RENZO CAIROLI

Sur la convergence des martingales indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 162-173

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__162_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LA CONVERGENCE DES MARTINGALES INDEXEES PAR $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

par R. Cairoli

§1. INTRODUCTION

Il est bien connu qu'une martingale uniformément intégrable M indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ n'est pas nécessairement p.s. convergente.

Nous démontrons dans cette note que, si pour tout ensemble aléatoire prévisible A, la transformée de Burkholder M^A de M par I_A est uniformément intégrable, alors la martingale M converge p.s. . L'outil principal de la démonstration est l'inégalité maximale de Walsh, originellement conçue pour les martingales fortes et adaptée ici aux martingales.

Dans le cas où l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$, Meyer a démontré qu'une martingale remplit la condition que nous avons posée si et seulement si sa variation quadratique est intégrable, autrement dit, elle appartient à H^1 (cf. [4]).

Nous ne savons pas si cette équivalence est également vraie dans notre cas. Par le lemme de Khintchine il est cependant facile de constater que si $M^A_{m,n}$ est uniformément intégrable par rapport à (m,n) et à A, alors la variation quadratique de M est intégrable, mais l'inverse de cette assertion reste aussi à prouver (faute d'inégalités du type Burkholder-Davis-Gundy).

En attendant que les problèmes indiqués trouvent une solution, prenons simplement note qu'une martingale indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ converge p.s., si elle satisfait à une sorte de condition d'appartenance à H^1.

§2. NOTATION ET PREMIERES DEFINITIONS

L'ensemble des entiers non négatifs sera désigné par $\mathbb{N}$. Le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sera noté $\mathbb{N}^2$. Entre les éléments de $\mathbb{N}^2$ est définie la relation d'ordre $(i,j) \prec (m,n)$, qui signifie $i \leqslant m$ et $j \leqslant n$. Si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, nous désignerons par $R_{m,n}$, $R_{m,\infty}$ et $R_{\infty,n}$ les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ $\{(i,j) : (i,j) \prec (m,n)\}$, resp. $\{(i,j) : i \leqslant m\}$, $\{(i,j) : j \leqslant n\}$, et par $D_{m,n}$ l'ensemble $R_{m,\infty} \cup R_{\infty,n}$. Nous poserons en outre $D_{m,\infty} = D_{\infty,n} = D_{\infty,\infty} = \mathbb{N}^2$.

Nous supposerons donnés un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une famille croissante $\{\mathcal{F}_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. L'adjectif "adapté" adjoint à un processus signifiera "adapté à cette famille". Nous poserons $\mathcal{F}_{m,\infty} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{m,n}$, $\mathcal{F}_{\infty,n} = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{m,n}$ et $\mathcal{F}_{\infty,\infty} = \bigvee_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{F}_{m,n}$. Les processus que nous allons considérer étant nuls sur les bords de $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire si m ou $n = 0$), nous admettrons que $\mathcal{F}_{0,n} = \mathcal{F}_{m,0} = \{\emptyset, \Omega\}$. De même, nous poserons $\mathcal{F}_{-1,n} = \mathcal{F}_{m,-1} = \mathcal{F}_{-1,-1} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Nous appellerons <u>martingale</u> un processus adapté $M = \{M_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$, nul sur les bords de $\mathbb{N}^2$ et qui est une martingale ordinaire relative à $\{\mathcal{F}_{m,\infty}, m \in \mathbb{N}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, et une relative à $\{\mathcal{F}_{\infty,n}, n \in \mathbb{N}\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé. On remarquera que toute martingale ainsi définie est une martingale au sens usuel du terme et que l'inverse de cette assertion est vraie si et seulement si la famille de tribus satisfait à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F4) de [1]. Au vu de la convergence, l'hypothèse que M est nulle sur les bords ne représente pas une réelle restriction. On peut en effet toujours remplacer M par M', définie par $M'_{m,n} = M_{m,n} - M_{m,0} - M_{0,n} + M_{0,0}$. Si la martingale M est uniformément intégrable, nous savons qu'elle converge dans L^1 quand m ou n ou les deux convergent vers l'infini. Nous supposerons, dans ce cas, que M est fermée à droite par les limites respectives $M_{\infty,n}$, $M_{m,\infty}$ et $M_{\infty,\infty}$. Pour tout $(m,n) \succ (1,1)$ nous poserons $d_{m,n} = M_{m,n} - M_{m,n-1} - M_{m-1,n} + M_{m-1,n-1}$. Nous appellerons <u>martingale forte</u> un processus $M = \{M_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ nul sur les bords de $\mathbb{N}^2$, adapté, intégrable et tel que $E\{d_{m,n} \mid \mathcal{F}_{m-1,\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty,n-1}\} = 0$ pour tout $(m,n) \succ (1,1)$. Une martingale forte est évidemment aussi une martingale.

Un <u>ensemble prévisible</u> est un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^2 \times \Omega$ tel que $\{(m,n) \in A\} \in \mathcal{F}_{m-1,n-1}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Ici $\{(m,n) \in A\}$ dénote la coupe de A suivant (m,n). La coupe de A suivant ω sera notée $A(\omega)$.

Nous appellerons <u>région d'arrêt</u> un ensemble prévisible D tel que, pour tout $\omega \in \Omega$,

(a) $\inf D(\omega) \in D(\omega)$, si $D(\omega) \neq \emptyset$,

(b) si $(m,n) \in D(\omega)$, alors $(i,j) \in D(\omega)$ pour tout (i,j) tel que $\inf D(\omega) \prec (i,j) \prec (m,n)$.

Un <u>point d'arrêt</u> est une application (S,T) de Ω dans $\mathbb{N}^2 \cup \{(\infty,\infty)\}$ telle que $\{(S,T) \prec (m,n)\} \in \mathcal{F}_{m,n}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Si (S,T) est un point d'arrêt, alors $D_{S,T}$ est une région d'arrêt.

Si M est une martingale et A un ensemble prévisible, le processus M^A défini, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, par

$$M^A_{m,n} = \sum_{i,j=1}^{m,n} (I_A)_{i,j} d_{i,j}$$

est également une martingale. On l'appelle <u>transformée de Burkholder de M par I_A</u>.

§3. UNE INEGALITE MAXIMALE

Dans [5], Walsh démontre que l'inégalité maximale de Doob vaut pour les martingales fortes. Ce résultat, il l'obtient par une décomposition préliminaire suivant une région d'arrêt, qui joue le rôle de premier temps d'atteinte, et par application successive de l'inégalité maximale de Doob.

Nous allons suivre ici ce procédé, en nous arrêtant cependant à une inégalité , qui n'est pas une inégalité maximale à proprement parler, mais qui a l'avantage de s'appliquer aussi aux martingales non fortes.

Soient $M = \{M_{m,n}, (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ une martingale, (S,T) un point d'arrêt et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Posons

$$D^+=\{(m,n;\omega):(m,n)\in\mathbb{N}^2-D_{S,T}(\omega),\ \sup_{(S(\omega),T(\omega))\prec(i,j)\prec(m-1,n-1)}|M_{i,j}(\omega)|\leq\lambda\},$$

$$D = D_{S,T} \cup D^+.$$

Les deux ensembles D et D^+ ainsi définis sont des régions d'arrêt. Nous savons en effet déjà que $D_{S,T}$ l'est, donc tout revient à constater que D^+ est prévisible, puisque (a) et (b) du paragraphe 2 sont manifestement remplies. Or, si m ou $n = 0$, $\{(m,n)\in D^+\} = \emptyset$ et si $(m,n)\succ(1,1)$, nous pouvons écrire

$$\{(m,n)\in D^+\}=\bigcup_{h,k=0}^{m-1,n-1}\Big(\{(S,T)=(h,k)\}\cap\{\sup_{(h,k)\prec(i,j)\prec(m-1,n-1)}|M_{i,j}|\leq\lambda\}\Big),$$

qui est $\mathcal{F}_{m-1,n-1}$-mesurable, donc D^+ est bien prévisible.

Nous appellerons D^+ <u>région d'atteinte de</u> (λ,∞) <u>postérieure à</u> (S,T).

L'inégalité suivante servira de base à la démonstration du théorème de convergence au paragraphe suivant.

Lemme 1. Les données et la notation étant celles introduites précédemment, nous avons

$$\lambda P\{\sup_{(m,n)\in \mathbb{N}^2,(m,n)\succ(S,T)} |M_{m,n}|>\lambda\} \leqslant 9 \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} E\{|M^D_{m,n}|\}.$$

Démonstration. Désignons par L l'ensemble $D\cap\{(i,j;\omega):$ $(i+1,j+1;\omega)\in\mathbb{N}^2-D(\omega)\}$. Pour tout $(i,j)\in L\cap R_{m,n}$, $M_{i,j}$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$M_{i,j} = M^D_{i,n} + M^D_{m,j} - M^D_{m,n}.$$

Il s'ensuit que

$$\{\sup_{(i,j)\in L\cap R_{m,n}} |M_{i,j}| > \lambda\} \subset$$

$$\{\sup_{i\leqslant m}|M^D_{i,n}| > \tfrac{\lambda}{3}\} \cup \{\sup_{j\leqslant n}|M^D_{m,j}| > \tfrac{\lambda}{3}\} \cup \{|M^D_{m,n}| > \tfrac{\lambda}{3}\}.$$

Si maintenant $|M_{i,j}(\omega)|>\lambda$ pour un indice $(i,j)\in R_{m,n}$ tel que $(i,j)\succ(S(\omega),T(\omega))$, alors il en est de même pour un indice $(i,j)\in L(\omega)\cap R_{m,n}$, ce qui entraîne

$$\{\sup_{(i,j)\in R_{m,n},(i,j)\succ(S,T)} |M_{i,j}| > \lambda\} = \{\sup_{(i,j)\in L\cap R_{m,n}} |M_{i,j}| > \lambda\}.$$

Il ne reste donc plus qu'à prendre la probabilité de ces événements et appliquer l'inégalité maximale de Doob aux martingales ordinaires $\{M^D_{i,n}, i\leqslant m\}$ et $\{M^D_{m,j}, j\leqslant n\}$ pour déduire l'inégalité

$$\lambda P\{\sup_{(i,j)\in R_{m,n},(i,j)\succ(S,T)} |M_{i,j}| > \lambda\} \leq 9E\{|M^D_{m,n}|\}$$

et donc l'inégalité du lemme.

Si M est une martingale forte, le théorème d'arrêt (cf.[5],[2]) s'applique et permet de conclure que $E\{|M^D_{m,n}|\} \leq E\{|M_{m,n}|\}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. L'inégalité qui en résulte est l'inégalité maximale de Walsh, telle qu'elle figure dans [5] (dans le cas où l'ensemble des indices est $\mathbb{N}^2$ et M s'annule sur les bords):

<u>Théorème</u>. Soit $M = \{M_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ une martingale forte. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$\lambda P\{\sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |M_{m,n}| > \lambda\} \leq 9 \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} E\{|M_{m,n}|\}.$$

Pour terminer ce paragraphe, nous allons nous écarter un peu de l'objectif que nous nous sommes préfixés et donner une démonstration de ce théorème qui ne fait pas appel à la notion de région d'arrêt.

Fixons $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et posons $T = \inf\{j : j \leq n, \sup_{(i,k)\in R_{m,j}} |M_{i,k}| > \lambda\}$ si $\{\ \} \neq \emptyset$, $T = \infty$ si $\{\ \} = \emptyset$. Il est clair que T est un temps d'arrêt de la famille $\{\mathcal{F}_{m,j}, j \in \mathbb{N}\}$. En outre, par définition de T,

$$P\{\sup_{(i,j)\in R_{m,n}} |M_{i,j}| > \lambda\} = P\{\sup_{i\leq m} |M_{i,T}|I_{\{T<\infty\}} > \lambda\} = P\{\sup_{i\leq m} |M_{i,T\wedge n}| > \lambda\}.$$

Mais puisque nous pouvons écrire $M_{i,T\wedge n} = M_{i,n} - (M_{i,n} - M_{i,T\wedge n})$, nous voyons que le dernier membre multiplié par λ est majoré par

$$\lambda P\{\sup_{i\leq m} |M_{i,n}| > \tfrac{\lambda}{2}\} + \lambda P\{\sup_{i\leq m} |M_{i,n} - M_{i,T\wedge n}| > \tfrac{\lambda}{2}\}.$$

Or, en vertu de l'inégalité maximale de Doob, le premier terme de cette somme est majoré par $2E\{|M_{m,n}|\}$. Si nous démontrons que $\{M_{i,n} - M_{i,T\wedge n},\ i \leqslant m\}$ est une martingale, le deuxième terme sera majoré par $2E\{|M_{m,n} - M_{m,T\wedge n}|\} \leqslant 4E\{|M_{m,n}|\}$ et l'inégalité de Walsh s'ensuivra, avec pour constante 6 à la place de 9. Désignons par $\mathcal{G}_i$ la tribu des $F \in \mathcal{F}_{m,n}$ tels que $F \cap \{T\wedge n = j\} \in \mathcal{F}_{i,n} \vee \mathcal{F}_{m,j}$ pour tout $j \leqslant n$. Manifestement, $M_{i,n} - M_{i,T\wedge n}$ est $\mathcal{G}_i$-mesurable et intégrable. En outre, si $F \in \mathcal{G}_i$ nous avons, compte tenu du caractère fort de la martingale,

$$E\{M_{m,n} - M_{m,T\wedge n}\ ; F\} = \sum_{j=0}^{n} E\{M_{m,n} - M_{m,j}\ ; F \cap \{T\wedge n = j\}\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} E\{M_{i,n} - M_{i,j}\ ; F \cap \{T\wedge n = j\}\} = E\{M_{i,n} - M_{i,T\wedge n}\ ; F\},$$

ce qui prouve que $\{M_{i,n} - M_{i,T\wedge n},\ i \leqslant m\}$ est une martingale.

§4. UN THEOREME DE CONVERGENCE

Soit $M = \{M_{m,n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ une martingale et soit $\varepsilon > 0$. Posons:

$S_0 = 0$;

D_0^+ = région d'atteinte de (ε,∞) postérieure à (S_0,S_0);

$D_0 = D_{S_0,S_0} \cup D_0^+$.

Définissons ensuite par récurrence :

S_n = premier temps d'atteinte de $\mathbb{N}^2 - D_{n-1}$ sur la diagonale, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{i:\ (i,i) \in \mathbb{N}^2 - D_{n-1}(\omega)\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{\ \} = \emptyset; \end{cases}$$

D_n^+ = région d'atteinte de (ε,∞) postérieure à (S_n,S_n);

$D_n = D_{S_n,S_n} \cup D_n^+$.

Il est évident que (S_n,S_n) est un point d'arrêt (et même un point d'arrêt prévisible), que $S_n \leq S_{n+1}$ et que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Posons, en outre :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^+ ,$$

$$A' = A \cap \{(i,j;\omega) : i \leq j\};$$

$$A'' = A \cap \{(i,j;\omega) : i > j\}.$$

<u>Lemme 2</u>. Supposons que M, $M^{A'}$ et $M^{A''}$ sont uniformément intégrables. Alors M^{D_n} l'est aussi et $M^{D_n}_{\infty,\infty}$ converge dans L^1 vers $M_{\infty,\infty}$, quand $n\to\infty$.

<u>Démonstration</u>. Commençons par remarquer que si (S,T) est un point d'arrêt, alors S et T sont des temps d'arrêt relatifs à $\{\mathcal{F}_{m,\infty},\ m \in \mathbb{N}\}$, resp. $\{\mathcal{F}_{\infty,n},\ n \in \mathbb{N}\}$, et

(1) $\quad E\{M_{\infty,\infty}|\mathcal{F}_{S,\infty}\} = M_{S,\infty}, \quad E\{M_{\infty,\infty}|\mathcal{F}_{\infty,T}\} = M_{\infty,T}$,

où $\mathcal{F}_{S,\infty}$ et $\mathcal{F}_{\infty,T}$ sont les tribus formées des $F \in \mathcal{F}_{\infty,\infty}$ tels que $F \cap \{S \leq m\} \in \mathcal{F}_{m,\infty}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, resp. $F \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_{\infty,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, si nous désignons par $\mathcal{F}_{S,T}$ la tribu formée des $F \in \mathcal{F}_{\infty,\infty}$ tels que $F \cap \{(S,T) \prec (m,n)\} \in \mathcal{F}_{m,n}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, nous avons

(2) $$E\{M_{\infty,\infty}|\mathcal{F}_{S,T}\} = M_{S,T}.$$

Cela étant établi, écrivons, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$M_{i,j}^{D_{S_n,S_n}} = M_{S_n\wedge i,\infty} + M_{\infty,S_n\wedge j} - M_{S_n\wedge i,S_n\wedge j}.$$

En raison de (1) et (2), nous voyons que la martingale $M^{D_{S_n,S_n}}$ est uniformément intégrable et que

$$M_{\infty,\infty}^{D_{S_n,S_n}} = M_{S_n,\infty} + M_{\infty,S_n} - M_{S_n,S_n} .$$

Mais encore en vertu de (1) et (2), chacun des trois termes du deuxième membre converge dans L^1 vers $M_{\infty,\infty}$, quand $n\to\infty$, donc aussi $M_{\infty,\infty}^{D_{S_n,S_n}}$. Nous pouvons en outre écrire, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$M_{i,j}^{D_n^+} = M^{A'}_{S_n\wedge i,\infty} - M^{A'}_{S_{n-1}\wedge i,\infty} + M^{A''}_{\infty,S_n\wedge j} - M^{A''}_{\infty,S_{n-1}\wedge j} ,$$

d'où nous déduisons que $M^{D_n^+}$ est uniformément intégrable, $M^{A'}$ et $M^{A''}$ l'étant, et que $M_{\infty,\infty}^{D_n^+}$ converge dans L^1 vers 0, quand $n\to\infty$, puisque cette v.a. est la somme de $M^{A'}_{S_n,\infty} - M^{A'}_{S_{n-1},\infty}$ et $M^{A''}_{\infty,S_n} - M^{A''}_{\infty,S_{n-1}}$, qui convergent dans L^1 vers 0, en raison de (1). Pour conclure, il ne reste plus qu'à écrire $M^{D_n} = M^{D_{S_n,S_n}} + M^{D_n^+}$.

Dans le prochain théorème nous ferons l'hypothèse que si A est un ensemble prévisible, la transformée de Burkholder M^A de M par I_A est uniformément intégrable. Cette hypothèse est remplie si la martingale M appartient à H^p, $p > 1$. En effet, d'après les inégalités de Burkholder (cf.[3]),

$$E\{\sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |M^A_{m,n}|^p\} \leqslant c\,E\{(\sum_{(m,n)\in A} d^2_{m,n})^{p/2}\} \leqslant c\,E\{(\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} d^2_{m,n})^{p/2}\},$$

ce qui implique l'intégrabilité uniforme de $M^A_{m,n}$ non seulement par rapport à (m,n), mais aussi par rapport à A. Comme déjà annoncé dans introduction, nous n'avons pas été capables d'établir si l'hypothèse est également satisfaite lorsque M appartient à H^1.

<u>Théorème</u>. Soit $M = \{M_{m,n},(m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ une martingale. Si pour tout ensemble prévisible A la transformée de Burkholder M^A de M par I_A

est uniformément intégrable, alors $M_{m,n}$ converge p.s. vers $M_{\infty,\infty}$, quand $(m,n) \to (\infty,\infty)$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $M^k = M^{R_{k,k}}$. En outre, $\varepsilon > 0$ étant donné, définissons D_n et (S_n,S_n) comme au début du paragraphe, mais en prenant $M - M^k$ à la place de M. En vertu du lemme 1, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon P\{\sup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2,(i,j)\succ(S_n,S_n)} |M_{i,j}-M^k_{i,j}| > \varepsilon\} \leq 9 \sup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} E\{|(M-M^k)^{D_n}_{i,j}|\}.$$

Si $n \geq k$, $(M^k)^{D_n}_{i,j} = M^k_{i,j} = M_{k\wedge i,k\wedge j}$ et donc le supremum du deuxième membre de l'inégalité est égal à $E\{|M^{D_n}_{\infty,\infty} - M_{k,k}|\}$, qui converge vers $E\{|M_{\infty,\infty} - M_{k,k}|\}$, quand $n \to \infty$, en vertu du lemme 2, puisque la condition d'intégrabilité uniforme requise par ce lemme est manifestment remplie par M^k, donc par $M - M^k$. Il s'ensuit que

$$\varepsilon P\{\limsup_{(i,j)\to(\infty,\infty)} |M_{i,j}-M^k_{i,j}| > \varepsilon\} \leq 9 E\{|M_{\infty,\infty}-M_{k,k}|\}.$$

Le deuxième membre convergeant vers 0 quand $k \to \infty$, nous pouvons choisir une suite croissante d'entiers positifs k_n telle que

$$E\{|M_{\infty,\infty}-M_{k_n,k_n}|\} \leq \frac{1}{n^3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par ce choix nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\limsup_{(i,j)\to(\infty,\infty)} |M_{i,j} - M^{k_n}_{i,j}| > \frac{1}{n}\} \leq 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

et le lemme de Borel-Cantelli nous permet d'en déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{(i,j)\to(\infty,\infty)} |M_{i,j} - M^{k_n}_{i,j}| = 0 \text{ p.s.}$$

Ecrivons maintenant

$$|M_{\infty,\infty} - M_{i,j}| \leqslant |M_{\infty,\infty} - M_{k_n,k_n}| + |M_{k_n,k_n} - M_{i,j}^{k_n}| + |M_{i,j}^{k_n} - M_{i,j}|$$

et passons à la limite supérieure. Il résulte que

$$\limsup_{(i,j)\to(\infty,\infty)} |M_{\infty,\infty} - M_{i,j}| \leqslant \limsup_{n\to\infty} |M_{\infty,\infty} - M_{k_n,k_n}| + \limsup_{n\to\infty} \limsup_{(i,j)\to(\infty,\infty)} |M_{i,j}^{k_n} - M_{i,j}|.$$

Le premier terme du deuxième membre est nul p.s., puisque $\{M_{k_n,k_n},\ n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale ordinaire uniformément intégrable et le second terme est nul p.s., par ce que nous avons démontré, donc $M_{i,j}$ converge p.s. vers $M_{\infty,\infty}$, quand $(i,j) \to (\infty,\infty)$, et le théorème est démontré.

L'hypothèse d'intégrabilité uniforme des transformées n'intervient que pour démontrer la convergence dans L^1 de $M_{\infty,\infty}^{D_n}$ vers $M_{\infty,\infty}$. Dans le cas où l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$, cette convergence a lieu sans hypothèses supplémentaires (outre l'intégrabilité uniforme de M). Il apparaît donc que, même dans des problèmes de convergence dans L^1, il peut y avoir une différence de comportement entre les martingales indexées par $\mathbb{N}^2$ et celles indexées par $\mathbb{N}$. Il serait par ailleurs intéressant de savoir si la cause de cette différence est due à l'absence d'intégrabilité uniforme, ou au manque de convergence en probabilité des $M_{\infty,\infty}^{D_n}$, ou aux deux ensemble. N'étant malheureusement pas parvenus à répondre à cette question, il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que si la convergence en probabilité avait lieu, les martingales de la classe (D) convergeraient p.s. (la classe (D) étant définie comme dans le cas où l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$, avec toutefois les régions d'arrêt à la place des temps d'arrêt).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Cairoli et J.B. Walsh: Stochastic integrals in the plane. Acta mathematica, 134, 1975, p. 111-183.

[2] R. Cairoli et J.B. Walsh: Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrsch. 44, 1978, p. 279-306.

[3] Ch. Métraux: Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel. Séminaire de probabilités XII, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 649, p. 170-179.

[4] P.A. Meyer: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 511, p. 245-400.

[5] J.B. Walsh: Martingales with a multi-dimensional parameter and stochastic integrals in the plane. Cours de 3ème cycle, Université de Paris VI, Paris.

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne, Suisse