

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Semimartingales et valeur absolue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 472-477

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__472_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SEMIMARTINGALES ET VALEUR ABSOLUE
par C. STRICKER

P.A. Meyer a démontré dans [5] que si X est une semimartingale, $|X|$ en est une aussi. C. Yoeurp a établi le même résultat pour les quasimartingales, et il a montré par ailleurs que si X est une semimartingale continue, et si $|X|$ est une quasimartingale, alors X est une quasimartingale (voir [8])

Depuis lors, deux démonstrations très simples du premier résultat de Yoeurp ont été découvertes, l'une par Jeulin [4], qui n'exige rien que la définition des quasimartingales, l'autre par Meyer à partir de la décomposition de Rao. Nous en indiquons ici une troisième, qui conduit à une remarque supplémentaire sur les espaces H^p .

En ce qui concerne le second résultat de Yoeurp, nous montrons que l'on peut supprimer la condition que X soit une semimartingale. Le théorème de Yoeurp apparaît comme un cas particulier d'un résultat plus général sur le "renversement des excursions d'une semimartingale", qui contient aussi une importante remarque d'Azéma et Yor [1], [10].

La rédaction définitive de cette note a beaucoup profité de discussions avec P.A. Meyer et M. Yor. Nous les en remercions ici.

Soit $(\Omega, \underline{F}, P, (\underline{F}_t))$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. On rappelle qu'un processus càdlàg. adapté $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une quasimartingale si $X_t \in L^1$ pour tout t , et $\text{Var}(X) = \sup_{\tau} \text{Var}_{\tau}(X) < \infty$, où $\tau = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ parcourt l'ensemble des subdivisions finies de \mathbb{R}_+ , et

$$\text{Var}_{\tau}(X) = \text{Var}_{\tau}^{\circ}(X) + E[|X_{t_n}|], \text{ où } \text{Var}_{\tau}^{\circ}(X) = E\left[\sum_{i=0}^{n-1} |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \underline{F}_{t_i}]|\right]$$

Il est commode, pour des raisons techniques, d'introduire aussi $\text{Var}^{\circ}(X) = \sup_{\tau} \text{Var}_{\tau}^{\circ}(X)$.

Toute quasimartingale est une semimartingale, et inversement (Dellacherie [2]), si X est une semimartingale, il existe une loi Q équivalente à P pour laquelle X est une quasimartingale sur tout intervalle fini.

Rappelons d'autre part une définition possible des espaces H^p de semimartingales (voir par exemple [6]): X appartient à H^p si et seulement si X est une semimartingale spéciale, admettant la décomposition canonique $X=M+A$ (M est une martingale locale, A un processus à variation finie prévisible nul en 0) telle que $M^* \in L^p$, $\int_0^{\infty} |dA_s| \in L^p$. Comme on a $M^* \leq X^* + A^* \leq$

$X^* + \int_0^\infty |dA_s|$, et de même $X^* \leq M^* + \int_0^\infty |dA_s|$, on peut prendre comme norme sur l'espace H^p

$$\|X\|_{H^p} = \|X^* + \int_0^\infty |dA_s|\|_{L^p}$$

En particulier, on montre assez facilement que $\|X\|_{H^1} = E[X^*] + \text{Var}^0(X)$.

Voici le premier résultat de Yoeurp, que nous démontrons directement pour les fonctions convexes lipschitziennes, en adaptant le raisonnement par lequel on prouve ([5], p.362) que les fonctions convexes transforment les semimartingales en semimartingales.

PROPOSITION 1. Soit f une fonction convexe, positive et nulle en 0, lipschitzienne de rapport K. Soit K une quasimartingale. Alors f o X est une quasimartingale, et $\text{Var}(f \circ X) \leq 2K \text{Var}(X)$.

DEMONSTRATION. X se décompose de manière unique en une somme $X=M+A$, où M est une martingale locale, A est un processus prévisible à variation intégrable nul en 0. Nous allons supposer d'abord que M est une martingale uniformément intégrable. Nous avons pour $s < t$

$$\begin{aligned} E[f(X_t) - f(X_s) | \underline{F}_s] &= E[f(M_t + A_t) - f(M_t + A_s) + f(M_t + A_s) - f(M_s + A_s) | \underline{F}_s] \\ &\geq E[f(M_t + A_t) - f(M_t + A_s) | \underline{F}_s] \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ &\geq -KE[|A_t - A_s| | \underline{F}_s] \quad (\text{condition de Lipschitz}) \end{aligned}$$

Le processus $Y_t = f(X_t) + K \int_0^t |dA_s|$ est donc une sousmartingale positive, et l'on a $\text{Var}^0(Y) \leq E[Y_\infty] = E[f(X_\infty) + K \int_0^\infty |dA_s|]$. D'autre part

$$\begin{aligned} \text{Var}(f \circ X) &= E[f \circ X_\infty] + \text{Var}^0(f \circ X) \leq E[f \circ X_\infty] + E\left[K \int_0^\infty |dA_s|\right] + \text{Var}^0(Y) \\ &\leq 2E[f(X_\infty)] + 2E\left[K \int_0^\infty |dA_s|\right] \leq 2KE[|X_\infty|] + 2K \text{Var}^0(X) \\ &= 2K \text{Var}(X). \end{aligned}$$

Pour lever l'hypothèse faite sur M, on applique ce qui précède aux processus X^{T_n} , où les temps d'arrêt T_n croissent vers $+\infty$ et réduisent M, et on utilise le fait que l'arrêt diminue la variation (cela se voit sur la décomposition de Rao). Puis on fait tendre n vers $+\infty$.

REMARQUE. Nous avons un peu détaillé la démonstration, afin d'obtenir la constante 2 indiquée par Jeulin ou Meyer, et qui est la meilleure possible (prendre le cas où X est une martingale nulle en 0 et uniformément intégrable, et où $f(x) = |x|$). Si l'on ne s'intéresse pas à la constante, on peut aller beaucoup plus vite.

COROLLAIRE. Si $X \in H^1$, on a $\|f \circ X\|_{H^1} \leq 2K \|X\|_{H^1} < \infty$.

Ce corollaire est une conséquence évidente de la proposition 1, compte tenu de la définition de la norme de H^1 .

Passons à H^p , $p > 1$ (nous n'étudions que le cas de la fonction $f(x)=|x|$).
 Nous démontrons, par la même méthode mais avec des calculs plus laborieux
 que dans le cas $p=1$, la proposition suivante (cf. Yor [6]).

PROPOSITION 2. Si $X \in H^p$, on a $|X|^p \in H^1$, avec $\| |X|^p \|_{H^1} \leq c_p \| X \|_{H^p}$

DEMONSTRATION. Les calculs reposent sur l'inégalité suivante, où u et v
 sont positifs

$$|u^p - v^p| \leq p|u-v|(\sup(u,v))^{p-1}$$

d'où l'on tire, pour u et v réels

$$(1) |v|^{p-p}(\sup(|u|, |v|))^{p-1}|u-v| \leq |u|^p \leq |v|^{p+p}(\sup(|u|, |v|))^{p-1}|u-v|$$

Reprenons la décomposition $X=M+A$ de la proposition 1 ; comme $X \in H^p$, M
 est bornée dans L^p . Ecrivons (1) en prenant $u=M_t+A_t$, $v=M_t+A_s$, donc
 $|u-v| \leq \int_s^t |dA_r|$, $\sup(|u|, |v|) \leq |X_t| + \int_s^t |dA_r| \leq X^* + \int_0^\infty |dA_r|$, v.a. que nous
 noterons Y , et qui appartient à L^p . Nous obtenons

$$|M_t+A_s|^p - p \int_s^t |dA_r| Y^{p-1} \leq |M_t+A_t|^p \leq |M_t+A_s|^p + p \int_s^t |dA_r| Y^{p-1}$$

Retranchons $|M_s+A_s|^p$, conditionnons par \underline{F}_s en remarquant que

$$E[|M_t+A_s|^p - |M_s+A_s|^p | \underline{F}_s] \geq 0$$

Il vient

$$| E[|M_t+A_t|^p - |M_s+A_s|^p | \underline{F}_s] | \leq E[|M_t+A_s|^p - |M_s+A_s|^p + pY^{p-1} \int_s^t |dA_r| | \underline{F}_s]$$

Soit maintenant une subdivision finie $\tau=(t_i)_{0 \leq i \leq n}$. L'inégalité précé-
 dente nous donne

$$\begin{aligned} \text{Var}_\tau(|X|^p) &\leq E[\sum_{i=0}^{n-1} (|M_{t_{i+1}}+A_{t_i}|^p - |M_{t_i}+A_{t_i}|^p) + pY^{p-1} \int_0^{t_n} |dA_r| + |X_{t_n}|^p] \\ &\leq E[|M_{t_n}+A_{t_{n-1}}|^p + \sum_{i=0}^{n-1} (|M_{t_i}+A_{t_{i-1}}|^p - |M_{t_i}+A_{t_i}|^p) + pY^{p-1} \int_0^{t_n} |dA_r| + |X_{t_n}|^p] \end{aligned}$$

Nous majorons $|M_{t_n}+A_{t_{n-1}}|$ et $|X_{t_n}|$ par $X^* + \int_0^\infty |dA_s| = Y$; de même, $\int_0^{t_n} |dA_r|$
 est majoré par Y . Pour la somme, nous appliquons à nouveau (1) :

$$| |M_{t_i}+A_{t_{i-1}}|^p - |M_{t_i}+A_{t_i}|^p | \leq p \int_{t_{i-1}}^{t_i} |dA_s| Y^{p-1}$$

d'où une somme majorée par pY^p . Finalement, il vient

$$\text{Var}_\tau(|X|^p) \leq E[2(1+p)Y^p] = 2(1+p)\|X\|_{H^p}^p$$

Nous passons au second résultat de Yoeurp. Nous voulons montrer que
 PROPOSITION 3. Si X est un processus adapté continu, et si |X| est une quasimartingale, X en est une aussi, et $\text{Var}(X) \leq \text{Var}(|X|)$.

COROLLAIRE. Avec les mêmes notations, si |X| est une semimartingale, X en est une aussi.

Pour passer de la proposition 3 au corollaire, il suffit de remplacer P par une loi Q équivalente, pour laquelle |X| devient une quasimartingale sur tout intervalle fini (cf. [2], théorème 5).

REMARQUE. Revenons à la proposition 3 . Si |X| appartient à H^1 , il est clair que X appartient à H^1 , avec une norme majorée par celle de |X|. On retrouve ainsi un résultat de Yor [6], sous des hypothèses plus faibles.

Nous allons donner à la proposition 3 une forme plus générale. Soit M l'ensemble $\{X=0\} = \{|X|=0\}$. On pose comme d'habitude

$$D_t(\omega) = \inf\{s > t, (s, \omega) \in M\}$$

et

$$\tau_t(\omega) = \sup\{s < t, (s, \omega) \in M\}, \quad \lambda_t(\omega) = \sup\{s \leq t, (s, \omega) \in M\}$$

posons aussi $Z_t = |X_t|$, $Y_t = X_t$, $\varepsilon_t = \text{sgn}(Y_t)$ (on convient que $\text{sgn}(0) = 1$ par exemple). Le processus $K_t = \limsup_{s \downarrow t} \varepsilon_s$ est progressif ; on a $|K| \leq 1$ et

$$Y_t = K_{\lambda_t} Z_t = K_{\tau_t} Z_t$$

(les processus λ_t et τ_t ne diffèrent qu'aux extrémités droites d'intervalles contigus à M, points où Z s'annule). La proposition 3 est donc un cas particulier de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. Soient Z une quasimartingale, M un ensemble progressif fermé à droite, K un processus progressif tel que $|K| \leq 1$. On suppose que $Z_{D_t} = 0$ pour tout t, sur $\{D_t < \infty\}$. On pose

$$Y_t = K_{\lambda_t} Z_t = K_{\tau_t} Z_t$$

Alors Y est une quasimartingale, et l'on a $\text{Var}(Y) \leq 3 \text{Var}(Z)$ (si $Z \geq 0$, on peut remplacer 3 par 1).

Avant de démontrer ce théorème, disons que cet énoncé a été suggéré par une formule établie par Azéma et Yor, dans le cas où le processus K est prévisible. On a alors explicitement

$$Y_t = \int_0^t K_{\tau_s} dZ_s \quad (\text{ le processus } K_{\tau} \text{ étant prévisible })$$

Cette formule a une grande importance dans la théorie des temps locaux. Il faut remarquer la signification probabiliste du processus Y, lorsque K ne prend que les valeurs ± 1 : Y s'obtient en "renversant" de manière aléatoire les excursions de Z hors de l'ensemble H où Z s'annule.

DEMONSTRATION. Comme ℓ_t est \mathbb{F}_t -mesurable, K_{ℓ_t} est \mathbb{F}_t -mesurable, et Y est adapté. Vérifions que Y est continu à droite : il n'y a aucun problème dans le complémentaire de \bar{M} , ni aux points de M isolés à droite. Si $t \in M$ n'est pas isolé à droite, on a $D_t = t$, donc $Y_t = 0$. La continuité à droite de Y résulte alors du fait que $|Y_t| \leq |Z_t|$ et que $Z_{t+} = Z_t = 0$.

Il nous suffit de démontrer que, pour toute subdivision $\sigma = (s_i)_{0 \leq i \leq n}$, on a $\text{Var}_\sigma(Y) \leq 3\text{Var}(Z)$. Pour tout $i < n$, posons $T_i = s_{i+1} \wedge D_{s_i}$, et introduisons la subdivision aléatoire $\tau = (s_0, T_0, s_1, T_1, \dots, s_{n-1}, T_{n-1}, s_n)$; on sait que $\text{Var}_\sigma(Y) \leq \text{Var}_\tau(Y)$, et que $\text{Var}_\tau(Z) \leq \text{Var}(Z)$ (ce dernier point est trivial pour les surmartingales positives, et s'étend aux quasimartingales par la décomposition de Rao). En fin de compte, il suffit de démontrer que $\text{Var}_\tau(Y) \leq 3\text{Var}(Z)$.

Nous avons pour tout i

$$\begin{aligned} E[Y_{T_i} - Y_{s_i} | \mathbb{F}_{s_i}] &= E[K_{\ell_{T_i}} Z_{T_i} - K_{\ell_{s_i}} Z_{s_i} | \mathbb{F}_{s_i}] = E[K_{\ell_{s_i}} (Z_{T_i} - Z_{s_i}) | \mathbb{F}_{s_i}] \\ &= K_{\ell_{s_i}} E[Z_{T_i} - Z_{s_i} | \mathbb{F}_{s_i}] \end{aligned}$$

(en effet, K_{ℓ_t} garde la valeur constante $K_{\ell_{s_i}}$ sur tout l'intervalle $[s_i, T_i]$ si $T_i < D_{s_i}$; si $T_i = D_{s_i}$, on a $\ell_{T_i} \neq \ell_{s_i}$, mais le changement n'a aucune importance car $Z_{T_i} = 0$). Prenant une valeur absolue, puis une espérance, nous obtenons

$$(2) \quad E[\sum |E[Y_{T_i} - Y_{s_i} | \mathbb{F}_{s_i}]|] \leq E[\sum |E[Z_{T_i} - Z_{s_i} | \mathbb{F}_{s_i}]|]$$

De même, nous avons $Y_{T_i} = 0$ sur $\{T_i < s_{i+1}\}$, donc

$$\begin{aligned} |E[Y_{s_{i+1}} - Y_{T_i} | \mathbb{F}_{T_i}]| &= |E[Y_{s_{i+1}} I_{\{T_i < s_{i+1}\}} | \mathbb{F}_{T_i}]| \leq E[|Z_{s_{i+1}}| I_{\{T_i < s_{i+1}\}} | \mathbb{F}_{T_i}] \\ &= |E[|Z_{s_{i+1}}| - |Z_{T_i}| | \mathbb{F}_{T_i}]| \end{aligned}$$

ou encore

$$(3) \quad E[\sum |E[Y_{s_{i+1}} - Y_{T_i} | \mathbb{F}_{T_i}]|] \leq E[\sum |E[|Z_{s_{i+1}}| - |Z_{T_i}| | \mathbb{F}_{T_i}]|]$$

Ajoutons (2) et (3) : il vient $\text{Var}_\tau(Y) \leq \text{Var}_\tau(Z) + \text{Var}_\tau(|Z|) \leq \text{Var}(Z) + \text{Var}(|Z|) \leq 3\text{Var}(Z)$ d'après la proposition 1. Si $Z = |Z|$, on obtient simplement $\text{Var}_\tau(Y) \leq \text{Var}_\tau(Z)$.

COROLLAIRE. Si $Z \in \mathbb{H}^1$, on a aussi $Y \in \mathbb{H}^1$.

En effet, il est clair que $Y^* \leq Z^*$. Si K est prévisible, la formule d'Azéma-Yor entraîne que $\|Y\|_{\text{HP}} \leq c \|Z\|_{\text{HP}}$ pour $p < \infty$, mais on ne sait rien de tel pour K progressif.

1. Les points de τ ne sont pas tous distincts

REFERENCES

- [1] AZEMA (J.) et YOR (M.). En guise d'introduction. Temps Locaux, Astérisque n° 52-53, Soc. Math. France 1978.
- [2] DELLACHERIE (C.). Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Sém. Prob. XII, Lect. Notes 649, Springer 1978, p. 742-745.
- [3] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.). Probabilités et Potentiels, chap. VI (à paraître).
- [4] JEULIN (T.). Partie positive d'une quasimartingale. C.R.A.S. Paris, t. 287, 1978, p. 351-352.
- [5] MEYER (P.A.). Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lect. Notes 511, Springer 1976.
- [6] MEYER (P.A.). Sur un théorème de J. Jacod. Sém. Prob. XII, Lect. Notes Notes in M. 649, Springer 1978, p. 57-60.
- [7] STRICKER (C.). Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-63.
- [8] YOEURP (C.). Compléments sur les temps locaux et les quasimartingales. Astérisque 52-53, 1978, Soc. Math. France, p. 197-218.
- [9] YOR (M.). Une remarque sur les espaces H^p de semimartingales. C.R. A.S. Paris, t. 287, 1978, p.
- [10] YOR (M.). Sur le balayage des semi-martingales continues. A paraître.

I.R.M.A.

Laboratoire associé au CNRS

rue du G^{al} Zimmer

67084 Strasbourg-Cedex.