SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN MÉMIN

Décompositions multiplicatives de semimartingales exponentielles et applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 35-46
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__35_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DE SEMIMARTINGALES EXPONENTIELLES ET APPLICATIONS

Jean MEMIN

Etant donné deux semimartingales X et Y, Yor a montré la formule:

(1): $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y+[X,Y])$

où $\mathcal{E}(X)$ désigne la semimartingale exponentielle définie par C. Doléans [2].

Nous considérons le problème réciproque suivant: étant donné deux semimartingales S^1 et S^2, trouver les semimartingales X telles que:

(2): $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(S^1) = \mathcal{E}(S^2)$.

Nous montrons facilement (prop: I-1) que ce problème a une solution lorsque $\Delta S_t^1 \neq -1$ pour tout $t<\infty$, et cette solution est unique.

La factorisation (2) permet de résoudre des problèmes de décomposition multiplicative intéressants; c'est l'objet des paragraphes II et III, le paragraphe I étant consacré aux notations et rappels, et à l'établissement de (2).

Dans le paragraphe II nous retrouvons dans le cadre particulier des semimartingales exponentielles les résultats de Yoeurp [9], Meyer et Yoeurp [8], Yoeurp et Yor [10], de décomposition multiplicative canonique des surmartingales positives, des sousmartingales positives, enfin des semimartingales positives. De plus ce cadre nous permet d'obtenir des résultats supplémentaires; ainsi un corollaire immédiat de la proposition I-1 (Remarque II-2) fournit une décomposition multiplicative canonique pour $\mathcal{E}(X)$ dès que X est une sousmartingale quelquonque, ($\mathcal{E}(X)$ n'est pas alors nécessairement positive), ou encore la proposition II-5 donne unrésultat de décomposition pour $\mathcal{E}(X)$ lorsque $\mathcal{E}(X)\geq 0$ et non supposée strictement positive comme dans [10].

Dans le paragraphe III en appliquant (2) une nouvelle fois, on montre que pour toute martingale locale M on a la décomposition:

$$(3) \qquad \mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\tilde{M}^1)\,\mathcal{E}(M^2)$$

où $\mathcal{E}(M^2)$ est une martingale locale positive, localement de carré intégrable et $\mathcal{E}(M^2)\,\tilde{M}^1$ est une martingale locale; ce résultat a des rapports avec le théorème de Girsanov et permet d'obtenir un critère d'uniforme intégrabilité de $\mathcal{E}(M)$ (non supposée positive) complétant le théorème II-2 de [5] et généralisant la proposition 5-2 de [4].

I- PRELIMINAIRES ET PROPOSITION FONDAMENTALE

Les notations et définitions que nous utilisons ici sont en général celles du cours sur l'intégrale stochastique de Meyer [6]. Tous les processus utilisés sont définis sur une base stochastique $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ et à valeurs réelles; la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in R^+}$ possède les propriétés habituelles: la famille $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite et chaque $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles de P-mesure nulle de $\mathcal{F}$.

On note $\underline{\underline{M}}$ l'ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables, $\underline{\underline{M}}_{loc}$ l'ensemble des martingales locales, $\underline{\underline{M}}_{loc}(P)$ quand on voudra préciser la probabilité de référence ; $\underline{\underline{V}}$ est l'ensemble des processus continus à droite, adaptés, nuls à l'origine, à variation finie sur tout compact.

Une semimartingale est un processus X pouvant être représenté sous la forme:

$$(1\text{-}1) \qquad X = X_0+M+A \qquad \text{où } M\in\underline{\underline{M}}_{loc}\ ,\ M_0=0\ ,\ A\in\underline{\underline{V}}$$

Une semimartingale est spéciale s'il existe une décomposition (1-1) de X pour laquelle le processus A est prévisible; une telle décomposition est alors unique et constitue la décomposition canonique de X. Si X est une semimartingale spéciale $X-X_0$ est localement intégrable.

En général on peut obtenir plusieurs décompositions (1-1) pour une semimartingale quelquonque, mais la partie continue de la martingale M entrant dans une telle décomposition est, elle, unique. On note X^c cette martingale locale continue.

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et localement de carré intégrable, on note $\langle M,M\rangle$ le processus croissant prévisible (nul en 0) associé à M^2 (c'est à dire tel que $M^2 - \langle M,M\rangle \in \underline{\underline{M}}_{loc}$)

Soit X une semimartingale, on note $[X,X]$ le processus élément de $\underline{\underline{V}}$ défini par:

$$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \sum_{0<s\leq t}(\Delta X_s)^2$$

Si $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et localement de carré intégrable, $\langle M,M\rangle$ est le compensateur prévisible de $[M,M]$.

X étant c.a.d.l.a.g, X_- est le processus défini par:

$$(X_-)_t = X_{t-} = \lim_{\substack{s\to t\\ s<t}} X_s \ , \quad X_{0-} = 0 .$$

X_∞ désigne $\lim\limits_{t\to\infty} X_t$ lorsque cette limite existe.

Etant donné X une semimartingale, H un processus prévisible localement borné, on peut définir l'intégrale stochastique de H par rapport à X ; nous noterons $H.X$ le processus obtenu : $\quad H.X_t = \int_{]0,t]} H_s dX_s$.

Si T est un temps d'arrêt, X^T désigne la semimartingale arrêtée en T ($X^T_t = X_{t\wedge T}$ pour $t<\infty$).

On note $\mathcal{E}(X)$ la semimartingale solution de l'équation:

$$Z = 1 + Z_-.X$$

Cette solution est unique et donnée explicitement ([2], [6] p.304) par la formule :

$$(1\text{-}2) \qquad \mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t)\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s)$$

pour $t<\infty$; ΔX_s représentant le saut de X en s .

Soit X et Y des semimartingales, l'expression donnant $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{E}(Y)$ permet d'obtenir facilement l'égalité (voir: [11]):

$$(1\text{-}3) \qquad \mathcal{E}(X)\,\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y+[X,Y]\,).$$

Nous pouvons maintenant donner la proposition fondamentale.

I-1 PROPOSITION

Etant donné S^1 et S^2 deux semimartingales nulles en 0 telles que, pour tout t fini $\Delta S^1_t \neq -1$, il existe une semimartingale X nulle en 0 et une seule telle que:

(1-4) $\mathcal{E}(X)\,\mathcal{E}(S^1) = \mathcal{E}(S^2)$.

X est défini par l'égalité:

(1-5) $$X_t = (S^2-S^1)_t - \langle (S^2-S^1)^c, (S^1)^c\rangle_t - \sum_{o<u\leq t} \frac{\Delta(S^2-S^1)_u\,\Delta S^1_u}{1+\Delta S^1_u}$$

Démonstration:

Si X est solution de l'équation (1-4) on a:

$$X + [S^1,X] = S^2-S^1 \quad ;$$

ceci implique l'unicité d'un tel X :en effet si X^1 et X^2 sont deux solutions

$$X^1-X^2+[S^1,X^1-X^2] = 0$$

on en déduit $(X^1)^c=(X^2)^c$; d'où:

$$[S^1,X^1-X^2]_t = \sum_{o<u\leq t} \Delta S^1_u\,\Delta(X^1-X^2)_u$$

X^1-X^2 est alors un processus purement discontinu;l'hypothèse $\Delta S^1_u \neq -1$ P.ps montre que $X^1_u = X^2_u$ pour tout u fini.

Pour l'existence de X on considère (1-5) ;montrons que

$$\sum_{o<u\leq .} \frac{\Delta(S^2-S^1)_u\,\Delta S^1_u}{1+\Delta S^1_u} \in \underline{\underline{V}}$$

En effet, $\Delta S^1_u \neq -1$ et il y a un nombre fini de sauts de S^1 pour lesquels $\Delta S^1_u \in]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[$ pour $u\in]o,t]$,et donc

$$\sum_{o<u\leq t} \left|\frac{\Delta(S^2-S^1)_u\,\Delta S^1_u}{1+\Delta S^1_u}\right| 1_{\{\Delta S^1_u \in]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[\}} < \infty \quad \text{pour t fini;}$$

enfin $$\sum_{o<u\leq t} \left|\frac{\Delta(S^2-S^1)_u\,\Delta S^1_u}{1+\Delta S^1_u}\right| 1_{\{\Delta S^1_u \notin]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[\}}$$

$$\leq 2\sum_{o<u\leq t} \left|\Delta(S^2-S^1)_u\,\Delta S^1_u\right| \leq 2\,[S^2-S^1,S^1]_t$$

La relation (1-5) définit donc une semimartingale X;il est immédiat de vérifier alors,à partir du second membre de (1-5), que l'on a $X+[S^1,X] = S^2-S^1$, ce qui donne le résultat.

II- DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DE SEMIMARTINGALES.

X étant une semimartingale spéciale, T désignant le temps d'arrêt $T = \inf\{t : \mathcal{E}(X)_t = 0\}$ nous considérons dans ce paragraphe le problème de la décomposition multiplicative canonique de la semimartingale $\mathcal{E}(X)$,c'est à dire de la factorisation :

$$(2\text{-}1) \qquad \mathcal{E}(X) = Z\,V$$

où V est élément de $\underline{\underline{V}}$ et prévisible,où Z est une martingale locale sur l'intervalle $[0,T[$ (ce qui désignera ici la propriété suivante: il existe une suite (T_n), avec $T_n \nearrow T$ P.ps et telle que $Z^{T_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc}$)

On a aussi $T = \inf\{t : \mathcal{E}(X)_{t-}=0\}$ .Il est facile alors de démontrer qu'une telle décomposition,si elle existe est unique sur l'intervalle $[0,T[$ (voir par ex: [3]).

Comme dans la proposition I-1 ,nous supposerons que les semimartingales S ,dont nous utilisons les exponentielles $\mathcal{E}(S)$ sont nulles en O ;ceci ne restreint d'ailleurs pas la généralité des résultats.

II-1 LEMME ([5] Prop II-1)

Soit S une semimartingale spéciale nulle en 0,de décompositioncanonique $S = M+A$,telle que pour tout u fini on ait $\Delta A_u \neq -1$; on a alors la décomposition multiplicative canonique:

$$(2\text{-}2) \qquad \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(\tilde{M})\mathcal{E}(A)$$
$$\text{où } \tilde{M} = \frac{1}{1+\Delta A}.M$$

Démonstration.

La relation (2-2) est obtenue en appliquant la proposition I-1 à $S^2 = S$ et $S^1 = A$;il suffit alors pour avoir le résultat annoncé de vérifier que $\frac{1}{1+\Delta A}.M$ est défini et égal à $M - \sum_{0<u\leq \cdot} \frac{\Delta M_u \Delta A_u}{1+\Delta A_u}$.

Or le processus $\left(\frac{1}{1+\Delta A_u}\right)_{u\in R^+}$ est localement borné (voir par exemple [6] p.314) ,le processus $V = \left(\frac{\Delta A_u}{1+\Delta A_u}\right)_{u\in R^+}$ aussi;

on peut donc définir $\frac{1}{1+\Delta A}.M$. Maintenant $\sum_{0<u\leq .}\frac{\Delta M_u\,\Delta A_u}{1+\Delta A_u}$ $= [M,V]$; comme V est prévisible et appartient à $\underline{\underline{V}}$, $[M,V]\in\underline{\underline{M}}_{loc}$ [9] ; il est alors immédiat de vérifier que $\frac{1}{1+\Delta A}.M$ et $M-\sum_{0<u\leq .}\frac{\Delta M_u\,\Delta A_u}{1+\Delta A_u}$ sont deux martingales locales ayant mêmes sauts et même partie continue.

II-2 REMARQUE

Lorsque X est une sousmartingale de décomposition de Doob-Meyer $X = M+A$, on a $\Delta A_u \geqslant 0$ pour tout u fini, le lemme précédent peut donc s'appliquer, on a ainsi la décomposition multiplicative canonique de $\mathcal{E}(X)$ alors que $\mathcal{E}(X)$ n'est pas nécessairement positive.

La décomposition obtenue en II-1 et la remarque II-2 sont appliquées dans [5] pour obtenir le théorème suivant que nous utiliserons au paragraphe III.

II-3 THEOREME ([5] théorème II-2)

Soit $M\in\underline{\underline{M}}_{loc}$

a) Si M est de carré intégrable et si $\langle M,M\rangle$ est borné, alors $\mathcal{E}(M)$ est de carré intégrable. De plus si $\Delta M_s > -1$ pour s fini on a $\mathcal{E}(M)_\infty > 0$ P.ps.

b) Si M est à variation intégrable et si le compensateur prévisible de $\sum_s |\Delta M_s|$ est borné, alors $\mathcal{E}(M)$ est à variation intégrable.

On considère maintenant une semimartingale spéciale X (nulle en 0) telle que $\Delta X_s \geqslant -1$ pour tout s fini, et on définit les temps d'arrêt :

$$U = \inf\{\, t : \Delta X_t = -1 \,\}$$
$$T' = \inf\{\, t : \Delta A_t = -1 \,\}$$

II-4 LEMME

Les temps d'arrêt U , T' définis ci-dessus possèdent les propriétés suivantes:

a) $U = T = \inf\{\, t : \mathcal{E}(X)_t = 0\} = \inf\{\, t : \mathcal{E}(X)_{t-} = 0\}$

b) T' est prévisible et on a $T'\geq T$ P.ps.

c) Il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt avec $T_n \nearrow T$ P.ps et telle que pour tout $t\leq T_n$, $\Delta A_t > -1$.

Démonstration.

Il est clair que $T \leq U$; pour avoir $U \leq T$ il suffit de remarquer que pour P-presque tout ω ,pour tout $t < U(\omega)$ on a:

$$\exp(X_t - \tfrac{1}{2} < X^c, X^c >_t) \prod_{s \leq t} (1+ \Delta X_s)\exp(- \Delta X_s) > 0.$$

(En effet pour P-presque tout ω , pour tout t fini, il y a un nombre fini de sauts de X tels que $|\Delta X_s| > \tfrac{1}{2}$ avec $0 < s \leq t$; ainsi

$$\prod_{s \leq t < U(\omega)} (1+ \Delta X_s)\exp(- \Delta X_s)\, 1_{\{ |\Delta X_s| > \frac{1}{2} \}} > 0$$

D'un autre coté on a les inégalités:

$$\prod_{s \leq t < U(\omega)} (1+ \Delta X_s)\exp(- \Delta X_s)\, 1_{\{ |\Delta X_s| \leq \frac{1}{2} \}} \geq \exp \left[\sum_{s \leq t < U(\omega)} 2(\Delta X_s)^2 1_{\{ |\Delta X_s| \leq \frac{1}{2} \}} \right]$$

$$> 0$$

b) T' est prévisible comme début de l'ensemble $\{(t,\omega): \Delta A_t(\omega)=-1\}$ qui est prévisible et a ses coupes fermées (voir [1]).

Si R est un temps prévisible on a sur l'ensemble $\{R < \infty\}$

$$E\left[\Delta X_R | \mathcal{F}_{R-}\right] = \Delta A_R \qquad \text{par conséquent:}$$

$$\int_{\{T'<\infty\}} (\Delta X_{T'} + 1)dP = \int_{\{T'<\infty\}} (\Delta A_{T'} + 1)dP = 0$$

donc $\Delta X_{T'} = -1$ sur l'ensemble $\{T'<\infty\}$,d'où $T \leq T'$ P.ps.

c) On considére (S_n) une suite de temps d'arrêt annonçant T', et on pose $T_n = S_n \wedge T$, (T_n) a alors les propriétés indiquées.

II-5 PROPOSITION.

Soit X une semimartingale spéciale de décomposition $X = M+A$ ($X_0 = 0$ et $\Delta X_s \geq -1$ pour s fini).

Alors $\mathcal{E}(X)$ admet la décomposition multiplicative canonique

(2-3) $\qquad \mathcal{E}(X) = Z\, \mathcal{E}(A)$

où Z est une martingale locale sur $[0,T[$;(précisément si (T_n) est la suite de temps d'arrêt définie au II-4 c) on a

$$Z^{T_n} = \left(\frac{1}{1+\Delta A}\right)^{T_n}\!\!.M\ ) \quad \text{et} \quad Z_t = 0 \ \text{si} \ t \geq T .$$

Démonstration.

D'après les propriétés de la suite (T_n) ,on obtient pour chaque n la décomposition : $\mathcal{E}(X)^{T_n} = \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{1+\Delta A}\right)^{T_n}\!\!.M\right) \mathcal{E}(A)^{T_n}$

d'où le résultat, puisque $T_n \nearrow T$ P.ps et que pour $t \geq T$ $\mathcal{E}(X)_t = 0$.

II-6 REMARQUE

Lorsque l'on a $T' > T$ P.ps sur l'ensemble $\{T' < \infty\}$, le processus Z intervenant dans la relation (2-3) est une martingale locale sur $[0,T]$, autrement dit $Z^T \in \underline{\underline{M}}_{loc}$. C'est notamment le cas lorsque l'on considère la surmartingale positive $\mathcal{E}^\lambda(M)$ où $0<\lambda<1$ et $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ avec $\Delta M_s \geq -1$ pour s fini; on peut montrer (voir [5]) que $\mathcal{E}^\lambda(M) = \mathcal{E}(X)$ où X est une surmartingale de décomposition canonique $X = N+A$; alors $T = \inf\{t : \Delta X_t = -1\} = \inf\{t : \Delta M_t = -1\}$. Mais $0 = E\left[\Delta M_{T'} 1_{\{T'<\infty\}}\right] = E\left[\Delta M_{T'} 1_{\{T=T'<\infty\}}\right] + E\left[\Delta M_{T'} 1_{\{T<T'<\infty\}}\right]$.
La dernière espérance est nulle car $1_{\{T<T'<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_{T'-}$-mesurable, on en déduit que $P\left[\{T'=T\} \cap \{T'<\infty\}\right] = 0$ et donc $T' > T$ P.ps sur $\{T' < \infty\}$.

II-7 REMARQUE

Le résultat de la proposition II-5 contient ceux de Yoeurp et Yor [10] pour les semimartingales et de Meyer et Yoeurp [8] pour les sousmartingales, puisque n'importe quelle semimartingale Y telle que $Y > 0$ et $Y_- > 0$ P.ps peut s'écrire $Y = Y_0 \mathcal{E}(X)$; cependant on ne peut déduire de II-5 le résultat de Yoeurp [9] sur les surmartingales positives.

II-8 REMARQUE

La projection prévisible des semimartingales (décomposables multiplicativement) jouant un rôle essentiel dans les résultats d'existence des décompositions de [9], [8], [10], [3], on peut trouver surprenant de ne pas la voir apparaitre ici; en fait (en notant ${}^p\mathcal{E}(X)$ la projection prévisible de $\mathcal{E}(X)$ on a la relation:

$$ {}^p\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X)_-(1+\Delta A) \qquad \text{où } X = M+A. $$

Comme $T = \inf\{t : \Delta X_t = -1\} = \inf\{t : \mathcal{E}(X)_{t-} = 0\}$ on a:

$$ \inf\{t : {}^p\mathcal{E}(X)_t = 0\} = T \wedge T' = T \quad \text{si } \Delta X_s \geq -1 \ (s<\infty). $$

S'il n'y a pas d'hypothèse sur l'amplitude des sauts de X on voit qu'on n'obtiendra de décomposition multiplicative avec notre méthode que sur l'intervalle $[0, T' \wedge T[$, c'est à dire sur le plus grand intervalle stochastique sur lequel ${}^p\mathcal{E}(X)$ est localement borné, ce qui est en accord avec les études générales faites [3].

III- DECOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DE MARTINGALES LOCALES

On considère $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ .Soit M^1 la martingale locale compensée du processus localement intégrable $\sum_u \Delta M_u 1_{\{|\Delta M_u| \geq ½\}}$ et $M^2 = M - M^1$; M^1 est alors une martingale locale à variation localement intégrable, M^2 est une martingale locale, localement de carré intégrable avec $|\Delta M_u^2| < 1$ pour tout u fini; (une adaptation immédiate de la démonstration de [7] montre ce résultat).

III-1 PROPOSITION

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $M = M^1 + M^2$ la décomposition de M définie ci-dessus ($M_0 = 0$).

a) $\mathcal{E}(M)$ admet la décomposition :

(3-1) $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M^2)\,\mathcal{E}(\tilde{M}^1)$ où

(3-2) $\tilde{M}_t^1 = M_t^1 - \sum_{0<u\leq t} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1+\Delta M_u^2}$ $t < \infty$.

b) $\mathcal{E}(M^2)\,\tilde{M}^1 \in \underline{\underline{M}}_{loc}$

c) Si $\Delta M_u > -1$ alors $\Delta \tilde{M}_u^1 > -1$ pour tout u fini.

Démonstration.

Le a) est simplement la proposition I-1 appliquée à $S^2 = M$ et $S^1 = M^2$.

Pour le b) appliquons la formule d'intégration par parties:

$$\mathcal{E}(M^2)\,\tilde{M}^1 = \mathcal{E}(M^2)_- . M^1 - \sum_{0<u\leq .} \mathcal{E}(M^2)_{u-} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1+\Delta M_u^2} + \tilde{M}_-^1 . \mathcal{E}(M^2) + [\mathcal{E}(M^2), \tilde{M}^1] .$$

Mais $[\mathcal{E}(M^2), \tilde{M}^1] = \sum_{0<u\leq .} \mathcal{E}(M^2)_{u-} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1+\Delta M_u^2}$

et on obtient:

$$\mathcal{E}(M^2)\tilde{M}^1 = \mathcal{E}(M^2)_- . M^1 + \tilde{M}_-^1 . \mathcal{E}(M^2)$$

d'où le résultat.

Le c) est immédiat en remarquant que $\mathcal{E}(M)_t$ et $\mathcal{E}(M^2)_t$ strictement positifs impliquent $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_t > 0$ et $\Delta\tilde{M}^1_t > -1$.

Le corollaire suivant donne une précision intéressante sur le théorème de Girsanov (version [6] p.377).

III-2 COROLLAIRE

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ avec $\Delta M_s > -1$ pour tout s fini, et tel que $\mathcal{E}(M)_\infty$ soit uniformément intégrable. Soit P' la probabilité définie par $\dfrac{dP'}{dP} = \mathcal{E}(M)_\infty$.

Soit M^1 une martingale locale à variation localement intégrable et notons $\tilde{M}^1$ la P-semimartingale définie par:

$$\tilde{M}^1 = M^1 - \sum_{0<u\leq .} \frac{\Delta M^1_u \, \Delta M_u}{1+\Delta M_u}$$

alors, $\tilde{M}^1$ est une P'-martingale locale, à variation localement intégrable; de plus le P'-compensateur prévisible de $\sum_{0<u\leq .} |\Delta \tilde{M}^1_u|$ est égal au P-compensateur de $\sum_{0<u\leq .} |\Delta M^1_u|$.

Démonstration

En procédant comme dans la proposition III-1, ilest clair que $\mathcal{E}(M)\tilde{M}^1 \in \underline{\underline{M}}_{loc}(P)$ donc $\tilde{M}^1 \in \underline{\underline{M}}_{loc}(P')$; il reste à montrer la derniere assertion. Soit Y un processus prévisible positif tel que $E_{P'}\left[\int_0^\infty Y_s dA_s\right] < \infty$, où A désigne le P-compensateur prévisible de $\sum_{0<u\leq .} |\Delta M^1_u|$, et où $E_{P'}$ désigne l'espérance relative à P'.

$$E_{P'}\left[\int_0^\infty Y_s dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty \mathcal{E}(M)_\infty \, Y_s dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty Y_s \, \mathcal{E}(M)_{s-} dA_s\right]$$
$$= E\left[\int_0^\infty Y_s \, \mathcal{E}(M)_{s-} d\Big(\sum_{0<u\leq .} |\Delta M^1_u|\Big)_s\right] = E\left[\sum_s \mathcal{E}(M)_{s-} Y_s \, |\Delta \tilde{M}^1_s (1+\Delta M_s)|\right]$$
$$= E\left[\sum_s \mathcal{E}(M)_s \, Y_s \, |\Delta \tilde{M}^1_s|\right] = E\left[\mathcal{E}(M)_\infty \Big(\sum_s Y_s |\Delta \tilde{M}^1_s|\Big)\right]$$
$$= E_{P'}\left[\sum_s Y_s \, |\Delta \tilde{M}^1_s|\right] .$$

Ceci montre en particulier que $\tilde{M}^1$ est à variation P'-localement intégrable puisque $\int_0^\cdot \mathcal{E}(M)_{s-} dA_s$ est P-localement intégrable.

III-3 THEOREME

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et telle que le compensateur prévisible du processus : $\langle M^c,M^c\rangle + \sum_{0<u\leq \cdot} |\Delta M_u^1| + \sum_{0<u\leq \cdot} (\Delta M_u^2)^2$ soit borné (M^1 et M^2 constituant la décomposition additive de M avec M^1 compensée du processus $\sum_{0<u\leq \cdot} \Delta M_u 1_{\{|\Delta M_u|\geq 1/2\}}$) alors $\mathcal{E}(M)$ est uniformément intégrable.

Démonstration.

L'hypothèse faite implique que $\langle M^2,M^2\rangle$ est borné;d'après le théorème II-3 a) on en déduit que $\mathcal{E}(M^2)$ est de carré intégrable ;on peut donc définir une probabilité P' par: $\frac{dP'}{dP} = \mathcal{E}(M^2)_\infty$; de plus comme $\mathcal{E}(M^2)_\infty > 0$ P.ps , P' est équivalente à P .

En appliquant le corollaire III-2

$\tilde{M}^1 = M^1 - \sum_{0<u\leq \cdot} \frac{\Delta M_u^1 \Delta M_u^2}{1+\Delta M_u^2}$ est une P'-martingale locale à variation localement intégrable.Comme le P-compensateur prévisible de $\sum_{0<u\leq \cdot} |\Delta M_u^1|$ est borné,il en est de même pour le P'-compensateur prévisible de $\sum_{0<u\leq \cdot} |\Delta \tilde{M}_u^1|$,et $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)$ est P'-uniformément intégrable d'après II-3 a). $\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty$ est alors défini et fini P'.ps donc P.ps ;on peut définir $\mathcal{E}(M)_\infty = \mathcal{E}(M^2)_\infty \, \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty$. $|\mathcal{E}(M)_\infty|$ est P-intégrable puisque $E\left[|\mathcal{E}(M)_\infty|\right] = E_{P'}\left[|\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty|\right]$.

Maintenant $E_{P'}\left[\mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{E\left[\mathcal{E}(M^2)_\infty \, \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]}{E\left[\mathcal{E}(M^2)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]}$

et donc $\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(\tilde{M}^1)_t \, \mathcal{E}(M^2)_t = E\left[\mathcal{E}(M)_\infty \mid \mathcal{F}_t\right]$
d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.DELLACHERIE : Capacités et processus stochastiques
Springer-verlag (1972)

[2] C.DOLEANS-DADE : Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales.
Z.Wahr.. 16 181-214 (1970)

[3] J.JACOD : Projection prévisible et décomposition multiplicative d'une semimartingale positive; à paraitre aux Sem. Proba.XII
Lectures notes in Maths. Springer-Verlag.

[4] J.JACOD J.MEMIN : Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales.
Z.Wahr.. 35 1-37 (1976)

[5] D.LEPINGLE J.MEMIN: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles
à paraitre aux Z.Wahr..

[6] P.A.MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques.Sem.Proba.X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag

[7] P.A.MEYER : Notes sur les intégrales stochastiques II-Le théorème fondamental sur les martingales locales. Sem.Proba. XI
Lectures notes in Maths. 581 Springer-Verlag

[8] P.A.MEYER C.YOEURP :Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag

[9] C.YOEURP :Décompositions de martingales locales et formules exponentielles. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths.511 Springer-Verlag

[10] C.YOEURP M.YOR : Espace orthogonal à une semimartingale et applications . à paraitre aux Z.Wahr..

[11] M.YOR : Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sem.Proba. X
Lectures notes in Maths. 511 Springer-Verlag