ALINE BONAMI
DOMINIQUE LÉPINGLE

**Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 294-306
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__294_0>

# FONCTION MAXIMALE ET VARIATION QUADRATIQUE DES MARTINGALES EN PRESENCE D'UN POIDS

par A. BONAMI et D. LEPINGLE

---

§ 1. Introduction. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$ un espace probabilisé complet filtré, la filtration $(\mathcal{F}_t)$ étant continue à droite, contenant les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$, et engendrant $\mathcal{F}$. Pour toute martingale uniformément intégrable $X$, on note

$$X^* = \sup_t |X_t|$$

la fonction maximale associée. Les inégalités de Doob affirment que si $p > 1$, il existe une constante $c_p$ telle que

$$(1.1) \qquad E[(X^*)^p] \leqslant c_p \quad E[|X_\infty|^p] .$$

Soit $Z$ une variable aléatoire strictement positive d'intégrale égale à 1, et soit $Z_t = E[Z | \mathcal{F}_t]$ la martingale associée. On note $\hat{P}$ la probabilité $Z.P$, et on s'intéresse à la question suivante : à quelle condition sur $Z$ existe-t-il une constante $c_p$ indépendante de $X$ telle que

$$(1.2) \qquad \hat{E}[(X^*)^p] \leqslant c_p \quad \hat{E}[|X_\infty|^p] \quad ?$$

Ce problème a été entièrement résolu dans le cas des martingales dyadiques (c'est-à-dire pour $\Omega = ]0,1]$, $dP = dx$, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $]k\,2^{-n}, (k+1)\,2^{-n}]$ , $k = 0,1,\dots,2^n-1$) par Muckenhoupt ([8], voir également [3]) . S'inspirant de ce cas particulier, Izumisawa et Kazamaki ont dans [6] introduit la classe de poids $(A_p)$ .

<u>Définition 1</u>. On dit que le poids $Z$. <u>satisfait à la condition</u> (Ap) , où $p > 1$ , s'il existe une constante $C_p$ telle qu'en dehors d'un ensemble de probabilité nulle, pour tout $t > 0$ ,

$$Z_t(E[Z^{-\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}_t])^{p-1} \leq C_p \quad .$$

Ils ont montré que si $Z \in (A_{p_0})$ , l'inégalité (1.2) a lieu pour tout $p > p_0$ et pour toute martingale uniformément intégrable $X$ . En même temps, ils donnent une condition assez technique pour que, si $Z \in (A_p)$ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z \in (A_{p-\varepsilon})$ .

Le point de départ de ce travail était de montrer que si $Z \in (A_p)$ et s'il existe une constante $C$ telle que $\sup_t Z_{t^-}/Z_t \leqslant C$ , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z \in (A_{p-\varepsilon})$ : il en résulte que dans ce cas l'inégalité (1-2) a lieu pour toute martingale $X$ uniformément intégrable.

Cette propriété des poids $Z \in (A_p)$ tels que $\sup_t (Z_{t^-}/Z_t) < \infty$ , qui avait été signalée dans [1] , a été également remarquée par C. Doléans-Dade et P.A. Meyer ([4]).

Nous renvoyons donc le lecteur à leur excellente rédaction, et nous nous contentons de montrer dans le § 3, à l'aide d'un contre-exemple déjà donné dans [1] , qu'il existe des poids $Z \in (A_p)$ n'appartenant à aucune classe $(A_{p-\varepsilon}), \varepsilon > 0$ . Toutefois, dans le contre-exemple étudié, l'inégalité (1.2) a encore lieu. La question est donc encore ouverte de savoir si la condition $(A_p)$ entraîne en toute généralité l'inégalité (1-2).

Dans le § 2, nous étudions les inégalités à poids pour la variation quadratique. Rappelons que si $X$ est une martingale locale, sa variation quadratique $[X]$ est le processus défini de la manière suivante : $X$ admet une décomposition unique en $X^c + X^d$ , où $X^c$ est une martingale locale continue, $X^d$ une somme compensée de sauts nulle en zéro ; on pose

$$[X]_t = \langle X^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 ,$$

où $\langle X^c \rangle_t$ est l'unique processus croissant continu adapté $A_t$ tel que $(X^c)^2 - A$ soit une martingale locale nulle en zéro. Il est bien connu [7] que si $X$ est uniformément intégrable, $[X]_\infty$ est fini p.s., et que si $p > 1$

$$\text{(1.3)} \qquad E[[X]_\infty^{p/2}] \leq c_p \, E[|X_\infty|^p] .$$

Nous montrons que si $Z$ vérifie la condition $(A_p)$ et si $0 < c \leq Z_{t-}/Z_t \leq C$ , l'inégalité à poids

(1.4) $\hat{E}[[X]_\infty^{p/2}] \leq c_p \quad \hat{E}[|X_\infty|P]$

a également lieu. Pour ce faire, nous établissons diverses inégalités à poids entre $[X]_\infty$ et $X^*$ qui généralisent celles de [6] .

Dans ce qui suit, lorsque p est pris > 1 , nous poserons $V = Z^{-\frac{1}{p-1}}$ et $V_t = E[V| \mathcal{F}_t]$ . Nous supposerons avoir choisi des versions continues à droite, pourvues de limites à gauche des processus $Z_t$ et $V_t$ , et si $Z \in (A_p)$ , telles que l'inégalité

$$Z_t V_t^{p-1} \leq C_p$$

ait lieu pour tout t , en dehors d'un ensemble négligeable de $\Omega$ . Nous avons par ailleurs $Z_t V_t^{p-1} \geq 1$ comme conséquence de l'inégalité de Hölder appliquée à $1 = E[Z V^{p-1}| \mathcal{F}_t]$. Rappelons que sur $\mathcal{F}_t$ , $\frac{d\hat{P}}{dP} = Z_t$ , et que l'on a

$$\hat{E}[X| \mathcal{F}_t] = E[\frac{Z}{Z_t} X| \mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} E[ZX| \mathcal{F}_t] \quad .$$

Citons enfin le lemme suivant ([4], § 6) :

<u>Lemme</u> (ou inégalité de Hölder inverse) : *Si* $Z \in (A_p)$ *et s'il existe une constante* C *telle que* $\sup Z_{t-}/Z_t \leq C$ , *il existe* $\delta > 0$ *et* C' *tels que, quel que soit* t ,

$$E[V^{1+\delta} | \mathcal{F}_t] \leq C' V_t^{1+\delta} \quad .$$

## § 2. Fonction maximale et variation quadratique

Izumisawa et Kazamaki ont également obtenu dans [6] des conditions pour que les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy qui relient fonction maximale et variation quadratique soient encore vérifiées pour la probabilité $\hat{P}$ , mais ils se sont restreints aux martingales à trajectoires continues.

Nous reprenons cette question par une méthode différente valable pour des martingales quelconques.

Rappelons qu'une fonction $\phi$ sur $\mathbb{R}_+$ est dite <u>à croissance modérée</u> si : $\phi(o) = 0$ , $\phi$ est convexe et croissante , $\phi(2\lambda) \leq C\,\phi(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$ .

A côté de la condition $(A_p)$ $(p > 1)$ , il est naturel d'introduire la condition $(\hat{A}_p)$ obtenue en permutant les rôles de $P$ et $\hat{P}$ . Nous dirons que $Z \in (\hat{A}_p)$ si en dehors d'un ensemble de probabilité nulle,

$$\frac{1}{Z_t}\,(\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t])^{p-1} \leq C_p \quad \text{pour tout} \quad t > 0 .$$

Remarquons qu'une forme équivalente de cette condition est

$$E[Z^{\frac{p}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t] \leq c_p\, Z_t^{\frac{p}{p-1}}$$

Nous dirons de plus que $Z \in (\hat{A}_\infty)$ s'il existe un $p > 1$ tel que $Z \in (\hat{A}_p)$ .

<u>Lemme.</u> *Si* $Z \in (\hat{A}_p)$, $\forall A \in \mathcal{F}$ , $\forall t \geq o$ ,

$$(\hat{E}[1_A \mid \mathcal{F}_t])^p \leq c_p\, E[1_A \mid \mathcal{F}_t]$$

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder

$$(\hat{E}[1_A(\tfrac{Z}{Z})^{1/p} \mid \mathcal{F}_t])^p \leq \hat{E}[1_A/Z \mid \mathcal{F}_t](\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t])^{p-1}$$

$$= E[1_A \mid \mathcal{F}_t]\,\frac{1}{Z_t}\,(\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t])^{p-1}$$

$$\leq c_p\, E[1_A \mid \mathcal{F}_t] .$$

<u>Proposition 1.</u> *Soit* $M$ *une martingale uniformément intégrable vérifiant* $|\Delta M_t| \leq S_{t-}$ *pour tout* $t > 0$ *, où* $S$ *est un processus croissant adapté. Supposons que* $Z$ *vérifie la condition* $(\hat{A}_p)$ *. Il existe alors deux*

*constantes* $c_1$ *et* $c_2$ *ne dépendant pas de* $M$ *telles que si* $\beta > 1$ ,

$0 < \delta < \beta - 1$ , $\lambda > 0$ ,

$$\hat{P}([M]_\infty^{1/2} > \beta\lambda \ , \ M^* \vee S_\infty < \delta\lambda) \leq c_1\left(\frac{\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1}\right)^{1/p} \hat{P}([M]_\infty^{1/2} > \lambda)$$

$$\hat{P}(M^* > \beta\lambda \ , \ [M]_\infty^{1/2} \vee S_\infty < \delta\lambda) \leq c_2\left(\frac{\delta}{\beta-\delta-1}\right)^{2/p} \hat{P}(M^* > \lambda)$$

Preuve. Bornons-nous à démontrer la première de ces inégalités de distribution, à l'aide de la méthode habituelle [2] . Posons

$$T = \inf\{t : |[M]_t > \lambda^2\}$$

$$S = \inf\{t : \sup_{s<t} [M_s] \vee S_t > \delta\lambda\}$$

$$M'_t = M_{(t+T)\wedge S} - M_{T\wedge S} \quad ;$$

$M'$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+T})$ , et sur l'ensemble $A = \{[M]_\infty^{1/2} > \beta\lambda \ , \ S = \infty\}$ ,

$$[M']_\infty = [M]_\infty - [M]_T = [M]_\infty - \Delta M_T^2 - [M]_{T-} \geq (\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2$$

et par conséquent

$$E[1_A | \mathcal{G}_0] \leq E[1_{\{[M']_\infty \geq (\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2\}} | \mathcal{G}_0]$$

$$\leq \frac{E([M']_\infty \mid \mathcal{G}_0)}{(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2}$$

$$= \frac{E(\Sigma(M'_\infty)^2 \mid \mathcal{G}_0)}{(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2}$$

$$\leq \frac{9\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1}$$

D'après le lemme,

$$\hat{E}\left(1_A \mid \mathcal{G}_o\right) \leqslant (9\, C_p \frac{\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1})^{1/p} \qquad ;$$

comme $\{T < \infty\} = \{[M]_\infty^{1/2} > \lambda\} \in \mathcal{G}_o$ et que de plus $A \subset \{T < \infty\}$ ,

$$\hat{P}(A) \leqslant c_1 (\frac{\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1})^{1/p} \quad \hat{P}(T < \infty) \ .$$

La seconde inégalité de distribution se démontre de manière analogue.

Proposition 2. *Si* $Z_{t-}/Z_t \leqslant c_1$ *pour tout* $t > 0$ *et si* $B$ *est un processus croissant adapté, nul en zéro, de compensateur prévisible* $A$ *, alors pour toute fonction* $\phi$ *à croissance modérée,*

$$\hat{E}\left[\phi(A_\infty)\right] < c\, E\left(\phi\ (B_\infty)\right)$$

Preuve. D'après l'inégalité de Neveu-Garsia [5,7] , il suffit de démontrer que pour tout temps d'arrêt $T$ ,

$$\hat{E}\left[A_\infty - A_T \mid \mathcal{F}_T\right] \leqslant C\, \hat{E}\left[B_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]$$

et en fait (en posant $B'_t = 1_D(B_t - B_{t\wedge T})$ , $A'_t = 1_D\,(A_t - A_{t\wedge T})$ , où $D \in \mathcal{F}_T$) il suffira de démontrer que $\hat{E}\left[A_\infty\right] \leqslant C\, \hat{E}\left[B_\infty\right]$ . Or

$$\hat{E}\left[A_\infty\right] = E\left[\int_0^\infty Z_{s-}\, dA_s\right] \leqslant c_1\, E\left[\int_0^\infty Z_s\, dA_s\right] = c_1\, E\left[\int_0^\infty Z_s\, dB_s\right] = c_1\, \hat{E}\left[B_\infty\right] .$$

Théorème 1. *Si* $Z \in (\hat{A}_\infty)$ *et si* $Z_{t-}/Z_t \leqslant c_1$ *, alors pour toute fonction* $\phi$ *à croissance modérée, il existe deux constantes* $c$ *et* $C$ *telles que*

$$c\, \hat{E}\left[\phi(X^*)\right] \leqslant \hat{E}\left[\phi([X]_\infty^{1/2})\right] \leqslant C\, \hat{E}\left[\phi(X^*)\right]$$

*pour toute martingale uniformément intégrable* $X$ .

Preuve. Nous suivons la démarche de la décomposition de B. Davis (voir par exemple [2]) en posant

$$S_t = \sup_{s<t} |\Delta X_s|$$

$$N_t^1 = \sum_{s<t} \Delta X_s \; 1_{\{|\Delta X_s| > 2 S_{s-}\}}$$

$N^2$ le compensateur prévisible de $N^1$

$$N = N^1 - N^2$$

$$M = X - N .$$

On vérifie qu'alors $\int_0^\infty |dN^1|_t \leq 2 S_\infty \leq 4 X^*$ et $|\Delta M_t| \leq 4 S_{t-}$

Il résulte alors de la proposition 1 ci-dessus et du lemme 7.1 de [2] que

$$\hat{E}\left[\phi([M]_\infty^{1/2})\right] \leq c \hat{E}\left[\phi(M^*)\right] + c \hat{E}\left[\phi(S_\infty)\right]$$

$$\leq c \hat{E}\left[\phi(X^*)\right] + c \hat{E}\left[\phi(N^*)\right]$$

$$\leq c \hat{E}\left[\phi(X^*)\right] + c \hat{E}\left[\phi(\int_0^\infty |dN|_s)\right] ,$$

où $c$ varie de place en place ; la proposition 2 montre que

$$\hat{E}\left[\phi(\int_0^\infty |dN|_s)\right] \leq c \hat{E}\left[\phi(S_\infty)\right] < c \hat{E}\left[\phi(X^*)\right] ,$$

et comme $[N]_\infty^{1/2} \leq \int_0^\infty |dN|_s$ , nous avons la deuxième inégalité

$$\hat{E}\left[\phi([X]_\infty^{1/2})\right] \leq c \hat{E}\left[\phi(X^*)\right] ,$$

la première se démontrant de façon analogue.

Théorème 2. *Si* $Z$ *vérifie la condition* $(A_p)$ *et s'il existe deux constantes* $c_1$ *et* $c_2$ *telles que* $0 \leq c_1 \leq Z_{t-}/Z_t \leq c_2$ *pour tout* $t > 0$ *, il existe alors deux constantes* $c$ *et* $C$ *telles que pour toute martingale uniformément intégrable* $X$ *,*

$$c\,\hat{E}\left(|X_\infty|^p\right) \leq \hat{E}\left( [X]_\infty^{p/2}\right) \leq C\,\hat{E}\left(|X_\infty|^p\right) .$$

Preuve. En utilisant le théorème 1 , nous obtenons le résultat si $Z$ vérifie $(A_p)$ , $(\hat{A}_\infty)$ et si $Z_{t-}/Z_t \leq c_2$ . Supposons maintenant que $Z$ vérifie $(A_p)$ et $Z_t/Z_{t-} \leq \frac{1}{c_1}$ . Alors, si $p'$ est le conjugué de $p$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ , on peut vérifier que $V$ satisfait à

$(A_{p'})$ , et que $Z = V^{-\frac{1}{p'-1}}$ . Le lemme préliminaire du § 1 prouve que $Z$ vérifie l'inégalité de Hölder inverse, ce qui est équivalent au fait que $Z \in (\hat{A}_\infty)$ .

§ 3. Etude d'un exemple. Nous avons dit que si $Z$ appartient à la classe $(A_p)$ et si $Z_{t-}/Z_t \leq C$ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z$ appartienne à la classe $(A_{p-\varepsilon})$ . La condition $Z_{t-}/Z_t \leq C$ est évidemment satisfaite lorsque la martingale $Z_t$ est continue. Si $Z \in (A_p)$ , elle est équivalente à la condition $V_t/V_{t-} \leq c$ . En particulier, soit $(\mathcal{F}_n)$ une suite croissante de tribus atomiques pour lesquelles il existe une constante $K$ telle que, si $A$ est un atome de $\mathcal{F}_n$ et $\tilde{A}$ l'atome de $\mathcal{F}_{n-1}$ contenant $A$ , $P(\tilde{A})/P(A) \leq K$ . Alors, si $V_n$ est une martingale positive, $V_n/V_{n-1} \leq k$ puisque sur l'atome $A \in \mathcal{F}_n$ ,

$V_{n-1} = \frac{1}{P(\tilde{A})} \int_{\tilde{A}} V_n \, dP \geq V_n \frac{P(A)}{P(\tilde{A})}$ . Dans ce cas (et c'est le cas des tribus dyadiques sur $]0,1]$), la condition supplémentaire $Z_{n-1}/Z_n \leq C$ est conséquence du fait que $Z \in (A_p)$ .

Soient par contre $\Omega = ]0,1]$ , $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $\left]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]$, $k = 1,\dots,n$ , $P$ la mesure de Lebesgue.

Nous allons montrer qu'il existe un poids $Z$ qui satisfait à la condition $(A_2)$ sans satisfaire à la condition $(A_{2-\varepsilon})$ , et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$ . Comme $\mathcal{F}_\infty$ est la tribu engendrée par les intervalles $\left]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]$ , $k \in \mathbb{N}^*$ , $Z$ est entièrement défini par la suite $z_k$ de ses valeurs sur $\left]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]$. Prenons

$$z_k = b2^k / k! \quad , \text{ où } \quad b^{-1} = \sum_1 2^k/k! \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) .$$

Soit $V = Z^{-1} = b^{-1} \sum_1^\infty k!\ 2^{-k}\ 1_{\left]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]}$ . On calcule que

$$E\left[V^\gamma\right] > \frac{1}{2} \sum_1^\infty (k!)^{\gamma-1}\ 2^{-k} = +\infty \quad \text{si} \quad \gamma > 1 .$$

Donc, si $\varepsilon > 0$ , $Z \notin (A_{2-\varepsilon})$ .. Montrons cependant que $Z \in (A_2)$ . Il suffit de montrer que pour tout $n$ ,

$$\left(n! \int_0^{1/n!} V\, dx\right) \left(n! \int_0^{1/n!} Z\, dx\right) \leq C .$$

Mais $b^{-1} \int_0^{1/n!} Z dx = \sum_{k>n} 2^k/k! \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \leq \sum_{k>n} \frac{2^k}{(k!)^2} \leq 2 \frac{2^n}{(n!)^2}$

De même,

$$b \int_0^{1/n!} V\, dx \leq \sum_{k>n} 2^{-k} = 2^{-n+1} .$$

D'où l'inégalité cherchée avec $C = 4$ .

On peut néanmoins montrer dans cet exemple que, quelle que soit la martingale uniformément intégrable $X$ , l'inégalité

$$(4.1) \qquad \hat{E}\left[(X^*)^2\right] \leq C \quad \hat{E}\left[X^2\right]$$

est satisfaite. En effet, si $X = x_k$ sur $\left]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]$,

$$\hat{E}\left[X^2\right] \geq \frac{1}{2} \sum x_k^2 \quad \frac{2^k}{(k!)^2} \cdot$$

Posons $y_k = x_k \; 2^k/k!$ . Alors, si $Y = \sum y_k \, 1_{]2^{-k-1}, \, 2^{-k}]}$,

$$2\int_0^1 X^2 \; Z \quad dx \geq \int_0^{1/2} \quad Y^2 \; dx \; .$$

Soit $(\mathcal{G}_n)$ la famille de tribus sur $]0,\frac{1}{2}]$ telle que $\mathcal{G}_n$ soit engendrée par les intervalles $]2^{-k-1} \; , \; 2^{-k}]$ , $k \leq n$ . Soit $Y^*$ la fonction maximale associée à $Y$ pour cette famille de tribus. Il résulte du théorème de Doob que

$$(4.2) \qquad \int_0^{1/2} (Y^*)^2 \; dx \leq C \int_0^{1/2} \quad Y^2 \; dx \; .$$

Nous aurons démontré l'inégalité (4.1) si nous montrons que sur $\left]\frac{1}{(k+1)!} , \frac{1}{k}\right]$ , $X^*$ prend une valeur $x_k^*$ majorée par $k! \; 2^{-k} y_k^*$ , où $y_k^*$ désigne la valeur de $Y^*$ sur $]2^{-k-1} \; , \; 2^{-k}]$ . En effet, nous aurons alors

$$\int (X^*)^2 \; Z \; dx \leq \sum x_k^{*2} \quad \frac{2^k}{(k!)^2} \leq \sum y_k^{*2} \; 2^{-k} \leq \int_0^{1/2} (Y^*)^2 \; dx \quad ;$$

On conclut ensuite en utilisant (4.2) . Montrons donc que

$$x_k^* \leq k! \; 2^{-k} \; y_k^* \quad .$$

Mais $x_k^* = \sup \{x_k , \sup_{n<k} n! \int_0^{1/n!} X\, dx\}$ .

Or

$$x_k = k!\ 2^{-k}\ y_k \leq k!\ 2^{-k}\ y_k^* \quad ,$$

et

$$n! \int_0^{1/n!} X\, dx \leq n! \sum_{j>n} y_j\, 2^{-j} \leq n!\ 2^{-n}\ y_k^* \quad .$$

Comme la suite $n!\ 2^{-n}$ est croissante, on en déduit l'inégalité cherchée.

Remarque. Plus généralement, si $p > 1$ , si l'on choisit $z_n = b(\frac{2^k}{k!})^{p-1}$ ,

on peut montrer que $Z \in (A_p)$ tandis que $z \notin \bigcup_{\varepsilon>0} (A_{p-\varepsilon})$ , et que

l'inégalité

$$\hat{E}\left[(X^*)^p\right] < c\ \hat{E}\left[|X_\infty|^p\right]$$

est satisfaite quelle que soit la martingale uniformément intégrable $X$ .

REFERENCES

[1] D. BEKOLLE et A. BONAMI. *Inégalités à poids pour le noyau de Bergman.* Note aux C.R.A.S. Paris - t. 286, 775-778 (1978)

[2] D.L. BURKHOLDER. *Distribution function inequalities for martingales.* Annals of Prob., 1, 19-42 (1973) .

[3] R.R. COIFMAN et C. FEFFERMAN. *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals,* Studia Math., 51, 241-250 (1974).

[4] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER : *inégalités de normes avec poids.*

[5] A. GARSIA. *Martingale inequalities.* Benjamin 1973

[6] M. IZUMISAWA et N. KAZAMAKI. *Weighted norm inequalities for martingales.* Tôhoku Math. Journal, 29, 115-124 (1977).

[7] P.A. MEYER. *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511. Springer 1976.

[8] B. MUCKENHOUPT . *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function.* Trans. Amer. Math. Soc., 165, 207-226 (1972).