DOMINIQUE LÉPINGLE

Une inégalité de martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 134-137
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__134_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UNE INEGALITE DE MARTINGALES

par D.Lepingle

Dans [2], P.A.Meyer utilise et redémontre à cette occasion une intéressante inégalité due à E.Stein [3]: si $(Z_n, n\geq 1)$ est une suite de v.a., si $(\underline{\underline{F}}_n, n\geq 0)$ est une suite croissante de tribus, et si $1<p<\infty$, il existe une constante a_p telle que

$$(I_p) \qquad \|(\textstyle\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_p \leq a_p \,\|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_p$$

S'il existait une inégalité I_1 , on aurait aussi par dualité une inégalité I_∞ . En effet, si $\|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty<\infty$,

$$\|(\textstyle\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_\infty = \sup \sum_n E\big[E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]H_n\big]$$

pour toutes les suites (H_n) vérifiant $E\big[(\sum_n H_n^2)^{1/2}\big]\leq 1$. Mais

$$E\big[E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]H_n\big] = E\big[E[H_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]Z_n\big] \quad ,$$

d'où

$$\|(\textstyle\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_\infty \leq \|(\sum_n E[H_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2)^{1/2}\|_1 \;\; \|(\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty$$
$$\leq a_1' \,\|(\textstyle\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_\infty \quad .$$

On peut vérifier sur l'exemple suivant qu'il n'y a pas d'inégalité I_∞.

Exemple. Prenons

$$\Omega = [0,1[$$

$$Z_n = 1_{[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}[} \quad , \quad n\geq 1$$

$\underline{\underline{F}}_n$ $(n\geq 0)$ tribu sur Ω engendrée par les intervalles $[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[$.

Nous avons $\sum_n Z_n^2 = 1$, tandis que

$$(\textstyle\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2)^{1/2} = \frac{k^{1/2}}{2} \qquad \text{sur } [\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}[\quad ,$$

et cette expression n'est pas bornée sur $[0,1[$.

Pourtant, nous allons voir que l'inégalité I_1 existe avec $a_1=2$, à condition d'imposer une condition supplémentaire : les Z_n sont $\underline{\underline{F}}_n$-mesurables (cela ne marche toujours pas pour $p=\infty$ car les Z_n du contre-exemple ci-dessus sont bien $\underline{\underline{F}}_n$-mesurables) . La démonstration est tout à fait différente de celles de Stein et Meyer, elle est en fait intimement liée au théorème de dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$, et peut en être considérée comme une conséquence. Cependant, on la redonne ci-dessous in extenso, car elle est plutôt plus simple que la preuve de la dualité $\underline{\underline{H}}^1$-$\underline{\underline{BMO}}$.

THEOREME . Soit $(\underline{\underline{F}}_n, n\geq 0)$ une suite croissante de sous-tribus dans $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, $(Z_n, n\geq 1)$ une suite de v.a. adaptée à (F_n) . Alors

$$E\left[\left(\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]^2\right)^{1/2}\right] \leq 2\, E\left[\left(\sum_n Z_n^2\right)^{1/2} \right] .$$

DEMONSTRATION. Nous supposons le second membre fini et posons

$$z_n = E[Z_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}] .$$

Alors

$$E\left[\left(\sum_n z_n^2\right)^{1/2}\right] = \sup E\left[\sum_n z_n H_n \right] ,$$

où la suite (H_n) parcourt la boule unité du dual $L^\infty(\ell^2)$ de $L^1(\ell^2)$. Si

$$h_n = E[H_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}] ,$$

alors

$$E[z_n H_n] = E[z_n h_n] = E[Z_n h_n] .$$

Posons

$$X_0 = 0 \qquad X_n = \sum_{k=1}^n z_k^2$$
$$Y_0 = 0 \qquad Y_n = \sum_{k=1}^n h_k^2 ,$$

et majorons

$$\sum_n E[|Z_n||h_n|] = E\left[\sum_n \frac{|Z_n|}{X_n^{1/4}} X_n^{1/4} |h_n| \right]$$
$$\leq \left(E\left[\sum_n \frac{Z_n^2}{X_n^{1/2}}\right]\right)^{1/2} \left(E\left[\sum_n X_n^{1/2} h_n^2\right]\right)^{1/2} .$$

Pour le premier terme,

$$E\Big[\sum_n \frac{Z_n^2}{X_n^{1/2}}\Big] = E\Big[\sum_n \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n^{1/2}}\Big] \leq 2E\Big[\sum_n (X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\Big] = 2E[X_\infty^{1/2}] \ .$$

Pour le second terme,

$$E\Big[\sum_n X_n^{1/2}\, h_n^2\Big] = E\Big[\sum_n X_n^{1/2}\, (Y_n - Y_{n-1})\Big] = E\Big[\sum_n (Y_\infty - Y_{n-1})(X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\Big]$$

Comme (Z_n) est adaptée, (X_n) est adaptée et cela montre que le dernier terme est égal à $E\Big[\sum_n (E[Y_\infty - Y_{n-1} | \underline{\underline{F}}_n])(X_n^{1/2} - X_{n-1}^{1/2})\Big]$. Mais

$$E[Y_\infty - Y_{n-1} | \underline{\underline{F}}_n] = h_n^2 + E\Big[\sum_{k>n} h_k^2 | \underline{\underline{F}}_n\Big] \leq h_n^2 + E\Big[\sum_{k>n} H_k^2 | \underline{\underline{F}}_n\Big] \leq 2 \quad ,$$

d'où

$$E\Big[\sum_n X_n^{1/2}\, h_n^2\Big] \leq 2\, E[X_\infty^{1/2}] \ .$$

On aura reconnu presque exactement la méthode due à C.Herz de démonstration de la dualité $\underline{\underline{H}}^1$-$\underline{\underline{BMO}}$, cependant nous n'avons pas prononcé du tout le mot "martingale" (sauf dans le titre!) . Nous avons plutôt démontré le résultat suivant:

<u>si la racine carrée de la variation quadratique d'un processus optionnel (discret) est intégrable, c'est vrai aussi pour le compensateur prévisible de ce processus</u>.

Il est facile en reprenant la démonstration d'obtenir également l'inégalité suivante, sous la même condition pour (Z_n) :

$$E\Big[\big(\sum_n (Z_n - E[Z_n | \underline{\underline{F}}_{n-1}])^2\big)^{1/2}\Big] \leq 2\sqrt{2}\, E\,\big(\sum_n Z_n^2\big)^{1/2}$$

(la meilleure constante est quelque part entre 2 et $2\sqrt{2}$) . Cette fois-ci, c'est bien un résultat de martingales : <u>si la racine carrée de la variation quadratique d'un processus optionnel</u> A <u>est intégrable, la martingale compensée de</u> A <u>est dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

Le passage au temps continu ne présente pas de difficulté : si X optionnel est tel que $\{X \neq 0\}$ soit à coupes dénombrables et si $E\big[(\sum_t X_t^2)^{1/2}\big] < \infty$, alors X admet une projection prévisible $\hat{X}$, il existe une unique martingale N dans $\underline{\underline{H}}^1$ somme compensée de sauts telle que $\Delta N = X - \hat{X}$ et

$$E\,[[N,N]_\infty^{1/2}] \leq 2\sqrt{2}\, E\big[(\sum_t X_t^2)^{1/2}\big] \ .$$

En particulier, si M est une martingale locale, si H est optionnel et si

$$E\Big[\Big(\int_0^\infty H_s^2\, d[M,M]_s\Big)^{1/2}\Big] < \infty ,$$

alors l'intégrale optionnelle H.M vérifie [1,lemme V.18]

$$E\big[[H.M,H.M]_\infty^{1/2}\big] \leqslant 2\sqrt{2}\, E\Big[\Big(\int_0^\infty H_s^2\, d[M,M]_s\Big)^{1/2}\Big] \quad .$$

REFERENCES

[1] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire Proba. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer, Berlin (1976).

[2] P.A. MEYER : Martingales locales fonctionnelles additives II. (à paraître).

[3] E.M. STEIN : Topics in harmonic analysis . Princeton (1970).