Thierry Jeulin

Grossissement d’une filtration et applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 574-609

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__574_0>

Grossissement d'une filtration et applications.

(T. Jeulin) [1]

Introduction.

Ce travail fait suite à la lecture de l'article de P.W. Millar : "Random times and decomposition theorems" ([20]) et à des études sur le grossissement d'une filtration faites en collaboration avec M.Yor ([12] , [13]). On indique une nouvelle approche de la solution de quelques problèmes :
comportement d'un processus de Markov après un temps coterminal, décompositions de Williams ([24]) des trajectoires browniennes, par exemple.

Soient (Ω , $\underline{\underline{F}}$, $(\underline{\underline{F}}_t)$, P) un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles et L une variable aléatoire positive ; on définit $(\underline{\underline{F}}_t^L)$, la plus petite filtration continue à droite contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ et faisant de L un temps d'arrêt .

L'étude de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^L)$ (et plus précisément la caractérisation des processus $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-optionnels ([7])) mène directement, lorsque L est un temps coterminal d'un processus de Markov X , au caractère markovien du processus $(X_{L+t}, t > 0)$ ([18]), tandis que, d'un résultat de dérivation de mesures ([1]), découle l'indépendance, conditionnellement à X_L, de $(X_{L+t}, t > 0)$ et $(X_t, t < L)$ ([22]).

Dans une autre direction, l'étude des grossissements successifs de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$et leur application aux semimartingales permettent une nouvelle approche des décompositions des trajectoires des diffusions réelles ([25]).

---

(1) Laboratoire de Calcul des probabilités,Université P.et M. Curie, 4,Place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

I Rappels de théorie générale des processus.

1) Hypothèses, notations et rappels.

(Ω , $\underline{\underline{F}}$, $\mathbb{P}$) est un espace probabilisé complet, muni d'une filtration continue à droite $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles : la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ contient les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{\underline{F}}$. On suppose en outre, pour simplifier, que $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \underline{\underline{F}}_t$ est égale à $\underline{\underline{F}}$.

Les intervalles stochastiques sont considérés sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, et si H est un processus mesurable (borné) sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, on note ${}^oH$ (resp. ${}^pH$) sa projection $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnelle (resp. prévisible) ([5]). On identifie les processus $\mathbb{P}$-indistinguables .

Rappelons quelques résultats, importants dans la suite, tirés de Dellacherie ([7]) .

Lemme 1 ([5] T2 p.126 ; [2] 3-2) : Soit M un ensemble progressivement mesurable (resp. optionnel, resp. prévisible); son adhérence $\overline{M}$ (resp. son adhérence pour la topologie gauche $\overline{M}^g$) est optionnelle (resp. optionnelle, resp. prévisible).

Lemme 2 ([7]) : Soit M un fermé gauche (resp. un fermé) mesurable. Notons $X = {}^o(1_M)$. Alors :

- ($X = 1$) est fermé gauche (resp.fermé) et est le plus grand ensemble optionnel inclus dans M .

- (${}^pX = 1$) est fermé gauche et est le plus grand ensemble prévisible inclus dans M .

Introduisons quelques notations supplémentaires : si L est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}$-mesurable, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on lui associe les processus :

$$\tilde{Z}^L = {}^o(1_{[\![0,L]\!]}) \quad , \quad Z^L = {}^o(1_{[\![0,L[\![}) \quad ,$$

$\tilde{A}^L$ projection duale optionnelle de $1_{[\![L,\infty[\![}$,

A^L projection duale prévisible de $1_{(0<L)}\, 1_{[\![L,+\infty[\![}$.

$\tilde{Z}^L$ est une surmartingale forte ([16]), limitée à droite et à gauche, y compris en $+\infty$; en outre ,

(1) $\tilde{Z}^L_+ = Z^L$

(2) $\tilde{Z}^L_- = Z^L_- = {}^p\tilde{Z}^L$ sur $]\!]0,+\infty[\![$

(3) $\Delta\tilde{A}^L = \tilde{Z}^L - Z^L$, $\Delta A^L = Z^L_- - {}^pZ^L$ sur $]\!]0,+\infty[\![$.

Comme cas particulier du lemme 2, avec $M = [\![0,L]\!]$, on a :

<u>Proposition 3</u> ([2] 1-4 ; [7]) :

($\tilde{Z}^L = 1$) (<u>resp.</u> ($Z^L_- = 1$) , <u>avec la convention</u> $Z^L_{0-} = 1$) <u>est le plus grand fermé optionnel (resp. fermé gauche prévisible</u>) <u>contenu dans</u> $[\![0,L]\!]$.

En particulier, L est <u>fin d'un ensemble</u> ($\underline{\underline{F}}_t$)-<u>optionnel</u> , si et seulement si $L = \sup (s, \tilde{Z}^L_s = 1)$ $\mathbb{P}$-p.s. ([12]) ; dans le cas où L est fini, cela signifie $\tilde{Z}^L_L = 1$ $\mathbb{P}$-p.s. . Dellacherie et

Meyer ([8]) ont montré que L est fin d'optionnel si, et seulement si L est honnête (i.e. pour tout t, L est égale à une variable $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable sur $(L<t)$).[1]

On a en outre le

Lemme 4 : *Si L est fin d'un ensemble optionnel* ,

$$\tilde{Z}^L = \sup\left(Z^L \, , \, 1_{(\tilde{Z}^L = 1)} \right) .$$

Démonstration :

$$0 \leq 1_{(\tilde{Z}^L<1)}(\tilde{Z}^L - Z^L) = {}^{o}\left(1_{[\![L]\!]} 1_{(\tilde{Z}^L_L<1)}\right) = 0 .$$

Remarque 5 : Soient L et λ deux variables aléatoires, $\lambda \leq L$.

$(\tilde{Z}^L - \hat{Z}^\lambda = 0) = \left\{ {}^{o}(1 - 1_{]\!] \lambda, L]\!]}) = 1 \right\}$ est inclus (lemme 2) dans le fermé gauche $[\![0,\lambda]\!] \cup]\!] L,+\infty [\![$. Le processus $1_{]\!]\lambda,L]\!]} \dfrac{1}{\tilde{Z}^L - \hat{Z}^\lambda}$ est donc bien défini.

Il en est de même de : $1_{]\!]\lambda,L]\!]} \dfrac{1}{Z^L_- - Z^\lambda_-}$, d'après la " partie prévisible" du lemme 2 .

2) Grossissement de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Si L est une variable aléatoire, on note, en suivant Dellacherie et Meyer ([8]), $(\underline{\underline{F}}^L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration définie par $\underline{\underline{F}}^L_t = \underline{\underline{C}}_{t+}$, où $\underline{\underline{C}}_t$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et $L\wedge t$. $(\underline{\underline{F}}^L_t)$ est la plus petite filtration continue à droite, contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ et faisant de L un temps d'arrêt. On dit que $(\underline{\underline{F}}^L_t)$ est la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ grossie à l'aide de L .

---

[1] On peut bien sûr remplacer inégalité stricte par inégalité large .

Dans le cas où L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel ,

$$\underline{\underline{F}}_t^L = \left\{ A \in \underline{\underline{F}}_\infty \,\middle|\, \exists A_t, B_t \in \underline{\underline{F}}_t \,,\ A = A_t \cap (L \leqslant t) + B_t \cap (t < L) \right\} .$$

On note par ailleurs $\underline{\underline{Pr}}$ (resp. $\underline{\underline{O}}$, resp. $\underline{\underline{P}}$) les tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$-progressive (resp. optionnelle, resp. prévisible) sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

$\underline{\underline{Pr}}^L$, $\underline{\underline{O}}^L$, $\underline{\underline{P}}^L$ désignent alors les tribus $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-progressive, optionnelle et prévisible. On associe aussi à L les tribus $\underline{\underline{F}}_{L+}$ (resp. $\underline{\underline{F}}_L$, resp. $\underline{\underline{F}}_{L-}$) engendrées par les variables aléatoires $U_L \, 1_{(L < +\infty)}$, où U est un processus mesurable par rapport à $\underline{\underline{Pr}}$ (resp. $\underline{\underline{O}}$, resp. $\underline{\underline{P}}$). (cf [21] ou [22]).

Afin que le lecteur ne se perde pas complètement dans ce qui peut paraître un dédale de notations, nous lui demandons quelques instants de réflexion : supposons que L soit un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt (c'est alors la fin de l'ensemble optionnel $[\![0,T]\!]$!). On sait alors que $\underline{\underline{F}}_L = \underline{\underline{F}}_{L+}$ coïncide avec la tribu définie classiquement par :

$$\left\{ A \in \underline{\underline{F}} \,\middle|\, \forall t \,,\ A \cap (L \leqslant t) \in \underline{\underline{F}}_t \right\}$$

et $\underline{\underline{F}}_{L-}$ avec $\sigma \left\{ \underline{\underline{F}}_0 \,,\ A_t \cap (t < L),\ A_t \in \underline{\underline{F}}_t \,,\ t \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

Ceci amène naturellement à la définition "naïve", pour toute variable aléatoire positive des tribus :

$$\underline{\underline{F}}_L^n = \left\{ A \in \underline{\underline{F}} \,,\ \forall t \,,\ \exists A_t \in \underline{\underline{F}}_t \,,\ A \cap (L \leqslant t) = A_t \cap (L \leqslant t) \right.$$

$$\text{et} \quad \underline{\underline{F}}_{L-}^n = \sigma \left\{ \underline{\underline{F}}_0 \,,\ A_t \cap (t < L) \,,\ A_t \in \underline{\underline{F}}_t \,,\ t \in \mathbb{R}_+ \right\} .$$

<u>Remarques</u> :

a) Les ensembles $A_0 \times \{0\}$ ($A_0 \in \underline{\underline{F}}_0$) et $A_t \times \,]t,+\infty[$ ($A_t \in \underline{\underline{F}}_t$) engendrant la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$, il est évident, en toute généralité, que $\underline{\underline{F}}_{L-} = \underline{\underline{F}}_{L-}^n$.

b) Meyer, Smythe et Walsh ([18]) appellent <u>honnêtes</u> les variables aléatoires L vérifiant : L est $\underline{\underline{F}}_L^n$-mesurable . L'inclusion $\underline{\underline{F}}_{L-} \subset \underline{\underline{F}}_L^n$ équivaut à la propriété : (L fin d'optionnel). On verra mieux à la suite de la proposition 6 .

Enfin, avec la convention 0/0 = 0 , si U et V sont des processus mesurables bornés, on note :

$$^o(U / V) = \frac{^o(U V)}{^oV} \quad \text{et} \quad ^p(U / V) = \frac{^p(U V)}{^pV} .$$

L'étude du grossissement de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ est particulièrement intéressante lorsque L est la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel (voir par exemple [3] , [7] , [8] , [12] , [13] , [28]). La suite de l'article apporte quelques compléments aux résultats généraux obtenus dans les articles précédemment cités (voir en particulier le paragraphe II). Le résultat fondamental est ([7] , théorème 6) :

<u>Proposition 6</u> ([7] , [12]) : <u>Soit</u> L <u>fin d'ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u>.
i) <u>Soit</u> H <u>un processus</u> $\underline{\underline{P}}^L$-<u>mesurable borné</u> ; <u>il existe</u> J <u>et</u> K $\underline{\underline{P}}$-<u>mesurables bornés tels que</u>(1) :

$$H 1_{]\!]0,+\infty[\![} = J 1_{]\!]0,L]\!]} + K 1_{]\!]L,+\infty[\![} .$$

<u>En conséquence</u> : $J 1_{]\!]0,+\infty[\![} = {}^p(H / 1_{[\![0,L]\!]}) 1_{]\!]0,+\infty[\![}$

$$K = {}^p(H / 1_{]\!]L,+\infty[\![}) .$$

ii) <u>Soit</u> H <u>un processus</u> $\underline{\underline{O}}^L$-<u>mesurable borné ; il existe</u> U <u>et</u> W $\underline{\underline{O}}$-<u>mesurables bornés</u>, V $\underline{\underline{Pr}}$-<u>mesurable borné , tels que</u> :

$$H = U 1_{[\![0,L[\![} + V 1_{[\![L]\!]} + W 1_{]\!]L,+\infty[\![}$$

---

(1) H_0 est de la forme $a_0 1_{(L=0)} + b_0 1_{(L>0)}$,

où a_0 et b_0 sont $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables !

En conséquence : $U = {}^{o}(H/1_{[\![0,L[\![})$

$$V_L = H_L$$

$$W = {}^{o}(H/1_{]\!]L,+\infty[\![}) .$$

Corollaire 7 : Soit L fin d'ensemble optionnel. Alors :

$$\underline{\underline{F}}_{L+} = \underline{\underline{F}}^{L}_{L} = \underline{\underline{F}}^{n}_{L} .$$

Remarque 8 : si L est une variable aléatoire quelconque, $\underline{\underline{P}}^{L} \cap]\!]0,L]\!]$ est toujours la trace de $\underline{\underline{P}}$ sur $]\!]0,L]\!]$ ([12] , lemme 1). On a donc toujours :

$$\underline{\underline{F}}_{L-} = \underline{\underline{F}}^{n}_{L-} = \underline{\underline{F}}^{L}_{L-} .$$

3) Nous terminons ce paragraphe par une digression sur les grossissements successifs de filtration, qui interviendront effectivement dans les paragraphes III et IV : de façon générale, L et λ étant deux variables aléatoires positives, il s'agit de l'étude de la filtration $(\underline{\underline{F}}^{L}_{t})$ grossie à l'aide de λ .

Nous faisons deux remarques sur ce sujet :

a) Soient L fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel et λ une variable aléatoire vérifiant : $\lambda \geqslant L$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) λ est fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}^{L}_{t})$-optionnel

(ii) λ est fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_{t})$-optionnel .

Seule l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est à démontrer. Nous allons prouver que λ est honnête (pour $(\underline{\underline{F}}_t)$). En effet, pour tout couple (s,t) avec $s \leqslant t$, on a :

$$(\lambda \leqslant s) = D^{L}_{t} \cap (\lambda \leqslant t) = D^{L}_{t} \cap (L \leqslant t) \cap (\lambda \leqslant t)$$

$$= D_t \cap (L \leqslant t) \cap (\lambda \leqslant t) = D_t \cap (\lambda \leqslant t)$$

où D_t^L (resp. D_t) désigne un ensemble $\underline{\underline{F}}_t^L$ (resp. $\underline{\underline{F}}_t$) mesurable, dont l'existence est assurée par les hypothèses.

b) Il ne saurait y avoir de résultat semblable pour une variable aléatoire $\lambda \leq L$, comme le montre l'exemple suivant :

$(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration engendrée par un mouvement brownien (B_t) issu de 0 (et dûment complétée), $T_a = \inf (t, B_t = a)$, $T = \inf(T_1 , T_{-1})$, $L = \sup(t \leq T, B_t = 0)$ et $\lambda = L \, 1_{(T_1 < T_{-1})}$.

λ est alors fin de l'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-optionnel $[\![0]\!] \cup [\![L_{(T_1 < T_{-1})}]\!]$ et $\tilde{Z}_t^\lambda = \frac{1}{2}(1 - |B_{t\wedge T}|) + \frac{1}{2} \, 1_{(t=0)}$, soit $\tilde{Z}_\lambda^\lambda = \frac{1}{2}$ sur $(0 < \lambda)$.

On verra ultérieurement d'autres exemples de cette situation.

II Calculs d'espérances conditionnelles.

L étant une variable aléatoire, on a introduit au paragraphe I-2) les tribus $\underline{\underline{F}}_{L+}$, $\underline{\underline{F}}_L$ et $\underline{\underline{F}}_{L-}$. Nous voulons calculer, de façon aussi explicite que possible, les espérances conditionnelles par rapport à ces tribus.

1) Espérances conditionnelles relatives à $\underline{\underline{F}}_{L+}$ pour L fin d'optionnel.

Lemme 9 : Soit L fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel et soit τ un $(\underline{\underline{F}}^L_t)$-temps d'arrêt supérieur à L. Alors :

$$\underline{\underline{F}}_{\tau+} = \underline{\underline{F}}^{\tau}_{\tau} = \underline{\underline{F}}^{L}_{\tau} \quad .$$

Supposons en outre τ strictement supérieur à L sur $(L<+\infty)$; alors :

a) $\underline{\underline{F}}_{\tau} = \underline{\underline{F}}_{\tau+}$

b) Si h est une variable aléatoire bornée et H un processus tel que $h = H_{\tau}$ sur $(\tau < +\infty)$ (on peut toujours prendre pour H le processus constant h), on a :

$$E(h | \underline{\underline{F}}_{\tau}) = \frac{1}{1 - Z^L_{\tau}} \; {}^{o}(H \, 1_{]\!]L,+\infty[\![})_{\tau}$$

$$= \frac{1}{1- Z^L_{\tau}} \; {}^{o}(H \, 1_{[\![L,+\infty[\![})_{\tau} \quad .$$

Démonstration : il résulte du paragraphe I-3) que τ est fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel ; on a donc, d'après le corollaire 7 ,

$$\underline{\underline{F}}_{\tau+} = \underline{\underline{F}}^{\tau}_{\tau} = \underline{\underline{F}}^{n}_{\tau} \quad ;$$

τ étant un $(\underline{\underline{F}}^L_t)$-temps d'arrêt, $\underline{\underline{F}}^n_{\tau}$ est contenue dans $\underline{\underline{F}}^L_{\tau}$; réciproquement, soit $A \in \underline{\underline{F}}^L_{\tau}$; pour tout t , $A \cap (\tau \leqslant t) \in \underline{\underline{F}}^L_t$; il existe donc $A_t \in \underline{\underline{F}}_t$ tel que :

$$A \cap (\tau \leqslant t) = A_t \cap (L \leqslant t) = A_t \cap (\tau \leqslant t) \quad ,$$

ou encore $A \in \underline{\underline{F}}^n_{\tau}$.

Supposons maintenant : τ est strictement supérieur à L sur $(L < +\infty)$.
Il résulte de la proposition 6-(ii), que $\underline{\underline{F}}^L_\tau = \underline{\underline{F}}_\tau$; d'où a).
Si h est une variable aléatoire bornée, et H un processus tel que $H = h$ sur $(\tau < +\infty)$, notons K la projection $(\underline{\underline{F}}^L_t)$-optionnelle de H ; on a :

$$E(h \mid \underline{\underline{F}}_\tau) = E(H_\tau \mid \underline{\underline{F}}_\tau) = E(H_\tau \mid \underline{\underline{F}}^L_\tau) = K_\tau ;$$

la proposition 6 et la condition $(L < \tau)$ permettent d'écrire :

$$K_\tau = {}^o(K / 1_{]\!]L,+\infty[\![})_\tau = \frac{1}{1 - Z^L_\tau}\, {}^o(K\, 1_{]\!]L,+\infty[\![})_\tau$$
$$= \frac{1}{1 - Z^L_\tau}\, {}^o(H\, 1_{]\!]L,+\infty[\![})_\tau$$

puisque la multiplication par le processus $\underline{\underline{O}}^L$-mesurable $1_{]\!]L,+\infty[\![}$ commute avec la projection sur $\underline{\underline{O}}^L$ (qui contient $\underline{\underline{O}}$).
La dernière égalité résulte de la proposition 3 et du lemme 4 .

Appliquons en particulier le lemme aux temps $\tau = L+t$ $(t > 0)$; le théorème de convergence des martingales permet d'énoncer :

<u>Proposition 10</u> : <u>Soit</u> L <u>fin d'ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u> .
a) <u>Si</u> h <u>est une variable aléatoire intégrable, on a sur</u> $(L < +\infty)$:

$$E(h \mid \underline{\underline{F}}_{L+}) = \lim_{u \Downarrow 0} \frac{{}^o(h\, 1_{[\![L,+\infty[\![})_{L+u}}{1 - Z^L_{L+u}}$$

<u>En conséquence, sur</u> $(Z^L_L < 1)$, <u>on a</u> :

$$(\alpha) \quad E(h \mid \underline{\underline{F}}_{L+}) = \frac{{}^o(h\, 1_{[\![L,+\infty[\![})_L}{1 - Z^L_L} = \frac{{}^o(h\, 1_{[\![L]\!]})_L}{1 - Z^L_L}$$

<u>et donc</u> :

(β) $\underline{\underline{F}}_{L+} = \underline{\underline{F}}_{L}$.

b) Si H est un processus mesurable borné, $t > 0$, on a sur $(L < +\infty)$:

$$E(H_{L+t} \mid \underline{\underline{F}}_{L+}) = \lim_{u \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{1 - Z^L_{L+u}} \; {}^{o}(H_{L+t} \, 1_{[\![L,+\infty[\![})_{L+u}$$

$$= \lim_{u \downarrow\downarrow 0} \frac{1}{1 - Z^L_{L+u}} \; {}^{o}(H_{t-u+.} \, 1_{[\![L,+\infty[\![})_{L+u} \quad .$$

2) Espérances conditionnelles relatives à $\underline{\underline{F}}_{L}$ et $\underline{\underline{F}}_{L-}$.

Soit L une variable aléatoire positive quelconque. Pour étudier les tribus $\underline{\underline{F}}_{L}$ et $\underline{\underline{F}}_{L-}$, nous utiliserons le résultat suivant , démontré par H. Airault et H. Föllmer ([1]) :

Théorème 11 : Soient A et B deux processus croissants prévisibles, intégrables ; on suppose de plus que A est continu.
On note Y et Z respectivement les surmartingales qu'ils engendrent, et μ^Y (resp. μ^Z) les mesures définies sur ($\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\underline{\underline{P}}$) par :

$$\mu^Y(ds \times d\omega) = dA_s(\omega)\, dP(\omega) \; ; \quad \mu^Z(ds \times d\omega) = dB_s(\omega)\, dP(\omega) \; .$$

Alors, en faisant la convention $0/0 = 0$, les expressions :

$$\lim_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}_+}} \frac{{}^{o}(Z - Z_{u+.})}{{}^{o}(Y - Y_{u+.})} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}_+}} \frac{{}^{p}(Z - Z_{u+.})}{{}^{p}(Y - Y_{u+.})}$$

sont bien définies, et égales μ^Y p.s. ; de plus, elles coïncident avec $\dfrac{d\mu^Z}{d\mu^Y}$.

Remarques :

a) L'égalité, μ^Y p.s. , des deux limites découle de la continuité de A, et de ce que les limites ne diffèrent que sur une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt.

b) Rappelons que ${}^o(Y - Y_{u+.}) = {}^o(A_{u+.} - A)$, et de même pour le couple (Z,B) . Aussi pourrait-on énoncer le théorème sans introduire les surmartingales Y et Z. Nous avons adopté cette présentation pour des commodités de notations ultérieures.

Dans la situation présente, le théorème 11 devient :

Proposition 12 : Pour tout réel $u > 0$, soit G^u le processus $G^u_t = 1_{(t < L \leq t+u)}$. Si h est une variable aléatoire intégrable , on a , sur $(L < +\infty)$:

$$E(h \mid \underline{\underline{F}}_L) = 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L > 0)} \frac{{}^o(h 1_{[\![L]\!]})_L}{\Delta\tilde{A}^L_L} + 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)} \lim_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}}} {}^o(h/G^u 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)})_L$$

Démonstration :

a) Considérons une suite de $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt à graphes disjoints (T_n) tels que $(\Delta\tilde{A}^L \neq 0) = \bigcup_n [\![T_n]\!]$.

Pour tout processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel borné U , on peut écrire :

$$E(h\, U_L \,;\, \Delta\tilde{A}^L_L \neq 0) = \sum_n E(h\, U_{T_n} \,;\, L = T_n < +\infty)$$

$$= \sum_n E\left(U_{T_n} \frac{{}^o(h 1_{[\![L]\!]})_{T_n}}{\Delta\tilde{A}^L_{T_n}} \,;\, L = T_n < +\infty\right)$$

$$= E\left(U_L \frac{{}^o(h 1_{[\![L]\!]})_L}{\Delta\tilde{A}^L_L} \,;\, \Delta\tilde{A}^L_L = 0\right)$$

b) On peut maintenant se limiter au cas où $h = h\,1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)}$

et $h \geq 0$. Notons Z^h la surmartingale ${}^o(h\, 1_{[\![0,L[\![})$.

On a, pour tout processus $\underline{\underline{O}}$-mesurable borné U :

$\mu^{Z^h}({}^pU) = E(h\, {}^pU_L \,;\, L < +\infty)$.

De l'égalité $\Delta\tilde{A}^L = {}^o(1_{[\![L]\!]})$, découle : $1_{(\Delta\tilde{A}^L = 0)}\, {}^o(1_{[\![L]\!]}) = 0$.

En conséquence, puisque $(U \neq {}^pU)$ est réunion dénombrable de graphes de $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt, on a :

$$\mu^{Z^h}({}^pU) = E(h\, U_L \,;\, L < +\infty) .$$

c) μ^{Z^h} est absolument continue par rapport à $\mu^{Z^{h_o}}$,

où $h_o = 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)}$, et de la dernière égalité de la partie b) ci-dessus, on déduit que le processus croissant prévisible, continu, $B = 1_{(\Delta\tilde{A}^L = 0)} \cdot \tilde{A}^L$ engendre la surmartingale Z^{h_o}.

d) Le processus ${}^o(Z^h - Z^h_{u+})$ est indistinguable de la projection $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnelle de $h\, G^u$. Le théorème 11 montre l'existence

$\mu^{Z^{h_o}}$- presque surement de $\lim\limits_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}}} {}^o(h / G^u\, 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)})$.

$$\theta = 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)} \lim_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}}} {}^o(h / G^u\, 1_{(\Delta\tilde{A}^L_L = 0)})_L$$

existe donc $\mathbb{P}$-presque surement, est $\underline{\underline{F}}_L$-mesurable et vérifie, d'après b) : pour tout U $\underline{\underline{O}}$-mesurable borné ,

$E(h\, U_L \,;\, L < +\infty) = E(\theta\, U_L \,;\, L < +\infty)$.

La proposition 12 est démontrée .

<u>Rappel 13</u> : si L est fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel, $\Delta\tilde{A}^L_L = 1 - Z^L_L$.

Une démonstration analogue donne, avec les mêmes notations :

<u>Proposition 14</u> : <u>Soit</u> h <u>une variable aléatoire intégrable. Alors sur</u> $(0 < L < +\infty)$,

$$E(h \mid \underline{\underline{F}}_{L-}) = 1_{(\Delta A^L_L = 0)} \lim_{\substack{u \downarrow\downarrow 0 \\ u \in \mathbb{Q}}} {}^p(h / G^u \, 1_{(\Delta A^L_L = 0)})_L + 1_{(\Delta A^L_L \neq 0)} \frac{{}^p(h \, 1_{[\![L]\!]})_L}{\Delta A^L_L}$$

3) Application au cas markovien.

Les formules établies en 1) et 2) permettent de retrouver très rapidement des résultats bien connus concernant les processus fortement markoviens : il s'agit seulement de choisir de bonnes versions de projections optionnelles ou prévisibles.

Les propositions 6 et 10, appliquées à un temps coterminal L (ou à un temps coterminal randomisé au sens de Millar ([20])), donnent immédiatement le théorème de Meyer-Smythe et Walsh ([18], [20]).

Les propositions 13 et 14 permettent de retrouver les conclusions de Pittenger et Shih ([22]) ainsi que les résultats de Millar pour de nombreux temps coterminaux randomisés ([20], [21]).

Ce type d'application est bien sur à rapprocher des techniques développées par Maisonneuve ([15]) ou par El Karoui et Reinhard ([10]).

Nous ne donnerons qu'une illustration :
$(\Omega, \underline{\underline{F}}^{\circ}, (\underline{\underline{F}}_t^{\circ}), X_t, \theta_t, k_t, \mathbb{P}_x)$ est la réalisation canonique (avec opérateurs de translation θ et de meurtre k) d'un semi-groupe droit ([11]) défini sur un espace métrique séparable E, ∂ un point cimetière. Pour toute loi initiale m sur E, on note $\underline{\underline{F}}^m$ la complétée de $\underline{\underline{F}}$ sous $\mathbb{P}_m$ et $\underline{\underline{F}}_t^m$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et les ensembles $\mathbb{P}_m$-négligeables de $\underline{\underline{F}}^m$; la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^m)$ vérifie les conditions habituelles sous $\mathbb{P}_m$; $\underline{\underline{F}} = \bigcap_m \underline{\underline{F}}^m$, $\underline{\underline{F}}_t = \bigcap_m \underline{\underline{F}}_t^m$.

Soit alors L un temps coterminal, i.e. une variable aléatoire L positive $\underline{\underline{F}}$-mesurable, vérifiant :

i) $L \circ \theta_t = (L-t)_+$ pour tout t ;

ii) $L \circ k_s = L$ sur $(L < s)$ pour tout s ;

iii) $L \circ k_s \leq s$.

(ii) implique que L est honnête, donc est fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t^m)$-optionnel.

Soit alors C une variable $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable ; d'après le lemme 9, sur $(L<+\infty)$ la projection $(\underline{\underline{F}}_{L+t})_{t>0}$-optionnelle de $(C\circ\theta_{L+t})_{t>0}$ est donnée par:

$$\frac{1}{1-Z^{L}_{L+t}}\;{}^{o}(C\circ\theta_{\cdot}\,1_{[\![L,+\infty[\![})_{L+t} = \mathbb{E}_{X_{L+t}}(\,C\,/\,L=0\,)\quad \text{d'où}$$

<u>Théorème 15</u> ([18]) : <u>Avec les notations ci-dessus</u>, $(X_{L+t}, t>0)$ <u>est fortement markovien par rapport à la filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_{L+t})$, <u>de semi-groupe de transition</u> K_t <u>défini par</u> :

$$\begin{aligned} K_t f(x) &= \mathbb{E}_x(\,f(X_t)\,/\,L=0\,) && \text{si } g(x)=\mathbb{P}_x(L=0)>0 \\ &= f(\partial) && \text{si } g(x)=0\,. \end{aligned}$$

De la proposition 12 et de la remarque 13, ainsi que de la propriété de Markov forte, vient aussi rapidement le

<u>Théorème 16</u> ([22]) :<u>Avec les notations du théorème 15</u>, <u>si</u> C <u>est une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{F}}^{o}$<u>-mesurable bornée, on a</u> :

a) <u>Sur</u> $(L<+\infty)$, <u>pour tout</u> $v\geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\,C\circ\theta_{L+v}\mid \underline{\underline{F}}_L) &= 1_{(g(X_L)\neq 0)}\,\mathbb{E}_{X_L}(\,C\circ\theta_v\,/\,L=0\,) \\ &+ 1_{(g(X_L)=0)} \lim_{\substack{u\downarrow\downarrow 0\\ u\in\mathbb{Q}}} \mathbb{E}_{X_L}(\,C\circ\theta_{L+v}\,/\,0<L\leq u\ ;\ g(X_L)=0\,) \end{aligned}$$

<u>En particulier, sur</u> $(L<+\infty)$, $\underline{\underline{F}}_L$ <u>et</u> $(X_{L+t}, t>0)$ <u>sont conditionnellement indépendants par rapport à</u> X_L .

b) <u>Pour tout</u> $t>0$, <u>sur</u> $(L<t)$,

$$\begin{aligned} E(\,C\circ\theta_t\mid \underline{\underline{F}}_L) &= 1_{(g(X_L)\neq 0)}\left\{\mathbb{E}_x(\,C\circ\theta_s\,/\,L=0)\right\}\Big|_{\substack{x=X_L\\ s=t-L}} \\ &+ 1_{(g(X_L)=0)} \lim_{\substack{u\downarrow\downarrow 0\\ u\in\mathbb{Q}}} \left\{\mathbb{E}_x(\,C\circ\theta_s\,/0<L\leq u; g(X_L)=0\,)\right\}\Big|_{\substack{x=X_L\\ s=t-L}} \end{aligned}$$

III Compléments sur le grossissement et les semi-martingales.

L'étude du grossissement de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ (voir I-2)) est liée à l'étude des $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingales. Pour tout ce qui concerne l'intégration stochastique, on utilisera ici le cours de Meyer ([19]).

Si L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel, il résulte de Yor ([28]) que toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale est une $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-semi-martingale (voir aussi Barlow ([3]) , Dellacherie-Meyer ([8])). En outre, la connaissance des processus $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-prévisibles (Proposition 6-1)) permet d'expliciter la décomposition $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-canonique des $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingales spéciales en somme d'une $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-martingale locale et d'un processus $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-prévisible à variation finie ([3] , [13]) .

Si $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$ est l'espace des $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingales X telles que :

$$\|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t)} = \sup\left(E\left(\left|\int_{[0,u]} J_s \, dX_s\right|\right) ; \; J \ \underline{\underline{P}}\text{-mesurable}, |J| \leqslant 1 \ , \ u \in \mathbb{R}_+ \right)$$

est fini, alors $\|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t)}$ est une norme sur $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$, $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$ est inclus dans $H^1(\underline{\underline{F}}_t^L)$ et il existe deux constantes universelles c et C telles que $0 < c \leqslant C < +\infty$ et sur $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$,

$$(4) \qquad c \ \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t)} \leqslant \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t^L)} \leqslant C \ \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t)}$$

(voir [13]).

Plaçons nous maintenant dans la situation suivante : L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel et λ est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-optionnel. On désigne la filtration $(\underline{\underline{F}}^L)_t^\lambda = (\underline{\underline{F}}^\lambda)_t^L$ par la notation $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$. D'après les résultats brièvement rappelés ci-dessus, toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale est une $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-semi-martingale, donc une $(\underline{\underline{F}}_t^{L,}$ $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-semi-martingale, et, d'après un théorème de Stricker ([23] théorème 3-1), une $(\underline{\underline{F}}_t^\lambda)$-semi-martingale.

En outre, sur $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$, les normes

$$\|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t)} \ , \ \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t^L)} \ , \ \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})} \quad \text{et} \quad \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_t^{\lambda})}$$

sont équivalentes.

Particularisons encore la situation :

<u>Lemme 17</u> : <u>Soient</u> L <u>fin d'ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u>, λ <u>fin d'ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-<u>optionnel</u>, $\lambda \leq L$, <u>et</u> H <u>un processus mesurable borné, nul en</u> 0 .

a) <u>La projection</u> $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-<u>prévisible</u> ${}^{p-(L,\lambda)}H$ <u>de</u> H <u>est donnée par</u> :

$$ {}^{p-(L,\lambda)}H = {}^{p}(H/1_{[\![0,\lambda]\!]})\,1_{[\![0,\lambda]\!]} + {}^{p}(H/1_{]\!]\lambda,L]\!]})\,1_{]\!]\lambda,L]\!]} + {}^{p}(H/1_{]\!]L,\infty[\![})\,1_{]\!]L,\infty[\![} \ .$$

b) <u>La projection</u> $(\underline{\underline{F}}_t^{\lambda})$-<u>prévisible</u> ${}^{p-\lambda}H$ <u>de</u> H <u>est donnée par</u> :

$$ {}^{p-\lambda}H = {}^{p}(H/1_{[\![0,\lambda]\!]})\,1_{[\![0,\lambda]\!]} + {}^{p}(H/1_{]\!]\lambda,T]\!]})\,1_{]\!]\lambda,T]\!]} + {}^{p}(H/1_{]\!]T,\infty[\![})\,1_{]\!]T,\infty[\![}$$

<u>où</u> T <u>est le</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>temps d'arrêt</u>

$$T = \inf(\, t > \lambda \ , \ \tilde{Z}_t^{\lambda} = Z_t^L + {}^{o}(1_{[\![L]\!]}1_{[\![\lambda]\!]})_t \ ) \ .$$

<u>En outre</u> T <u>majore</u> L <u>et est fin d'ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u> .

<u>Démonstration</u> :

a) Appliquons la proposition 6-i) à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^L)$ et à la fin d'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t^L)$-optionnel λ ; il existe J'_1 et J'_2 $\underline{\underline{P}}^L$-mesurables bornés (nuls en 0 puisque $H_0 = 0$) tels que :

$$^{p-(L,\lambda)}H = J'_1 1_{[\![0,\lambda]\!]} + J'_2 1_{]\!]\lambda,\infty[\![} .$$

La proposition 6-i) nous dit alors qu'il existe J_1, J_2 et J_3 $\underline{\underline{P}}$-mesurables bornés tels que :

$$J'_1 1_{[\![0,L]\!]} = J_1 1_{[\![0,L]\!]}$$

$$J'_2 = J_2 1_{[\![0,L]\!]} + J_3 1_{]\!]L,\infty[\![} .$$

Par suite,

$$^{p-(L,\lambda)}H = J_1 1_{[\![0,\lambda]\!]} + J_2 1_{]\!]\lambda,L]\!]} + J_3 1_{]\!]L,\infty[\![} .$$

Reste à identifier des représentants de J_1 , J_2 et J_3 . On a , par exemple :

$$^{p-(L,\lambda)}H 1_{]\!]\lambda,L]\!]} = {}^{p-(L,\lambda)}\left(H 1_{]\!]\lambda,L]\!]}\right) = J_2 1_{]\!]\lambda,L]\!]} ,$$

d'où, par projection sur $\underline{\underline{P}}$:

$$^{p}(H 1_{]\!]\lambda,L]\!]}) = J_2 \, {}^{p}(1_{]\!]\lambda,L]\!]}) ;$$

d'après la remarque 5 nous pouvons prendre $J_2 = {}^{p}(H / 1_{]\!]\lambda,L]\!]})$.

b) Nous allons projeter sur $\underline{\underline{P}}$ le résultat de a). D'après la remarque 7-b) ,

$$(^{p-\lambda}H) 1_{[\![0,\lambda]\!]} = {}^{p}(H / 1_{[\![0,\lambda]\!]}) 1_{[\![0,\lambda]\!]} .$$

Il reste donc à étudier le processus $\underline{\underline{P}}^{\lambda}$-mesurable continu à gauche $^{p-\lambda}(1_{]\!]\lambda,L]\!]})$. Il suffit d'évaluer, pour f_t $\underline{\underline{F}}_{t-}$-mesurable bornée et g borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$, $E(f_t \, g(\lambda) ; \lambda < t \leq L)$.

Désignons par C la projection sur $\underline{\underline{O}}^L$ de $1_{[\![0,\lambda]\!]}$. λ est fin de l'ensemble (inclus dans $[\![0,L]\!]$) ($C = 1$) ; en outre, d'après la proposition 6-ii),

$$C\,1_{[\![0,L[\![} = 1_{[\![0,L[\![}\,\frac{1}{Z^L}\;{}^{o}(1_{[\![0,\lambda]\!]}\,1_{[\![0,L[\![})$$

$$= 1_{[\![0,L[\![}\,\frac{1}{Z^L}\;(\;\tilde{Z}^{\lambda} - {}^{o}(1_{[\![\lambda]\!]}\,1_{[\![L]\!]}\;)\;)\;.$$

Soient alors $G = (\;\tilde{Z}^{\lambda} = Z^L + {}^{o}(1_{[\![\lambda]\!]}\,1_{[\![L]\!]}\;)\;)$,

Λ le processus ($\underline{\underline{P}}$-mesurable) défini par :

$$\Lambda_t = \sup(\; s < t,\; (\omega,s) \in G\;)$$

et T le $(\underline{\underline{F}}_t^{\lambda})$-temps d'arrêt, $T = \inf(\; s > \lambda\;,\; (\omega,s) \in G\;)$.

Sur $]\!]\lambda,L]\!]$, $\Lambda = \lambda$; par suite, T majore L et $\Lambda = \lambda$ sur $]\!]\lambda,T]\!]$. T est un $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-temps d'arrêt, majorant L ; c'est donc (d'après I-3,a)) une fin d'ensemble $\underline{\underline{O}}^L$-mesurable ; majorant L, T est (toujours d'après I-3,a)) fin d'ensemble $\underline{\underline{O}}$-mesurable.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} E(\; f_t\, g(\lambda)\;;\; \lambda < t \leq L\;) &= E(\; g(\Lambda_t)\, f_t\;;\; \lambda < t \leq L\;) \\ &= E(\; g(\Lambda_t)\, f_t\;(\; Z^L_{t-} - Z^{\lambda}_{t-}\;)\;) \\ &= E(\; g(\Lambda_t)\, f_t\;\frac{Z^L_{t-} - Z^{\lambda}_{t-}}{Z^T_{t-} - Z^{\lambda}_{t-}}\;;\; \lambda < t \leq T\;)\;, \end{aligned}$$

soit $$p\text{-}\lambda(\,1_{]\!]\lambda,L]\!]}\,) = 1_{]\!]\lambda,T]\!]}\,\frac{Z^L_- - Z^{\lambda}_-}{Z^T_- - Z^{\lambda}_-}$$

et $$p\text{-}\lambda(\,1_{]\!]L,+\infty[\![}\,) = 1_{]\!]\lambda,T]\!]}\,\frac{Z^T_- - Z^L_-}{Z^T_- - Z^{\lambda}_-} + 1_{]\!]T,+\infty[\![}\,.$$

$\underline{\underline{P}}^{\lambda}$ est donc la tribu engendrée par $\underline{\underline{P}}$, $[\![0,\lambda]\!]$ et $]\!]\lambda,T]\!]$, d'où b).

En vue d'une utilisation ultérieure, calculons $\tilde{Z}^T$, dans le cas où $\lambda < L$. Pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt S ,

$$P(L < S \leq T \,; S < +\infty) = P(L < S < +\infty \;;\; \Lambda_S = \Lambda_{L_S})$$

où $L_\cdot$ est le processus ($\underline{\underline{P}}$-mesurable) défini par :
$L_t = \sup(s < t,\ \tilde{Z}^L_s = 1)$. On a donc :

$$(5) \quad \tilde{Z}^T_t = \tilde{Z}^L_t + (1 - \tilde{Z}^L_t) \cdot 1_{(\Lambda_t = \Lambda_{L_t})}$$

$$Z^T_{t-} = Z^L_{t-} + (1 - Z^L_{t-}) \cdot 1_{(\Lambda_t = \Lambda_{L_t})} .$$

Si ℓ est une variable aléatoire positive, notons $\tilde{M}^\ell$ la $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale de $BMO(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que pour toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale Y de $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$,
$E(Y_\ell) = E([Y,\tilde{M}^\ell]_\infty) = E(\langle Y,\tilde{M}^\ell\rangle_\infty)$
(cf. [19] , Chapitre V, théorème 11) . Le processus $\langle Y,\tilde{M}^\ell\rangle$ est à variation intégrable. En outre $\tilde{M}^\ell_t = E(\hat{A}^\ell_\infty + 1_{(\ell=\infty)} \mid \underline{\underline{F}}_t)$.

Avec les hypothèses et les notations du lemme 17, on a alors la :

<u>Proposition 18</u> : <u>Soit</u> X <u>une</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>martingale locale</u> .

a) $$X'_t = X_t - \int_0^{t\wedge\lambda} \frac{1}{Z^\lambda_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^\lambda\rangle_s - \int_0^{t\wedge L} 1_{(\lambda < s)} \frac{1}{Z^L_{s-} - Z^\lambda_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^L - \tilde{M}^\lambda\rangle_s + \int_0^t 1_{(L < s)} \frac{1}{1 - Z^L_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^L\rangle_s$$

<u>est une</u> $(\underline{\underline{F}}^{L,\lambda}_t)$-<u>martingale locale</u>.

b) $$X''_t = X_t - \int_0^{t\wedge\lambda} \frac{1}{Z^\lambda_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^\lambda\rangle_s - \int_0^{t\wedge T} 1_{(\lambda < s)} \frac{1}{Z^T_{s-} - Z^\lambda_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^T - \tilde{M}^\lambda\rangle_s + \int_0^t 1_{(T < s)} \frac{1}{1 - Z^T_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^T\rangle_s$$

<u>est une</u> $(\underline{\underline{F}}^\lambda_t)$-<u>martingale locale</u>.

Démonstration : nous reprenons celle du théorème 15 de ([13]) ; b) de démontre alors comme a). Nous pouvons supposer $X_0 = 0$, puis par localisation que X appartient à $H^1(\underline{\underline{F}}_t)$. X est alors une $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-semimartingale de $H^1(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$, de décomposition canonique $X = X' + C$ en somme d'une $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-martingale X' et d'un processus $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-prévisible à variation intégrable C .

Pour tout processus $\underline{\underline{P}}^{L,\lambda}$-mesurable borné H nul en 0 (donc de la forme $J_1 1_{[\![0,\lambda]\!]} + J_2 1_{]\!]\lambda,L]\!]} + J_3 1_{]\!]L,\infty[\![}$ avec J_1 , J_2 et J_3 $\underline{\underline{P}}$-mesurables bornés, d'après le lemme 17-a)) , $(H\cdot X')$ est une $(\underline{\underline{F}}_t^{L,\lambda})$-martingale uniformément intégrable, d'où :

$$E((H\cdot C)_\infty) = E((H\cdot X)_\infty)$$

$$= E((H 1_{[\![0,\lambda]\!]}\cdot X)_\infty) + E((H 1_{]\!]\lambda,L]\!]}\cdot X)_\infty) + E((H 1_{]\!]L,\infty[\![}\cdot X)_\infty)$$

$$= E((J_1\cdot X)_\lambda) + E((J_2\cdot X)_L - (J_2\cdot X)_\lambda) - E((J_3\cdot X)_L)$$

$$= E((J_1\cdot\langle X,\tilde{M}^\lambda\rangle)_\infty) + E((J_2\cdot\langle X,\tilde{M}^L - \tilde{M}^\lambda\rangle)_\infty) - E((J_3\cdot\langle X,\tilde{M}^L\rangle)_\infty)$$

$$= E(\int_0^\lambda \frac{H_s}{Z_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^\lambda\rangle_s) + E(\int_\lambda^L \frac{H_s}{Z^L_{s-} - Z_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^L - \tilde{M}^\lambda\rangle_s)$$

$$- E(\int_L^\infty \frac{H_s}{1 - Z^L_{s-}}\, d\langle X,\tilde{M}^L\rangle_s)$$

d'après la forme explicite de J_1 , J_2 et J_3 obtenue au lemme 17-a) . C a donc bien la forme indiquée.

IV Sur un théorème de D. Williams.

Williams ([24], [25]) étudie des décompositions des trajectoires des diffusions réelles continues ; Millar ([20], [21]) remarque que les variables utilisées dans les découpages des trajectoires sont des temps "coterminaux randomisés", ce qui lui permet de retrouver des résultats explicites à l'aide de techniques markoviennes.(1)

Nous voulons donner ici une autre approche en utilisant des grossissements de filtrations et des propriétés de semi-martingales. On s'attachera surtout à démontrer complètement le

Théorème 19 ([24]) : Supposons définis sur un espace probabilisé quatre éléments aléatoires indépendants :

- une variable aléatoire α uniformément distribuée sur $[0,1]$;
- un mouvement brownien W issu de 0 ;
- deux processus de Bessel d'ordre 3 , R et R' , issus de 0 .

On définit :

$$\bar{\rho} = \inf(t, W_t = \alpha)$$
$$\bar{\sigma} = \bar{\rho} + \sup(t, R_t = \alpha)$$
$$\bar{\tau} = \bar{\sigma} + \inf(t, R'_t = 1)$$

et $\bar{W}_t = W_t 1_{(t<\bar{\rho})} + 1_{(\bar{\rho}\leq t<\bar{\sigma})}(\alpha - R_{t-\bar{\rho}}) + 1_{(\bar{\sigma}\leq t<\bar{\tau})} R'_{t-\bar{\sigma}}$

Alors, $(\bar{W}_t, t<\bar{\tau})$ a même loi que $(W_t, t<\tau)$, où $\tau = \inf(t, W_t = 1)$.

---

(1) D'autres auteurs se sont penchés sur ce genre de question ; ne pouvant tous les citer, nous renvoyons à l'historique et à la bibliographie de Millar ([20]).

On conserve les notations des paragraphes précédents et on suppose donné un $(\underline{\underline{F}}_t)$-mouvement brownien (B_t), i.e. une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale continue, de processus croissant associé t ([19], III théorème 10).
On note $(\underline{\underline{B}}_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ la filtration (dûment complétée) engendrée par (B_t).

Faisons une remarque préliminaire : toute $(\underline{\underline{B}}_t)$-martingale bornée est une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale ([19], III théorème 10); l'hypothèse ($\mathcal{H}$) de Brémaud et Yor ([4]) est donc vérifiée . Si H est un processus $\underline{\underline{R}}_+ \otimes \underline{\underline{F}}$-mesurable borné, notons ${}^{o}H$ (resp. ${}^{o'}H$) sa projection $(\underline{\underline{F}}_t)$- (resp. $(\underline{\underline{B}}_t)$-) optionnelle ; alors :
- si H est $\underline{\underline{R}}_+ \otimes \underline{\underline{B}}_\infty$-mesurable, ${}^{o}H = {}^{o'}H$;
- si L est une variable $\underline{\underline{B}}_\infty$-mesurable positive ,

$$(*) \quad E({}^{o}H_L \,;L < +\infty) = E({}^{o'}H_L\,;L < +\infty) .$$

Les tribus $(\underline{\underline{B}}_t)$-optionnelle et $(\underline{\underline{B}}_t)$-prévisible coïncidant, on obtient, avec les notations de I :
pour toute variable L $\underline{\underline{B}}_\infty$-mesurable, $L > 0$, Z^L est une $(\underline{\underline{B}}_t)$-surmartingale positive, de décomposition $Z^L = M^L - A^L$, où M^L est une $(\underline{\underline{B}}_t)$-martingale et A^L un processus croissant $(\underline{\underline{B}}_t)$-prévisible.
En outre, $\tilde{A}^L = A^L$, d'après (*) , et $\tilde{M}^L = M^L$.

Nous supposerons dans la suite $B_0 = 0$; définissons les variables suivantes :

$$\tau = \inf(\ t,\ B_t = 1\ )$$

$$\sigma = \sup(\ t<\tau\ ,\ B_t = 0\ )$$

$$B^*_t = \sup_{s\leq t} B_s \quad \text{et} \quad \rho = \sup(\ t<\sigma\ ,\ B^*_t = B_t\ ) .$$

On se trouve ainsi (avec τ , σ et ρ $\underline{\underline{B}}_\infty$-mesurables) sous les hypothèses de la proposition 18, que l'on va utiliser pour obtenir des formules de décomposition relatives aux filtrations $(\underline{\underline{F}}^{\sigma}_t)$, $(\underline{\underline{F}}^{\sigma,\rho}_t)$ et $(\underline{\underline{F}}^{\rho}_t)$. Nous étudierons ensuite quelques propriétés des processus de Bessel, avant de démontrer le théorème de Williams.

1) Formules explicites liées au grossissement.

a) Calculs relatifs à $(\underline{\underline{F}}_t^{\delta})$.

Soit $T_y = \inf(t, B_t = y)$; si $a^+ = \sup(a,0)$, $a^- = \sup(-a,0)$, pour $y < z$, on a $P(T_y < T_z) = z^+ / (z^+ - y^-)$ $(0/0 = 0)$.
Par suite, pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt T,

$$E(Z_T^{\delta} ; T < +\infty) = P(T < \delta) = P(\exists s, T < s < \tau, B_s = 0)$$
$$= E(1 - B^+_{T\wedge\tau}) .$$

On a donc $Z_t^{\delta} = 1 - B^+_{t\wedge\tau}$, processus continu, ce qui implique $\tilde{Z}^{\delta} = Z^{\delta}$.

Si L^0 désigne le temps local en 0 ([19]) de la martingale continue B, on a, d'après la formule de Tanaka :

$$B_t^+ = \int_0^t 1_{(B_s > 0)} dB_s + \tfrac{1}{2} L_t^0 , \text{ d'où}$$

(6) $$\tilde{M}_t^{\delta} = 1 - \int_0^{t\wedge\tau} 1_{(B_s > 0)} dB_s , \quad \tilde{A}_t^{\delta} = \tfrac{1}{2} L^0_{t\wedge\tau} .$$

La proposition 18, dans la cas simple où $\lambda = L_{t\wedge\tau}$ $(= \delta)$, donne alors :

(7) $$B_t = \bar{B}_t + \int_0^{t\wedge\delta} \frac{1}{1 - B_u} 1_{(B_u > 0)} du + \int_0^{\cdot} 1_{(\delta < u)} \frac{1}{B_u} du ,$$

où $\bar{B}$ est une $(\underline{\underline{F}}_t^{\delta})$-martingale locale continue, vérifiant $[\bar{B},\bar{B}]_t = [B,B]_t = t$,
i.e. $\bar{B}$ est un $(\underline{\underline{F}}_t^{\delta})$-mouvement brownien.

b) Calculs relatifs à $(\underline{\underline{F}}_t^{\delta,\rho})$.

Etudions d'abord la loi de $B^*_{\rho} = B^*_{\delta} = B_{\rho}$: on a $0 \leq B_{\rho} \leq 1$, et pour $0 \leq a \leq 1$, $P(B^*_{\delta} \geq a) = P(T_a < \delta) = E(Z^{\delta}_{T_a}) = 1 - a$.

B_{ρ} <u>est uniformément distribuée sur</u> $[0,1]$.

En outre, pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt $T \leq \tau$,
$P(T < \rho) = P(T' < \delta)$
où T' est le $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt $T' = \inf(t > T, B_t \geq B^*_T)$;

de $T' \leq \tau$ et $B^+_{T'} = B^*_T$, découle :
$P(T<\rho) = 1 - E(B^+_{T'}) = 1 - E(B^*_T)$, d'où

$Z^\rho_t = 1 - B^*_{t\wedge\tau}$, processus décroissant continu (donc $\tilde{Z}^\rho = Z^\rho$) et

$$(8) \quad \tilde{M}^\rho_t = 1 \ , \quad \tilde{A}^\rho_t = B^*_{t\wedge\tau} \ .$$

D'après la proposition 18, utilisée cette fois pour $\lambda = \rho$, et $L = \sigma$, il vient :

$$(9) \quad B_t = \tilde{B}_t - \int_0^{t\wedge\sigma} 1_{(\rho<u)} \, 1_{(B_u>0)} \frac{1}{B_\rho - B_u} du + \int_0^{t\wedge\tau} 1_{(\sigma<u)} \frac{1}{B_u} du \ ,$$

où $\tilde{B}$ est un $(\underline{\underline{F}}^{\sigma,\rho}_t)$-mouvement brownien (même raisonnement qu'en a)).

<u>c) Indépendance de B_ρ et de</u> $\tilde{B}$.

Nous allons montrer que B_ρ <u>est indépendant de</u> $(\tilde{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, puis que $\rho = \inf(t, B_t = B_\rho)$.

Considérons pour cela la filtration $(\tilde{\underline{\underline{B}}}_t)$ engendrée par $(\tilde{B}_t)$, n un entier, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$, f une application borélienne bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et g borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. $\tilde{B}$ étant un $(\underline{\underline{F}}^{\sigma,\rho}_t)$-mouvement brownien et ρ un $(\underline{\underline{F}}^{\sigma,\rho}_t)$-temps d'arrêt ,

$$C = E(f(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n}) \, g(\tilde{B}_\rho)) = E(H_\rho \, g(\tilde{B}_\rho)) \ ,$$

où H est une version continue de la martingale
$E(f(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n}) \mid \tilde{\underline{\underline{B}}}_t)$ (voir la remarque préliminaire).

$\tilde{B}$ coïncidant avec B sur $[\![0, \rho]\!]$, la propriété de Markov donne :

$$H_\rho = \left\{ E(f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \mid \underline{\underline{F}}_t) \right\}_{t=\rho} \ , \text{ d'où}$$

$$C = E(\int_{\mathbb{R}_+} E(f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \mid \underline{\underline{F}}_t) \, g(B_t) \, dA^\rho_t)$$

$$= E(f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \int_0^\tau g(B^*_t) \, dB^*_t)$$

puisque $\tilde{A}^{\rho}$ commute avec la projection $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnelle et que $d\tilde{A}^{\rho}$ est porté par $(B = B^*)$;

les égalités :

$$\int_0^{\tau} g(B_t^*)\, dB_t^* = \int_0^{B_\tau^*} g(u)\, du = \int_0^1 g(u)\, du \qquad P\text{-p.s.}$$

donnent alors l'indépendance annoncée. Notons $\underline{\underline{G}}_t = \sigma(B_\rho) \vee \underline{\underline{\tilde{B}}}_t$.

Si γ désigne maintenant le $(\underline{\underline{G}}_t)$-temps d'arrêt $\inf(\ t,\ \tilde{B}_t = B_\rho\ )$, on a $\tilde{B}_\gamma = \tilde{B}_\rho = B_\rho$ et $\tilde{B}_t \leqslant \tilde{B}_\gamma$ pour $t \leqslant \rho$; $\tilde{B}$ étant un $(\underline{\underline{G}}_t)$-mouvement brownien, $\inf(\ s > \gamma\ ,\ \tilde{B}_s > \tilde{B}_\gamma\ ) = \gamma$ d'où $\gamma = \rho$ P-p.s.

d) <u>Calculs relatifs à</u> $(\underline{\underline{F}}_t^{\rho})$

Appliquons à nouveau la proposition 18 et (5) avec les notations :

$$\rho' = \inf(\ t > \rho\ ,\ B_t = B_t^*\ )$$
$$\sigma_t = \sup(\ s < t,\ s \leqslant \tau \text{ et } B_s \leqslant 0\ )$$
$$\Lambda_t = \sup(\ s < t,\ B_s^* = B_s\ )$$
$$\mu = \inf(\ t > \rho\ ,\ B_t = 0\ )\ .$$

On a alors : $\tilde{Z}_t^{\rho'} = Z_{t-}^{\rho'} = (\ 1 - B_{t\wedge\tau}^+\ ) + B_{t\wedge\tau}^+\ 1_{(t<\tau)} \cdot 1_{(\Lambda_t = \Lambda_{\sigma_t})}$.

En particulier, $\tilde{Z}_{\sigma}^{\rho'} = 1$ et $B_\sigma = 0$, soit $\sigma < \rho'$ p.s. et

$$(Z_{t-}^{\rho'} - Z_{t-}^{\rho})\ 1_{(\rho < t \leqslant \rho')} = 1_{(\rho < t \leqslant \mu)}(B_\rho - B_t) + 1_{(\mu < t \leqslant \rho')}\ ,$$

$$(\ 1 - Z_{t-}^{\rho'})\ 1_{(\rho' < t \leqslant \tau)} = B_t \cdot 1_{(\rho' \leqslant t < \mu)}\ .$$

Il nous reste à identifier $\tilde{M}^{\rho'}$. Notons θ le processus

$$\theta_t = 1_{(t<\tau)} \cdot 1_{(\Lambda_t = \Lambda_{\sigma_t})}\ ;$$

θ est continu à gauche, limité à droite sur $\mathbb{R}_+^*$ et à variation finie sur tout intervalle $[u,v]$ $(0 < u \leqslant v)$. $D_t = \theta_{t+} B_{t\wedge\tau}^+$ est une semi-martingale bornée, donc spéciale ([19] ,IV -32) s'écrivant d'une manière unique sous la forme $N_t + C_t$ (N $(\underline{\underline{B}}_t)$-martingale

locale nulle en 0, C $(\underline{\underline{B}}_t)$-prévisible à variation finie).
La formule d'Ito, appliquée entre s et t $(0 < s \leqslant t)$ au produit des deux semi-martingales $(\theta_{t+})_{t \geqslant s}$ et $(B^+_{t\wedge\tau})_{t \geqslant s}$ donne :

$$N_t - N_s = \int_s^t \theta_{u-} \, 1_{(B_u > 0)} \, dB_u ,$$

d'où pour s tendant vers 0, $N_t = \int_0^t \theta_{u-} \cdot 1_{(B_u > 0)} \, dB_u$.

On a donc :

$$(10) \quad \tilde{M}_t^{\rho'} = 1 - \int_0^t (1 - \theta_{s-}) \, 1_{(B_s > 0)} \, dB_s .$$

θ_t valant en outre 1 pour $\rho < t < \rho'$, on obtient :

$$(11) \quad B_t = B'_t - \int_0^{t\wedge\rho} 1_{(\rho < s)} \frac{1}{B_\rho - B_s} ds + \int_0^{t\wedge\tau} 1_{(\rho' < s)} \frac{1}{B_s} ds ,$$

où B' est un $(\underline{\underline{F}}_t^{\rho})$-mouvement brownien (même raisonnement qu'en a)).
Remarquons que l'on montre comme en c) que B_ρ est indépendant de B' .

2) Quelques propriétés des processus de Bessel.

Rappelons que l'on appelle processus de Bessel d'ordre n (n entier, $n \geqslant 2$) tout processus identique en loi au module $|X|$ d'un mouvement brownien n-dimensionnel $X = (X^1, X^2, \ldots, X^n)$.

Deux applications de la formule d'Ito permettent d'écrire :

$$(12) \quad |X_t| = |X_0| + \Gamma_t + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{1}{|X_s|} ds ,$$

où Γ_t est le mouvement brownien (réel) $\int_0^t \frac{1}{|X_s|} \left(\sum_i X_s^i \, dX_s^i \right)$.

et :

$$(13) \quad |X_t|^2 = |X_0|^2 + 2 \int_0^t |X_s| \, d\Gamma_s + nt .$$

En [27], Yor a montré que, si $P(X_0 = x) = 1$, $x \neq 0$, le processus de Bessel d'ordre n, $|X|$, a même filtration que Γ .Notre but principal ici est d'étendre ce résultat lorsque $P(X_0 = 0) = 1$, et, finalement, lorsque X_0 est une variable $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable..

Lemme 20 : Supposons défini sur un espace probabilisé filtré $(A, \underline{\underline{A}}, (\underline{\underline{A}}_t), Q)$ (vérifiant les conditions habituelles), un $(\underline{\underline{A}}_t)$-mouvement brownien (U_t), nul en 0 . Soit C une variable aléatoire A_0-mesurable, positive et bornée. L'équation

$$(12') \quad H_t = C + U_t + \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{1}{H_s}\, ds \quad , \ H \geq 0$$

a une solution et une seule. H est une $(\underline{\underline{A}}_t)$-semi-martingale continue, engendrant la même filtration que $(C + U_t)_{t \geq 0}$. En outre, H est un processus de Bessel d'ordre n, issu de C .

Démonstration : Il résulte de Yamada ([26] ,p. 117) que l'équation

$$(13') \quad K_t = C^2 + 2\int_0^t |K_s|^{\frac{1}{2}}\, dU_s + nt$$

a une solution, unique ; K est une $(\underline{\underline{A}}_t)$-semi-martingale continue, ayant même loi que le carré d'un processus de Bessel d'ordre n, issu de C .

Soit $H_t = (K_t)^{\frac{1}{2}}$ et $V_t = C + U_t + \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{1}{H_s}\, ds$.

Sur $(C > 0)$, K_t ne revenant pas en 0 pour $t > 0$, $\frac{1}{H}$ est localement borné , tandis que

$$\int_0^t E\left(\frac{1}{H_s} \ ; C = 0\right) ds = a_n\, P(C = 0) \int_0^t s^{-\frac{1}{2}}\, ds < +\infty \ .$$

V est donc une $(\underline{\underline{A}}_t)$-semi-martingale continue.

Considérons en outre $0 < b < a$, $S_a = \inf(\ t,\ H_t = a\ )$, $S'_b = \inf(\ t > S_a\ ,\ H_t = b\ )$ et g une fonction de classe C^2 coïncidant avec $x \to x^{\frac{1}{2}}$ sur $[b/2, +\infty[$; appliquons la formule d'Ito à $g(K_t)$; il vient :

$$g(K_t)\, 1_{(S_a \leq t)} = 1_{(S_a \leq t)}\left\{ a + \int_{S_a}^t g'(K_s)\, dK_s + \tfrac{1}{2}\int_{S_a}^t g''(K_s)\, d\langle K,K\rangle_s \right\}$$

soit : $H_{t\wedge S'_b}\, 1_{(S_a \leq t)} = 1_{(S_a \leq t)} \left\{ a + \int_{S_a}^{t\wedge S'_b} dU_s + \frac{n-1}{2} \int_{S_a}^{t\wedge S'_b} \frac{1}{H_u}\, du \right\}$.

Il suffit de faire tendre b vers 0 (S'_b tend alors vers $+\infty$), puis a vers 0 , pour obtenir $H = V$.

Avec les notations du lemme 20, on a aussi, pour $n \geq 3$, le

<u>Lemme 21</u> : <u>Soit</u> D <u>une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{A}}_o$-<u>mesurable bornée</u>, $D > 0$; H <u>étant solution de</u> (13'), <u>notons</u> $\Sigma_D = \sup(\, s,\ H_s = D\,)$.
<u>La projection</u> $(\underline{\underline{A}}_t)$-<u>optionnelle de</u> $1_{[\![0,\ \Sigma_D]\!]}$ <u>est égale à</u>

$$\inf\left(1 \ ,\ \left(\frac{D}{H}\right)^{n-2} \right) .$$

<u>Démonstration</u> :

Pour un processus de Bessel d'ordre n $(n \geq 3)$ issu de $x \geq 0$, la probabilité d'atteinte de $a > 0$ est égale à $\inf(1 \ ,\ (a/x)^{n-2})$, d'où :

$$P(T \leq \Sigma_D ; T < +\infty) = P(\ \exists\, u \geq 0,\ H_{u+T} = D\ ;\ T < +\infty\ )$$
$$= E\left(\ \inf\left(1\ ;\ \left(\frac{D}{H_T}\right)^{n-2} \right) ;\ T < +\infty \right) .$$

<u>Remarque 22</u> : Supposons que l'on veuille grossir la filtration $(\underline{\underline{A}}_t)$ à l'aide de la fin d'ensemble $(\underline{\underline{A}}_t)$-optionnel Σ_D ; la partie martingale de la surmartingale $\inf(1 \ ,\ (\frac{D}{H})^{n-2})$ est, d'après la formule d'Ito pour les fonctions convexes ([19]) égale à :

$$1 - (n-2)\, D^{n-2} \int_0^t 1_{(D < H_s)} \frac{1}{H_s^{n-1}}\, dU_s \qquad .$$

Dans le cas où n = 3, on obtient alors en vertu de la proposition 18 :

$$(14)\quad H_t = C + \tilde{U}_t + \int_0^{t\wedge\Sigma_D} \frac{1}{H_u}\, 1_{(H_u \leq D)}\, du + \int_0^t 1_{(\Sigma_D < u)} \frac{1}{H_u - D}\, du$$

où $\tilde{U}$ est un $(\underline{\underline{A}}_t^{\Sigma_D})$-mouvement brownien, nul en 0 .

3) Décomposition des trajectoires browniennes entre 0 et τ .

Nous reprenons les notations introduites au paragraphe IV-1).

a) Comportement entre 0 et ρ : d'après 1-d), B_ρ , uniformément distribué sur $[0,1]$, est indépendant de B' et $B = B'$ sur $[\![0,\rho]\!]$; $\rho = \inf(t,\ B'_t = B_\rho)$.

b) Comportement entre ρ et δ .

Soient $D_t = B'_\rho - B'_{t+\rho}$, $(\underline{\underline{F}}^\rho_{t+\rho})$-mouvement brownien issu de 0 , indépendant de $\underline{\underline{F}}^\rho_\rho$ et $Y_t = B_\rho - B_{t+\rho}$. Il découle de (11) que :

$$(15)\quad Y_t = D_t + \int_0^{t\wedge(\mu-\rho)} \frac{1}{Y_u}\,du - \int_0^{t\wedge(\tau-\rho)} 1_{(\rho'-\rho<u)}\,\frac{1}{B_\rho - Y_u}\,du$$

avec $\mu - \rho = \inf(t,\ Y_t = B_\rho)$

$\rho' - \rho = \inf(t>0,\ Y_t < 0)$

$\tau - \rho = \inf(t,\ Y_t = B_\rho - 1)$.

D'après le lemme 17 et IV 1-d), la projection $(\underline{\underline{F}}^\rho_{t+\rho})$-prévisible du processus $1_{[\![0,\delta-\rho]\!]}$ est

$$1_{[\![0,\mu-\rho]\!]} + 1_{]\!] \mu-\rho,\rho'-\rho]\!]}\left(1 - \frac{B^+_{t+\rho}}{B_\rho}\right) .$$

La projection $(\underline{\underline{F}}^\rho_{t+\rho})$-optionnelle de $1_{[\![0,\delta-\rho [\![}$ est donc

$$1_{[\![0,\mu-\rho [\![} + 1_{[\![\mu-\rho,\rho'-\rho [\![}\inf\left(1,\frac{Y_t}{B_\rho}\right) = N_t\,.\,\inf\left(1,\frac{B_\rho}{Y_t}\right)$$

où $N_t = 1 + 1_{(\mu-\rho\leq t)}\,\frac{1}{B_\rho}\left(Y_{t\wedge(\rho'-\rho)} - Y_{\mu-\rho}\right)$.

Lemme 23 : a) N_t est une $(\underline{\underline{F}}^\rho_{t+\rho})$-martingale continue positive .

b) pour tout $u>0$, soit Q^u la probabilité définie sur $(\Omega , \underline{\underline{F}}^\rho_{u+\rho})$ par $Q^u = N_u\,.\,P$. Alors $Q^u(\rho'-\rho\leq u) = 0$ et, sous Q^u, $(Y_{s\wedge u})_{s\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Bessel d'ordre 3 (arrêté en u), issu de 0 et

<u>indépendant de</u> $\underline{\underline{F}}^{\rho}_{\rho}$.

<u>Démonstration</u> :

a) $N_t = 1 + \frac{1}{B_\rho}\int_0^t 1_{(\mu-\rho < s \leq \rho'-\rho)}\, dD_s$ (d'après (15)) ;

N est donc une $(\underline{\underline{F}}^{\rho}_{t+\rho})$-martingale locale positive, continue ; $N_0 = 1$; pour montrer que N est une martingale, il suffit de montrer le même résultat pour $1_{(B_\rho \geq m^{-1})}.N$ $(m \in \mathbb{N},\ m \geq 1)$; or ceci est une conséquence de $[N,N]_t = 1 + \frac{1}{B^2_\rho}\inf(\rho'-\mu, (t-\mu+\rho)^+) \leq 1 + \frac{t}{B^2_\rho}$ et des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Doob.

b) $\rho'-\rho$ est un $(\underline{\underline{F}}^{\rho}_{t+\rho})$-temps d'arrêt ; de a) et $N_0 = 1$, $N_{\rho'-\rho} = 0$ vient : $Q^u(\Omega) = 1$, $Q^u(\rho'-\rho \leq u) = 0$.

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Girsanov, dans la version donnée par Lenglart ([14]) : sous Q^u ,

$$\tilde{D}_{t\wedge u} = D_{t\wedge u} - \int_0^{t\wedge u} \frac{1}{N_s}\, d\langle D,N\rangle_s = D_{t\wedge u} - \int_0^{t\wedge u} \frac{1}{Y_s}\, 1_{(\mu-\rho < s \leq \rho'-\rho)}\, ds$$

est une $(\underline{\underline{F}}^{\rho}_{t+\rho})$-martingale locale continue, de processus croissant $t\wedge u$, donc un $(\underline{\underline{F}}^{\rho}_{t+\rho})$-mouvement brownien, arrêté en u . En outre, puisque $Q^u(\rho'-\rho \leq u) = 0$, (15) donne : sous Q^u

$$Y_{u\wedge t} = \tilde{D}_{t\wedge u} + \int_0^{t\wedge u} \frac{1}{Y_s}\, ds$$ d'où b) (lemme 20).

Le lemme 23 (qui n'est pas autre chose que l'aspect "semi-martingale" des diffusions conditionnées de Doob...(cf. Williams [25])) permet d'étudier facilement le comportement du mouvement brownien B entre ρ et δ . Notons à cet effet $C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, $\underline{\underline{C}}$ sa tribu borélienne, (ξ_s) les applications coordonnées et Q_0 la probabilité sur (C, $\underline{\underline{C}}$) faisant de ξ un processus de Bessel d'ordre 3 issu de 0 .

On considère sur $(W, \underline{\underline{W}}) = (\Omega \times C, \underline{\underline{F}}_{\varrho}^{\varrho} \times \underline{\underline{C}})$ la probabilité $\overline{Q} = P \otimes Q_0$, et $\overline{Y}$ le processus défini par $\overline{Y}_t : (\omega, c) \in \Omega \times C \to \xi_t(c)$

α la variable $\alpha : (\omega, c) \to B_{\varrho}(\omega)$.

Soient alors $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions boréliennes nulles en 0, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ des nombres réels.

$$E\left(f_1(Y_{t_1} 1_{(t_1 < \delta - \varrho)}) \ldots f_n(Y_{t_n} 1_{(t_n < \delta - \varrho)}) \right) =$$

$$E\left(f_1(Y_{t_1}) \ldots f_n(Y_{t_n}) \; ; \; t_n < \delta - \varrho \right) =$$

$$E\left(f_1(Y_{t_1}) \ldots f_n(Y_{t_n}) \inf\left(1, \frac{B_\varrho}{Y_{t_n}}\right) N_{t_n} \right) =$$

$$E_{Q^{t_n}}\left(f_1(Y_{t_1}) \ldots f_n(Y_{t_n}) \inf\left(1, \frac{B_\varrho}{Y_{t_n}}\right) \right) = \quad \text{(Lemme 23)}$$

$$E_{\overline{Q}}\left(f_1(\overline{Y}_{t_1}) \ldots f_n(\overline{Y}_{t_n}) \inf\left(1, \frac{\alpha}{\overline{Y}_{t_n}}\right) \right) =$$

$$E_{\overline{Q}}\left(f_1(\overline{Y}_{t_1}) \ldots f_n(\overline{Y}_{t_n}) \; ; \; t_n < \Sigma_\alpha \right)$$

où $\Sigma_\alpha = \sup(t, \overline{Y}_t = \alpha)$ (Lemme 21).

$(B_\varrho - B_{t+\varrho} \; ; \; t < \delta - \varrho)$ a donc même loi qu'un processus de Bessel d'ordre 3, indépendant de $\underline{\underline{F}}_{\varrho}^{\varrho}$, issu de 0, et tué au dernier instant où il passe en B_ϱ.

c) <u>Comportement entre δ et τ</u>.

On utilise maintenant 1-b) : $B_{t+\delta} = \tilde{B}_{t+\delta} - B_\delta + \int_0^{t \wedge (\tau - \delta)} \frac{1}{B_{u+\delta}} du$

où $\tau - \delta = \inf(t > 0, B_{t+\delta} = 1)$ et $(\hat{\tilde{B}}_{t+\delta} - \hat{B}_\delta)$ est un $(\underline{\underline{F}}_{t+\delta}^{\varrho,\delta})$-mouvement brownien, indépendant de $\underline{\underline{F}}_{\delta}^{\varrho,\delta}$.

Le lemme 20 montre alors que $(B_{t+\delta}, t < \tau - \delta)$ a même loi qu'un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0, indépendant de $\underline{\underline{F}}_{\delta}^{\varrho,\delta}$, tué au premier instant où il passe en 1.

Bibliographie

[1] Airault H., Föllmer H. : Relative densities of semimartingales. Inventiones Math. 27, 1974, 299-327.

[2] Azéma J.: Quelques applications de la théorie générale des processus I. Inventiones Math. 18, 1972, 293-336.

[3] Barlow M.: Study of a filtration expanded to include an honest time. (à paraitre au Z.f.Wahr. ; 1977)

[4] Brémaud P., Yor M. : Changes of filtrations and of probability measures (à paraitre au Z.f.Wahr. ; 1977)

[5] Dellacherie C.: Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Math. u.i. Grenzgebiete, Band 67, Springer 1972.

[6] Dellacherie C., Meyer P.A. : Probabilités et potentiels, Hermann, 1975.

[7] Dellacherie C.: Supports optionnels et prévisibles d'une P-mesure et applications. Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, 515-522, Springer 1978.

[8] Dellacherie C., Meyer P.A.: A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. Séminaire de probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, 70-77, Springer 1978.

[9] Dellacherie C., Meyer P.A.: Construction d'un processus prévisible ayant une valeur donnée en un temps d'arrêt. Séminaire de Probabilités XII, Lecture notes in Math. 649, 425-427, Springer 1978.

[10] El Karoui N., Reinhard H.: Compactification et balayage de processus droits. Astérisque 21, 1975.

[11] Getoor R.K. : Markov processes : Ray processes and Right processes. Lecture Notes in Math. 440, Springer 1975.

[12] Jeulin T.,Yor M. : Grossissement d'une filtration,formules explicites. Séminaire de probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649,78-97, Springer 1978.

[13] Jeulin T.,Yor M.: Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. (à paraitre aux Annales de l'E.N.S. ; 1978)

[14] Lenglart E.: Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités. Z.f. Wahr. 39, 65-70, 1977 .

[15] Maisonneuve B.,Meyer P.A.:Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Séminaire de Probabilités VIII,Lecture Notes in Math.381 , Springer 1974.

[16] Mertens J.F.: Théorie des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. Z.f.Wahr. 22,45-68, 1972.

[17] Meyer P.A.: Processus de Markov. Lecture Notes in Math. 26, Springer 1967.

[18] Meyer P.A.,Smythe R.T.,Walsh J.B.: Birth and death of Markov processes. Proc.6th Berkeley Sympos.Math.Statist.Prob.,Univ.Calif. Vol III, 295-305, 1972.

[19] Meyer P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math.511, Springer 1976.

[20] Millar P.W.: Random times and decomposition theorems. Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol 31 , 91-103, 1977.

[21] Millar P.W.: A path decomposition for Markov processes. The Annals of Probability, Vol 6,n°2 , 345-348, 1978 .

[22] Pittenger A.O.,Shih C.T. : Coterminal families and the strong Markov Property. T.A.M.S., Vol 182, 1-42, 1973.

[23] Stricker C.: Quasimartingales, martingales locales et filtrations naturelles. Z.f.Wahr. 39,55-63, 1977.

[24] Williams D.: Decomposing the brownian path. Bull. Amer. Math. Soc. 76, 871-873, 1970.

[25] Williams D.: Path decomposition and continuity of local time for one-dimensionnal diffusions I, Proc. London Math.Soc.(3),28, 1974.

[26] Yamada T.: Sur la construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non lipschitzien. Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, 114-131 , Springer 1978 .

[27] Yor M.: Sur les théories du filtrage et de la prédiction. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Math. 581 , 257-297, Springer 1977.

[28] Yor.M.: Grossissement d'une filtration et semi-martingales, théorèmes généraux. Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, 61-69, Springer 1 978.

Note : Je tiens à remercier ici M. Yor, dont les remarques et les suggestions diverses m'ont permis de clarifier certains points et d'éliminer quelques erreurs qui s'étaient glissées dans une première version de ce travail.