

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

MARC YOR

Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 78-97

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__78_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROSSISSEMENT D'UNE FILTRATION ET SEMI-MARTINGALES :

FORMULES EXPLICITES.

par I. JEULIN et M. YOR

1) Introduction.

Rappelons le cadre d'une partie de l'étude faite en [7] :
 $(\Omega, \underline{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, $(\underline{F}_t)_t \geq 0$ une filtration croissante de sous-tribus de \underline{F} , vérifiant les conditions habituelles, et $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une variable aléatoire que l'on suppose honnête, i.e. L est la fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel.

On note \underline{G}_∞ la tribu engendrée par \underline{F}_∞ et L , et pour tout t ,

$$\underline{G}_t = \left(A \in \underline{G}_\infty, \exists A_t, A_t' \in \underline{F}_t \text{ et } A = \{A_t \cap (t < L)\} \cup \{A_t' \cap (L \leq t)\} \right)$$

(attention, en [7], cette filtration était notée (\underline{H}_t)).

On a montré en [7] que, si X est une (\underline{F}_t) -semi-martingale, c'est encore une (\underline{G}_t) -semi-martingale. X étant une (\underline{F}_t) -martingale locale, on va donner ici la décomposition canonique de la (\underline{G}_t) -semi-martingale spéciale X , comme somme d'une (\underline{G}_t) -martingale locale et d'un processus (\underline{G}_t) -prévisible à variation bornée.

Précisons, de plus, que l'étude faite ici est indépendante de celle faite en [7], et constitue, en particulier, une nouvelle démonstration du résultat de [7] mentionné ci-dessus.

L'origine du présent travail a été la lecture de l'article [2] de M. BARLOW*, qui construit explicitement, à partir d'une famille de (F_t) -martingales engendrant l'espace des (F_t) -martingales de carré intégrable, une famille de (G_t) -martingales engendrant l'espace des (G_t) -martingales de carré intégrable.

2) Rappels et préliminaires.

On ne fait pour l'instant aucune hypothèse sur L . On note \tilde{Z} (resp. Z) la projection F_t -optionnelle de $1_{[0,L]}$ (resp. $1_{[0,L]}$).

\tilde{Z} est une surmartingale forte régulière; comme en [7], on note $Z = M - A$ la décomposition canonique de la surmartingale continue à droite Z :

A est le processus croissant (F_t) -prévisible intégrable engendrant Z ,
 $M_t = E (A_\infty | F_t)$.

Remarquons que $\tilde{Z}_+ = Z$, $\tilde{Z}_- = Z_- = P\tilde{Z}$;

(on note P_H la projection (F_t) -prévisible du processus H ; PZ sera notée \dot{Z}).

En outre, on a les relations

$$(1) \quad Z - \dot{Z} = \Delta M \qquad (2) \quad \dot{Z} + \Delta A = Z_- .$$

On notera encore \tilde{L} (resp. L^-) la fin de l'ensemble optionnel (resp. prévisible) ($\tilde{Z} = 1$) (resp. ($Z_- = 1$)), et on dira qu'un ensemble aléatoire $H \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ est à gauche de L si H est inclus dans $[0, L]$.

* Voir aussi la remarque 3), en fin du paragraphe 4, pour de nouveaux résultats de M. BARLOW, très voisins de ceux présentés ici.

On a alors la :

Proposition 1 : on a toujours $L^- \leq \tilde{L} \leq L$ et

a) L est la fin d'un ensemble optionnel si, et seulement si, $\tilde{L} = L$ p.s.
(ce qui est aussi équivalent à $\tilde{Z}_L = 1$).

b) L est la fin d'un ensemble $(F_{\underline{t}})$ -prévisible si, et seulement si,
 $L^- = L$ p.s. (ce qui est encore équivalent à $(Z_-)_L = 1$).

Démonstration: l'inégalité $L^- \leq L$ et le point b) ont été démontrés
 en [1] par AZEMA.

En particulier, l'ensemble $(Z_- = 1)$ est à gauche de L, d'où

$$1_{(Z_- = 1)} \leq \tilde{Z} \quad \text{et} \quad (Z_- = 1) \text{ est inclus dans } (\tilde{Z} = 1);$$

On a alors facilement $L^- \leq \tilde{L}$ et $\tilde{Z}_L = 1$.

Considérons alors la mesure m sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ définie par

$$m(H) = E({}^0H_{\tilde{L}}) \quad ({}^0H : \text{projection } (F_{\underline{t}})\text{-optionnelle de } H),$$

et le processus croissant $(F_{\underline{t}})$ -adapté B associé. Le support du processus croissant B contient le graphe de \tilde{L} , par définition de la mesure m; de plus

$$m(\llbracket 0, L \rrbracket) = E(\tilde{Z}_L) = 1;$$

B ne croît donc plus après L, d'où $\tilde{L} \leq L$.

On en déduit alors facilement que $(\tilde{Z} = 1)$ est le plus grand fermé optionnel à gauche de L; en particulier, \tilde{Z}_L vaut 1, d'où l'équivalence des conditions $\tilde{L} = L$ et $\tilde{Z}_L = 1$, et le point a).

Remarques :

a) d'après (2), $(\dot{Z}_L = 1)$ est égal à $(Z_{L-} = 1) \cap (\Delta A_L = 0)$.

$$\text{Or } E (\Delta A_L) = E (\sum_S (\Delta A_S)^2) .$$

$P (\dot{Z}_L = 1) = 1$ veut donc dire : L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -prévisible et la surmartingale Z est régulière.

b) on a $0 \leq \tilde{Z} - Z = {}^o(1 \llbracket L \rrbracket)$ d'où

$${}^o(1 \llbracket L \rrbracket) = 1 \llbracket L \rrbracket (Z = 1) \quad (\tilde{Z} - Z) = 0 .$$

En outre, les ensembles $(Z \neq Z_-)$ et $(\tilde{Z} \neq Z)$ étant optionnels minces, $(Z_L = 1)$ est inclus dans $(Z_{L-} = Z_L = \tilde{Z}_L = 1)$.

En particulier, si $P (Z_L = 1) = 1$, L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -prévisible et les conclusions du a) s'appliquent.

c) si on ne fait aucune hypothèse sur L , on introduit la filtration (\underline{G}_t^-) définie par :

$$\underline{G}_t^- = (B \in \underline{G}_\infty^- , \exists B_t \in \underline{F}_t , B \cap (t < L) = B_t \cap (t < L)) .$$

Lemme 1 : soit H un processus (\underline{G}_t^-) -prévisible. Il existe un processus (\underline{F}_t) -prévisible J tel que :

$$H_t \mathbb{1}_{(t \leq L)} = J_t \mathbb{1}_{(t \leq L)} .$$

Démonstration: la tribu (\underline{G}_t^-) -prévisible est engendrée par

$\{0\} \times A \quad (A \in \underline{G}_0^- = \underline{F}_0)$ et $]t, \infty[\times A \quad (A \in \underline{G}_t^-)$ et il suffit d'établir le résultat pour ces générateurs.

Si $A \in \underline{G}_t^-$, il existe B dans \underline{F}_t tel que $A \cap (t < L) = B \cap (t < L)$.

Si $H = 1_{A \times]t, \infty[}$, il suffit de prendre $J = 1_{B \times]t, \infty[}$.

d) si L est la fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel, la filtration (\underline{G}_t)

définie dans l'introduction est croissante et continue à droite. De plus, on a la représentation suivante des processus (\underline{G}_t) -prévisibles, obtenue par DELLACHERIE et MEYER en [3], avec une démonstration différente:

Lemme 1': soit H un processus (\underline{G}_t) -prévisible. Il existe deux processus (\underline{F}_t) -prévisibles J et K tels que :

$$H_t = J_t \mathbb{1}_{(t \leq L)} + K_t \mathbb{1}_{(L < t)} .$$

Démonstration: comme pour le lemme 1, il suffit de démontrer le résultat pour H de la forme $H = \mathbb{1}_{A \times]t, \infty[}$, avec $A \in \underline{G}_t$;

il existe B et C dans \underline{F}_t tels que :

$$A = \{B \cap (t < L)\} \cup \{C \cap (L \leq t)\} .$$

Notons T_t le (\underline{F}_t) -temps d'arrêt $T_t = \inf (v > t, \tilde{Z}_v = 1)$ et

\mathcal{L}_s le processus (\underline{F}_t) -prévisible (adapté et continu à gauche)

$$\mathcal{L}_s = \sup (v < s, \tilde{Z}_v = 1) .$$

Il suffit alors de prendre $J = \mathbb{1}_{B \times]t, \infty[}$ et

$$K = \mathbb{1}_{B \times]T_t, \infty[} + \mathbb{1}_{C \times]t, \infty[} \mathbb{1}_{(\mathcal{L}_s \leq t)} .$$

e) de la représentation des ensembles (\underline{G}_t^-) -prévisibles sur $\llbracket 0, L \rrbracket$

on déduit facilement que

- pour tout (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt T, il existe un (\underline{F}_t) -temps d'arrêt S tel que $T \wedge L = S \wedge L$;

- les processus (\underline{G}_t^-) -optionnels nuls sur $\llbracket L, +\infty \rrbracket$ sont les processus $U \mathbb{1}_{\llbracket 0, L \llbracket}$ pour U (\underline{F}_t) -optionnel.

Par suite, on a :

Lemme 2 : soit L fin d'un ensemble (F_t) -optionnel;

a) soit X une (G_t^-) -martingale locale arrêtée en L ; alors X est une (G_t^-) -martingale locale.

b) soit Y une (G_t^-) -martingale locale, arrêtée en L. On suppose que Y_L est G_L -mesurable. Alors Y est une (G_t^-) -martingale locale.

Démonstration:

a) on peut supposer, par arrêt, que X est une (G_t^-) -martingale uniformément intégrable. Soient alors $A \in G_s^-$, $A_s \in F_s$ tels que

$$A \cap (s < L) = A_s \cap (s < L) \quad \text{et soit } t > s.$$

$A \cap (s < L)$ est dans G_s^- , tandis que sur $(L \leq s)$, X_t vaut X_L , d'où

$$\begin{aligned} E(X_t; A) &= E(X_t; A \cap (s < L)) + E(X_t; A \cap (L \leq s)) \\ &= E(X_s; A). \end{aligned}$$

b) d'après les remarques précédentes, Y est (G_t^-) -optionnel. G_t^- étant inclus dans G_t^- pour tout t, le résultat est acquis si Y est uniformément intégrable. Sinon, soit (T_n) une suite de (G_t^-) -temps d'arrêt, croissant vers $+\infty$, et réduisant Y.

Soit T'_n un (F_t) -temps d'arrêt tel que $L \wedge T_n = L \wedge T'_n$ et soit $S_n = T'_n$ sur $(T'_n < L)$, $S_n = +\infty$ sinon.

La suite de (G_t^-) -temps d'arrêt (S_n) a les mêmes propriétés que la suite (T_n) .

Des lemmes 1, 1', et 2, on déduit la

Proposition 2 : soit H un processus (G_t^-) -prévisible borné. Alors

$$H_L \mathbb{1}_{(L \leq t)} = \int_0^{t \wedge L} \frac{H_s}{Z_{s-}} dA_s$$

est une (\underline{G}_t^-) -martingale (et une (\underline{G}_t) -martingale si L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel).

Démonstration: il suffit de le démontrer pour $H = 1$. Soit alors

θ un processus (\underline{G}_t^-) -prévisible borné et J (\underline{F}_t) -prévisible tel que

$$\theta_t 1_{(t \leq L)} = J_t 1_{(t \leq L)} .$$

On a vu en [7] , que $P(Z_{L-} = 0) = 0$; dA_{\cdot} est donc portée par $(Z_{\cdot} \neq 0)$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E(\theta_L) &= E(J_L) = E\left(\int_0^{\infty} J_s dA_s\right) = E\left(\int_0^L \frac{J_s}{Z_{s-}} dA_s\right) \\ &= E\left(\int_0^L \frac{\theta_s}{Z_{s-}} dA_s\right) \end{aligned}$$

d'où les résultats annoncés.

On notera A' le processus (3) $A'_t = \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} dA_s$;

d'après la proposition 2, A' est la projection duale (\underline{G}_t^-) -prévisible (et (\underline{G}_t) -prévisible si L est fin d'optionnel) de $1_{(L \leq t)}$ et on

peut donner une nouvelle caractérisation des fins d'ensembles (\underline{F}_t) -prévisibles :

Proposition 3 : les assertions suivantes sont équivalentes :

- L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -prévisible ;
- $Z_{L-} = 1$ p.s. ;
- dA_{\cdot} est portée par $(Z_{\cdot} = 1)$;
- $A_t = A_{t \wedge L}$;
- $1_{(L \leq t)} - A_t$ est une (\underline{G}_t^-) -martingale ;
- $A = A'$.

Remarque : on ne suppose pas, dans l'énoncé de la proposition 3, que L est fin d'un ensemble (F_t) -optionnel. Mais, si l'on fait cette hypothèse, l'assertion

e') $1_{(L \leq t)} - A_t$ est une (G_t) -martingale

équivalent à chacune des assertions a), ..., f) .

Démonstration: l'équivalence des points a), b), c) et d) a été établie par AZEMA en [1]. En outre, la formule (3) montre a) \Rightarrow f) \Rightarrow d) ; la proposition 2 donne l'équivalence de e) et f) .

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

Lemme 3 :

1) Z^C désignant la partie martingale locale continue de Z , on a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\int_0^\cdot 1_{(Z_s = x)} dZ_s^C = 0 .$$

2) Les intégrales $\int_0^\cdot 1_{(Z_{s-} = 0)} dA_s$ et $\int_0^\cdot 1_{(Z_{s-} = 0)} dZ_s$ sont nulles.

Démonstration:

1) Pour tout t de \mathbb{R}_+ , on a

$$\int_0^t 1_{(Z_s = x)} d \langle Z^C, Z^C \rangle_s = \int_{\{x\}} L_t^a da = 0 ,$$

L^a désignant le temps local en a de la semi-martingale Z . Ceci entraîne la première assertion.

2) On procède en plusieurs étapes :

a) la semi-martingale $\int_0^\cdot 1_{(Z_{s-} = 0)} dZ_s$ est continue, car le processus

de ses sauts, à savoir $1_{(Z_{t-} = 0)} \Delta Z_t$ est identiquement nul,

d'après les propriétés de l'annulation d'une surmartingale positive (ici: Z).

b) On a vu dans la démonstration de la Proposition 2 (comme conséquence de [7]), que dA_s est portée par $(Z_s \neq 0)$. L'intégrale

$\int_0^\cdot 1_{(Z_{s-} = 0)} dA_s$ est donc nulle.

c) Utilisant la décomposition $Z = M - A$, on sait, d'après b), que

$\int_0^\cdot 1_{(Z_{s-} = 0)} dZ_s$ est une martingale locale, continue d'après a).

Elle est donc égale à $\int_0^\cdot 1_{(Z_s = 0)} dZ_s^c$, qui est nulle d'après 1).

Nous allons maintenant étudier les propriétés du (\underline{G}_t^-) -temps

d'arrêt L :

Proposition 4 : a) L est un (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt prévisible si, et seulement si, L est un (\underline{F}_t) -temps d'arrêt prévisible.

b) soient $L_1 = L$ sur $(\Delta A_L = 0)$, $L_1 = +\infty$ sur $(\Delta A_L > 0)$

$L_2 = L$ sur $(\Delta A_L > 0)$, $L_2 = +\infty$ sur $(\Delta A_L = 0)$;

L_1 (resp. L_2) est la partie totalement inaccessible (resp. accessible) du (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt L .

En particulier L est totalement inaccessible, et seulement si, pour tout (\underline{F}_t) -temps d'arrêt prévisible T , $P(L = T) = 0$.

c) Si L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel, on peut remplacer la filtration (\underline{G}_t^-) par (\underline{G}_t) dans les points a) et b).

Démonstration:

a) Si L est un (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt prévisible, soit (T_n) une suite de (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt annonçant L . T_n est en fait un (\underline{F}_t) -temps d'arrêt.

b) Les sauts de A sont (\underline{F}_t) -prévisibles; le graphe de L_2 est inclus dans l'ensemble prévisible pour (\underline{F}_t) , et donc pour (\underline{G}_t^-) , mince, ($\Delta A > 0$); L_2 est donc un (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt accessible.

Par contre, si T est un (\underline{G}_t^-) -temps d'arrêt prévisible,

$$\begin{aligned} P(L_1 = T < +\infty) &= P(L = T; \Delta A_L = 0) \\ &= E \left(\int_0^L \frac{1}{Z_{u-}} 1_{(u = T)} \cap (\Delta A_u = 0) dA_u \right) \quad (\text{Proposition 2}) \\ &= E \left(\frac{1}{Z_{T-}} \Delta A_T 1_{(T \leq L)} \cap (\Delta A_T = 0) \right) = 0. \end{aligned}$$

3) Les formules de décomposition avant L .

On ne fait pas ici d'hypothèse sur L (hormis que c'est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, +\infty[$), et on travaille donc avec la filtration (\underline{G}_t^-) . Rappelons que l'on a montré en [7] que, si X est une (\underline{F}_t) -martingale locale, $X_{t \wedge L}$ est une (\underline{G}_t^-) -semi-martingale (spéciale); le théorème suivant permet d'expliciter la décomposition de $X_{t \wedge L}$ (relativement à (\underline{G}_t^-)).

Théorème 1 : soit X une (\underline{F}_t) -martingale locale. On note B la projection duale (\underline{F}_t) -prévisible de $\Delta X_L 1_{(L \leq t)}$ et $C = \langle X, M \rangle + B$.

Alors les processus :

$$(4) \quad \tilde{X}_t = X_t 1_{(t < L)} + \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} (X_{s-} dA_s - d \langle X, M \rangle_s) \quad \text{et}$$

$$(5) \quad \bar{X}_t^L = X_{t \wedge L} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} < 1)} dC_s$$

sont deux (\underline{G}_t^-) -martingales locales.

Il existe, de plus, une constante universelle a , telle que

$$\| \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{G}_t^-)} \leq a \| X \|_{H^1(\underline{F}_t)}$$

En outre, la décomposition canonique de la (\underline{G}_t^-) -semi-martingale spéciale X^L est donnée par $\bar{X}^L + (X^L - \bar{X}^L)$, c'est à dire: \bar{X}^L est une (\underline{G}_t^-) -martingale locale et $(X^L - \bar{X}^L)$ est un processus (\underline{G}_t^-) -prévisible à variation bornée.

Démonstration:

1) D'après le lemme 3, les intégrales qui figurent dans la formule (4) ont bien un sens. Par localisation, on peut supposer:

X appartient à $H^1(\underline{F}_t)$.

Montrons que, pour $H \in \underline{G}_s^-$ et $s < t$, on a $E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s; H) = 0$.

Par définition de \underline{G}_s^- , il existe $H_s \in \underline{F}_s$, tel que

$$H \cap (s < L) = H_s \cap (s < L).$$

On a :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s; H) &= E(\hat{X}_t - \hat{X}_s; H \cap (s < L)) \\ &= E(\hat{X}_t - \hat{X}_s; H_s). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s; H_s) = E\left(X_t Z_t - X_s Z_s + \int_s^t \frac{1_{(u \leq L)}}{Z_{u-}} dD_u; H_s\right)$$

avec $D = X_- \cdot A - \langle X, M \rangle$. Soit :

$$E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s; H_s) = E(X_t Z_t - X_s Z_s + D_t - D_s; H_s)$$

= 0 , par une simple application de la formule d'Ito .

2) Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} \bar{X}_t^L &= X_t^1 \mathbb{1}_{(t < L)} + X_L^1 \mathbb{1}_{(L \leq t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} \mathbb{1}_{(Z_{s-} < 1)} dC_s \\ &= \tilde{X}_t + \left(X_{L-}^1 \mathbb{1}_{(L \leq t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{X_{s-}}{Z_{s-}} dA_s \right) \\ &\quad + \left(\Delta X_L^1 \mathbb{1}_{(L \leq t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} \left(\mathbb{1}_{(Z_{s-} < 1)} dB_s - \mathbb{1}_{(Z_{s-} = 1)} d\langle X, M \rangle_s \right) \right) \end{aligned}$$

La proposition 2, le lemme 4 ci-dessous et la première partie de la démonstration, montrent que l'on vient de décomposer \bar{X}^L en la somme de trois (\underline{G}_t^-) -martingales locales.

3) La constante universelle c qui figure ci-dessous varie de place en place.

$$E \left(\int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} \mathbb{1}_{(Z_{s-} < 1)} |dC_s| \right) = E \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{(Z_{s-} \leq 1)} |dC_s| \right)$$

est majoré par $E \left(\int_0^\infty |d\langle X, M \rangle_s| \right) + E \left(|\Delta X_L| \right)$, donc par

$$E \left(|\Delta X_L| \right) + c \|X\|_{H^1(\underline{F}_.)} \cdot \|M\|_{BMO} \leq c \|X\|_{H^1(\underline{F}_.)}$$

car on sait que $\|M\|_{BMO}$ est majoré par $2\sqrt{3}$ (cf. [5] p.334).

$$(\bar{X}^L)^* \text{ étant majoré par } X^* + \int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} \mathbb{1}_{(Z_{s-} < 1)} |dC_s| ,$$

le théorème 1 est démontré.

Voici le lemme auxiliaire utilisé:

Lemme 4 : a) $\Delta X_L^1 (L \leq t) - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} dB_s$

est une (G_t^-) -martingale locale.

b) $\frac{1}{(Z_- = 1)} \cdot B = - \frac{1}{(Z_- = 1)} \cdot \langle X, M \rangle$.

Démonstration: par localisation, on peut supposer : $X \in H^1(\underline{F}_\cdot)$.

a) On procède comme pour la proposition 2 .

b) Soit (T_n) une suite de (\underline{F}_t) -temps d'arrêt épuisant les sauts de X .
Si H est un processus (\underline{F}_t) -prévisible borné, on a :

$$\begin{aligned} E (H_L \Delta X_L ; Z_{L-} = 1) &= \sum_n E (H_{T_n} \Delta X_{T_n} ; L = T_n, Z_{T_n-} = 1) \\ &= \sum_n E (H_{T_n} \Delta X_{T_n} ; Z_{T_n-} = 1, L \leq T_n) \quad (\text{Proposition 1}) \\ &= \sum_n E (H_{T_n} \Delta X_{T_n} (1 - Z_{T_n}) , Z_{T_n-} = 1) \quad ((Z_- = 1) \subset (\tilde{Z} = 1)) \\ &= - E (\int_0^\infty H_u^1 (Z_{u-} = 1) d [X, Z]_u) . \end{aligned}$$

Or, $[X, Z] = [X, M] - [X, A]$; A étant prévisible, $[X, A]$ est une martingale locale (YOEURP) et la projection duale (\underline{F}_t) -prévisible de $[X, Z]$ est $\langle X, M \rangle$.

Remarque 1 : la formule (5) fournit une nouvelle démonstration des inégalités obtenues par DELLACHERIE et MEYER en [3] . En effet, il est montré en [3] qu'il existe une constante universelle d telle que, pour toute (\underline{F}_t) -semi-martingale X , on ait

$$(*) \quad \| X^L \|_{H^1(\underline{G}_\cdot^-)} \leq d \| X \|_{H^1(\underline{F}_\cdot)} .$$

On remarque aisément que, pour démontrer (*), il suffit de se restreindre aux martingales X de $H^1(\underline{F}_\cdot)$. On a

$$\|x^L\|_{H^1(\underline{G}_t^-)} \leq \|\bar{x}^L\|_{H^1(\underline{G}_t^-)} + \|x^L - \bar{x}^L\|_{H^1(\underline{G}_t^-)}$$

Or, dans l'énoncé du théorème 1, figure une constante universelle a telle que $\|\bar{x}^L\|_{H^1(\underline{G}_t^-)} \leq a \|x\|_{H^1(\underline{F}_t)}$; de plus, dans la démonstration du théorème 1 (partie 3)), on a montré l'existence d'une

constante universelle b , telle que $\|x^L - \bar{x}^L\|_{H^1(\underline{G}_t^-)} \leq b \|x\|_{H^1(\underline{F}_t)}$.

Finalement, on a montré (*).

4) Les formules de décomposition.

On suppose, dans ce paragraphe, que L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel. On conserve les notations du théorème 1 ; on peut alors énoncer le

Théorème 2 : soit X une (\underline{F}_t) -martingale locale. Alors le processus

$$(6) \quad \bar{x}_t = x_t + \int_0^t 1_{(L < s)} \frac{1}{1 - Z_{s-}} dC_s - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} \leq 1)} dC_s$$

est une (\underline{G}_t) -martingale locale. De plus, il existe une constante universelle a telle que :

$$\|\bar{x}\|_{H^1(\underline{G}_t)} \leq a \|x\|_{H^1(\underline{F}_t)} .$$

En outre, la décomposition canonique de la (\underline{G}_t) -semi-martingale spéciale X est donnée par $\bar{x} + (X - \bar{x})$, c'est à dire: \bar{x} est une (\underline{G}_t) -martingale locale et $X - \bar{x}$ un processus (\underline{G}_t) -prévisible à variation bornée.

Démonstration:

1) Par localisation, on peut supposer: $X \in H^1(\underline{F}_.)$

2) L'intégrale

$$\int_0^t (1_{(s \leq L)} 1_{(Z_{s-} < 1)} \frac{1}{Z_{s-}} + 1_{(s > L)} \frac{1}{1 - Z_{s-}}) |dC_s| = K_t$$

est bien définie: $E(K_\infty) = 2 E\left(\int_0^\infty 1_{(Z_{s-} < 1)} |dC_s|\right)$

est majoré par $c \|X\|_{H^1(\underline{F}_.)}$, où c est une constante universelle (voir la démonstration du théorème 1, point 3)).

Il existe donc une constante universelle a telle que $a \|X\|_{H^1(\underline{F}_.)}$ majore $E(\bar{X}^*)$.

Il nous reste donc à démontrer que \bar{X} est une (\underline{G}_t) -martingale locale.

3) Soient alors $s < t$ et $A \in \underline{F}_s$. Calculons $U = E(\bar{X}_t - \bar{X}_s; A)$.

$$\begin{aligned} U &= E\left(1_A \int_s^t 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u\right) \\ &\quad - E\left(1_A \int_s^t 1_{(Z_{u-} < 1) \cap (u \leq L)} \frac{1}{Z_{u-}} dC_u\right) = 0 \end{aligned}$$

(C commute avec la projection (\underline{F}_t) -prévisible).

4) Par une nouvelle localisation, on peut supposer que la martingale locale $Z_- \cdot X + X_- \cdot M$ est une martingale uniformément intégrable.

Compte tenu de 3), il nous suffit de montrer maintenant que

$$V = E(\bar{X}_t - \bar{X}_s; A \cap (L \leq s)) \text{ est nul. Or } V = V_1 + V_2, \text{ où}$$

$$V_1 = E(X_t - X_s; A \cap (L \leq s)) = -E(X_t - X_s; A \cap (s < L))$$

$$V_2 = E\left(1_A \int_s^t 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u; L \leq s\right).$$

Notons $T_s = \inf (v > s, \tilde{Z}_v = 1)$;
 sur $(T_s < +\infty)$, $\tilde{Z}_{T_s} = 1$.

Si $u > s$, $(L \leq s) = (L < u) \cap (T_s \geq u)$ tandis que
 $(s < L \leq t) = (L \leq t) \cap (T_s \leq t)$; d'où

$$\begin{aligned} V_2 &= E \left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} \frac{1}{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u \right) \\ &= E \left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} \frac{1}{(Z_{u-} < 1)} dC_u \right) \\ &= E (C_{T_s \wedge t} - C_s ; A) \quad (\text{d'après le lemme 4}) . \end{aligned}$$

Si l'on remarque que $(s < L \leq T_s \wedge t) = (L = T_s \leq t)$, on peut écrire,

$$V_2 = E (\langle X, M \rangle_{T_s \wedge t} - \langle X, M \rangle_s ; A) + E (\Delta X_L ; L = T_s \leq t ; A) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -V_1 &= E (X_t ; A \cap (t < L)) - E (X_s ; A \cap (s < L)) + E (X_t ; A ; s < L \leq t) \\ &= E (X_t Z_t - X_s Z_s ; A) + E (X_t (1 - Z_t) ; A \cap (T_s \leq t)) . \end{aligned}$$

La formule d'Ito permet d'écrire :

$$X_t Z_t = X_s Z_s + \int_s^t Z_{u-} dX_u + \int_s^t X_{u-} dM_u - \int_s^t X_{u-} dA_u + [X, Z]_t - [X, Z]_s .$$

On peut donc écrire V_1 sous la forme :

$$\begin{aligned} V_1 &= E \left(1_A \int_s^t X_{u-} dA_u \right) - E (\langle X, M \rangle_t - \langle X, M \rangle_s ; A) \\ &\quad - E (X_{T_s} (1 - Z_{T_s}) ; A \cap (T_s \leq t)) - E \left(\int_{T_s}^t X_{u-} dA_u ; A \cap (T_s \leq t) \right) \\ &\quad + E (\langle X, M \rangle_t - \langle X, M \rangle_{T_s} ; A \cap (T_s \leq t)) , \quad \text{soit :} \end{aligned}$$

$$V_1 = E \left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} X_{u-} dA_u \right) - E \left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} d \langle X, M \rangle_u \right) \\ - E \left(X_{T_s} (\tilde{Z}_{T_s} - Z_{T_s}) ; A \cap (T_s \leq t) \right)$$

$$V_1 = E \left(X_{L-} ; A \cap (s < L \leq T_s \wedge t) \right) - E \left(X_L ; A \cap (L = T_s \leq t) \right) \\ - E \left(\langle X, M \rangle_{T_s \wedge t} - \langle X, M \rangle_s ; A \right). \quad (8)$$

En comparant (7) et (8), on obtient $V = V_1 + V_2 = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Remarques

1) si L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -prévisible, $Z_{L-} = 1$ p.s. ;

1) $\cdot B$ est donc nul et on peut remplacer C par $\langle X, M \rangle$ dans la $(Z_{<1})$

formule (6).

2) La formule (6) fournit une nouvelle démonstration des inégalités obtenues en [3] par DELLACHERIE et MEYER (voir la remarque 1 du paragraphe 3).

3) Dans son travail ([2]), M. BARLOW suppose, outre le fait que L est fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -optionnel, que

- toute (\underline{F}_t) -martingale est continue ;

- pour tout (\underline{F}_t) -temps d'arrêt T , $P(L = T) = 0$.

L est alors en fait fin d'un ensemble (\underline{F}_t) -prévisible et l'expression de \bar{X} est

$$(6') \quad \bar{X}_t = X_t + \int_0^t \left(1_{(L < s)} \frac{1}{1 - Z_s} - 1_{(s \leq L, Z_s < 1)} \frac{1}{Z_s} \right) d \langle X, M \rangle_s$$

4) Une fois cet article achevé, nous avons reçu un nouveau travail de M. BARLOW, intitulé :

Study of a filtration expanded to include an honest time,

où l'auteur obtient, entre autres résultats, l'analogue de notre théorème 2, pour les (F_t) -martingales de carré intégrable. Ceci est une légère restriction par rapport à notre énoncé, valable pour les martingales locales, mais M. Barlow obtient le résultat supplémentaire :

$$E \left((\bar{X})_{\infty}^2 \right) \leq E \left(X_{\infty}^2 \right) ,$$

montrant ainsi que l'application linéaire : $X \rightarrow \bar{X}$ est continue de $H^2(F_t)$ dans $H^2(G_t)$.

Nous allons tirer de la confrontation de ce résultat et du nôtre, par interpolation, d'autres inégalités :

dans la suite, on identifie une martingale uniformément intégrable à la variable terminale. Notons T l'application :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{loc}(F_t) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{loc}(G_t) \\ X & \longrightarrow & \bar{X} \end{array}$$

D'après notre théorème 2, il existe une constante universelle a telle pour toute (F_t) -martingale X de $H^1(F_t)$, on ait

$$\|TX\|_{L^1(G_{\infty})} \leq \|TX\|_{H^1(G_t)} \leq a \|X\|_{H^1(F_t)}$$

D'après les inégalités de Hölder et de Doob, on a , pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|TX\|_{L^1(G_{\infty})} \leq a_{\varepsilon} \|X\|_{L^{1+\varepsilon}(F_{\infty})} .$$

D'autre part, d'après le résultat de BARLOW, on a

$$\|TX\|_{L^2(G_{\infty})} \leq \|X\|_{L^2(F_{\infty})} .$$

Soit $\theta \in]0,1[$, et $\varepsilon > 0$.

$$\text{Posons } \frac{1}{p_{\varepsilon}(\theta)} = \frac{1-\theta}{1+\varepsilon} + \frac{\theta}{2} , \text{ et } \frac{1}{q(\theta)} = (1-\theta) + \frac{\theta}{2} .$$

Lorsque θ décrit l'intervalle $]0,1[$, $q(\theta)$ décrit l'intervalle $]1,2[$. Fixons $\theta \in]0,1[$. Lorsque ε décrit $]0,1[$, $p_\varepsilon(\theta)$ décrit l'intervalle $]q(\theta),2[$.

D'après les deux dernières inégalités écrites, et le théorème d'interpolation de RIESZ-THORIN (cf, par exemple, [8], p.261), on a, pour tout θ de $]0,1[$, et $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\|TX\|_{L^{q(\theta)}(\underline{G}_\infty)} \leq C_{\theta,\varepsilon} \|X\|_{L^{p_\varepsilon(\theta)}(\underline{F}_\infty)},$$

avec $C_{\theta,\varepsilon}$ constante universelle.

D'après les remarques faites sur les intervalles de variation de $q(\theta)$ et $p_\varepsilon(\theta)$, on a, pour tout couple (p,q) tel que $1 < q < p < 2$:

$$\|TX\|_{L^q(\underline{G}_\infty)} \leq C'_{p,q} \|X\|_{L^p(\underline{F}_\infty)}, \quad \text{ou encore}$$

$$\|TX\|_{H^q(\underline{G}_\infty)} \leq C''_{p,q} \|X\|_{H^p(\underline{F}_\infty)}.$$

avec $C'_{p,q}$ et $C''_{p,q}$ des constantes universelles.

La question naturelle qui se pose alors est : T est-elle continue de $H^p(\underline{F}_\infty)$ dans $H^p(\underline{G}_\infty)$, pour $1 < p < 2$? En général, nous ne savons pas y répondre.

Références :

- [1] AZEMA J. : Quelques applications de la théorie générale des processus, I
Inventiones math., Vol.18, 1972.
- [2] BARLOW M. : Martingale representation with respect to expanded
 σ -fields (à paraître, 1977)
- [3] DELLACHERIE C. et MEYER P.A. : A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus (dans ce volume).
- [4] MEYER P.A. : Résultats d'Azéma en théorie générale des processus.
Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in Math.321
Springer Verlag 1973.

- [5] MEYER P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, 1976 .
- [6] YOEURP CH. : Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, 1976 .
- [7] YOR M. : Grossissement d'une filtration et semi-martingales: théorèmes généraux.(dans ce volume).
- [8] BOURBAKI N. : Intégration (XIII) Hermann.

T.Jeulin et M.Yor

Laboratoire de Calcul des Probabilités

Tour 46, 3^e Etage,

2, Place Jussieu

75230 Paris Cedex 05 .