CHANTHA YOEURP

Solution explicite de l'équation $Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}|\, dX_s$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 614-619

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__614_0>

SOLUTION EXPLICITE DE L'EQUATION

$$Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s$$

de

Ch. YOEURP

<u>Introduction</u> : L'objet de cet article est d'expliciter la solution de l'équation différentielle stochastique de C. Doléans-Dade suivante :

$$Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s \quad ,$$

où $X=(X_t)$ est une semi-martingale donnée.

On travaille sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une filtration croissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous tribus de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles.

On suppose connues la théorie générale des processus ([1]) et la théorie des intégrales stochastiques ([3]). Toutes les intégrales stochastiques considérées sont nulles en 0 (i.e. $\int_0^t = \int_{]0,t]}$).

Soit $X=(X_t)$ une semi-martingale donnée[1] d'après un théorème de C. Doléans-Dade ([2]), l'équation :

$$Z_t = 1 + \int_0^t |Z_{s-}| dX_s \tag{1}$$

admet, dans l'ensemble des semi-martingales, une solution et une seule, qui vaut 1 pour $t=0$. Le théorème suivant donne une expression explicite de cette solution.

<u>Théorème</u> : <u>Soient</u> $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ <u>les instants de sauts successifs de</u> X <u>d'amplitude supérieure ou égale à 1</u> : $\bigcup_{n\geq 1}[T_n] = \{|\Delta X| \geq 1\}$.

<u>Définissons une suite de v.a.</u> $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ <u>par</u> :

$$\varepsilon_n = 1 \text{ si } \Delta X_{T_n} \geq 1$$
$$= -1 \text{ si } \Delta X_{T_n} \leq -1$$
$$= 0 \text{ si } \Delta X_{T_n} = 0 \text{ (i.e. si } T_n = \infty)$$

<u>on pose</u> $T_0=0$, $\varepsilon_0=1$.

---

1. On ne restreint pas la généralité en supposant $X_0=0$. Nous le faisons dans toute la suite.

Alors, l'unique solution $Z = (Z_t)$ de (1) est donnée par :

$Z_t = \sum_{n\geq o} Z_t^n \, 1_{[\![T_n, T_{n+1}[\![}$, où l'on note :

$Z_t^n = Z_{T_n} \, U^n(\varepsilon_n X)_t$ pour $t \in [\![T_n, T_{n+1} [\![$.

$$U^n(Y)_t = \exp(Y_t - Y_{T_n} - \tfrac{1}{2}\langle Y^c, Y^c\rangle_t + \tfrac{1}{2}\langle Y^c, Y^c\rangle_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1+\Delta Y_s) e^{-\Delta Y_s} ,$$

$$t \in [\![T_n, T_{n+1} [\![$$

$$Z_{T_n} = (1+\Delta X_{T_1})(1+\varepsilon_1 \Delta X_{T_2}) \ldots (1+\varepsilon_{n-1}\Delta X_{T_n}) U^{\Theta}(X)_{T_1 -} \; U^1(\varepsilon_1 X)_{T_2 -} \ldots$$

$$U^{n-1}(\varepsilon_{n-1} X)_{T_n -}$$

La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme : Soit $x = (x_t)$ une semi-martingale nulle en o telle que $\Delta x_t \geq -1$ (resp. $\Delta x_t \leq 1$) pour tout t .

Alors, pour toute valeur initiale positive (resp. négative) z_o , $\mathcal{F}_o$ mesurable, l'unique solution de l'équation :

$$z_t = z_o + \int_o^t |z_{s-}| dx_s$$

est donnée par :

$$z_t = z_o \exp(x_t - \tfrac{1}{2}\langle x^c, x^c\rangle_t) \prod_{o<s\leq t} (1+\Delta x_s) e^{-\Delta x_s} \qquad (*)$$

(resp. $z_t = z_o \exp(- x_t - \tfrac{1}{2}\langle x^c, x^c\rangle_t) \prod_{o<s\leq t} (1-\Delta x_s) e^{\Delta x_s} \qquad (**)$)

Démonstration : L'expression de z_t donnée par (*) est solution de l'équation :

$$z_t = z_o + \int_o^t z_{s-}\, dx_s$$

$$= z_o + \int_o^t |z_{s-}|dx_s \quad , \text{ car } z_t \text{ est positif}$$

pour tout t .
D'où le résultat désiré, d'après l'unicité de la solution. De même, z_t donné par (**) est solution de l'équation :

$$z_t = z_o - \int_o^t z_{s-}\, dx_s$$

$$= z_o + \int_o^t |z_{s-}|dx_s \quad , \text{ car } z_t \text{ est négatif,}$$

pour tout t .
D'où la conclusion ∎

Revenons à la démonstration du théorème. Il suffit de résoudre l'équation (1) dans chaque intervalle $[\![T_n, T_{n+1}[\![$, en déplaçant l'origine en T_n , et en arrêtant les processus considérés en $T_{n+1}-$.
De l'équation (1), on déduit :

(1') $$Z_{T_n+t} = Z_{T_n} + \int_{T_n}^{T_n+t} |Z_{s-}|dX_s$$

Pour étudier le signe de Z_{T_n} , on prend les sauts en T_n des deux membres de (1) :

$$Z_{T_n} - Z_{T_{n-}} = |Z_{T_{n-}}|\Delta X_{T_n}$$

(2) $$Z_{T_n} = Z_{T_{n^-}} + |Z_{T_{n^-}}|\Delta X_{T_n} = |Z_{T_{n^-}}|(\mathrm{sig}(Z_{T_{n^-}}) + \Delta X_{T_n})$$

Par conséquent, sur $\{Z_{T_n} \neq o\} \cap \{T_n < \infty\}$, on a $\mathrm{sig}(Z_{T_n}) = \mathrm{sig}(\varepsilon_n)$.

La solution de (1') sur $[\![T_n, T_{n+1}[\![$ est donnée par le lemme précédent, compte tenu du caractère local des intégrales stochastiques :

Sur $\{Z_{T_n} > o\} \cap \{T_n < \infty\}, Z_t = Z_{T_n} \exp(X_t - X_{T_n} - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t + \frac{1}{2} < X^c, X^c >_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$

Sur $\{Z_{T_n} < o\} \cap \{T_n < \infty\}, Z_t = Z_{T_n} \exp(-X_t + X_{T_n} - \frac{1}{2} < X^c, X^c >_t + \frac{1}{2} < X^c, X^c >_{T_n}) \prod_{T_n < s \leq t} (1 - \Delta X_s) e^{\Delta X_s}$

Sur $\{Z_{T_n} = o\}$, $Z_t = o$

on a donc, d'une façon condensée :

(3) $$Z_t = Z_{T_n} U^n(\varepsilon_n X)_t \quad \text{sur } [\![T_n, T_{n+1}[\![\; .$$

Pour terminer, il nous reste à calculer Z_{T_n} ; La relation (2) permet d'écrire :

$$Z_{T_n} = Z_{T_{n^-}} (1 + \mathrm{Sig}(Z_{T_{n^-}})\Delta X_{T_n})$$

D'autre part, la relation (3) écrite pour (n-1) donne :

$$Z_{T_{n^-}} = Z_{T_{n-1}} U^{n-1}(\varepsilon_{n-1}X)_{T_{n^-}} \quad , \quad sig(Z_{T_{n^-}}) = sig(Z_{T_{n-1}}) = sig(\varepsilon_{n-1})$$

De proche en proche, on obtient ainsi l'expression de Z_{T_n} écrite dans l'énoncé du théorème. ■

(1) C. DELLACHERIE : "Capacités et processus stochastiques". Springer-Verlag, Berlin 1972.

(2) C. DOLEANS-DADE : "On the existence and unicity of solutions of stochastic differential equations". Z. für. Wahr. 36, 93-101, 1976.

(3) P.A. MEYER : "Un cours sur les intégrales stochastiques". Sém. Proba. de Strasbourg X , Lectures Notes in Math. 511, Berlin, Springer (1976).