

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

MARC YOR

Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 332-359

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__332_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis

T. Jeulin et M. Yor

Introduction.

En étudiant les grossissements de filtrations, nous avons failli tomber, à plusieurs reprises, dans des affirmations-pièges (deux en particulier!). Un de nos buts ici est de signaler ces embûches au lecteur. L'intérêt de ce travail se limiterait sans doute à cela, s'il ne se trouvait que l'étude de ces pièges est menée à l'aide d'une inégalité de Hardy [3] :

$$(1) \text{ si } f \in L^2([0, \infty)), \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \quad (0 < x < \infty),$$
$$\text{alors } \|F\|_{L^2} \leq 2 \|f\|_{L^2},$$

et est liée de façon naturelle à celle de certaines intégrales singulières où figure le mouvement brownien.

De façon plus précise, (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité complet, sur lequel on suppose données deux filtrations $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, constituées de sous tribus de \mathcal{F} , vérifiant les conditions habituelles, ainsi que :

$$\text{pour tout } t, \quad \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t.$$

En 1977-1978, nous avons étudié, de façon assez systématique, de tels couples $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pour lesquels :

(H') Toute \mathcal{F} (semi-) martingale est une \mathcal{G} semi-martingale ⁽⁺⁾.

(voir les articles correspondants du Séminaire XII, ainsi que Jeulin-Yor [6]).

A diverses reprises, nous avons "rencontré" les assertions suivantes :

(FA 1) Pour que (H') soit réalisée, il suffit (et il est évidemment nécessaire) qu'un système générateur \mathcal{N} (au sens des espaces stables) de l'espace des \mathcal{F} martingales de carré intégrable soit constitué de \mathcal{G} semi-martingales.

[Cette affirmation nous a longtemps semblé particulièrement "vraisemblable" dans le cas où $\text{Card}(\mathcal{N}) = 1$].

(FA 2) Si une \mathcal{F} martingale localement de carré intégrable X est également une \mathcal{G} semi-martingale, l'unique processus \mathcal{G} -prévisible, à variation finie, A tel que $X - A$ soit une \mathcal{G} martingale locale vérifie :

$$\text{P p.s. , } dA_s(\omega) \ll d\langle X, X \rangle_s(\omega) \quad ,$$

où le processus croissant $\langle X, X \rangle$ est calculé relativement à \mathcal{F} .

[Cette seconde affirmation a pour origines, d'une part l'analogie qui existe entre grossissement d'une filtration et changement absolument continu de probabilités, et d'autre part, le célèbre théorème de Girsanov] .

(+)

Nous conservons la notation (H') que nous avons introduite en [6], où (H) désignait l'assertion beaucoup plus restrictive :

(H) Toute \mathcal{F} martingale (locale) est une \mathcal{G} martingale locale .

En fait, comme notre notation veut l'indiquer, il s'agit de faux-amis;

- nous donnons un contre-exemple à (FA 1) au chapitre 2, fondé sur l'étude, menée au chapitre 1, de la filtration naturelle \mathcal{F} du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$, issu de 0, grossie à l'aide de la tribu engendrée par B_1 ;
- deux contre-exemples à (FA 2) sont exhibés au chapitre 3, l'un avec X martingale continue, l'autre avec X martingale à variation finie.

Comme nous l'a fait remarquer H. Föllmer, les résultats du chapitre 1 sont "classiques". Ils semblent toutefois assez méconnus, ce qui nous paraît justifier une publication concise.

Par contre, ceux du chapitre 2 nous ont surpris, et semblent nouveaux. En particulier, un des sous-produits de notre étude est :

si $(B_t, t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel, une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi \in L^2([0, 1])$ vérifie :

$$\int_0^1 |\varphi(u)| \frac{|B_u|}{u} du < \infty \quad \text{P p.s.} \quad \text{est que} \quad \int_0^1 \frac{|\varphi(u)|}{\sqrt{u}} du < \infty .$$

Notations. Outre les notations déjà introduites, on appelle filtration naturelle d'un processus réel $(X_t)_{t \geq 0}$, et on note \mathcal{F}^X , la famille de tribus $(\sigma\{X_s, s \leq t\})_t$ rendue continue à droite, et (\mathbb{F}, \mathbb{P}) -complète.

Si \mathcal{F} est une filtration, $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ désigne la tribu prévisible sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{N}$ associée à \mathcal{F} ; si X est un processus réel, on note, pour simplifier, $\mathcal{P}(X)$ au lieu de $\mathcal{P}(\mathcal{F}^X)$.

1. Les mouvement brownien et processus de Poisson comme semi-martingales.

1.1. Le cas brownien.

\mathcal{F} désigne, dans ce paragraphe, la filtration naturelle \mathcal{F}^B d'un mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0. On note, pour $t \geq 0$,

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{ \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(B_1) \}. \quad \text{On a alors le :}$$

Théorème 1: Il existe un \mathcal{G} mouvement brownien $(\beta_t, t \geq 0)$ issu de 0, tel que

$$(2) \quad \text{pour tout } t, \quad B_t = \beta_t + \int_0^{t \wedge 1} \frac{(B_1 - B_s)}{1-s} ds.$$

En conséquence, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(B_{t \wedge N}, t \geq 0)$ est une \mathcal{G} quasi-martingale.

Nous procédons à la démonstration du théorème par étapes.

Etape i) : l'intégrale de Riemann qui figure en (2) est absolument convergente, car

$$I \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathbb{E} \left(\int_0^1 \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds \right) = c \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \quad (c = \sqrt{2/\pi}).$$

$$\text{Etape ii)} \quad \text{Montrons que } \beta_t \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} B_t - \int_0^{t \wedge 1} \frac{(B_1 - B_s)}{1-s} ds$$

est une \mathcal{G} martingale.

Puisque $(B_t, t \geq 0)$ est une \mathcal{F} martingale, et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$, pour $t \geq 1$, on peut se restreindre à l'intervalle de temps $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $\mathcal{G}_t^1 = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1) = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1 - B_t)$.

Soient $0 \leq s < t \leq 1$. La tribu \mathcal{F}_s étant indépendante du processus

$(B_{s+h} - B_s, h \gg 0)$, on a :

$$E(B_t - B_s | \mathcal{G}'_s) = E(B_t - B_s | B_1 - B_s) = \frac{t-s}{1-s} (B_1 - B_s) ,$$

la dernière égalité provenant du calcul élémentaire de la L^2 -projection de $(B_t - B_s)$ sur $\{\lambda(B_1 - B_s) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Un passage à la limite dans L^1 (par exemple) entraîne :

$$(3) \quad E(B_t - B_s | \mathcal{G}_s) = \frac{t-s}{1-s} (B_1 - B_s) .$$

Il est alors immédiat de vérifier, à partir de (3) , que $(\beta_t, t \leq 1)$, et donc $(\beta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sont des \mathcal{G} martingales.

Nota bene : le lecteur "érudit" aura déduit de (3) que $(\beta_t, t < 1)$ est une \mathcal{G} martingale, après avoir remarqué que les " \mathcal{G} Laplaciens approchés" de $(B_t, t < 1)$, soit :

$$A_t^h = \int_0^t \frac{E(B_{s+h} - B_s | \mathcal{G}_s)}{h} ds , \quad h \geq 0 ,$$

sont, pour t fixé, indépendants de h (dès que $h < 1 - t$), et

$$\text{égaux à } \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds .$$

Etape iii) . A nouveau, l'ensemble des temps est \mathbb{R}_+ tout entier. Il résulte de l'approximation du processus croissant associé à une martingale continue par des sommes de carrés d'accroissements de cette martingale, et de la définition de β , que :

$$\langle \beta, \beta \rangle_t = \langle B, B \rangle_t = t ,$$

où le processus $\langle \beta, \beta \rangle$ (resp. $\langle B, B \rangle$) est calculé relativement à \mathcal{G} (resp. \mathcal{F}) .

Il est alors classique que $(\beta_t, t \geq 0)$ est un \mathcal{G} mouvement brownien.

Etape iv) . La seconde assertion du théorème découle de la formule (2),

si l'on remarque que $V_{\mathcal{G}}(B) = I$ (cf. étape 1) ,

où $V_{\mathcal{G}}(B) = \sup_{\substack{t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1 \\ n \in \mathbb{N}}} E(\sum_{i=1}^{i=n-1} | E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{G}_{t_i}) |)$.

Remarque : il peut être intéressant - pour d'éventuelles applications - de noter que le théorème 1 est encore valable si l'on suppose seulement que (B_t) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien.

On peut considérer la formule (2) comme une équation linéaire, où la fonction inconnue est $B_t(\omega)$, et où les données sont $\beta_t(\omega)$ et $B_1(\omega)$. A l'aide de la méthode de variation des constantes, on obtient immédiatement le :

Corollaire 1.1 : Le pont brownien $\{B_t - t.B_1, t < 1\}$ est lié au \mathcal{G} mouvement brownien $(\beta_t, t < 1)$ par la formule :

$$(4) \quad B_t - t.B_1 = (1-t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{1-s} .$$

En conséquence, les deux processus $(B_t - t.B_1, t < 1)$ et $(\beta_t, t < 1)$ ont même filtration naturelle.

La formule (4) donne la "clé" de la structure de la filtration \mathcal{G} , que l'on explicite en cinq points :

a) \mathcal{G} est identique à la filtration naturelle du processus $\{B_1 + \beta_t, t \geq 0\}$ (immédiat, d'après la formule (4)).

b) La variable B_1 et le processus β sont indépendants .

En effet, d'après le théorème 1, $\beta = (\beta_t, t \geq 0)$ est un \mathcal{G}_0 mouvement brownien, qui est donc indépendant de $\mathcal{G}_0 \supseteq \sigma(B_1)$.

Ainsi, d'après la formule (4), on a retrouvé le résultat suivant, obtenu par v.Mackevičius [15] :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi du mouvement brownien réel $(B_t)_{0 \leq t < 1}$, issu de 0, conditionnellement à $(B_1 = x)$, est celle du processus

$(tx + (1-t) \int_0^t \frac{d\beta_s}{(1-s)}, t < 1)$, où $(\beta_t, t < 1)$ désigne un mouvement brownien réel.

La conjonction de a) et b) entraîne aisément :

c) \mathcal{G}_0 est égale à la tribu complétée de $\mathcal{G}(B_1)$.

d) Tout processus \mathcal{G} prévisible H est indistinguable d'un processus de la forme $K(B_1(\omega), s, \omega)$, où $K : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\beta)$ mesurable.

Démonstration : Un argument de classe monotone permet - à l'aide de a) et b) - de ne considérer que les processus

$$H(s, \omega) = f(s) E(g(B_1) u \mid \mathcal{G}_{s-})(\omega),$$

où $f \in b(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $g \in b(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $u \in b(\mathcal{F}_\infty^\beta)$, et $(E(v \mid \mathcal{G}_{s-}), s \geq 0)$ désigne une version continue à gauche de la martingale $(E(v \mid \mathcal{G}_s), s \geq 0)$ associée à $v \in b(F)$.

Toujours d'après a) et b), on a donc :

$$H(s, \omega) = f(s) g(B_1) E(u \mid \mathcal{F}_{s-}^\beta)(\omega)$$

à une indistinguabilité près.

L'assertion d) s'ensuit.

Enfin, une légère variation du théorème d'Ito sur la représentation des martingales du mouvement brownien permet d'énoncer :

e) Toute \mathcal{G} martingale de carré intégrable $(X_t)_{t \geq 0}$ peut se repré-

senter comme : $X_t = f(B_1) + \int_0^t H(s, \cdot) d\beta_s$,

où $f \in L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx)$, et $H \in L^2(\mathcal{L} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathcal{G}), dP ds)$

On considère maintenant le processus $\{\hat{B}_t = B_{(1-t)}, t \leq 1\}$, et sa filtration naturelle, notée $\{\hat{\mathcal{F}}_t\}_{t \leq 1}$. Les résultats obtenus précédemment ont une traduction immédiate à ce processus, lorsque l'on a remarqué que le processus $(U_t = B_{(1-t)} - B_1, t \leq 1)$ est un mouvement brownien, vérifiant $U_1 = -B_1 = -\hat{B}_0$; donc, avec les

notations du théorème 1, la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \leq 1}$ est la filtration $(\mathcal{G}_t, t \leq 1)$ associée à $(U_t, t \leq 1)$. On peut donc énoncer - en particulier - le :

Corollaire 1.2 : Il existe un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ mouvement brownien réel $(\hat{\beta}_t, t \leq 1)$ issu de 0, tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, on ait :

$$(5) \quad \hat{B}_t = \hat{B}_0 + \hat{\beta}_t - \int_0^t \frac{\hat{B}_s}{1-s} ds .$$

Remarque : en comparant les formules (2) et (5), on obtient aisément, à l'aide de la formule (4) :

$$(6) \quad \hat{\beta}_t = \beta_{(1-t)} - \beta_1 + \int_{1-t}^1 ds \left(\frac{1}{s} \int_0^s \frac{d\beta_u}{1-u} \right) .$$

Après avoir étudié les processus $(B_t, t \leq 1)$ et $(\hat{B}_t, t \leq 1)$ en rapport avec les filtrations (\mathcal{G}_t) et $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ respectivement, il nous a semblé naturel de comparer les intégrales stochastiques, sur l'intervalle de temps $T = [0, 1]$, par rapport à dB_s et $d\hat{B}_s$, de façon à obtenir une version stochastique de l'égalité :

$$\forall \varphi \in b(\mathcal{B}([0, 1])), \quad \int_0^1 \varphi(s) ds = - \int_0^1 \varphi(1-s) d(1-s) .$$

A cet effet, remarquons que l'on ne peut prendre pour intégrands $(\varphi(t, \omega), t \leq 1)$ que des processus vérifiant : $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$, et $\hat{\varphi} \in \mathcal{P}(\hat{\mathcal{F}})$, où l'on note $\hat{\varphi}(t, \omega) = \varphi(1-t, \omega)$ ($t \leq 1$). Or, on montre aisément que la tribu $\hat{\mathcal{F}}_{(1-t)} \cap \mathcal{G}_t$ ($t \leq 1$) est la P-complétée de la tribu $\sigma\{B_1, B_t\}$. Ainsi, la classe des intégrands φ figurant dans l'énoncé de la proposition suivante est raisonnablement vaste .

Proposition 2 : Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une
 $(s, x, y) \longrightarrow f(s, x, y)$

fonction continue, telle que $f'_x(s, x, y)$ soit définie et continue.

Alors :

$$(7) \int_0^1 f(1-s, \hat{B}_s, \hat{B}_0) d\hat{B}_s = - \int_0^1 f(s, B_s, B_1) dB_s - \int_0^1 ds f'_x(s, B_s, B_1)$$

Démonstration :

- par régularisation en f , et passage à la limite en probabilité, il suffit de démontrer la formule (7) pour $f \in C^\infty$.

- si $f \in C^\infty$, on applique la formule d'Ito à $F(s, \hat{B}_s, \hat{B}_0)$, entre 0 et 1, où $F(s, x, y) = \int_0^x f(1-s, u, y) du$,

et où l'on considère (\hat{B}_s, \hat{B}_0) comme une $(\hat{F}_s)_{s \leq 1}$ semi-martingale à valeurs dans \mathbb{R}^2 (\hat{B}_0 est une semi-martingale constante !).

On fait de même avec $G(s, B_s, B_1)$, entre 0 et 1,

où $G(s, x, y) = \int_0^x f(s, u, y) du$, la filtration de référence étant ici $(\mathcal{G}_s, s \leq 1)$.

- La formule (7) découle alors de la comparaison des deux formules ainsi obtenues, et de ce que :

$$F(1, \hat{B}_1, \hat{B}_0) - F(0, \hat{B}_0, \hat{B}_0) = G(0, B_0, B_1) - G(1, B_1, B_1)$$

Remarque : on peut également écrire la formule (7) sous la forme :

$$(7') \int_0^1 f(1-s, \hat{B}_s, \hat{B}_0) d\hat{B}_s = -\varepsilon_1 \cdot \int_0^1 f(s, B_s, B_1) dB_s$$

où le symbole $\varepsilon_1 \cdot \int$ désigne l'intégrale de Stratonovitch, pour laquelle on prend, dans une subdivision $\mathcal{Z} = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1)$ de $[0, 1]$, non pas le pointage usuel de Stratonovitch $s_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$, mais $s_i = t_{i+1}$ (voir [14] pour toutes ces définitions, et les résultats correspondants).

Notons encore que l'on aurait pu démontrer directement (7') en approximant le membre de gauche par des sommes du type

$$\sum_{i=0}^n f(1-s_i, \hat{B}_{s_i}, \hat{B}_0) (\hat{B}_{s_{i+1}} - \hat{B}_{s_i})$$

où $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} = 1$, et en faisant le changement de variables $t_i = 1 - s_i$.

1.2. Le cas poissonnien.

Nous adoptons des notations semblables à celles du paragraphe 1.1 :

\mathcal{F} désigne la filtration naturelle du processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ issu de 0, et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{ \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(N_1) \}$.

On note encore $\tilde{N}_t = N_t - t$ la \mathcal{F} martingale compensée du processus croissant (N_t) .

Le principal intérêt du théorème suivant réside sans doute dans la comparaison des similitudes et des différences qu'il présente avec son analogue brownien, le théorème 1.

Théorème 1' : Il existe une \mathcal{G} martingale à variation finie $(\tilde{\eta}_t, t \geq 0)$ telle que :

$$(8) \quad \tilde{N}_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{\tilde{N}_1 - \tilde{N}_s}{1-s} \right) ds,$$

formule que l'on peut encore écrire :

$$(8') \quad N_t = \tilde{\eta}_t + \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{N_1 - N_s}{1-s} \right) ds + (t-1)^+.$$

De plus, l'amplitude des sauts de $\tilde{\eta}$ est 1, mais $\tilde{\eta}$ n'est pas un \mathcal{G} processus de Poisson, le processus croissant \mathcal{G} prévisible attaché à $\tilde{\eta}$ étant identique à :

$$(8'') \quad \langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle_t = \int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{N_1 - N_s}{1-s} \right) ds + (t-1)^+.$$

Démonstration :

- la démonstration de la formule (8) est très semblable à celle de la formule (2), et repose essentiellement sur le résultat suivant : si $0 < s < t < 1$, on a :

$$E(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s \vee \sigma(N_1)) = E(N_t - N_s \mid N_1 - N_s) = \frac{t-s}{1-s} (N_1 - N_s).$$

- La formule (8') découle immédiatement de (8).

- Il résulte de (8'), par exemple, que :

$[\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] = [N, N] = N$, et donc, $\langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta} \rangle$ est le \mathcal{G} compensateur prévisible de N , soit, toujours d'après (8') :

$$\int_0^{t \wedge 1} \left(\frac{N_s - N_{s-}}{1 - s} \right) ds + (t - 1)^+ .$$

Le lecteur établira maintenant sans peine les corollaires du théorème 1', analogues aux corollaires 1.1 et 1.2, après avoir remarqué que $(U_t = N_1 - N_{(1-t)-}, t \leq 1)$ est un processus de Poisson.

Nous terminons ce paragraphe par une remarque importante : toute \mathcal{F} martingale locale étant à variation finie, c'est également une \mathcal{G} semi-martingale (i.e. l'hypothèse (H') est vérifiée). Nous verrons au chapitre 2 que, par contre, (H') n'est pas vérifiée dans le cas ==== brownien étudié en 1.1 .

2. Intégrales stochastiques et semi-martingales.

Dans tout ce second chapitre, nous nous plaçons dans le "cas brownien" étudié au paragraphe 1.1, dont nous reprenons les notations; rappelons que (\mathcal{F}_t) désigne la filtration naturelle du mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0, et pour tout t , on note :

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{ \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(B_1) \} .$$

2.1. \mathcal{F} martingales et \mathcal{G} semi-martingales.

Conformément à ce que nous avons annoncé dans l'introduction, nous caractérisons maintenant les \mathcal{F} martingales qui sont des \mathcal{G} semi-martingales.

Théorème 3 : Soit $(X_t, t \geq 0)$ une \mathcal{F} martingale locale, continue,
nulle en 0 . Il existe alors φ , processus \mathcal{F} prévisible tel que :

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \varphi^2(s) ds < +\infty \text{ P p.s.}, \text{ et } X_t = \int_0^t \varphi(s) dB_s .$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une \mathcal{G} semi-martingale.

$$(ii) \int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds < \infty \text{ P p.s.}$$

$$(iii) \int_0^1 \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}} ds < \infty \text{ P p.s.}$$

De plus, si ces conditions sont réalisées, la \mathcal{G} décomposition cano-
nique de X est donnée par :

$$(e) X_t = \int_0^t \varphi(s) dB_s + \int_0^{t \wedge 1} \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds .$$

Avant de démontrer le théorème, nous en donnons deux conséquences
 immédiates.

Corollaire 3.1 : L'hypothèse (H') n'est pas vérifiée pour le couple
 $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, i.e. : il existe des \mathcal{F} martingales de carré intégrable qui
ne sont pas des \mathcal{G} semi-martingales.

Démonstration : ψ désignant une fonction définie sur $]0, 1[$, posons
 $\varphi(s) = \psi(1-s)$ ($s \in]0, 1[$), et $\varphi = 0$ sur $]0, 1[$.

Pour démontrer le corollaire, il suffit de construire $\psi \in L^2([0, 1])$,

$$\text{et vérifiant } \int_0^1 \frac{|\psi(s)|}{\sqrt{s}} ds = \infty .$$

Les fonctions $\psi(s) = s^{-\frac{1}{2}} (-\log s)^{-\alpha} 1_{(0 < s < \frac{1}{2})}$

conviennent, lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Corollaire 3.2 : (10) $\int_{0+} \frac{B_u^2}{u^2} du = \int_0^1 \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2} ds = \infty$ P p.s.

Démonstration : $(B_1 - B_{(1-u)}, u \leq 1)$ étant un mouvement brownien réel issu de 0, il suffit de montrer :

$$\int_0^1 \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2} ds = \infty \text{ P p.s.}$$

Or, d'après la démonstration du corollaire précédent, il existe une

fonction $\varphi \in L^2([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds \text{ ne soit pas P p.s. finie. En fait, d'après}$$

la loi 0-1, cette dernière intégrale est P p.s. infinie.

Donc, P p.s., la fonction $s \rightarrow (B_1 - B_s)(\omega) (1-s)^{-1}$ n'appartient pas à $L^2([0,1])$, d'où (10).

Remarque: En supposant que $\int_0^t \frac{B_u^2}{u^2} du < \infty$ P p.s, le lecteur obtiendra une

démonstration par l'absurde, très rapide, de (10), par application de la formule d'Ito à $(B_t^2/2t)$ sur l'intervalle $[\varepsilon, a]$ ($0 < \varepsilon < a$), et en faisant tendre ε vers 0.

Début de la démonstration du théorème 3 :

1) Si φ est borné, l'intégrale stochastique de φ par rapport à B ne dépend pas de la filtration par rapport à laquelle B est une semi-martingale. On peut donc écrire, d'après la formule (2) :

$$(*) \quad X_t = \int_0^t \varphi(s) d\beta_s + \int_0^{t \wedge 1} \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds .$$

Si on suppose seulement que, pour tout t, $\int_0^t \varphi^2(s) ds < \infty$ P p.s.,

un passage à la limite (portant sur φ , pour la convergence en probabilité) permet de remarquer que la formule (*) est encore valide pour tout $t < 1$.

2) Montrons l'équivalence de (i) et (ii) :

- si la condition (ii) est vérifiée, l'égalité (*), valable pour $t < 1$, se prolonge par continuité à $t = 1$, et donc à tout $t \in \mathbb{R}_+$.

X est donc une \mathcal{G} semi-martingale, qui vérifie (*) \equiv (9) !

- inversement, si X est une \mathcal{G} semi-martingale, l'unique processus \mathcal{G} adapté, continu, à variation finie, A tel que $X - A$ soit une \mathcal{G} martingale locale, vérifie, d'après (*):

$$\forall t < 1, A_t = \int_0^t \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1 - s} ds.$$

On a donc : $\int_{]0,1[} |dA_s| = \int_0^1 ds |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s} ds < \infty$ P p.s.,

c'est à dire (ii).

3) L'équivalence de (iii) et (ii) résulte en particulier de la

Proposition 4 : Soit φ un processus \mathcal{F} prévisible tel que

$\forall t \geq 0, \int_0^t \varphi^2(s) ds < \infty$ P p.s. Alors :

$$\left\{ \int_0^1 |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1 - s} ds < \infty \right\} = \left\{ \int_0^1 \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1 - s}} ds < \infty \right\} \text{ P p.s.}$$

Remarque 4' : Il découle du point 1) de la démonstration du théorème 3 que, pour tout processus \mathcal{F} prévisible φ tel que

$\int_0^1 \varphi^2(s) ds < +\infty$ P p.s.,

$\lim_{t \uparrow 1} \int_0^t \varphi(s) \frac{B_1 - B_s}{1 - s} ds$ existe et est finie P p.s.

La démonstration de la proposition 4 repose sur quelques lemmes préliminaires. En particularisant beaucoup les résultats de Lenglart [8], on peut énoncer comme suit le premier de ces lemmes :

Lemme 5 : Soient $(H_t)_{t \geq 0}$ et $(K_t)_{t \geq 0}$ deux processus positifs, nuls en 0, à trajectoires continues, adaptés à une filtration \mathcal{F} , et vérifiant :

- 1) $\forall t, E(H_t + K_t) < +\infty$
- 2) $H - K$ est une \mathcal{F} martingale .

Alors $(\sup_t H_t < \infty) = (\sup_t K_t < \infty)$ P p.s.

Le lemme suivant, très simple, établit un lien entre les projections optionnelle, et duale prévisible, d'un processus croissant :

Lemme 6 : Soient \mathcal{F} une filtration, et A un processus croissant, non nécessairement \mathcal{F} adapté, tel que $\forall t, E(A_t) < \infty$. Alors :

- a) ${}^o A - A^P$ est une \mathcal{F} martingale .
- b) $(A_\infty < \infty) \supseteq (A^P_\infty < \infty)$ P p.s.

Démonstration : a) pour tout couple (s, t) vérifiant: $0 \leq s < t$, on a :
 $E({}^o A_t - {}^o A_s | \mathcal{F}_s) = E(A_t - A_s | \mathcal{F}_s) = E(A^P_t - A^P_s | \mathcal{F}_s)$.

b) Soient T_n les temps d'arrêt prévisibles définis par
 $T_n = \inf(t, A^P_t \geq n)$.

$(A^P < +\infty) = \bigcup_n (T_n = +\infty)$ et $E(A_{T_n^-}) = E(A^P_{T_n^-}) \leq n$,

soit $A_\infty < +\infty$ sur $\bigcup_n (T_n = \infty)$.

Enfin, dans le dernier lemme préliminaire, on présente l'inégalité de Hardy [3]⁽¹⁾ sous une forme qui nous convient pour la suite. On passe de la forme "classique" de l'inégalité de Hardy à l'énoncé ci-dessous par un changement de variable élémentaire.

(1) voir aussi Rudin ([12], p.72) .

Lemme 7 : Soit $f \in L^2([0,1])$. Pour tout $x \in [0,1[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(u)}{1-u} du \quad . \quad \text{Alors :}$$

a) $(1-x)^{\frac{1}{2}} F(x) \rightarrow 0$ quand $x \uparrow 1$.

b) $\|F\|_{L^2([0,1])} \leq 2 \|f\|_{L^2([0,1])}$

Démonstration de la proposition 4 :

Quitte à arrêter le processus $\int_0^t \varphi^2(s) ds$, nous pouvons supposer que $E(\int_0^\infty \varphi^2(s) ds) < \infty$. En conséquence, pour tout $t < 1$, on a :

$$E\left(\int_0^t |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds\right) = c E\left(\int_0^t |\varphi(s)| \frac{ds}{\sqrt{1-s}}\right) < \infty \quad (c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}).$$

Nous prenons maintenant pour intervalle de temps $T = [0,1[$ et nous allons utiliser les lemmes 5 et 6 avec la filtration \mathcal{F} (on se ramène de $[0,\infty[$ à $[0,1[$ par le changement de temps $t \rightarrow \frac{t}{1+t}$).

Posons alors $A_t = \int_0^t |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} ds$.

Avec les notations du lemme 6, on a pour tout t :

$${}^o A_t = E(A_t | \mathcal{F}_t) = \int_0^t \frac{ds}{1-s} |\varphi(s)| E(|B_1 - B_s| | \mathcal{F}_t)$$

$$\text{et } A_t^D = \int_0^t |\varphi(s)| \frac{({}^o |B_1 - B_s|)_s}{1-s} ds = c \int_0^t \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}} ds .$$

On peut maintenant appliquer le lemme 5 à $H = {}^o A$ et $K = A^D$, car K est continu, ainsi que H , puisque $H - K$, martingale pour la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t)_{t < 1}$, est continue.

Il résulte alors du lemme 5 que :

$$\left\{ \sup_t H_t < \infty \right\} = \left\{ \int_0^1 ds \frac{|\varphi(s)|}{\sqrt{1-s}} < \infty \right\} \quad P \text{ p.s.}$$

Le processus $(H_t, t < 1)$ étant continu, il nous suffit de démontrer que :

$$\left\{ \limsup_{t \uparrow 1} H_t < \infty \right\} = \left\{ \int_0^1 ds |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} < \infty \right\} \quad \text{P p.s.}$$

En fait, nous allons prouver :

$$(11) \quad \limsup_{t \uparrow 1} H_t \leq \int_0^1 ds |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s} \quad \text{P p.s.},$$

ce qui terminera la démonstration grâce au lemme 6-b) .

Majorons d'abord H_t comme suit :

$$H_t \leq \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} \left\{ E(|B_1 - B_t| | \mathcal{F}_t) + |B_t - B_s| \right\} .$$

$$(12) \quad H_t \leq c\sqrt{1-t} \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} + |B_1 - B_t| \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} + \int_0^1 ds |\varphi(s)| \frac{|B_1 - B_s|}{1-s}$$

$$\text{Or, d'après le lemme 7-a), } \limsup_{t \uparrow 1} \sqrt{1-t} \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} = 0 .$$

En outre, la fonction déterministe $s \rightarrow E(|\varphi(s)|)$ appartient à $L^2([0,1])$ et donc, le lemme 7-a) entraîne :

$$\limsup_{t \uparrow 1} E(|B_1 - B_t| \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s}) = \limsup_{t \uparrow 1} c\sqrt{1-t} \int_0^t \frac{E(|\varphi(s)|)}{1-s} ds = 0 .$$

Nous allons montrer maintenant que

$$(B_1 - B_t) \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} \quad \text{converge P p.s. lorsque } t \uparrow 1 .$$

Cette expression convergeant dans L^1 vers 0, elle converge donc P p.s. vers 0 . Posons à cet effet

$$\bar{\Phi}(t) = \int_0^t ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} ;$$

il vient d'après la formule d'Ito, pour tout $t < 1$:

$$(B_1 - B_t) \bar{\Phi}(t) = - \int_0^t \bar{\Phi}(s) dB_s + \int_0^t ds (B_1 - B_s) \frac{|\varphi(s)|}{1-s} .$$

L'intégrale de Riemann converge p.s. lorsque $t \uparrow 1$ d'après la remarque 4'. D'autre part, d'après le lemme 7-b), $\int_0^1 \bar{\Phi}^2(s) ds < \infty$

P p.s., et donc l'intégrale stochastique $\int_0^t \bar{\Phi}(s) dB_s$

converge P p.s. lorsque $t \uparrow 1$ vers $\int_0^1 \Phi(s) dB_s$. Finalement, l'inégalité (41) découle de la majoration (42), et des résultats établis à sa suite.

L'équivalence entre (ii) et (iii) [théorème 3] suggère diverses généralisations, dont celle-ci :

Proposition 8 : Soit φ un processus \mathcal{F} prévisible tel que :

$$\int_0^1 \varphi^2(s) (1-s) ds < \infty \quad \text{P p.s. Alors :}$$

$$\left\{ \int_0^1 ds |\varphi(s)| < \infty \right\} = \left\{ \int_0^1 ds \frac{|\varphi(s)|}{1-s} (B_1 - B_s)^2 < \infty \right\} \quad \text{P p.s.}$$

La démonstration repose sur un résultat élémentaire d'intégration, à savoir :

Lemme 9 : Soit $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante, telle que $g(1) = 0$. Alors, pour toute $f \geq 0$ vérifiant

$$\int_0^1 f(u) g(u) du < \infty, \quad \text{on a} \quad \lim_{t \uparrow 1} g(t) \int_0^t f(u) du = 0.$$

Démonstration : g étant décroissante,

$$g(t) f(u) \mathbf{1}_{[0,t]}(u) \leq f(u) g(u),$$

$$\text{et } \forall u \leq 1, \quad g(t) f(u) \mathbf{1}_{[0,t]}(u) \leq g(t) f(u) \xrightarrow{(t \rightarrow 1)} 0;$$

le résultat découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Démonstration de la proposition 8 :

On peut évidemment supposer $\varphi \geq 0$, et, par localisation, renforcer l'hypothèse initiale en $E(\int_0^1 \varphi^2(s) (1-s) ds) < \infty$. On peut alors écrire, pour tout $t < 1$:

$$\int_0^t ds \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 = -\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + \int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) dB_s$$

$$= -\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + (B_1 - B_t) \int_0^t \varphi(s) dB_s + \int_0^t (\varphi \cdot B)_u dB_u + \int_0^t \varphi(u) du ,$$

$$\text{soit } \int_0^t ds \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 - \int_0^t \varphi(s) ds = a_t + b_t + c_t ,$$

où a_t est la \mathcal{G} martingale locale $-\int_0^t \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s$,

b_t la \mathcal{F} martingale locale $\int_0^t (\varphi \cdot B)_u dB_u$

et $c_t = (B_1 - B_t) \int_0^t \varphi(s) dB_s$.

Remarquons que $(a_t, t < 1)$ et $(b_t, t < 1)$ sont de carré intégrable, puisque, pour tout $t < 1$,

$$E([a, a]_t) = E\left(\int_0^t \varphi^2(s)(B_1 - B_s)^2 ds\right) = E\left(\int_0^t \varphi^2(s)(1-s) ds\right)$$

$$\leq E\left(\int_0^1 \varphi^2(s)(1-s) ds\right) < \infty , \text{ et}$$

$$E([b, b]_t) = E\left(\int_0^t (\varphi \cdot B)_u^2 du\right) = E\left(\int_0^t \left(\int_0^u \varphi^2(s) ds\right) du\right)$$

$$= E\left(\int_0^t \varphi^2(s)(t-s) ds\right) \leq E\left(\int_0^1 \varphi^2(s)(1-s) ds\right) < \infty .$$

D'autre part, on a :

$$E(c_t^2) = (1-t) E\left(\int_0^t \varphi^2(s) ds\right) = (1-t) \int_0^t E(\varphi^2(s)) ds ,$$

expression qui converge vers 0 quand $t \rightarrow 1$ d'après le lemme 9 .

Par suite, le processus $\left(\int_0^t ds \frac{\varphi(s)}{1-s} (B_1 - B_s)^2 - \int_0^t ds \varphi(s) , t < 1\right)$ converge dans L^2 vers $-\int_0^1 \varphi(s)(B_1 - B_s) d\beta_s + \int_0^1 (\varphi \cdot B)_u dB_u$,

d'où la proposition 8 .

2.2. Sur la convergence de certaines intégrales riemannniennes.

Nous avons essayé de généraliser la proposition 8 en étudiant des intégrales du type $\int_0^1 \varphi(s) |B_1 - B_s|^p ds$; nous n'avons obtenu de résultats que dans le cas déterministe, résultats que nous présentons après avoir changé s en $(1-s)$!

Proposition 10 : Soit $f :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $\int_a^1 f(u) du < \infty$ pour tout $a > 0$. Notons $B_t^* = \sup_{s \leq t} |B_s|$, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ et L_t le temps local de B en 0, pris en t . Alors, pour tout $p > 0$, les cinq intégrales suivantes sont simultanément finies, ou infinies P p.s. :

$$(i) \int_0^1 f(u) |B_u|^{2p} du, \quad (ii) \int_0^1 f(u) S_u^{2p} du,$$

$$(iii) \int_0^1 f(u) L_u^{2p} du, \quad (iv) \int_0^1 f(u) (B_u^*)^{2p} du, \quad (v) \int_0^1 f(u) u^p du.$$

Démonstration : 1) notons encore $T_t = \sup_{s \leq t} (-B_s)$; T , S et L ont même loi et $T \leq B^*$, $S \leq B^*$, $|B| \leq B^* \leq T + S$. En outre, d'après un théorème de Paul Lévy, $S - B$ a même loi que $|B|$; soit c_p une constante universelle telle que :

$$(x + y)^{2p} \leq c_p (x^{2p} + y^{2p}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) ; \text{ alors :}$$

$$\int_0^1 f(u) S_u^{2p} du \leq c_p \left\{ \int_0^1 f(u) (S_u - B_u)^{2p} du + \int_0^1 f(u) |B_u|^{2p} du \right\}.$$

(i), (ii), (iii) et (iv) convergent (ou divergent) donc simultanément. De même,

$$E \left(\int_0^1 f(u) |B_u|^{2p} du \right) = \left(\int_0^1 f(u) u^p du \right) \cdot E(|B_1|^{2p})$$

et la convergence de (v) implique celle de (i) .

2) Nous supposons maintenant que (i) converge. $(B_1 - B_{(1-u)}, u < 1)$ a même loi que $(B_u, u < 1)$; par suite, (i) et (iv) convergeant simultanément, $\int_0^1 f(1-u) \sup(|B_1 - B_s|^{2p}, u \leq s < 1)$ du est P p.s. finie ;

en particulier, d'après le lemme 9 ,

$$(13) \quad \limsup_{t \rightarrow 1-} \left\{ |B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v) dv \right\} \\ \leq \limsup_{t \uparrow 1} \left\{ \sup(|B_1 - B_s|^{2p}, t \leq s < 1) \int_0^t f(1-v) dv \right\} = 0 .$$

Particularisons encore : $|B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v) dv$ converge vers 0

en probabilité quand t tend vers 1 , d'où pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\lim}_{t \uparrow 1} P(|B_1 - B_t|^{2p} \int_0^t f(1-v) dv > \varepsilon) \\ = \overline{\lim}_{t \uparrow 1} P(|B_1|^{2p} > \varepsilon \left[(1-t)^p \int_0^t f(1-v) dv \right]^{-1}) = 0 ,$$

ce qui nécessite :

$$(14) \quad \overline{\lim}_{t \uparrow 1} (1-t)^p \int_0^t f(1-v) dv = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} t^p \int_t^1 f(v) dv = 0 .$$

3) Supposant toujours que (i) converge, notons (voir la démonstration de la proposition 4) ,

$$A_t = \int_0^t f(1-v) |B_1 - B_v|^{2p} dv \quad (E(A_t) < +\infty \quad \text{pour tout } t < 1) ,$$

$$H_t = {}^o A_t , \quad K_t = A_t^{(p)} = \int_0^t (1-v)^p f(1-v) dv \quad (t < 1) .$$

K est continu, $H - K$ est une martingale (lemme 6-a) de la filtration brownienne, donc est continue. Par suite (lemme 5), $\overline{\lim}_{t \uparrow 1} H_t$

est fini si, et seulement si (v) converge.

Mais nous pouvons majorer (voir la démonstration de la proposition 4)

H_t par :

$$(12') \quad c_p (1-t)^p \int_0^t f(1-v) dv + c_p^2 |B_t - B_1|^{2p} \int_0^t f(1-v) dv \\ + c_p^2 \int_0^t f(1-v) |B_1 - B_v|^{2p} dv ;$$

d'après (13) et (14), on a donc :

$$\left\{ \int_0^1 f(1-v) |B_1 - B_v|^{2p} dv < \infty \right\} \subseteq \left\{ \limsup_{t \uparrow 1} H_t < \infty \right\} ;$$

la convergence de (i) implique donc celle de (v).

Exemples : 1) $\int_0^1 \frac{B_u^2}{u^2} du = \infty$ P p.s.

2) Si $f \in L^1_{loc}([0, 1])$, $f \geq 0$,

$$\int_0^1 f(u) \frac{|B_u|}{u} du < \infty \quad \text{si, et seulement si} \quad \int_0^1 \frac{f(u)}{\sqrt{u}} du < \infty ,$$

$$\int_0^1 f(u) \frac{B_u^2}{u} du < \infty \quad \text{si, et seulement si} \quad \int_0^1 f(u) du < \infty ;$$

on retrouve ainsi (heureusement!) les conclusions des propositions 4 et 8, dans le cas où φ est déterministe.

Divers théorèmes d'équivalence en loi nous permettent de déduire de la proposition 10, la convergence ou la divergence d'autres intégrales riemanniennes.

Proposition 11 : 1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de 0.

On note $T_1 = \inf\{t \geq 0, B_t = 1\}$. Alors, pour tout p tel que $1 \leq p < 2$,

on a : $\int_0^{T_1} \frac{ds}{(1-B_s)^p} < \infty$ P p.s., mais : $\int_0^{T_1} \frac{ds}{(1-B_s)^2} = \infty$ P p.s.

2) Soit $(R_3(t), t \geq 0)$ un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0.

Alors, pour tout p tel que $1 \leq p < 2$, on a :

$$\int_{0+} \frac{du}{R_3(u)^p} < \infty \quad \text{P p.s., mais} \quad \int_{0+} \frac{du}{R_3(u)^2} = \infty \quad \text{P p.s.}$$

Démonstration : soit p tel que $1 < p \leq 2$.

1) La convergence de l'intégrale $\int_0^{T_1} ds (1 - B_s)^{-p}$ équivaut évidemment à celle de $J = \int_0^{T_1} ds \mathbb{1}_{(B_s > 0)} (1 - B_s)^{-p}$.

Si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $L_{T_1}^a$ désigne le temps local en a de $(B_t, t \geq 0)$, pris au temps $t = T_1$ (d'après le théorème de Trotter, il existe une version continue de: $a \rightarrow L_{T_1}^a$), on a :

$$J = \int_0^1 da (1-a)^{-p} L_{T_1}^a.$$

Or, d'après un théorème de D. Ray [11] et F. Knight [7], le processus $(L_{T_1}^{1-a}, 0 \leq a \leq 1)$ a même loi que le carré d'un processus de Bessel d'ordre 2, issu de 0.

Ainsi, si (X, Y) désigne un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^2 , issu de 0, la variable J a même loi que

$$\int_0^1 da (1-a)^{-p} \left\{ \frac{X_{(1-a)}^2}{(1-a)} + \frac{Y_{(1-a)}^2}{(1-a)} \right\} = \int_0^1 db b^{-p} (X_b^2 + Y_b^2).$$

Cette dernière intégrale est d'espérance finie si $1 < p < 2$, et on a prouvé ci-dessus qu'elle est infinie P p.s. si $p = 2$.

2) Rappelons que: $\lim_{t \rightarrow \infty} R_3(t) = \infty$ P p.s.

Donc, si l'on note $\tau_1 = \sup(t, R_3(t) = 1)$, on a $P(\tau_1 < \infty) = 1$.

Ainsi, la convergence de $\int_{0+} du R_3(u)^{-p}$ équivaut à celle de

$$\begin{aligned} K & \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{\tau_1} du \mathbb{1}_{(R_3(u) \leq 1)} R_3(u)^{-p} \\ & = \int_0^1 da a^{-p} \ell_{\tau_1}^a = \int_0^1 da a^{-p} \ell_{\infty}^a, \end{aligned}$$

où, pour tout $a > 0$, $(\ell_t^a, t \geq 0)$ désigne le temps local en a de R_3 (à nouveau, il existe une version bicontinue en (a, t) de ℓ).

Un second théorème dû à D. Ray et F. Knight affirme que le processus $(\ell_{\infty}^a, a \geq 0)$ a pour loi celle du carré d'un processus de Bessel d'ordre 2, d'où le résultat cherché, d'après l'argument utilisé dans

la démonstration précédente.

Remarque : Le premier auteur étudie, dans un prochain article [5], l'hypothèse (H') relativement à la filtration naturelle \mathcal{F} du mouvement brownien réel, et à \mathcal{G} définie par :

pour tout t , $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{ \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \sigma(T_1) \}$.

Il montre, en particulier, que (B_t) est une \mathcal{G} semi-martingale, et

l'intégrale $\int_0^{T_1} \frac{ds}{(1-B_s)^2}$ joue alors un rôle analogue à celui

joué par $\int_0^1 \frac{(B_1 - B_s)^2}{(1-s)^2} ds$ dans notre étude du grossissement de \mathcal{F}

à l'aide de B_1 .

3. Grossissement de filtration et théorème de Girsanov.

On donne ici deux contre-exemples à (FA 2) (pour la formulation de cette assertion, se reporter à l'introduction).

3.1. Le cas discontinu.

\mathcal{G} désigne ici la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel, issu de 0. D'après Dudley et Gutmann [2], il existe un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$, nul en 0, adapté à la filtration \mathcal{G} . Notons (\mathcal{F}_t) sa filtration naturelle.

Alors, si $(\tilde{N}_t = N_t - t, t \geq 0)$ est la martingale compensée (pour \mathcal{F}) de (N_t) , \tilde{N} est un processus \mathcal{G} prévisible à variation finie. Ainsi, (FA 2) n'est pas vérifiée, puisque $d\tilde{N}_t$ n'est pas absolument continue par rapport à $d\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle_t = dt$ (le crochet est évidemment relatif à la filtration \mathcal{F}).

Notons encore que, dans ce cas, l'hypothèse (H') est vérifiée, puisque toute \mathcal{F} martingale (locale) est à variation finie .

3.2. Le cas continu.

\mathcal{G} désigne encore la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel B, issu de 0 . Pour tout $t \geq 0$, on note $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, et $Y_t = 2 S_t - B_t$. J. Pitman [10] a montré que Y est un processus de Bessel d'ordre 3. D'après ce résultat, si l'on désigne par (\mathcal{F}_t) la filtration naturelle de Y, il découle de Jeulin [4] que (\mathcal{F}_t) est la filtration naturelle du mouvement brownien réel

$$(15) \quad \beta = Y - \int_0^\cdot \frac{1}{Y_s} ds \quad .$$

D'après (15), β est une \mathcal{G} semi-martingale telle que $\beta - A$ soit une \mathcal{G} martingale, si l'on note $A = 2S - \int_0^\cdot \frac{1}{Y_s} ds$.

Mais, (FA 2) n'est pas vérifiée, dA n'étant pas absolument continue par rapport à $d\langle \beta, \beta \rangle_s = ds$.

En effet, la propriété de densité de temps d'occupation pour les temps locaux d'une semi-martingale entraîne que :

$$\text{pour tout } t, \int_0^t \mathbf{1}_{(S_s - X_s = 0)} ds = 0 \quad ;$$

$$\text{par contre, } \int_0^t \mathbf{1}_{(S_s - X_s = 0)} dA_s = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{(S_s = X_s)} dS_s = 2 S_t \neq 0 \quad .$$

Pour être complets, notons que contrairement à ce qui se passait en 3.1, la propriété (H') n'est pas vérifiée pour le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. En effet, une légère variante des arguments utilisés pour démontrer

l'équivalence de (i) et (ii) au théorème 3 montre que, pour que (H') soit vérifiée, il faudrait, en particulier, que pour toute $f \in L^2_+(\mathbb{R}_+, ds)$, l'intégrale $\int_{0+} f(s) |dA_s|$ soit convergente.

Les mesures dS_u et du étant étrangères (on vient de le remarquer),

$$\text{on a : } |dA_s| = 2 dS_s + \frac{1}{Y_s} ds .$$

$$\text{D'où } \int_{0+} f(s) |dA_s| < \infty \text{ P p.s. } \Rightarrow \int_{0+} f(s) dS_s < \infty \text{ P p.s.}$$

$$\text{Soit alors } g(u) = u^{-\frac{1}{2}} (-\log u)^p \mathbf{1}_{(0 < u \leq \frac{1}{2})} \quad \left(\frac{1}{2} < p \leq 1 \right)$$

$$\text{et } f(s) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \int_s^1 \frac{g(u)}{u} du .$$

$$\int_{0+} f(s) dS_s = \int_{0+} S_u \frac{g(u)}{u} du = \infty \quad (\text{Proposition 10}) ;$$

(H') n'est donc pas vérifiée .

3.3. Remarque finale.

Hormis les deux cas que nous venons d'étudier, de nombreux exemples de grossissement de filtration que nous avons rencontré vérifient (FA 2) ; citons, par exemple :

- le grossissement d'une filtration à l'aide d'une partition dénombrable d'ensembles \mathcal{F}_∞ mesurables (P.A. Meyer [9]) ;
- le grossissement d'une filtration \mathcal{F} , pour faire d'une fin d'ensemble \mathcal{F} optionnel un \mathcal{G} temps d'arrêt (M. Barlow [4] et Jeulin-Yor [6], par exemple) ;
- voir aussi le paragraphe A de [6] ; etc...

Indiquons enfin que, si l'on tient encore, après les deux contre-exemples précédents, à rapprocher grossissement de filtration et

changement de probabilités, via "le théorème de Girsanov", il faut s'autoriser à considérer des couples de probabilités P et Q quelconques (i.e. sans relation d'absolue continuité). La variante du théorème de Girsanov obtenue dans ce cadre général (Yoeurp-Yor [13]) ne fait plus alors apparaître de relation d'absolue continuité entre mesures aléatoires, comme c'était le cas lorsque $Q \ll P$.

Références. a) références générales .

- [1] M. Barlow : Study of a filtration expanded to include an honest time .
Z.für Wahr, 44(1978),307-323.
- [2] R.M. Dudley et S. Gutmann : Stopping times with given laws.
Séminaire de Probabilités XI, Lect. Notes in Math. 584 , 1977 .
- [3] G.H. Hardy : Note on a theorem of Hilbert.
Math. Zeitschrift 6 (1920), 344-347.
- [4] T. Jeulin : Grossissement d'une filtration et applications
(dans ce volume)
- [5] T. Jeulin : Variables aléatoires et grossissement d'une filtration (en préparation).
- [6] T. Jeulin et M. Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus (à paraître aux Annales de l' ENS, 1978).
- [7] F.B. Knight : Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. TAMS 409 (1963), 56-86 .
- [8] E. Lenglart : Convergence comparée de processus .
(à paraître à : Stochastics , 1979).
- [9] P.A. Meyer : Sur un théorème de J. Jacod
(Séminaire de Probabilités XII, Lect. Notes in Math. 649, 1978).
- [10] J. Pitman : One dimensional Brownian motion and the three dimensional Bessel process. Adv.in Proba. 7 (1975) 511-526 .

- [11] D. Ray : Sojourn times of Diffusion processes
Illinois J. Math. 7 (1963), 615-630 .
- [12] W. Rudin : Real and Complex Analysis. Mc Graw Hill (1966) .
- [13] Ch. Yoeurp et M. Yor : Espace orthogonal à une semi-martingale,
applications. (A paraître au Z.f.W. 1978).
- [14] M. Yor : Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques.
Séminaire de Probabilités XI, Lect. Notes in Math. 581 , 1977 .

b) références relatives au paragraphe 1

- [15] V. Mackevičius: Formula for Conditional Wiener Integrals.
Int. Symposium on Stoch. Diff. Equations.
August 28-Sept. 2, 1978, Vilnius.
Abstracts of Communications.
- [16] B. Jamison: The Markov Processes of Schrödinger .
Z. für Wahr. ,32, 323-331, 1975.
- [17] J. Yeh: Inversion of Conditional Wiener Integrals.
Pacific J. Math, 59, 2, 623-638, 1975 .

Université P. et M. Curie
Laboratoire de Probabilités
2, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05