\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$ est assez petit.

APPENDICE : DEMONSTRATION DU LEMME DE KOLMOGOROV

Je n'ai pu trouver aucune démonstration du lemme de Kolmogorov, dans les traités de probabilités usuels, qui couvre le cas des processus indexés par $\mathbb{R}^n$. Bien que ce soit une extension triviale du cas de $\mathbb{R}$, je vais esquisser la démonstration, avec les notations de la page 4. Nous désignons par Δ l'ensemble des nombres dyadiques du cube $[0,1]^n$, par Δ_m l'ensemble des $x \in \Delta$ dont toutes les coordonnées sont de la forme $k2^{-m}$ $(0 \leq k \leq 2^m)$ (m-ième réseau dyadique). On part de l'inégalité $E[d(\xi_x,\xi_y)^\varepsilon] \leq C|x-y|^p$, que l'on écrit pour deux éléments x,y contigus dans Δ_m (donc $|x-y|=2^{-m}$), et on applique l'inégalité de Tchebychev :

$$P\{ d(\xi_x,\xi_y) \geqq 2^{-\alpha m} \} \leqq C2^{\alpha\varepsilon m}.2^{-mp}$$

Regardons maintenant l'événement A_m , ensemble des ω tel qu'il existe deux points contigus x et y de Δ_m avec $d(\xi_x(\omega),\xi_y(\omega)) \geqq 2^{-\alpha m}$ } : tout point x de Δ_m ayant au plus n voisins, et le nombre des points de Δ_m étant 2^{mn}, nous avons $\qquad P(A_m) \leqq Cn\ 2^{m(n+\alpha\varepsilon-p)}$

Si α est assez petit, comme $p>n$ nous avons $P(A_m) \leqq c2^{-m\delta}$, avec $c=nC$ et $\delta = p-n-\alpha\varepsilon > 0$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout ω il existe m_o tel que

> pour tout $m \geqq m_o$, pour tout couple (u,v) de points de Δ_m voisins l'un de l'autre, on a $d(\xi_u(\omega),\xi_v(\omega)) \leqq 2^{-\alpha m}$

Cela entraîne que la fonction $x \mapsto \xi_x(\omega)$ est uniformément continue sur Δ (la conclusion désirée). En effet, soient x et y deux points de Δ tels que $|x-y| \leqq 2^{-k-1}$, où l'on suppose $k \geqq m_o$. Considérons les développements dyadiques des coordonnées de x et y (ces développements sont finis)

$$x^i = u^i + \sum_{j>k} a^i_j 2^{-j} \quad , \quad y^i = v^i + \sum_{j>k} b^i_j 2^{-j}$$

où les a^i_j, b^i_j valent 0 ou 1, et u,v sont deux points de Δ_k , confondus ou contigus. Posons $u_o=u$, $u_1=u+a_{k+1}2^{-k-1}$, $u_2=u_1+a_{k+2}2^{-k-2}\ldots$ et de même v_o, $v_1, v_2 \ldots$ u_o et u_1 sont confondus ou voisins dans Δ_{k+1} , u_1 et u_2 confondus ou voisins dans $\Delta_{k+2},\ldots$ donc

$$d(\xi_x(\omega),\xi_u(\omega)) \leqq \sum_k^\infty 2^{-\alpha j} \text{ , et de même pour } d(\xi_y(\omega),\xi_v(\omega)).$$

Enfin, on a $d(\xi_u(\omega),\xi_v(\omega)) \leqq 2^{-\alpha k}$; d'où par addition la majoration désirée pour $d(\xi_x,\xi_y)$.

REFERENCES

Notre référence fondamentale est l'exposé de Kunita à Durham :

KUNITA (H.). On the decomposition of solutions of stochastic differential equations. Proceedings of the LMS Symposium on Stoch. Diff. Eqs., Durham, Juillet 1980. A paraître probablement aux Lect. Notes in M.

Voir les références à BISMUT et à MALLIAVIN dans la bibliographie de la « géométrie stochastique sans larmes », dans ce volume.

Les références à UPPMAN et EMERY sont données dans le texte. Aux dernières nouvelles, UPPMAN aurait par sa méthode (utilisation de semimartingales exponentielles) une démonstration améliorée des résultats d'injectivité forts.

Enfin, sur le théorème de Kolmogorov, voir une note de I. IBRAGIMOV (CRAS, t. 289, 1979, p. 545). J'extrais de la bibliographie d'Ibragimov les articles de SLUTSKII (Giornale Ist. Ital. Attuari, 8, 1937, p.183-199) qui est sans doute la référence la plus ancienne, et de DUDLEY (Ann. Prob. 1, 1973, p. 66-103). Stroock m'a expliqué aussi que le lemme de Kolmogorov est une variante des inégalités de Sobolev, mais je ne sais plus pourquoi.