

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

MARC YOR

Un théorème de J. W. Pitman

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 521-532

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__521_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un théorème de J.W. Pitman

(T. Jeulin , avec un appendice de M. Yor)

Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration d'un théorème dû à J.W. Pitman ([5]) :

Théorème : a) Soit X_t un mouvement brownien réel issu de 0, et soit
 $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors $2S-X$ a même loi qu'un processus de Bessel
d'ordre 3 issu de 0 .

a') Soit Z_t un processus de Bessel d'ordre 3 issu de 0, et soit
 $J_t = \inf_{s \geq t} Z_s$. Alors $2J-Z$ est un mouvement brownien .

Rappelons d'abord, en suivant Pitman, que les assertions a) et a') sont équivalentes.

Considérons en effet l'ensemble U (resp. V) des applications continues $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$) telles que $u(0) = 0$ et $\sup_t u(t) = +\infty$ (resp. $v(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = +\infty$). On munit en outre U et V de la topologie de la convergence compacte et on note $\underline{U}$ et $\underline{V}$ leurs tribus boréliennes respectives.

Pour $u \in U$, définissons $\bar{u}(t) = \sup_{s \leq t} u(s)$, et pour $v \in V$,
 $\underline{v}(t) = \inf_{s \geq t} v(s)$. Soit en outre q un réel, $q > 1$.

On vérifie facilement que les applications [mesurables]

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f_q} & V \\ u & \longrightarrow & f_q(u) = q\bar{u} - u \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g_q} & U \\ v & \longrightarrow & g_q(v) = (q/q-1) \underline{v} - v \end{array}$$

sont réciproques et que : (1') $\underline{f_q}(u) = (q-1) \bar{u}$.

Notons P_0 (resp. Q_0) la probabilité sur $(U, \underline{U})$ (resp. $(V, \underline{V})$) faisant des applications coordonnées un mouvement brownien (resp. un processus de Bessel d'ordre 3) issu de 0 . a) et a') signifient :

$$a'') \quad Q_0 = f_2(P_0) .$$

Notons cependant la proposition élémentaire suivante :

Proposition : Soit X_t un mouvement brownien réel issu de 0 , et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Soit en outre q un réel, $q > 1$. Une condition nécessaire (et donc suffisante, d'après le théorème de Pitman) pour que $qS-X$ soit un processus de Markov homogène est : $q = 2$.

Démonstration : soient $R_t = qS_t - X_t$, $I_t = \inf_{s \leq t} R_s = (q-1) S_t$

(d'après 1')) . Pour que R soit un processus de Markov homogène, il est nécessaire qu'il existe une fonction [universellement mesurable]

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$,

$$E(I_t \mid R_t) = (q-1) E(S_t \mid R_t) = (q-1) h(R_t) \quad \text{p.s.} .$$

La loi de (X_t, S_t) ayant pour densité

$$\varphi(a, b) = \left(\frac{2}{\pi t^3} \right)^{\frac{1}{2}} (2b-a) \exp\left(- \frac{(2b-a)^2}{2t} \right) \mathbf{1}_{(a^+ \leq b)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ ([3] page 195), on obtient, pour $q \neq 2$,

$$(q-2) E(S_t \mid R_t) = R_t - t^{\frac{1}{2}} k_q(t^{-\frac{1}{2}} R_t)$$

$$\text{avec} \quad k_q(r) = \left(\int_{\frac{r}{q-1}}^r u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right) \left(\int_{\frac{r}{q-1}}^r u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right)^{-1} .$$

(Pour $q = 2$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ convient !) .

Le fait que la condition soit suffisante est l'objet de la suite ...

Adoptant maintenant une démarche inverse de celle de Pitman ⁽⁺⁾, nous allons démontrer (ou plutôt redécouvrir...) l'énoncé a').

Z est donc un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0, défini sur un espace probabilisé complet filtré $(\mathcal{L}, \mathbb{F}, \mathbb{F}_t, P)$ vérifiant les conditions habituelles : Z est une $(\mathbb{F}_t)$ -semi-martingale continue positive, nulle en 0, telle que, par une application classique de la formule d' Ito :

$$B_t = Z_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} ds \quad \text{soit un } (\mathbb{F}_t)\text{-mouvement brownien .}$$

Pour simplifier, on suppose que $(\mathbb{F}_t)$ est la filtration (Z_t) engendrée par Z , dûment complétée.

Soit $X = 2J - Z$ et soit (X_t) la filtration [dûment complétée] engendrée par X . De (A') vient : $J_t = \sup_{s \leq t} X_s$, d'où $Z_t \leq X_t$; pour $s \leq t$, $J_s = \inf(J_t ; \inf_{s \leq u \leq t} Z_u)$ (voir [5] , p.522, pour le même résultat dans le cas discret), d'où : $X_t = Z_t \vee \sigma(J_t)$.

En outre si, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $T_a = \inf(t, X_t = a)$ et $\sigma'_a = \sup(t, Z_t = a)$, alors $T_a = \sigma'_a$ ((A')), σ'_a est fin d'ensemble (Z_t) -prévisible, T_a est un (X_{t+}) -temps d'arrêt, et on déduit de l'égalité : $(J_t > a) = (\sigma'_a < t)$, pour tout couple (a, t) , que :

(X_{t+}) est la plus petite filtration continue à droite, contenant (Z_t) et faisant des variables $(T_a, a \in \mathbb{R}_+^*)$ des temps d'arrêt .

Cette caractérisation de la filtration (X_{t+}) nous a incité à utiliser des résultats sur les grossissements successifs des filtres à l'aide de fins d'ensembles optionnels, pour montrer que Z est une (X_{t+}) -semi-martingale (et plus exactement que $(Z_s)_{s \leq t}$ est une $(X_{s+})_{s \leq t}$ -quasi-martingale), puis que $X = 2J - Z$ est une

(+) Cf. la remarque de M. Yor en appendice .

$(\underline{X}_{t+})$ -martingale, qui ne saurait être autre qu'un mouvement brownien, puisque $[X, X]_t = [Z, Z]_t = [B, B]_t = t$.

Introduisons quelques notations supplémentaires : $\mathcal{A}$ est l'ensemble des suites croissantes $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, telles que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(n) = +\infty$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, on désigne par $(\underline{Z}_t^\alpha)$ la plus petite filtration continue à droite contenant $(\underline{Z}_t)$ et faisant des $(T_{\alpha(n)}, n \in \mathbb{N})$ des temps d'arrêt. $\underline{P}$ (resp. $\underline{P}^\alpha$, resp. $\bar{\underline{P}}$) désigne la tribu $(\underline{Z}_t)$ - (resp. $(\underline{Z}_t^\alpha)$)-, resp. $(\underline{X}_{t+})$ -prévisible.

$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \underline{P}^\alpha$ est une algèbre de Boole engendrant $\bar{\underline{P}}$; en outre, les

$(T_a, a \in \mathbb{R}_+^*)$ étant des fins d'ensembles $\underline{P}$ -mesurables, il résulte de ([2], lemme 17) (voir aussi [1]) que $\underline{P}^\alpha$ est la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ engendrée par $\underline{P}$ et les intervalles stochastiques

$(\llbracket T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)} \rrbracket, n \in \mathbb{N})$. Par suite ([2], lemme 17 et

proposition 18) :

1) si H est un processus mesurable positif, nul en 0, sa projection (α) - $\underline{P}$ H sur $\underline{P}$ est donnée par :

$$(2) \quad (\alpha)\text{-}\underline{P} H = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\llbracket T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)} \rrbracket} \frac{P^{(H 1_{\llbracket T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)} \rrbracket})}}{Y_{-}^{\alpha(n+1)} - Y_{-}^{\alpha(n)}}$$

où Y^a est la $(\underline{Z}_t)$ -surmartingale ${}^0(1_{\llbracket 0, T_a \rrbracket})$, dont on note M^a la partie martingale.

(On fait la convention $0/0 = 0$, et pour U processus mesurable positif, 0U ($= {}^0U$) désigne la projection $(\underline{Z}_t)$ -prévisible ($=$ optionnelle) de U).

ii) B est une $(\underline{Z}_t^\alpha)$ -semi-martingale et

$$(3) \quad B_t^\alpha = B_t - \int_0^t \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} \frac{d \langle B, M^{\alpha(n+1)} - M^{\alpha(n)} \rangle_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}}$$

est un $(\underline{Z}_t^\alpha)$ -mouvement brownien.

(Les crochets obliques sont relatifs à la filtration $(\underline{Z}_t)$).

Explicitons : pour un processus de Bessel d'ordre 3, issu de $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité d'atteinte d'un point $a \in \mathbb{R}_+$ est égale à $\inf(1, a/x)$. La propriété de Markov forte de Z donne alors ([2], lemme 21) :

$$(4) \quad Y^a = \inf(1, \frac{a}{Z}) .$$

La formule d'Ito pour les fonctions convexes donne :

$$(5) \quad M^a = 1 - a \int_0^\cdot 1_{(a < Z_s)} \frac{1}{Z_s^2} dB_s .$$

On a donc : Z est une $(\underline{Z}_t^\alpha)$ -semi-martingale continue, de décomposition canonique : (6) $Z = B^\alpha + C^\alpha$, où

$$(6) \quad C_t^\alpha = \int_0^t \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} 1_{(Z_s \leq \alpha(n+1))} \frac{ds}{Z_s - \alpha(n)} .$$

Nous en venons au point crucial :

Lemme 1 : C^α est la projection duale $(\underline{Z}_t^\alpha)$ -prévisible du processus croissant $2J$. En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout H $\underline{P}^\alpha$ -mesurable borné,

$$(7) \quad E\left(\int_0^t H_s dZ_s\right) = 2 E\left(\int_0^t H_s dJ_s\right) .$$

Démonstration : a) Soit H un processus $\underline{P}^\alpha$ -mesurable borné, nul en 0. D'après (2), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
& E\left(\int_0^t H_s dJ_s\right) \stackrel{(2)}{=} \\
& \sum_{n \in \mathbb{N}} E\left\{\int_0^t 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} \frac{P(H 1_{[T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]})_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}} dJ_s\right\} = \\
& \sum_{n \in \mathbb{N}} E\left\{\int_0^t 1_{(\alpha(n) < Z_s \leq \alpha(n+1))} \frac{P(H 1_{[T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]})_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}} dJ_s\right\}
\end{aligned}$$

puisque $(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)}) = (\alpha(n) < J_s \leq \alpha(n+1))$ et que le

processus croissant J est porté par $(s \mid J_s = Z_s)$.

J^p désignant la projection duale (Z_t) -prévisible de J , on obtient

à l'aide de (4) : $E\left(\int_0^t H_s dJ_s\right) =$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left(\int_0^t 1_{(\alpha(n) < Z_s \leq \alpha(n+1))} \frac{Z_s P(H 1_{[T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]})_s}{Z_s - \alpha(n)} dJ_s\right) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left(\int_0^t H_s 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} \cdot 1_{(Z_s \leq \alpha(n+1))} \frac{Z_s}{Z_s - \alpha(n)} dJ_s^p\right).$$

b) Il nous reste à calculer J^p . Or, pour un processus de Bessel d'ordre 3, issu de $x \in \mathbb{R}_+$,

$$E_x(J_0) = \int_0^\infty P_x(J_0 > y) dy = \int_0^x P_x(T_y = \infty) dy = \int_0^x \left(1 - \frac{y}{x}\right) dy = \frac{1}{2} x.$$

La propriété de Markov donne donc, pour tout (Z_t) -temps d'arrêt T ,

T fini, $E(Z_T) = 2 E(J_T)$,

soit $Z - 2J$ est (Z_t) -innovant, ou $Z - 2J^p$ est une (Z_t) -martingale

locale, soit $J^p = \frac{1}{2} \int_0^\cdot \frac{1}{Z_s} ds$.

c) Si H est P^α -mesurable, borné par $h \in \mathbb{R}_+$,

$$[H \cdot B^\alpha, H \cdot B^\alpha]_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad \text{est majoré par } h^2 t .$$

$H \cdot B^\alpha$ est donc une (Z_t^α) -martingale de carré intégrable, nulle en 0 ,
 donc d'espérance nulle ; (6) implique alors (7) .

Lemme 2 : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(Z_s)_{s \leq t}$ est une $(X_{s+})_{s \leq t}$ -quasi-martingale.

Démonstration : $s \rightarrow Z_s$ étant continu dans L^1 , il suffit de montrer
 que, pour tout t , $(Z_s)_{s \leq t}$ est une $(X_s)_{s \leq t}$ -quasi-martingale .

Pour toute subdivision $\mathcal{J} = (0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}=t)$ de $[0, t]$,

on note $\text{Var}(Z, \mathcal{J}, X, t) = \left(\sum_{i=0}^n E \{ |E(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} | X_{t_i})| \} \right) + E(Z_t)$,

et on veut montrer que $\text{Var}(Z, X, t) = \sup_{\mathcal{J}} \text{Var}(Z, \mathcal{J}, X, t)$
 est finie pour tout t . Or ,

$\text{Var}(Z, \mathcal{J}, X, t) - E(Z_t)$

$= \sup \left(\sum_{i=0}^n E(U_{t_i} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})) ; |U_{t_i}| \leq 1 ; U_{t_i} \text{ } X_{t_i}\text{-mesurable} \right)$

$= \sup \left(\sum_{i=0}^n E(V_{t_i} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})) ; |V_{t_i}| \leq 1 , V_{t_i} \text{ } Z_{t_i}^\alpha\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A} \right)$

$\leq \sup \left\{ E \left(\int_0^t H_s dZ_s \right) ; |H| \leq 1 , H \text{ } P^\alpha\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A} \right\}$

$\stackrel{(7)}{=} \sup \left\{ 2 E \int_0^t H_s dJ_s \right\} ; |H| \leq 1 , H \text{ } P^\alpha\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A} \}$

$= E(Z_t) = (2t/\pi)^{\frac{1}{2}}$, d'où le lemme 2 .

Le lemme 2 et l'égalité (7) , pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, et H processus
 P^α -mesurable borné , entraînent, par application du théorème de
 classe monotone, que (7) est encore valable pour tout processus H
 $\bar{P}$ -mesurable borné. Ceci équivaut à dire que : $Z - 2J$ est une
 (X_{t+}) -martingale continue , cqfd .

Remarques : 1) La filtration $(X_{\underline{t}})$ est en fait continue à droite .

2) Il ne faut pas déduire hâtivement du lemme 2 que toute $(Z_{\underline{t}})$ -martingale est une $(X_{\underline{t}})$ -semi-martingale, la fausseté de cette assertion ayant été prouvée dans l'article sur les "faux-amis", écrit avec M. Yor, dans ce volume .

Appendice .

=====

Sur le supremum du mouvement brownien :

les théorèmes de P. Lévy et J. Pitman .

(M. Yor)

1. Une question de J. Pitman.

Contrairement à T. Jeulin, nous avons essayé de donner une démonstration du théorème de Pitman présenté sous sa première forme (cf. le début de l'exposé de Jeulin) que nous rappelons :

Théorème A1 (J. Pitman): Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0, et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors, $Z = 2S - X$ est (en loi) un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0 .

Remarquons tout de suite, d'après Pitman, que :

$$S_t = J_t \left(\stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{s \geq t} Z_s \right) , \text{ pour tout } t .$$

On note encore $(Z_{\underline{t}})$ (resp. $(X_{\underline{t}})$) la filtration naturelle de Z (resp. X) convenablement complétée, et rendue continue à droite .

En fait, notre approche ne semble pas pouvoir aboutir à la preuve complète du théorème A1 . Plus modestement, nous répondons seulement ici à une question de Pitman ([5], p.523, fin de la note(ii))

en faisant la remarque suivante : si l'on sait déjà (par une méthode ou une autre) que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov (inhomogène) - en fait, on utilisera uniquement :

$$(*) \quad \forall t, \quad E(J_t | \underline{Z}_t) = E(J_t | Z_t) -$$

alors on peut montrer facilement que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0 .

2. Sur les processus de Bessel d'ordre n (n $\in \mathbb{N}^*$).

Si $(\rho_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel d'ordre n, issu de 0, i.e.: si $\rho_t = \|B_t\|$, où (B_t) est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, issu de 0, et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, il découle d'une application simple de la formule d'Ito que :

(a) $(\rho_t^2 - nt, t \geq 0)$ est une martingale continue, de processus croissant égal à $4 \int_0^t \rho_s^2 ds$.

L'intérêt de cette remarque provient du résultat d'unicité suivant, dû à T.Jeulin ([2]) qui emploie pour cela des résultats de T.Yamada ([6]) sur les équations différentielles stochastiques à coefficients höldériens, d'ordre $\alpha < 1$ (en fait, ici $\alpha = \frac{1}{2}$) :

(b) Si, sur un espace de probabilité filtré, $(\rho_t, t \geq 0)$ est un processus à valeurs positives, nul en 0, qui vérifie (a), ρ est (en loi) un processus de Bessel d'ordre n .

3. Retour au théorème de Pitman.

Comme annoncé dans le paragraphe 1, nous admettons (*), et démontrons le théorème A1 .

Si deux processus H et K, adaptés à une filtration $(\underline{F}_t)$ diffè-

rent d'une (F_t) -martingale locale, on note : $H \equiv K \pmod{(F_t)}$.

Appliquant la formule d'Ito à Z^2 , il vient :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= 2 \int_0^t Z_s dZ_s + t \\ (1) \quad &= -2 \int_0^t Z_s dX_s + 4 \int_0^t Z_s dS_s + t. \end{aligned}$$

Il résulte déjà de cette formule que :

(c) Z^2 est une semi-martingale continue pour (X_t) (et donc pour (Z_t)), et le processus croissant de la partie martingale continue de Z^2 (qui est le même relativement à (X_t) et à (Z_t)) est $4 \int_0^t Z_s^2 ds$.

Revenons à (1). La mesure aléatoire dS_s étant portée par $\{s \mid X_s = S_s\}$, on a : $Z_t^2 \equiv t + 4 \int_0^t X_s dS_s \pmod{(X_t)}$
 $\equiv t + 4 X_t S_t \pmod{(X_t)}$,
 par intégration par parties.

En utilisant la formule : $2S_t = Z_t + X_t$, il vient :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &\equiv t + 2 X_t (Z_t + X_t) \pmod{(X_t)} \\ &\equiv 3t + 2 X_t Z_t \pmod{(X_t)}, \end{aligned}$$

et donc : (2) $Z_t^2 - 3t \equiv 2 E(X_t \mid Z_t) Z_t \pmod{(Z_t)}$.

Or, d'après (*), et la connaissance de la loi conjointe du couple (X_t, S_t) - pour t fixé - (voir l'exposé de Jeulin), on a :

$$2 E(S_t \mid Z_t) = Z_t, \text{ d'où : } E(X_t \mid Z_t) = 0.$$

D'après (2) et (c), $C = Z$ vérifie (a) pour $n = 3$, et est donc, d'après (b), un processus de Bessel d'ordre 3.

4. Le théorème de P. Lévy.

La méthode utilisée précédemment permet aussi de démontrer très simplement le

Théorème A2 (P.Lévy) : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0, et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors $Y = S - X$ est (en loi) un processus de Bessel d'ordre 1, issu de 0.

Démonstration : D'après la formule d'Ito, on a :

$$Y_t^2 = 2 \int_0^t Y_s dY_s + t = -2 \int_0^t Y_s dX_s + t ,$$

car la mesure aléatoire dS_s est portée par $\{s \mid X_s = S_s\}$.

En conséquence, $e = Y$ vérifie (a) avec $n = 1$, et est donc, d'après (b), un processus de Bessel d'ordre 1.

Remarque finale : Toute la difficulté de l'étude du processus Z provient de ce que, pour tout $t > 0$, $Z_t \neq X_t$

(en fait, $X_t = Z_t \vee \sigma(S_t)$; voir l'exposé de Jeulin).

Par contre, l'étude de Y est rendue aisée par l'égalité

$$(3) \quad \underline{Y}_t = \underline{X}_t , \text{ pour tout } t .$$

Cette égalité découle immédiatement de

$$(3') \quad \forall t, \quad X_t = \int_0^t 1_{(Y_s \neq 0)} dY_s ,$$

laquelle résulte des deux arguments suivants :

. dS_s est portée par $\{s \mid Y_s = 0\}$, et

. $d\langle X, X \rangle_s = d\langle Y, Y \rangle_s$ ne charge pas $\{s \mid Y_s = 0\}$ ([4], chap. VI).

Références :

- [1] Dellacherie C. , Meyer P.A. : A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. Séminaire de Probabilités XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer 1978 .
- [2] Jeulin T. : Grossissement d'une filtration et applications
(dans ce volume)
- [3] Lévy P. : Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris 1948..
- [4] Meyer P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lect. Notes in Math. 511 , Springer 1976.
- [5] Pitman J.W. : One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel Process. Adv. Appl. Prob. 7, 511 -526, 1975 .
- [6] Yamada T. : Sur une construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non-lipschitzien.
Séminaire de Probabilités XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer 1978