

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BROSSARD

**Comportement non-tangential et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 12 (1978), p. 378-397

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1978\\_\\_12\\_\\_378\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__378_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT "NON-TANGENTIEL" ET  
COMPORTEMENT "BROWNIEN" DES FONCTIONS  
HARMONIQUES DANS UN DEMI-ESPACE. DEMONSTRATION  
PROBABILISTE D'UN THEOREME DE CALDERON ET STEIN.

par Jean BROSSARD

En 1950 Calderon ([1] et [2]) et en 1961 Stein ([1]) démontraient que pour une fonction  $u$  harmonique dans un demi-espace  $\Pi = \mathbb{R}^{\nu} \times \mathbb{R}_+^*$ , les trois conditions suivantes étaient équivalentes en presque tout point  $\vartheta$  de la frontière :

- $u$  admet une limite "non-tangentielle" en  $\vartheta$
- $u$  est bornée "non-tangentiellement" au voisinage de  $\vartheta$
- le gradient de  $u$ ,  $\nabla u$ , est de carré intégrable "non-tangentiellement" au voisinage de  $\vartheta$ , pour la mesure  $y^{1-\nu} dx dy$  (où  $dx$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{\nu}$  et  $dy$  celle de  $\mathbb{R}_+^*$ ).

Mon but est ici, de montrer ce théorème par des méthodes probabilistes. Pour cela, je vais m'appuyer sur le résultat suivant : si  $X_t$  désigne la position de la particule brownienne à l'instant  $t$ , les propriétés suivantes sont presque sûrement équivalentes :

- $u(X_t)$  admet une limite quand  $t$  tend vers  $\tau$  (temps de sortie de  $\Pi$ )
- $u(X_t)$  est bornée sur  $[0, \tau[$
- $\int_0^{\tau} \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$  est fini.

Dans le cas  $\nu = 1$ , c'est-à-dire dans le cas du demi-plan, il est connu (Brelot et Doob [1], Doob [1]) que l'existence d'une limite non-tangentielle pour  $u$  équivaut presque partout à l'existence d'une limite sur les trajectoires browniennes. Cependant, ce résultat n'est plus valable dès que la dimension de l'espace est supérieure à 2 ( $\nu > 1$ ), comme l'a montré un contre-exemple de Burkholder et Gundy ([1]) : on peut trouver dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$  une fonction harmonique ayant presque-sûrement des limites sur les trajectoires browniennes, mais n'ayant nulle part de limite non-tangentielle. Malgré cela, je vais montrer que le théorème de Calderon et Stein sur le "comportement non-tangentiel de  $u$  (th. I) peut se déduire du théorème analogue sur le "comportement brownien" de  $u$  (th. I\*).

#### 1. LE THEOREME DE CALDERON ET STEIN ET SON ANALOGUE PROBABILISTE.

---

Introduisons tout d'abord quelques notations. Quand on notera un point de  $\Pi = \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}_+^*$  sous la forme  $(x, y)$ ,  $x$  représentera la coordonnée dans  $\mathbb{R}^\nu$  et  $y$  la coordonnée dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Si  $\vartheta$  est un point de  $\mathbb{R}^\nu$  (identifié à la frontière de  $\Pi$ ), et  $a$  un nombre strictement positif, on notera  $\Gamma_a(\vartheta)$  le cône tronqué défini par :

$$\Gamma_a(\vartheta) = \{(x, y) \in \Pi \mid \|x - \vartheta\| < ay < a\}.$$

A la fonction  $u$ , on peut associer les deux fonctions de  $\mathbb{R}^\nu$  définies par :

$$N_a(\vartheta) = \sup_{z \in \Gamma_a(\vartheta)} |u(z)|$$

$$A_a(\vartheta) = \left[ \int_{\Gamma_a(\vartheta)} \|\nabla u(x, y)\|^2 y^{1-\nu} dx dy \right]^{1/2}.$$

On appelle  $\mathcal{L}_a$  l'ensemble des points  $\vartheta$  de  $\mathbb{R}^\nu$  pour lesquels  $u(z)$  admet une limite quand  $z$  tend vers  $\vartheta$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ . On appelle  $\mathcal{N}_a$  (resp.  $\mathcal{C}_a$ ) l'ensemble des points où  $N_a$  (resp.  $A_a$ ) est finie. Avec ces notations, le théorème de Calderon et Stein s'énonce :

THEOREME I. - Les ensembles  $\mathcal{L}_a, \eta_a, \mathcal{Q}_a$  ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle et sont indépendants de  $a$  (à des ensembles de mesure nulle près).

Introduisons maintenant des notations analogues à celles d'analyse pour énoncer le théorème probabiliste analogue au théorème de Calderon et Stein.

Si  $X_t$  est la position de la particule brownienne à un instant  $t$  strictement inférieur à  $\tau$  (temps de sortie de  $\Pi$ ), on peut considérer les deux variables aléatoires

$$N^* = \sup_{t \in [0, \tau[} u(X_t)$$

et 
$$A^* = \int_0^\tau \|\nabla u(X_t)\|^2 dt .$$

Il est connu que  $[u(X_t)]_{t < \tau}$  est un mouvement brownien stoppé à l'instant  $A^*$  et changé de temps. Les trois événements

$$\mathcal{L}^{**} = \{u(X_t) \text{ admet une limite finie quand } t \text{ tend vers } \tau\} ,$$

$$\eta^{**} = \{N^* < \infty\} ,$$

$$\mathcal{Q}^{**} = \{A^* < \infty\}$$

ne diffèrent donc que par des événements  $P^z$ -négligeables (où  $P^z$  désigne la loi de probabilité du mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^{\nu+1}$  issu d'un point  $z$  de  $\Pi$ ). [Ce résultat est aussi montré dans Brossard [1]].

C'est en fait la "forme conditionnée" de ce résultat que je vais utiliser (théorème I\*). Pour cela, considérons  $\wp P^z$ , probabilité du mouvement brownien issu de  $z$  et conditionné par sa sortie de  $\Pi$  en  $\wp$ . Autrement dit, considérons le  $h$ -processus tel qu'il est défini par Doob dans [1],  $h$  étant la fonction minimale associée au point  $\wp$ , c'est-à-dire :

$$p_\wp(x, y) = c_\nu \frac{y}{(\|x-\wp\|^2 + y^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad \text{avec} \quad c_\nu = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}} .$$

Identifions les événements "naturels" du h-processus aux événements "naturels" du mouvement brownien tué à l'instant  $\tau$ . Les propriétés suivantes découlent alors de l'article de Doob [1] :

- i) si  $A$  est un événement "naturel",  $\vartheta \mapsto \vartheta P^z(A)$  est une fonction borélienne dont la composée avec  $X_\tau$  est égale à  $E^z[A|X_\tau]$ .
- ii) Si  $\sigma$  est un temps d'arrêt pour la famille naturelle de tribus rendue continue à droite, et si  $A$  est dans la tribu du passé de  $\sigma$ , alors :
- $$\vartheta E^z[A; \sigma < \tau] = \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[A; p_\vartheta(X_\sigma); \sigma < \tau] .$$
- iii) Les fonctions  $\vartheta \mapsto \vartheta P^z(\mathfrak{L}^{**})$ ,  $\vartheta \mapsto \vartheta P^z(\eta^{**})$ ,  $\vartheta \mapsto \vartheta P^z(\mathfrak{Q}^{**})$  prennent pour valeur 0 ou 1, indépendamment de  $z$  et sont donc les fonctions caractéristiques de trois boréliens  $\mathfrak{L}^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\mathfrak{Q}^*$  de  $\mathbb{R}^V$ . Si de plus  $\vartheta$  est dans  $\mathfrak{L}^*$ , la variable aléatoire  $\lim_{t \rightarrow \tau} u(X_t)$  est  $\vartheta P^z$ -presque sûrement constante.

Ces propriétés et les remarques faites plus haut nous permettent d'énoncer le théorème  $I^*$  :

THEOREME  $I^*$ . - Les ensembles  $\mathfrak{L}^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\mathfrak{Q}^*$  ne diffèrent que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

## 2. DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE DU THEOREME I (COMPARAISON DES ENSEMBLES $\mathfrak{L}_a$ et $\eta_a$ ).

---

Dans ce paragraphe, je vais montrer que  $\mathfrak{L}_a$  et  $\eta_a$  ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle et sont indépendants de  $a$ , à des ensembles de mesure nulle près.

Appelons  $\mathfrak{L}$  (resp.  $\eta$ ) l'intersection des  $\mathfrak{L}_a$  (resp.  $\eta_a$ ) quand  $a$  parcourt  $\mathbb{R}_+^*$ . Les inclusions de  $\mathfrak{L}$  dans  $\mathfrak{L}_a$  et de  $\mathfrak{L}_a$  dans  $\eta_a$  étant évidentes, il ne reste plus qu'à montrer "l'inclusion" de  $\eta_a$  dans  $\mathfrak{L}$ . (On écrira désormais "inclusion" (ou "égalité") entre guillemets à la place de : inclusion (ou égalité) à un ensemble de mesure nulle près).

Soit  $E_n = \{\vartheta \in \mathbb{R}^V \mid N_a(\vartheta) \leq n\}$ . Comme  $\eta_a$  est la réunion des  $E_n$ , il suffit de montrer "l'inclusion" de  $E_n$  dans  $\mathfrak{L}$ . Je vais d'abord montrer (sans faire appel à la théorie du potentiel) que  $E_n$  est inclus dans  $\eta^*$ . Comme  $N^*$  est majoré par  $n$  pour les trajectoires qui restent dans  $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_a(\vartheta)$ , et comme  $\vartheta P^Z[N^* < \infty]$  vaut 0 ou 1 (propriété i), § 1), c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit  $E$  un borélien de  $\mathbb{R}^V$ ,  $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$  et  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_E$ .

Pour presque tout point  $\vartheta$  de  $E$  et tout  $z$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ ,  $\vartheta P^Z[\sigma = \tau]$  est strictement positif.

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 4. Achéons de montrer "l'inclusion" de  $E_n$  dans  $\mathfrak{L}$ . Presque tout point  $\vartheta$  de  $E_n$  est dans  $\eta^*$  d'après ce qu'on vient de voir, donc dans  $\mathfrak{L}^*$  d'après le théorème I\*. Et donc quand  $t$  tend vers  $\tau$ ,  $u(X_t)$  admet une limite  $\vartheta P^Z$ -presque-sûrement constante de valeur notée  $u(\vartheta)$ . La proposition 1 implique :  $|u(\vartheta)| \leq n$ .

Soit  $v$  la fonction harmonique bornée dans  $\Pi$  définie par :

$$v(z) = E^Z[u(X_\tau) ; X_\tau \in E_n] .$$

Je vais montrer que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E_n$ , pour tout nombre  $b$  strictement positif,  $u(z) - v(z)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\vartheta$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ . Ceci montrera que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E_n$  et tout  $b > 0$ ,  $u(z)$  admet une limite finie quand  $z$  tend vers  $\vartheta$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ , puisque tel est le cas de  $v(z)$ . Ceci achèvera donc de montrer

"l'inclusion" de  $E_n$  dans  $\mathfrak{L}$ .

Soit  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_{E_n}$ . Comme  $E_n$  est fermé, si  $\sigma = \tau$ ,  $X_\sigma$  est dans  $E_n$  et donc :

$$u(z) - v(z) = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma)] = E^z[u(X_\sigma) - v(X_\sigma) ; \sigma \neq \tau]$$

puisque  $u$  et  $v$  ont même valeur sur  $E_n$ . Et donc si  $z$  est dans  $\Omega_{E_n}$  :

$$|u(z) - v(z)| \leq 2nP^z[\sigma \neq \tau] .$$

Il suffit maintenant de montrer que  $P^z[\sigma \neq \tau]$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\vartheta$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$  (cela montrera en effet, que si  $z$  est suffisamment proche de  $\vartheta$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ , il est dans  $\Omega_{E_n}$  et donc que la majoration de  $|u(z) - v(z)|$  est valable). Reprenons ici une idée de Calderon : posons

$$\Lambda_1 = \{(x, y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y < 1\} \text{ et } \Lambda_2 = \{(x, y) \in \Pi - \Omega_{E_n} \mid y \geq 1\} .$$

Alors :

$$P^z[\sigma \neq \tau] = P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] + P^z[X_\sigma \in \Lambda_2] .$$

Le deuxième terme tend vers 0, car il est majoré par la  $P^z$ -probabilité que la particule sorte de la bande  $\{(x, y) \in \Pi \mid 0 < y < 1\}$  par l'hyperplan  $y = 1$  et que cette probabilité est égale à l'ordonnée de  $z$ .

Pour majorer le premier terme, utilisons le fait que si  $z' = (x', y')$  est un point de  $\Pi$ , et  $B_{z'}$  la boule de  $\mathbb{R}^V$  de centre  $x'$  et de rayon  $ay'$ , alors  $P^{z'}[X_\tau \in B_{z'}]$  est une constante  $C$  indépendante de  $z'$ .

Si de plus  $z'$  est dans  $\Lambda_1$ ,  $B_{z'}$  est incluse dans  $E_n^C$  et donc  $P^{z'}[X_\tau \notin E_n] \geq C$ . La propriété de Markov forte, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P^z[X_\tau \notin E_n] &\geq P^z[X_\sigma \in \Lambda_1 ; P^{X_\sigma}[X_\tau \notin E_n]] \\ &\geq C \cdot P^z[X_\sigma \in \Lambda_1] . \end{aligned}$$

Pour presque tout  $\vartheta$  de  $E_n$  et tout  $b > 0$ , le membre de gauche tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\vartheta$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ . Il en est donc de même de  $P^z[X_\sigma \in \Lambda_1]$ , ce qui achève la démonstration.

En conclusion, nous avons montré dans ce paragraphe (en admettant provisoirement la proposition 1) que les ensembles  $\mathfrak{L}_a$ ,  $\eta_a$ ,  $\mathfrak{L}$  étaient "égaux". Ceci montre bien la partie (due à Calderon) du théorème I relative aux ensembles  $\mathfrak{L}_a$  et  $\eta_a$ .

### 3. DEMONSTRATION DE LA DEUXIEME PARTIE DU THEOREME I ("EGALITE" DE $\eta_a$ ET $\mathfrak{Q}_a$ ).

---

Pour achever la démonstration du théorème I, il ne reste plus qu'à montrer que  $\mathfrak{Q}_a$  et  $\eta_a$  ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. Comme on a vu que  $\eta_a$  ne dépendait pas de  $a$ , à un ensemble de mesure nulle près (§ 2), il suffit de montrer les "inclusions" de  $\mathfrak{Q}_a$  dans  $\eta_{\frac{a}{2}}$  et de  $\eta_{2a}$  dans  $\mathfrak{Q}_a$  (propositions 2 et 3).

PROPOSITION 2. - A un ensemble de mesure nulle près,  $\mathfrak{Q}_a$  est inclus dans  $\eta_{\frac{a}{2}}$ .

Pour démontrer cette proposition, nous allons d'abord montrer "l'inclusion" de  $\mathfrak{Q}_a$  dans  $\mathfrak{Q}^*$ . Cela s'appuie sur le lemme simple suivant :

LEMME 1. - Soit E un borélien de  $\mathbb{R}^v$  et  $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$ .  
Alors :

$$\int_E A_a^2(\vartheta) d\vartheta = k_v a^v \int_{\Omega_E} \varphi_E(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

où  $\varphi_E(x, y)$  désigne la moyenne de la fonction caractéristique de E sur la boule  $B_{x, ay}$  de centre x et de rayon ay, et  $k_v$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^v$ .

Je ne démontrerai pas ce lemme qui est une simple application du théorème de Fubini (cf. Stein [1]).

Considérons maintenant  $E_p = \{\vartheta \in \mathbb{R}^v \mid \|\vartheta\| \leq p ; A_a^2(\vartheta) \leq p\}$  et  $E_{p,n} = \left\{ \vartheta \in E_p \mid \forall y \leq \frac{1}{n}, \varphi_{E_p}(\vartheta, y) \geq \frac{1}{2} \right\}$  (où  $\varphi_{E_p}$  est la fonction définie dans le lemme 1). Presque tout point  $\vartheta$  de  $E_p$  est point de densité de  $E_p$ , c'est-à-dire que  $\varphi_{E_p}(\vartheta, y)$  tend vers 1 quand  $y$  tend vers 0.

$E_p - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{p,n}$  est donc un ensemble de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que pour tout couple  $(p, n)$ ,  $E_{p,n}$  est "inclus" dans  $\mathcal{Q}^*$ . Remarquons que  $E_{p,n}$  est compact. Notons  $\Omega_{E_p} = \bigcup_{\vartheta \in E_p} \Gamma_a(\vartheta)$  et définissons  $\Omega_{E_{p,n}}$  de façon identique. Soit  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_{E_{p,n}}$ .

■ Majorons  $E^{z_0}[A_\sigma^*]$  pour  $z_0 = (x_0, y_0)$  fixé dans  $\Pi$  (on pose  $A_\sigma^* = \int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt$ ) :

$$E^{z_0}[A_\sigma^*] = E^{z_0} \left[ \int_0^\sigma \|\nabla u(X_t)\|^2 dt \right] \leq E^{z_0} \left[ \int_0^\tau \|\nabla u(X_s)\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}(X_s) ds \right].$$

Cette dernière quantité est (à une constante multiplicative près) la valeur en  $z_0$  du potentiel de Green de la fonction  $\|\nabla u\|^2 \chi_{\Omega_{E_{p,n}}}$ , c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega_{E_{p,n}}} h_{z_0}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

où  $h_z(z')$  désigne la fonction de Green de  $\Pi$ . (cf. par exemple Dynkin [1] vol. II).

Cette intégrale se décompose en la somme de l'intégrale sur  $\Lambda = \left\{ (x, y) \in \Omega_{E_{p,n}} \mid y \leq \min\left(\frac{1}{n}, \frac{y_0}{2}\right) \right\}$  et de l'intégrale sur  $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$ .

Cette dernière est finie car  $\Omega_{E_{p,n}} - \Lambda$  est relativement compact et la fonction à intégrer localement intégrable. D'autre part, comme :

$$h_{z_0}(z) = \begin{cases} \log \frac{r_2}{r_1} & \text{si } v = 1 \\ \frac{1}{r_1^{v-1}} - \frac{1}{r_2^{v-1}} & \text{si } v > 1 \end{cases}$$

(où  $r_1$  et  $r_2$  désignent les distances de  $z$  à  $z_0$  et au symétrique de  $z_0$  par rapport à la frontière de  $\Pi$ ), il est facile de voir que sur  $\Lambda$ ,  $h_{z_0}(x, y)$  est majoré par une fonction du type  $ky$ . Et donc à une constante multiplicative près,  $\int_\Lambda h_{z_0}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$  est majoré par :

$$\int_{\Lambda} y \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

et donc par :

$$2 \int_{\Omega_{E_p}} y \varphi_{E_p}(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy$$

puisque sur  $\Lambda$ ,  $\varphi_{E_p}(x, y) \geq \frac{1}{2}$  et que  $\Lambda$  est inclus dans  $\Omega_{E_p}$ . Cette dernière intégrale est finie d'après le lemme 1 et la définition de  $E_p$ . Ceci achève de montrer que  $E^{z_0}[A_{\sigma}^*]$  est fini pour tout  $z_0$  de  $\Pi$ .

■ De ce qui précède, on peut déduire que  $A_{\sigma}^*$  est fini  $P^Z$ -presque sûrement pour tout  $z$  de  $\Pi$ , et donc en "conditionnant" ce résultat, que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E_{p,n}$ , pour tout  $z$  à coordonnées rationnelles,  $A_{\sigma}^*$  est fini  $\vartheta P^Z$ -presque sûrement. En utilisant la proposition 1, et le fait que  $\vartheta P^Z[A_{\tau}^* < \infty]$  vaut 0 ou 1 indépendamment de  $z$ , on en déduit que presque tout point de  $E_{p,n}$  est dans  $\mathcal{Q}^*$ . Ceci achève donc de montrer "l'inclusion" de  $\mathcal{Q}_a$  dans  $\mathcal{Q}^*$ .

Avant de terminer la démonstration de la proposition 2, montrons le lemme suivant (dû à Stein).

LEMME 2. - Soit  $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta) = \{(x, y) \in \Pi \mid \|x - \vartheta\| < \frac{a}{2}, y < \frac{a}{4}\}$ .  $\Pi$

existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\vartheta$  :

$$\sup_{(x, y) \in \Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)} y \|\nabla u(x, y)\| \leq C A_a(\vartheta).$$

Démonstration : soit  $(x, y)$  un point de  $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$  et  $B$  la boule de centre  $(x, y)$  tangente à la frontière de  $\Gamma_a(\vartheta)$ . Si  $(x', y')$  est dans  $B$ , et si  $r$  est le rayon de  $B$ ,  $y', y$  et  $r$  sont des grandeurs comparables (leurs rapports deux à deux sont majorés par une constante ne dépendant que de  $a$ ). Cette remarque jointe à la sous-harmonicité de  $\|\nabla u\|^2$  conduit à :

$$\begin{aligned}
 y^2 \|\nabla u(x, y)\|^2 &\leq y^2 \frac{1}{|B|} \int_B \|\nabla u(x', y')\|^2 dx' dy' \\
 &\leq C \int_B y'^{1-\nu} \|\nabla u(x', y')\|^2 dx' dy' \\
 &\leq CA_a^2(\vartheta)
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché.

Démonstration de la proposition 2 :

Comme  $\mathcal{Q}_a$  est "inclus" dans  $\mathcal{Q}^*$  (et donc dans  $\eta^*$ , d'après le théorème 1\*), il suffit de montrer que tout point  $\vartheta$  de  $\mathcal{Q}_a \cap \eta^*$  est dans  $\eta_{\frac{a}{2}}$ . Soit donc  $\vartheta$  un tel point et  $z_0$  le point  $(\vartheta, 1)$ . Soit, pour  $y$  strictement inférieur à  $\frac{1}{2}$ ,  $S_y$  l'ensemble des points de  $\Gamma'_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$  d'ordonnée  $y$ . D'après le lemme 2, pour tout couple  $(z_1, z_2)$  de points de  $S_y$  :

$$\begin{aligned}
 |u(z_1) - u(z_2)| &\leq \text{diam}(S_y) \cdot \sup_{z \in S_y} \|\nabla u(z)\| \\
 &\leq C \frac{a}{2} y \cdot \frac{A_a(\vartheta)}{y} = \tilde{C} \frac{a}{2} A_a(\vartheta) .
 \end{aligned}$$

Mais d'autre part, si  $\tau_y$  désigne le temps de sortie de  $\Pi_y = \{(x', y') \in \Pi \mid y' > y\}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \vartheta_P^{z_0} [X_{\tau_y} \in S_y] &= \frac{1}{p_{\vartheta}(z_0)} E^{z_0} [p_{\vartheta}(X_{\tau_y}); X_{\tau_y} \in S_y] \\
 &= \frac{1}{p_{\vartheta}(z_0)} \int_{B_{\vartheta, \frac{ay}{2}}} p_{\vartheta}(x', y) \frac{C_{\nu}(1-y)}{[(1-y)^2 + \|x' - \vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} dx'
 \end{aligned}$$

où  $B_{\vartheta, \frac{ay}{2}}$  désigne la boule de  $\mathbb{R}^{\nu}$  de centre  $\vartheta$  et de rayon  $\frac{ay}{2}$ .

En tenant compte du fait que  $y$  est dans  $]0, \frac{1}{2}[$ , et que  $z_0 = (\vartheta, 1)$  :

$$\begin{aligned} \vartheta_P^z \circ [X_{\tau_y} \in S_y] &\geq \frac{1}{2} \int_B p_{\vartheta}(x', y) \frac{dx'}{\left[1 + \frac{a^2 y^2}{4}\right]^{\frac{\nu+1}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{a^2}{16}} \right]^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B p_{\vartheta}(x', y) dx' . \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale vaut  $\int_B p_{\vartheta}(x', 1) dx'$  et ne dépend donc que de  $\vartheta, \frac{a}{2}$ .  
 $\vartheta_P^z \circ [X_{\tau_y} \in S_y]$  est donc minorée indépendamment de  $y$  par une constante  $C(a)$  strictement positive.

Comme  $\vartheta$  est dans  $\eta^*$ , on peut trouver un nombre  $M$  tel que :

$$\vartheta_P^z \circ [u_{\tau}^* \geq M] \leq \frac{C(a)}{2}$$

et donc tel que pour tout  $y \leq \frac{1}{2}$  :

$$\vartheta_P^z \circ [ |u(X_{\tau_y})| < M \text{ et } X_{\tau_y} \in S_y ] \geq \frac{C(a)}{2} .$$

Pour tout  $y < \frac{1}{2}$ , on peut donc trouver un point  $z_1$  dans  $S_y$  tel que  $|u(z_1)| < M$ . Et donc puisque sur  $S_y$  l'oscillation de  $u$  est majorée par  $C \frac{a}{2} A_a(\vartheta)$ , pour tout  $z$  de  $\Gamma_{\frac{a}{2}}(\vartheta)$  on a :

$$|u(z)| \leq M + \frac{a}{2} C A_a(\vartheta) .$$

Ceci montre que  $\vartheta$  est dans  $\eta_{\frac{a}{2}}$ .

**PROPOSITION 3.** - A un ensemble de mesure nulle près,  $\eta_{2a}$  est inclus dans  $\alpha_a$ .

Démonstration : soit  $E_n = \{\vartheta | N_{2a}(\vartheta) \leq n\}$  et  $\Omega_{E_n} = \bigcup_{\vartheta \in E_n} \Gamma_{2a}(\vartheta)$ .

Notons  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_{E_n}$ . Comme nous l'avons déjà remarqué dans le paragraphe 1,  $u(X_{\sigma})$  a un sens (presque-sûrement). De plus, on doit avoir pour tout  $z$  de  $\Omega_{E_n}$  :

$$u^2(z) = E^z[u^2(X_\sigma) - A_\sigma^*] .$$

D'où :

$$E^z[A_\sigma^*] \leq E^z[u^2(X_\sigma)] \leq n^2 .$$

On en déduit que pour presque tout  $\vartheta$  ,  $\vartheta E^z[A_\sigma^*]$  est fini pour tout  $z$  à coordonnées rationnelles.

Mais d'autre part, d'après le théorème de Fubini et la définition de  $\vartheta P^z$  , comme  $\sigma$  est inférieur ou égal à  $z$  :

$$\begin{aligned} \vartheta E^z[A_\sigma^*] &= \int_0^{+\infty} \vartheta E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 ; s < \sigma] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \vartheta E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 ; s < \tau ; s < \sigma] ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} \int_0^{+\infty} E^z[\|\nabla u(X_s)\|^2 p_\vartheta(X_s) ; s < \sigma] ds \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[\int_0^\sigma p_\vartheta(X_s) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds] \\ &= \frac{k_\nu}{p_\vartheta(z)} \int_{\Omega_{E_n}} g_z(x, y) p_\vartheta(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy \end{aligned}$$

où  $g_z(z')$  désigne la fonction de Green de  $\Omega_{E_n}$  [cf. par exemple Dynkin [1] vol. II].

Et donc, pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$  et tout  $z$  à coordonnées rationnelles, dans  $\Omega_{E_n}$  :

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} g_z(x, y) p_\vartheta(x, y) \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy < +\infty .$$

Mais si  $(x, y)$  est dans  $\Gamma_a(\vartheta)$  :

$$p_\vartheta(x, y) = \frac{C_\nu y}{[y^2 + \|x - \vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} \geq \frac{C_\nu}{(1+a^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \frac{1}{y^\nu} .$$

Et donc,

$$\int_{\Gamma_a(\vartheta)} \frac{g_z(x, y)}{y} y^{1-\nu} \|\nabla u(x, y)\|^2 dx dy < +\infty .$$

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que pour presque tout  $\vartheta$ , pour tout  $z$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ ,  $\frac{g_z(x,y)}{y}$  admet une limite strictement positive quand  $(x,y)$  tend vers  $(\vartheta,0)$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ . C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soit  $E$  un fermé de  $\mathbb{R}^V$  et  $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$ . Si  $g_z(z')$  désigne la fonction de Green de  $\Omega_E$ , pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$ , pour tout  $z_0$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ ,  $\frac{g_{z_0}(x,y)}{y}$  admet une limite strictement positive quand  $(x,y)$  tend vers  $(\vartheta,0)$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ .

Cette proposition est une conséquence de la proposition 1 et elle sera démontrée dans le paragraphe suivant.

#### 4. DEMONSTRATION DES PROPOSITIONS 1 ET 4.

Démonstrons d'abord la proposition 1. Soit  $E$  un borélien de  $\mathbb{R}^V$ ,  $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_a(\vartheta)$  et  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_E$ . On veut montrer que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$  et tout  $z$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ ,  $\vartheta P^z[\sigma = \tau]$  est strictement positif. Pour cela, considérons la fonction

$$z \mapsto \varphi(z) = p_\vartheta(z) \vartheta P^z[\sigma = \tau] .$$

D'après la propriété ii) du mouvement brownien conditionné (rappelée au paragraphe 1),  $\varphi(z)$  vaut :

$$\varphi(z) = p_\vartheta(z) \left( 1 - \vartheta P^z[\sigma < \tau] \right) = p_\vartheta(z) - E^z[p_\vartheta(X_\sigma) : \sigma < \tau]$$

$\varphi$  est donc harmonique et positive dans  $\Omega_E$  donc dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ . Si elle s'annule en un point  $z_0$  de  $\Gamma_a(\vartheta)$ , elle est nulle pour tout  $z$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$ . Il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5. - Sous les mêmes hypothèses que la proposition 1,  
Pour presque tout  $\vartheta$  de  $K$ , quel que soit le nombre  $b$  strictement positif,  
 $\vartheta P^z[\sigma < \tau]$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $(\vartheta, 0)$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ .

Démonstration : soit  $B$  la boule de  $\mathbb{R}^v$  centrée en  $\vartheta$ , de rayon  $r$  et  $B'$  la boule centrée en  $\vartheta$  de rayon  $\frac{r}{2}$ . Notons  $\Lambda_1$  la partie de la frontière de  $\Omega_E$  située dans  $\Pi$  au-dessus de  $B'$  et à une hauteur strictement inférieure à 1, c'est-à-dire :

$$\Lambda_1 = \{(x, y) \in \Pi \mid x \in B' \text{ et } y = \frac{1}{a} d(x, E) < 1\} .$$

Notons  $\Lambda_2$  l'ensemble  $\Pi \cap (\delta\Omega_E - \Lambda_1)$ . Si  $z$  est un point d'adhérence de  $\Omega_E$  dans  $\Pi$ , on a :

$$\begin{aligned} \vartheta P^z[\sigma < \tau] &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; \sigma < \tau] \\ &= \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; X_\sigma \in \Lambda_1] + \frac{1}{p_\vartheta(z)} E^z[p_\vartheta(X_\sigma) ; X_\sigma \in \Lambda_2] . \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $(\vartheta, 0)$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$  car  $p_\vartheta(z)$  devient infini et  $p_\vartheta$  est bornée sur  $\Lambda_2$ .

Majorons maintenant le premier terme. Soit  $(x, y)$  un point de  $\Lambda_1$ , soit  $x'$  un point tel que  $\|x - x'\| < \frac{ay}{2}$  et soit  $y' = \frac{1}{a} d(x', E)$ . Comme  $y = \frac{1}{a} d(x, E)$ , on doit avoir :

$$\frac{y}{2} \leq y' \leq \frac{3y}{2} \quad \text{et} \quad \|x' - \vartheta\| \leq \|x - \vartheta\| + \frac{1}{2} d(x, E) \leq \frac{3}{2} \|x - \vartheta\| .$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{p_\vartheta(x', y')}{p_\vartheta(x, y)} = \frac{y'}{y} \left[ \frac{\|x - \vartheta\|^2 + y^2}{\|x' - \vartheta\|^2 + y'^2} \right]^{\frac{v+1}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{v+1} .$$

Si l'on appelle  $\omega_\vartheta$  la fonction définie dans  $\mathbb{R} - \{\vartheta\}$  par

$$\varphi_{\vartheta}(x') = p_{\vartheta}\left(x', \frac{1}{a}d(x', E)\right) = \frac{\frac{1}{a}d(x', E)}{\left(\left[\frac{1}{a}d(x', E)\right]^2 + \|x' - \vartheta\|^2\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

on obtient :

$$\int_{\|x-x'\| < \frac{ay}{2}} \varphi_{\vartheta}(x') p_{x'}(x, y) dx' \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\| < \frac{ay}{2}} p_{x'}(x, y) dx' .$$

Cette dernière intégrale a une valeur  $C(a)$  ne dépendant que de  $a$  puisqu'elle vaut :

$$\int_{\|x'\| < \frac{a}{2}} p_{x'}(0, 1) dx' .$$

D'autre part, comme  $x$  est dans  $B'$  et que  $y = \frac{1}{a}d(x, E)$  est inférieur à  $\frac{1}{a}\|x - \vartheta\|$  donc à  $\frac{1}{a}r$ , la boule de centre  $x$  et de rayon  $\frac{ay}{2}$  est incluse dans  $B$ . En combinant ces résultats, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} p_{\vartheta}(x, y) &\leq \frac{2}{C(2a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_{\|x-x'\| < \frac{a}{2}} \varphi_{\vartheta}(x') p_{x'}(x, y) dx' \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') p_{x'}(x, y) dx' ; \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_{\vartheta}(x, y) \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} E^{(x, y)}[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B]$$

(inégalité valable pour tout point  $(x, y)$  de  $\Lambda_1$ ).

Appliquons ce résultat, et la propriété de Markov forte pour majorer le premier terme de l'expression de  ${}^{\vartheta}P^z[\sigma < \tau]$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z[p_{\vartheta}(X_{\sigma}) ; X_{\sigma} \in \Lambda_1] &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z \left[ E^{X_{\sigma}}[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B] \right] \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^z[\varphi_{\vartheta}(X_{\tau}) ; X_{\tau} \in B] \\ &\leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') \frac{p_{x'}(z)}{p_{\vartheta}(z)} dx' . \end{aligned}$$

Mais si  $z = (x_0, y_0)$  est dans  $\Gamma_b(\vartheta)$  :

$$\frac{p_{x'}(z)}{p_{\vartheta}(z)} = \left[ \frac{\|x_0 - \vartheta\|^2 + y_0^2}{\|x_0 - x'\|^2 + y_0^2} \right]^{\frac{\nu+1}{2}} \leq \left[ 1 + \frac{\|x_0 - \vartheta\|^2}{y_0^2} \right]^{\frac{\nu+1}{2}} \leq (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} .$$

Et donc :

$$(*) \quad \frac{1}{p_{\vartheta}(z)} E^Z [p_{\vartheta}(X_{\sigma}) ; X_{\sigma} \in \Lambda_1] \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$$

(inégalité valable si  $z$  est dans  $\Gamma_b(\vartheta)$  et dans  $\Omega_E \cup \Lambda_1$ ).

Supposons que  $\vartheta$  a été choisi de telle sorte que  $\varphi_{\vartheta}$  soit localement intégrable. Si  $z$  est dans  $\Lambda_1$ , le premier membre de l'inégalité (\*) vaut 1. Si  $B$  a été choisie assez petite pour que le deuxième membre soit strictement inférieur à 1, nous en déduisons que  $\Gamma_b(\vartheta) \cap \Lambda_1$  est vide et donc que l'intersection de  $\Gamma_b(\vartheta)$  avec un voisinage convenable de  $(\vartheta, 0)$  est entièrement incluse dans  $\Omega_E$ . L'inégalité écrite ci-dessus est donc valable pour tout point  $z$  de  $\Gamma_b(\vartheta)$  suffisamment proche de  $(\vartheta, 0)$ .

En tenant compte du fait que le deuxième terme de l'expression de  $\vartheta P^Z[\sigma < \tau]$  tend vers 0, nous obtenons donc que, si  $\vartheta$  a été choisi dans  $E$  de telle sorte que  $\varphi_{\vartheta}$  soit localement intégrable, on a pour tout  $b$  :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow (\vartheta, 0) \\ z \in \Gamma_b(\vartheta)}} \sup \vartheta P^Z[\sigma < \tau] \leq \frac{2}{C(a)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu+1} (1+b^2)^{\frac{\nu+1}{2}} \int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$$

et donc :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \vartheta \\ z \in \Gamma_b(\vartheta)}} \vartheta P^Z[\sigma < \tau] = 0$$

puisque  $\int_B \varphi_{\vartheta}(x') dx'$  peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de  $B$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$ ,  $\varphi_{\vartheta}$  est localement intégrable. Il suffit pour cela de montrer que, si  $B_n$  est la boule de  $\mathbb{R}^{\nu}$  de rayon  $n$ , pour tout entier  $n$ , pour presque tout

$\vartheta$  de  $E$  :

$$\int_{B_n} \varphi_{\vartheta}(x) dx < +\infty$$

ou encore

$$\int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx < +\infty$$

(puisque sur  $\bar{E}$  (adhérence de  $E$ ),  $\varphi_{\vartheta}$  est nulle). Mais d'après le théorème de Fubini :

$$\int_E \left( \int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx \right) d\vartheta = \int_{B_n - \bar{E}} \left( \int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta \right) dx .$$

Mais si  $x$  est dans  $B_n - \bar{E}$ ,  $\int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta$  est la valeur au point  $(x, d(x, E))$  de la fonction harmonique bornée dans  $\Pi$  ayant pour valeurs au bord 1 sur  $E$  et 0 sur  $\mathbb{R}^v - E$  et donc  $\int_E \varphi_{\vartheta}(x) d\vartheta \leq 1$  pour tout  $x$  de  $B_n - \bar{E}$ .

Donc :

$$\int_E \left[ \int_{B_n - \bar{E}} \varphi_{\vartheta}(x) dx \right] d\vartheta \leq \int_{B_n} dx < +\infty .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 5 et donc aussi celle de la proposition 1.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 4.

Soit  $E$  un borélien de  $\mathbb{R}^v$  et  $\Omega_E = \bigcup_{\vartheta \in E} \Gamma_{2a}(\vartheta)$ . Notons  $\sigma$  le temps de sortie de  $\Omega_E$ . Si  $h_z(z')$  désigne la fonction de Green de  $\Pi$ , la fonction de Green de  $\Omega_E$   $g_z(z')$  a pour expression :

$$g_z(z') = h_z(z') - E^z \left[ h_{X_{\sigma}}(z') \right] .$$

Plaçons nous uniquement dans le cas  $v > 1$  (le cas  $v = 1$  se traite de façon analogue).

Soit  $z_1 = (x_1, y_1)$  et  $z = (x, y)$  deux points de  $\Pi$ . Notons  $r_1 = \|z - z_1\|$  et  $r_2 = \|z - \bar{z}_1\|$  où  $\bar{z}_1$  désigne le symétrique de  $z_1$ , par rapport à la frontière de  $\Pi$ . Avec ces notations :

$$\begin{aligned}
 h_{z_1}(z) &= \frac{1}{r_1^{\nu-1}} - \frac{1}{r_2^{\nu-1}} = (r_2^2 - r_1^2) \left[ \frac{1}{r_1+r_2} \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{r_1^i r_2^{\nu-i}} \right] \\
 &= 4y_1 y \left[ \frac{1}{r_1+r_2} \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{1}{r_1^i r_2^{\nu-i}} \right]
 \end{aligned}$$

$z_1$  étant fixé, quand  $z$  tend vers  $(\vartheta, 0)$ ,  $r_1$  et  $r_2$  tendent vers  $\|z_1 - (\vartheta, 0)\|$  et donc :

$$\lim_{z \rightarrow (\vartheta, 0)} \frac{h_{z_1}(z)}{y} = \frac{2y_1(\nu-1)}{[y_1^2 + \|x_1 - \vartheta\|^2]^{\frac{\nu+1}{2}}} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_1) .$$

De ce résultat et de l'expression de  $g_{z_0}(z)$ , sous réserve de légitimité du passage à la limite, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{z \rightarrow (\vartheta, 0) \\ z \in \Gamma_a(\vartheta)}} \frac{g_{z_0}(z)}{y} &= \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} [p_\vartheta(z_0) - E^{z_0}[p_\vartheta(X_\sigma)]] \\
 &= \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_0) [1 - \vartheta P^{z_0}(\sigma < \tau)] \\
 &= \frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(z_0) \vartheta P^{z_0}(\sigma = \tau)
 \end{aligned}$$

expression qui est strictement positive pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$  et tout  $z_0$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$  d'après la proposition 1.

Il ne reste donc plus qu'à légitimer le passage à la limite sous l'espérance. Soit  $z_1 = (x_1, y_1)$  dans le complémentaire de  $\Gamma_{2a}(\vartheta)$  et  $z$  dans  $\Gamma_a(\vartheta)$  d'ordonnée inférieure à  $\frac{1}{2}$ . Il existe alors une constante  $k$  ne dépendant que de  $a$  telle que  $\|z_1 - z\| \geq k \|z_1 - (\vartheta, 0)\|$ . En effet, cela est évident si  $y_1$  est supérieur ou égal à 1 (car l'ordonnée de  $z$  est inférieure à  $\frac{1}{2}$ ) et si  $y_1 < 1$ , on a :

$$\|z_1 - z\| \geq \|z_1 - (\vartheta, 0)\| \sin \alpha$$

où  $\alpha$  désigne l'angle entre  $[z_1 - (\vartheta, 0)]$  et  $[z - (\vartheta, 0)]$ . Comme  $z$  est dans  $\Gamma_a(\vartheta)$  et  $z_1$  hors de  $\Gamma_{2a}(\vartheta)$  et d'ordonnée inférieure à 1,  $\alpha$  est minoré par  $\text{Arctg } 2a - \text{Arctg } a$ .

En reprenant les notations antérieures, cela s'écrit  $r_1 \geq k \|z_1 - (\vartheta, 0)\|$  et comme  $r_2 \geq r_1$ , on a la majoration :

$$\frac{h_{z_1}(z)}{y} \leq \frac{2(\nu-1)y_1}{r_1^{\nu+1}} \leq \frac{2(\nu-1)}{k^{\nu+1}} \frac{y_1}{\|z_1 - (\vartheta, 0)\|^{\nu+1}} = \frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(z_1)$$

$\frac{h_{X_\sigma}}{y}$  tend donc vers  $\frac{2(\nu-1)}{C_\nu} p_\vartheta(X_\sigma)$  en étant majoré par  $\frac{2(\nu-1)}{C_\nu k^{\nu+1}} p_\vartheta(X_\sigma)$  qui est  $P^{z_0}$ -intégrable, ce qui justifie le passage à la limite.

Remarque : On a vu dans la démonstration de la proposition 5 que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$ , quel que soit  $b > 0$ , l'intersection de  $\Gamma_b(\vartheta)$  avec un voisinage convenable de  $(\vartheta, 0)$  est entièrement incluse dans  $\Omega_E$ . Cette observation et une très légère modification de la démonstration de la proposition 4 permettent de montrer que pour presque tout  $\vartheta$  de  $E$ , pour tout  $b$ ,  $\frac{g_{z_0}(x, y)}{y}$  tend vers une limite strictement positive quand  $(x, y)$  tend vers  $(\vartheta, 0)$  dans  $\Gamma_b(\vartheta)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- J.M. BRELOT et L. DOOB [1] : "Limites angulaires et limites fines". Annales de l'Institut Fourier 13 (1963) pp. 395-415.
- J. BROSSARD [1] : "Utilisation du mouvement brownien à l'étude du comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans un demi-espace". Thèse dactylographiée. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- D.L. BURKHOLDER et R.F. GUNDY [1] : "Boundary behaviour of harmonic functions in a half-space and brownian motion". Annales de l'Institut Fourier 23 (1973) pp. 195-212.
- A.P. CALDERON [1] : "On the behaviour of harmonic functions near the boundary". Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950) pp. 47-54.

- A.P. CALDERON [2] : "On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund".  
Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950)  
pp. 55-61.
- L. DOOB [1] : "Conditionnal brownian motion and the boundary limits of  
harmonic functions". Bulletin de la Société Mathématique de  
France 85 (1957), pp. 431-468.
- E.B. DYNKIN [1] : "Markov Processes" (volumes I et II). Academic Press  
Inc., New-York, 1965.
- E.M. STEIN [1] : "On the theory of harmonic functions of several varia-  
bles II". Acta Mathematica 106 (1961) pp. 137-174.

-:-:-