PAUL-ANDRÉ MEYER

La théorie de la prédiction de F. Knight

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 86-103
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__86_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

LA THEORIE DE LA PREDICTION DE F.KNIGHT

par P.A. Meyer

Cet exposé analyse un mémoire de Knight, " a predictive view of continuous time processes", à paraître aux Annals of Probability,* qui est extrêmement riche en idées nouvelles, et me semble être l'un des plus importants de ces dernières années.

Je remercie vivement Frank Knight pour son exposé au séminaire de Strasbourg, et les nombreuses conversations dont le présent travail est l'aboutissement.[1]

I. LE POINT DE VUE DE KNIGHT SUR LES PROCESSUS

Soit E un espace métrique séparable, muni de sa tribu borélienne $\underline{\underline{E}}$, et soit $(\xi_t)_{t\geq 0}$ un processus mesurable à valeurs dans E, défini sur un espace probabilisé $(W,\underline{\underline{G}},P)$. Le point de départ de Knight est la remarque (qui est aussi à l'origine du point de vue des "distributions aléatoires") que si le processus a des trajectoires peu régulières, l'inertie des appareils de mesure ne permet pas d'observer les valeurs instantanées $\xi_t(w)$, mais seulement des moyennes de la forme

$$(1)\qquad I_a^b(f,w) = \int_a^b f(\xi_s(w))ds$$

où f est borélienne bornée sur E. Ce point de vue amène à identifier deux trajectoires égales p.p. au sens de Lebesgue, et à filtrer W par la famille de tribus $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{T}}\;(\; I_a^b(f)\;,\; a<b\leq t\;)$. Il a été développé par plusieurs auteurs, par exemple Ito [1],[2], Dellacherie-Meyer [1], mais toujours avec l'intention de choisir de bonnes versions du processus. Knight, lui, prend une direction entièrement différente : il développe la théorie de la prédiction du processus par rapport aux tribus $\underline{\underline{G}}_t$. C'est cela qu'on va exposer.

---

1. La rédaction précédente a été considérablement améliorée à la suite de discussions avec Marc Yor, à qui vont aussi tous mes remerciements.

*. Vol 3, 1975, p.573-596.

Puisque le processus (ξ_t) est seulement supposé mesurable, ses trajectoires peuvent être très irrégulières. Décidons donc que le topologie de E ne nous intéresse pas, que seul l'espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ nous importe. Or c'est un espace mesurable séparable et séparé, il est bien connu qu'on peut l'identifier à une partie (non nécessairement borélienne) de l'intervalle $[0,1]$, munie de la tribu induite par $\underline{\underline{B}}([0,1])$. Grâce à cette identification, nous pouvons considérer (ξ_t) comme un processus mesurable <u>à valeurs dans</u> $[0,1]$.

Si la topologie nous intéressait, nous plongerions E comme sous-espace topologique de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ - c'est ce que fait Knight, mais nous laisserons cela de côté.

Désignons maintenant par Ω l'ensemble de toutes les applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\omega(0)=0$, croissantes, et lipschitziennes de rapport 1 ($|\omega(t)-\omega(s)|\leq|t-s|$). Posons $L_t(\omega)=\omega(t)$, $\underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{T}}(L_s\ ,\ s\in\mathbb{R}_+)$, $\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(L_s,\ s\leq t\ )$. Il est bien donnu qu'une application lipschitzienne est dérivable p.p., et l'intégrale de sa dérivée. Posons donc $\delta_0(\omega)=0$, $\delta_t(\omega) = \lim\sup_n n(\omega(t)-\omega(t-\frac{1}{n}))$. Le processus (δ_t) est mesurable sur Ω, à valeurs dans $[0,1]$, et l'on a $L_t(\omega) = \int_0^t \delta_s(\omega)ds$. Considérons l'application suivante de W dans Ω

$$\varphi(w) = (\ t \longmapsto \int_0^t \xi_s(w)ds\ ) \in \Omega$$

Elle est mesurable de $\underline{\underline{G}}$ dans $\underline{\underline{F}}^o$, de $\underline{\underline{G}}_t$ dans $\underline{\underline{F}}^o_t$. Nous dirons que $\varphi(w)$ est la <u>pseudo-trajectoire</u> de w . Il faut noter cependant que φ dépend du plongement de E dans $[0,1]$ (une définition intrinsèque des pseudo-trajectoires est donnée dans Dellacherie-Meyer [1], mais cela n'apporterait rien au présent travail). On a $\varphi(w)=\varphi(w')$ si et seulement si $\xi_\cdot(w)= \xi_\cdot(w')$ p.p., et la connaissance de $\varphi(w)$ entraîne celle de $I_a^b(f,w)$ pour toute f borélienne bornée sur E. En effet, soit g borélienne bornée sur $[0,1]$ prolongeant f, on a

$$I_a^b(f,w) = \int_a^b g\circ\delta_s(\varphi(w))ds \quad .$$

Il en résulte aisément que $\underline{\underline{G}}_t=\varphi^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_t)$. La méthode de Knight consiste à transporter P sur Ω au moyen de l'application φ , à utiliser les excellentes propriétés de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ})$ pour faire une théorie de la prédiction sur Ω, et à revenir ensuite sur W. En revanche, cet exposé-ci va oublier le problème initial, omettre presque entièrement le retour sur W , et développer la théorie de Knight en utilisant aussi peu que possible les propriétés spéciales de l'espace Ω, de manière à pouvoir l'étendre à d'autres espaces "canoniques". Nous ne chercherons cependant pas le maximum de généralité.

PROPRIETES DE L'ESPACE Ω

Tout d'abord, Ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ est un espace compact métrisable, dont $\underline{\underline{F}}^{\circ}$ est la tribu borélienne. Nous désignerons par M_1 l'ensemble des lois de probabilité sur Ω, par M l'ensemble $M_1\cup\{0\}$ - la mesure 0 jouant ici le rôle du point ∂ en théorie des processus de Markov - que nous munirons de la topologie de la convergence étroite sur Ω, pour laquelle il est compact, 0 étant isolé. La tribu borélienne de M sera notée $\mathfrak{M}$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, nous définirons $\theta_t\omega\in\Omega$ par la formule

$$L_s(\theta_t\omega) = L_{s+t}(\omega) - L_t(\omega) \tag{2}$$

Le lecteur familier avec les opérateurs θ_t de la théorie des processus de Markov pourra trouver cela inhabituel, mais il faut qu'il se rappelle que les "vraies" trajectoires sont les dérivées des fonctions ω , et que les θ_t opèrent vraiment par "translation" sur les dérivées. On a $\theta_0=I$, $\theta_s\theta_t=\theta_{s+t}$, et l'application $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ est mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^{\circ}$ dans $\underline{\underline{F}}^{\circ}$ - elle est même continue, mais ceci ne sera pas utilisé.

A côté des opérateurs de translation, il nous sera très commode d'utiliser les opérateurs de raccordement ainsi définis. Etant donnés $\omega,\omega'\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}_+$, nous construisons $\omega/t/\omega'$ par la formule

$$\begin{aligned} L_s(\omega/t/\omega') &= L_s(\omega) \text{ pour } s\leq t \\ &= L_t(\omega) + L_{s-t}(\omega') \text{ pour } s\geq t \end{aligned} \tag{3}$$

L'application $(\omega,t,\omega')\mapsto\omega/t/\omega'$ est continue, mais nous ne nous servirons que de sa mesurabilité. Noter que $\theta_t(\omega/t/\omega')=\omega'$.

Nous poserons $\underline{\underline{F}}^o_{0-} = \underline{\underline{F}}^o_0$. En raison de la continuité du processus (L_t), nous aurons donc $\underline{\underline{F}}^o_{t-}=\underline{\underline{F}}^o_t$ pour tout t, mais cette propriété ne sera pas utilisée non plus. Nous désignerons par $\underline{\underline{P}}$ (tribu prévisible) la tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t-})$ et continus à gauche sur $]0,\infty[$, par $\underline{\underline{O}}$ (tribu optionnelle ou bien-mesurable) la tribu engendrée par les processus adaptés à $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ et à trajectoires càdlàg. (continues à droite et limitues à gauche).

Nous allons raisonner sur Ω, mais en préparant le plus possible la généralisation à d'autres espaces, qui sera examinée dans un court paragraphe IV. Les considérations spéciales à l'espace des fonctions lipschitziennes seront placées entre astéristques $*\ldots_*$.

II. THEORIE DE LA PREDICTION SUR L'ESPACE CANONIQUE Ω

Lorsqu'il a écrit son article, Knight ne connaissait pas le travail de Schwartz sur les désintégrations régulières, qu'il a en partie redécouvert. Ce travail fournit pourtant la voie d'approche la plus rapide et la plus compréhensible. J'aimerais renvoyer le lecteur à Schwartz [1], ou à l'exposé sur les résultats de Schwartz contenu dans le volume VII du séminaire, mais malheureusement (ou heureusement) c'est impossible. En effet, la théorie de Schwartz concerne un espace <u>probabilisé</u> filtré, alors que celle de Knight concerne un espace <u>mesurable</u> filtré, et construit un système de prédicteurs qui marche pour toutes les lois μ simultanément. Cela me semble une différence essentielle entre les deux points de vue.

Dans ce paragraphe, les opérateurs Θ_t et ./././. ne sont pas utilisés. Bien que nous parlions de $\Omega,\underline{\underline{F}}^o$, $\underline{\underline{F}}^o_t$ avec leurs sens antérieurs, la généralisation est immédiate : $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ peut être un espace compact métrisable quelconque muni de sa tribu borélienne, et d'une filtration $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ par des sous-tribus <u>séparables</u> de $\underline{\underline{F}}^o$.

μ désignant un élément de M, nous noterons au moyen de E_μ, P_μ des espérances ou probabilités , absolues ou conditionnelles, relatives à μ . En toute rigueur, P_μ est inutile : c'est μ tout simplement ! Mais la notation est plus parlante.

Première étape.

Le point de départ est le lemme suivant, dans lequel t est *fixe*.

LEMME 1. *Pour toute mesure* $\mu \in M$, *il existe un noyau* $\tilde{K}_t^\mu$ *de* $(\Omega, \underline{\underline{F}}_t^o)$ *dans* $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ *possédant les propriétés suivantes*

1) *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *la masse totale de* $\tilde{K}_t^\mu(\omega)$ *est* 1 *ou* 0 (*i.e.*, $\tilde{K}_t^\mu(\omega,.) \in M$), *et si* $\mu=0$, $\tilde{K}_t^\mu(\omega,.)=0$ *pour tout* ω.
2) *Pour toute v.a.* Y *sur* Ω, $\underline{\underline{F}}^o$*-mesurable et bornée*, $E_\mu[Y|\underline{\underline{F}}_t^o])=\tilde{K}_t^\mu(.,Y)$ μ-*p.s.*.
3) *L'application* $(\mu,\omega) \mapsto \tilde{K}_t^\mu(\omega,.)$ *de* $(M \times \Omega, \mathfrak{M} \times \underline{\underline{F}}_t^o)$ *dans* $(M, \mathfrak{M})$ *est mesurable*.

(Esquisse de la démonstration : $\underline{\underline{F}}_t^o$ est séparable, donc engendrée par la réunion d'une suite croissante de tribus finies $\underline{\underline{H}}_n$. Pour toute loi μ, on construit de manière explicite le noyau d'espérance conditionnelle E_n^μ donnant $E_\mu[.|\underline{\underline{H}}_n]$, au moyen de la partition engendrant $\underline{\underline{H}}_n$, et en convenant que $0/0=0$. Alors E_n^μ dépend mesurablement de μ, et les mesures $E_n^\mu(\omega,.)$ ont masse 1 ou 0. Puis on pose $\tilde{K}_t^\mu(\omega,.) = \lim_n E_n^\mu(\omega,.)$ si cette limite existe dans la topologie étroite, 0 si elle n'existe pas. Elle existe en fait μ-p.s. d'après le théorème de convergence des martingales).

Knight ne construit pas tout de suite des noyaux donnant $E_\mu[Y|\underline{\underline{F}}_t^o]$, mais plutôt des noyaux donnant $E_\mu[Y \circ \theta_t|\underline{\underline{F}}_t^o]$. Nous verrons qu'on passe aisément des uns aux autres.

Seconde étape : régularisation.

a) Pour t rationnel, on choisit arbitrairement $\tilde{K}_t^\mu$ comme dans le lemme 1. On le modifie - sans changer de notation - de la manière suivante : si pour un rationnel $s<t$, $\tilde{K}_s^\mu(\omega,.)=0$, alors on remplace $\tilde{K}_t^\mu(\omega,.)$ par 0.

b) Soit $\xi^\mu(\omega)$ la borne supérieure de l'intervalle $I^\mu(\omega)$[1] formé des t tels que : pour tout rationnel $s<t$, toute fonction $Y \in \underline{\underline{C}}(\Omega)$, la fonction $\tilde{K}_{\bullet}^\mu(\omega,Y)$ sur les rationnels ait une limite à droite en tout

1. $I^\mu(\omega) = [0,\xi^\mu(\omega)]$ ou $[0,\xi^\mu(\omega)[$.

point de $[0,s[$, une limite à gauche en tout point de $]0,s]$.

On a $t\notin I^{\mu}(\omega)$ si et seulement s'il existe un rationnel $s<t$ et deux rationnels $a<b$ tels que le nombre de montées de $\tilde{K}^{\mu}_{\cdot}(\omega,Y)$ par dessus $[a,b]$, sur les rationnels de $[0,s]$, soit égal à $+\infty$. Il en résulte que ξ^{μ} est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$, et que $(\mu,\omega)\longmapsto \xi^{\mu}(\omega)$ est mesurable. D'autre part, la théorie des martingales entraîne que $\mu\{\xi^{\mu}<\infty\} = 0$ pour toute loi μ, Modifions alors $\tilde{K}^{\mu}_{t}(\omega,.)$ - sans changer de notations - en lui donnant la valeur 0 si $t\notin I^{\mu}(\omega)$. Le noyau ainsi modifié continue à satisfaire au lemme 1 pour t rationnel, et de plus la limite à droite le long des rationnels existe <u>partout</u>, la limite à gauche le long des rationnels existe <u>partout</u>, <u>sauf peut être au point</u> $\xi^{\mu}(\omega)$.

Nous convenons maintenant de poser, pour tout t

(4) - $K^{\mu}_{t}(\omega,.) = \tilde{K}^{\mu}_{t+}(\omega,.)$, limite à droite le long des rationnels.

- $K^{\mu}_{0-}(\omega,.)= \tilde{K}^{\mu}_{0}(\omega,.)$ et, pour $t>0$

- $K^{\mu}_{t-}(\omega,.)= \tilde{K}^{\mu}_{t-}(\omega,.)$ limite à gauche le long des rationnels si celle ci existe,

$= 0$ si la limite n'existe pas.

Nous résumerons les propriétés de K^{μ}_{t} dans l'énoncé suivant :

LEMME 2. a) <u>Pour</u> $Y\in\underline{\underline{C}}(\Omega)$, <u>le processus</u> $(K^{\mu}_{t}(.,Y))$ <u>est une version continue à droite de la martingale</u> $(E_{\mu}[Y|\underline{\underline{F}}^{o}_{t+}])$.

b) <u>Posons</u> $\zeta^{\mu}(\omega)= \inf\{ t : K^{\mu}_{t}(\omega)=0\}$. <u>Alors</u> $K^{\mu}_{t}(\omega)=0$ <u>pour</u> $t\geqq\zeta^{\mu}$, $K^{\mu}_{t}\in M_1$ <u>pour</u> $t<\zeta^{\mu}$, <u>et l'on a</u> $\mu\{ \zeta^{\mu}<\infty \} = 0$.

c) <u>Pour</u> $Y\in\underline{\underline{C}}(\Omega)$, <u>la fonction</u> $K^{\mu}_{\cdot}(\omega,Y)$ <u>admet une limite à gauche en tout point de l'intervalle</u> $]0,\zeta^{\mu}(\omega)[$.

d) <u>La fonction</u> $(\mu,t,\omega)\longmapsto K^{\mu}_{t}(\omega,.)$ <u>est mesurable de</u> $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^{o}$ <u>dans</u> $(M,\mathfrak{M})$.

Il est facile de voir sur la construction que $(\mu,\omega)\longmapsto K^{\mu}_{t-}(\omega)$ est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o}_{t-}$-mesurable, mais on peut seulement affirmer que $(\mu,\omega)\longmapsto K^{\mu}_{t}(\omega)$ est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o}_{t+\varepsilon}$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$, <u>ce qui n'est pas la même chose</u> qu'être $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o}_{t+}$-mesurable. La rédaction précédente énonçait, à cet égard, un résultat faux. De même, il est facile de démontrer, soit directement, soit au moyen du théorème de Blackwell (la tribu $\underline{\underline{P}}$ étant une sous-tribu séparable de la tribu de Blackwell $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$) que l'application $(\mu,(t,\omega))\longmapsto K^\mu_{t-}(\omega,.)$ est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{P}}$-mesurable, mais on n'a pas le même résultat pour $(\mu,(t,\omega))\longmapsto K^\mu_t(\omega,.)$ relativement à $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{O}}$, car $\underline{\underline{O}}$ n'est pas une tribu séparable. Cela crée des difficultés techniques considérables par moment[1].

La topologie de Ω a entièrement disparu de l'énoncé suivant :

THEOREME 1. <u>Pour tout processus mesurable borné</u> $X=(X_t)$, <u>pour toute loi</u> μ, <u>le processus</u>

(5) $\quad K^\mu.X \;:\; (t,\omega)\longmapsto \int K^\mu_t(\omega,dw)X_t(w)$

<u>est une projection optionnelle de</u> X <u>pour</u> μ, <u>et le processus</u>

(6) $\quad K^\mu_-.X \;:\; (t,\omega)\longmapsto \int K^\mu_{t-}(\omega,dw)X_t(w)$

<u>une projection prévisible de</u> X <u>pour la loi</u> μ.

DEMONSTRATION. C'est un argument simple de classes monotones, à partir du cas où $X_t(\omega)=a(t)Y(\omega)$ avec $Y\in\underline{\underline{C}}(\Omega)$. Comme l'application $(t,\omega)\longmapsto a(t)$ est $\underline{\underline{P}}$-mesurable, on se trouve ramené au fait que $K^\mu_\bullet(\bullet,Y)$ est une version continue à droite de la martingale $E_\mu[Y|\underline{\underline{F}}^\circ_t]$, et $K^\mu_{\bullet-}(\bullet,Y)$ le processus des limites à gauche correspondant.

PROPRIETES DES NOYAUX K^μ_t

Nous pouvons améliorer le théorème 1 de la façon suivante - le lecteur énoncera le résultat analogue pour la tribu prévisible.

LEMME 3. <u>Soit</u> $X(t,\omega,t',\omega')$ <u>une fonction bornée mesurable par rapport à</u> $\underline{\underline{O}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$. <u>Alors une projection optionnelle</u> (<u>pour la loi</u> μ) <u>du processus</u> $X(t,\omega,t,\omega)$ <u>est donnée par</u>

(7) $$(t,\omega)\longmapsto \int K_t(\omega,dw)X(t,\omega,t,w).$$

DEMONSTRATION. On raisonne par classes monotones à partir du cas où $X(t,\omega,t',\omega')= a(t,\omega)b(t',\omega')$, $\underline{a}$ optionnel, $\underline{b}$ mesurable.

Dans l'énoncé qui suit, nous nous refusons à tenir compte du fait que $\underline{\underline{F}}^\circ_t=\underline{\underline{F}}^\circ_{t-}$ dans le cas particulier où Ω est l'espace des fonctions lipschitziennes : le résultat (dû à Schwartz) est bien plus général.

LEMME 4. <u>Pour</u> μ-<u>presque tout</u> ω, <u>pour tout</u> t, $K^\mu_t(\omega)$ <u>est portée par l'atome de</u> $\underline{\underline{F}}^\circ_{t-}$ <u>qui contient</u> ω.

1. Voir dans ce volume l'article de Yor

DEMONSTRATION. Les tribus $\underline{\underline{F}}^o_t$ étant séparables, il est bien connu que $\underline{\underline{P}}$ est séparable, de sorte qu'il existe une application $j(s,\omega)$ de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ dans $[0,1]$ engendrant la tribu $\underline{\underline{P}}$. Ainsi $j(s,\omega)=j(s',\omega')$ si et seulement si (s,ω) et (s',ω') appartiennent au même atome de $\underline{\underline{P}}$, i.e. si $s=s'$ et ω et ω' appartiennent au même atome de $\underline{\underline{F}}_{s-}$. Si f est une fonction borélienne bornée sur $[0,1]\times[0,1]$, la fonction $X(t,\omega,t',\omega')=f(j(t,\omega),j(t',\omega'))$ satisfait aux hypothèses du lemme 3, comme on le voit aussitôt en partant du cas où $f(x,y)=a(x)b(y)$. Prenons alors $f(x,y) = I_{\{x\neq y\}}$: le processus $X(t,\omega,t,\omega)$ est identiquement nul, donc sa projection optionnelle est μ-indistinguable de 0. Ainsi le processus J^μ défini par

$$J^\mu(t,\omega) = \int K^\mu_t(\omega,dw)I_{\{j(t,\omega)\neq j(t,w)\}}$$

est μ-évanescent, et cela signifie exactement ce que l'on cherche.

<u>Remarque</u>. Le lemme 4 s'applique aussi aux K^μ_{t-} .

*Dans le cas qui nous intéresse, l'atome de $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ contenant ω est l'ensemble des w coïncidant avec ω sur $[0,t]_*$.

Le résultat suivant est également dû à Schwartz.

LEMME 5. <u>Pour tout</u> t, <u>pour tout</u> $s\leq t$, <u>on a pour</u> μ-<u>presque tout</u> ω

$$(8)\qquad K^\mu_t(\omega) = K_t^{K^\mu_s(\omega)}(\omega)$$

<u>Plus généralement</u>, <u>on peut remplacer</u> s <u>par un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{u+})$ <u>majoré par</u> t .

DEMONSTRATION. Nous laissons au lecteur l'extension aux temps d'arrêt. Le membre de gauche est une fonction $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable. Du côté droit, on sait que $(\lambda,\omega)\longmapsto K^\lambda_t(\omega)$ est mesurable de $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$ dans $\mathfrak{M}$ pour tout $\varepsilon>0$, tandis que $\omega\mapsto K^\mu_s(\omega)$ est mesurable de $\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$ dans $\mathfrak{M}$ du fait que s est majoré par t. Par composition, on voit que $\omega\longmapsto K_t^{K^\mu_s(\omega)}(\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$, donc $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable. Ce point étant vérifié, il nous suffit de montrer que, pour toute Y bornée $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, toute U bornée $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable, on a

$$(9)\qquad E_\mu[U(\omega)K^\mu_t(\omega,Y)] = E_\mu[U(\omega)K_t^{K^\mu_s(\omega)}(\omega,Y)]$$

Le côté gauche vaut

$$E_\mu[U.E_\mu[Y|\underline{\underline{F}}^o_{t+}]]=E_\mu[UY] = E_\mu[E_\mu[UY|\underline{\underline{F}}^o_{s+}]]=E_\mu[K^\mu_s(.,UY)] =$$

$$= E_\mu[E_{K_s^\mu(\omega)}[UY]] = E_\mu[E_{K_s^\mu(\omega)}[E_{K_s^\mu(\omega)}[UY|\underline{\underline{F}}^o_{t+}]]$$
$$= E_\mu[E_{K_s^\mu(\omega)}[UK_t^{K_s^\mu(\omega)}(.,Y)]$$

Le côté droit : Posons $U(\omega)K_t^\lambda(\omega,Y) = f(\lambda,\omega)$, fonction $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Posons $K_s^\mu(\omega,.) = k(\omega)$, fonction $\underline{\underline{F}}^o_{s+}$-mesurable à valeurs dans M. Alors le côté droit de (9) s'écrit

$$E_\mu[f(k(\omega),\omega))] = E_\mu[E_\mu[f(k(\omega),\omega))|\underline{\underline{F}}^o_{s+}]$$
$$= E_\mu[\int K_s^\mu(\omega,dw)f(k(\omega),w)]$$

(argument de classes monotones à partir du cas où $f(\lambda,\ )=a(\lambda)b(\ )$, si l'on veut)

$$= E_\mu[E_{K_s^\mu(\omega)}[UK_t^{K_s^\mu(\omega)}(.,Y)]$$

qui est la même que l'expression obtenue pour le côté gauche. L'égalité (9) est bien vérifiée.

Traduisons ce lemme suivant les idées de Knight : le processus de prédiction (K_t^μ) à valeurs dans M est un processus de Markov non homogène .

PROPOSITION 1. <u>Posons pour</u> $s<t$, $\lambda\in M$, $A\in\mathfrak{M}$

(10) $$Q_{s,t}(\lambda,A) = \lambda\{\ \omega : K_t^\lambda(\omega)\in A\ \}^{(1)}$$

<u>Alors nous avons pour toute mesure</u> $\mu\in M_1$

(11) $$P_\mu\{\ \omega : K_t^\mu(\omega)\in A\ |\ \underline{\underline{F}}^o_{s+}\} = Q_{s,t}(K_s^\mu,A) \quad \mu\text{-}\underline{p.s}.$$

DEMONSTRATION. Soit $f(\lambda,\omega)$ l'indicatrice de l'ensemble $\{(\lambda,\omega) : K_t^\lambda(\omega)\in A\ \}$; elle est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Soit aussi $k(\omega)=K_s^\mu(\omega)$, qui est $\underline{\underline{F}}^o_{s+}$-mesurable. Du côté gauche de (11), nous avons d'après le lemme 5 $P_\mu\{\ \omega : K_t^{K_s^\mu(\omega)}(\omega)\in A|\underline{\underline{F}}^o_{s+}\ \} = E_\mu[f(k(\omega),\omega))|\underline{\underline{F}}^o_{s+}]$. D'après la démonstration du lemme 5, cela s'écrit $\int K_s^\mu(\omega,dw)f(k(\omega),w))$, et c'est le côté droit de (11). Cette démonstration était fausse dans la première rédaction, et a été corrigée par B. Maisonneuve.

Nous allons maintenant nous occuper de perfectionner le lemme 4. Pour cela, nous allons introduire un langage abrégé. Nous dirons

---

1. Il n'y a pas d'erreur : s figure à gauche, mais non à droite.

qu'une loi λ est t_--dégénérée (resp. t_+-dégénérée) si la tribu $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ (resp. $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$) est dégénérée pour la loi λ . Comme $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ est séparable, dire que λ est t_--dégénérée revient à dire que λ est portée par un atome de $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$, et nous pouvons donc dire, de manière plus précise, que λ est t_--dégénérée en $\omega\in\Omega$ si λ est portée par l'atome de $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ qui contient ω. Ainsi, le lemme 4 s'énonce ainsi

Pour toute loi μ, pour μ-presque tout ω, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la mesure $K^\mu_t(\omega,.)$ est t_--dégénérée en ω .

La méthode de Knight va nous donner le résultat suivant :

PROPOSITION 2. Pour toute loi μ, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, on a la propriété suivante

pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $K^\mu_t(\omega)$ est t_+-dégénérée .

(Mais comme $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ n'est pas séparable en général, cela ne signifie pas que $K^\mu_t(\omega)$ est portée par l'atome de $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ contenant ω, i.e. par l'ensemble des ω' coïncidant avec ω sur un voisinage de $[0,t]$).

DEMONSTRATION. Nous commençons par un résultat auxiliaire : l'ensemble des (λ,t) tels que λ soit t_+-dégénérée est borélien.

En effet, à quoi reconnaît on que λ est t_+-dégénérée ? Au fait que l'opérateur d'espérance conditionnelle $E_\lambda[.|\underline{\underline{F}}^o_{t+}]$ est égal à l'opérateur d'espérance E_λ, ou encore au fait que $\lambda\{\omega : K^\lambda_t(\omega)\neq\lambda\}=0$. Or la fonction $(\lambda,\mu,\nu,t)\longmapsto\lambda\{\omega : K^\mu_t(\omega)\neq\nu\}$ est borélienne (argument de classes monotones à partir de la fonction $E_\lambda[a(K^\mu_t(\omega))b(\nu)]$). Il en résulte que $(\lambda,t)\longmapsto\lambda\{K^\lambda_t\neq\lambda\}$ est borélienne.

L'ensemble des (s,ω) tels que $K^\mu_s(\omega)$ ne soit pas s_+-dégénérée est alors l'image réciproque d'un borélien par la fonction optionnelle $(s,\omega)\longmapsto(K^\mu_s(\omega),s)$; il est donc optionnel, et pour montrer qu'il est μ-évanescent, il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt S on a pour μ-presque tout ω

$$K^\mu_{S(\omega)}(\omega)\{\,w : K^{K^\mu_{S(\omega)}(\omega)}_{S(\omega)}(w)\neq K^\mu_{S(\omega)}(\omega)\} = 0$$

(pour mieux comprendre, d'abord, le lecteur pourra traiter le cas où S est constant !). Cela revient à montrer que

(12) $\qquad \int K^\mu_S(\omega,dw)f(k(\omega),w) = 0$

où f est la fonction sur $(M\times\mathbb{R}_+)\times\Omega$ indicatrice de $\{((\lambda,s,w) : K_s^\lambda(w)\neq\lambda\}$, qui est $(\underline{\underline{M}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, tandis que $k(\omega)$ est la fonction de Ω dans $M\times\mathbb{R}_+$ $\omega\mapsto(K^\mu_{S(\omega)}(\omega),S(\omega))$, qui est $\underline{\underline{F}}^\circ_{S+}$-mesurable.

Un argument de classes monotones à partir du cas où $f(\lambda,s,\omega)= a(\lambda)b(s)c(\omega)$ montre que (12) s'interprète comme

$$E_\mu[f(k(\omega),\omega)\,|\,\underline{\underline{F}}^\circ_{S+}]$$

Il nous suffit donc de montrer que $f(k(\omega),\omega)=0$ μ-p.s. Or appliquons le lemme 5 à t rationnel et au temps d'arrêt $S\wedge t$. Il vient que pour tout t rationnel on a

$$K_t^\mu(\omega) = K_t^{K_S^\mu(\omega)}(\omega) \quad \text{sur } \{t>S\} \qquad (\mu\text{-p.s.}).$$

Par continuité à droite, on a μ-p.s. cela pour tout t réel $\geqq S(\omega)$. En particulier, pour $t=S(\omega)$, on a μ-p.s.

$$K^\mu_{S(\omega)}(\omega) = K_{S(\omega)}^{K_S^\mu(\omega)}(\omega) \quad \text{i.e. } f(K_S^\mu(\omega),S(\omega),\omega)=0 \ \mu\text{-p.s. .}$$

III. PREDICTION DU FUTUR

Nous faisons intervenir maintenant les opérateurs θ_t (et ./././., dont l'emploi n'est pas indispensable, mais est très commode), et nous abordons la théorie de Knight proprement dite.

Nous définissons les mesures de Knight par

(13) $\qquad Z_t^\mu(\omega,Y) = K_t^\mu(Y\circ\theta_t) \quad , \quad Z_{t-}^\mu(\omega,Y) = K_{t-}^\mu(Y\circ\theta_t)$

* Nous rencontrons ici un trait particulier à l'espace Ω des fonctions lipschitziennes : celui-ci est compact pour une topologie naturellement liée à son opérateur de translation, et si Y appartient à $\underline{\underline{C}}(\Omega)$, $t\mapsto Y\circ\theta_t$ est continue pour la convergence uniforme, et $Y\circ\theta_t$ appartient à $\underline{\underline{C}}(\Omega)$. Il est alors très facile de déduire des propriétés des K_t^μ que le processus (Z_t^μ) est continu à droite pour la topologie étroite, limitu à gauche, et que le processus de ses limites à gauche est (Z_{t-}^μ). Mais il s'agit là d'une propriété qui ne s'étend pas à des espaces canoniques excellents, auxquels tout le reste de la théorie s'applique* : <u>en général</u>, <u>on ne peut affirmer ni que le processus</u> (Z_t^μ) <u>soit continu à droite pour la topologie étroite de</u> M, <u>ni que le processus</u> (Z_{t-}^μ) <u>apparaisse comme le processus des limites à gauche de</u>

(Z_t^μ). Aussi n'utiliserons nous pas ces propriétés. Pour plus de détails, consulter dans ce volume l'article de Yor.

Le système des Z_t^μ rend les mêmes services que celui des K_t^μ. En effet, le lemme 4 nous dit que pour μ-presque tout ω, $K_t^\mu(\omega)$ est, pour tout t, t_--dégénérée en ω. D'autre part

LEMME 6. *Soient λ une mesure t_--dégénérée en $\omega\in\Omega$, γ la mesure image de λ par θ_t, $C_{\omega,t}$ l'application $w\mapsto\omega/t/w$. Alors λ est l'image de γ par $C_{\omega,t}$.*

DEMONSTRATION. Soit Y $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable bornée ; on a

$$< \lambda,Y> = \int\lambda(dw)Y(w/t/\theta_t w)$$. Mais λ est portée par l'atome de $\underline{\underline{F}}^\circ_{s-}$ contenant ω, donc $w/t/\theta_t w=\omega/t/\theta_t w$ λ-p.s.

$$= \int\lambda(dw)Y(\omega/t/\theta_t w)$$

$$= \int\mu(du)Y(\omega/t/u) = <\mu,Y\circ C_{\omega,t}> .$$

Ainsi, nous pouvons exprimer explicitement les K_t^μ au moyen des Z_t^μ. Mais en fait nous n'avons pas besoin de ce lemme pour établir le théorème suivant, qui résume les propriétés des Z_t^μ :

THEOREME 2. a) *L'application $(\mu,t,\omega)\mapsto Z_t^\mu(\omega)$ (resp. $Z_{t-}^\mu(\omega)$) est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable ; pour toute mesure μ, le processus (Z_t^μ) est optionnel, le processus (Z_{t-}^μ) prévisible.*

b) *Pour tout processus mesurable borné $X=(X_t)$, toute loi μ, le processus*

(14) $$(t,\omega)\longmapsto \int Z_t^\mu(\omega,dw)X_t(\omega/t/w)$$

est une projection optionnelle de X pour la loi μ, et le processus

(15) $$(t,\omega)\longmapsto \int Z_{t-}^\mu(\omega,dw)X_t(\omega/t/w)$$

une projection prévisible de X.

DEMONSTRATION. a) Si $H(t,\omega)$ est une fonction $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable bornée, les applications $(\mu,t,\omega)\mapsto\int K_t^\mu(\omega,dw)H(t,dw)$; $(t,\omega)\mapsto \int K_t^\mu(\omega,dw)H(t,w)$; $(t,\omega)\mapsto\int K_{t-}^\mu(\omega,dw)H(t,w)$ sont respectivement mesurable, optionnelle, prévisible (partir du cas où $H(t,\omega)=a(t)b(\omega)$). D'où a) en prenant $H(t,\omega)=Y(\theta_t\omega)$.

Pour b), traitons par exemple le cas optionnel. Nous nous ramenons au cas où X est de la forme $a(t)H(\omega)$, puis où $X_t(\omega)=H(\omega)$ seulement.

Dans ce cas, le processus (14) vaut

$$\int Z_t^\mu(\omega,dw)H(\omega/t/w) = \int K_t^\mu(\omega,dw)H(\omega/t/\theta_t w)$$

Nous vérifions que l'application $((t,\omega),w)\longmapsto H(\omega/t/\theta_t w)$ est $\underline{\underline{P}}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Alors, pour vérifier que le processus (14) est optionnel, il nous suffit de montrer que si $U((t,\omega),w)$ est $\underline{\underline{P}}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, le processus $(t,\omega)\longmapsto \int K_t^\mu(\omega,dw)U(t,\omega,\theta_t w)$ est optionnel. On commence alors par le cas où $U(t,\omega,w)=a(t,\omega)b(w)$, $\underline{a}$ prévisible, $\underline{b}$ mesurable , et on fait le raisonnement usuel de classes monotones.

Quant au fait que (14) est projection optionnelle de X, c'est le lemme 6 : ce processus est μ-indistinguable de $K^\mu\cdot X$.

Nous démontrons maintenant un lemme important, analogue au lemme 5 pour les K_t^μ . La première rédaction le présentait avec des notations un peu différentes, et en "laissant au lecteur" une extension aux temps d'arrêt présumée facile. A la relecture, je me suis aperçu que je ne savais pas la faire sous cette forme ! Voir la remarque suivant le lemme, et surtout l'article de Yor dans ce volume.

LEMME 7. <u>Pour tout couple</u> (s,t), <u>pour toute loi</u> μ, <u>on a</u>

$$(16)\qquad Z^\mu_{s+t}(\omega) = Z_t^{Z_s^\mu(\omega)}(\theta_s\omega)\quad \mu\text{-}\underline{\text{p.s.}}.$$

DEMONSTRATION. Il est clair que le côté gauche est une fonction $\underline{\underline{F}}^o_{(s+t)+}$-mesurable. Montrons le pour le côté droit. Nous écrivons que pour tout $\varepsilon>0$ $(\lambda,w)\longmapsto Z_t^\lambda(w)$ est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mesurable, et que $\omega\longmapsto (Z_s^\mu(\omega),\theta_s\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{s+t+\varepsilon}/\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$ -mesurable. Par composition, le côté droit est $\underline{\underline{F}}^o_{s+t+\varepsilon}$-mesurable pour tout ε, i.e. $\underline{\underline{F}}^o_{(s+t)+}$-mesurable.

Il nous suffit donc de montrer que pour toute v.a. U, $\underline{\underline{F}}^o_{(s+t)+}$-mes. bornée, toute Y $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable bornée, on a

$$(17)\qquad E_\mu[U(\omega)Z^\mu_{s+t}(\omega,Y)] = E_\mu[U(\omega)Z_t^{Z_s^\mu(\omega)}(\theta_s\omega,Y)]$$

Je dis qu'il existe une fonction $\overline{U}(\omega,w)$ sur $\Omega\times\Omega$, $\underline{\underline{F}}^o_{s-}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable [1], possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout ω, $\overline{U}(\omega,.)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable
- $U(\omega)=\overline{U}(\omega,\theta_s\omega)$.

C'est très facile : il suffit de poser $\overline{U}(\omega,w)=U(\omega/s/w)$. La vérification

1. Pour ce lemme, $\underline{\underline{F}}^o_{s+}\times\underline{\underline{F}}^o$ est ce qu'il nous faut : le $\underline{\underline{F}}^o_{s-}$ intervient dans l'énoncé analogue pour les $Z^\mu_{\cdot-}$.

des deux propriétés de mesurabilité ne pose pas de problème : si U est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, $(\omega,w)\longmapsto U(\omega/s/w)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{s-}\times\underline{\underline{F}}^o$-mes. (regarder les générateurs), et si U est $\underline{\underline{F}}^o_{s+t+\varepsilon}$-mesurable, cette application est même $\underline{\underline{F}}^o_{s-}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mes., donc pour ω fixe $U(\omega/s/.)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mes., après quoi on fait tendre ε vers 0.

Calculons alors (17). Le côté gauche vaut, comme $Z^\mu_{s+t}(.,Y) = E_\mu[Y\circ\theta_{s+t}|\underline{\underline{F}}^o_{(s+t)+}]$ μ-p.s., et U est $\underline{\underline{F}}^o_{(s+t)+}$-mesurable

(*) $E_\mu[U.Y\circ\theta_{s+t}] = E_\mu[E_\mu[U.Y\circ\theta_{s+t}|\underline{\underline{F}}^o_{s+}]]$

On vérifie maintenant, par un argument de classe monotone, que pour toute fonction $V(\omega,w)$, $\underline{\underline{F}}^o_{s+}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable[1] et bornée, on a

$$E_\mu[V(\omega,\theta_s\omega)|\underline{\underline{F}}^o_{s+}] = \int Z^\mu_s(\omega,dw)V(\omega,w) \quad \mu\text{-p.s.} \tag{18}$$

Prenant $V(\omega,w)=\overline{U}(\omega,w)Y(\theta_t w)$, l'espérance de droite en (*) devient

$$E_\mu[\ E_{Z^\mu_s(\omega)}[\overline{U}(\omega,.)Y\circ\theta_t(.)]\ ]$$

A l'intérieur de $E_{Z^\mu_s(\omega)}[\ ]$, remplaçons la v.a. par son espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$, pour la mesure $Z^\mu_s(\omega)$: ici ω est fixe, donc $\overline{U}(\omega,.)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable, et la définition des Z^λ_t nous donne :

$$E_\mu[\ E_{Z^\mu_s(\omega)}[\ \overline{U}(\omega,.)Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(Y)]\ . \tag{19}$$

Du côté droit de (17), maintenant, nous appliquons à nouveau (18), avec $V(\omega,w)=\ \overline{U}(\omega,w)Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(w,Y)$, qui est $\underline{\underline{F}}^o_{s+}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Remplaçant la v.a. sous le signe E_μ par son espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}^o_{s+}$, nous trouvons alors

$$E_\mu[\ \int Z^\mu_s(\omega,dw)\overline{U}(\omega,w)Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(w,Y)] \tag{20}$$

qui est bien la même chose que (19). Le lemme est établi.

1. Voir note page précédente.

REMARQUE. Passons au remplacement de s par un temps d'arrêt S de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, que nous supposerons fini. Quelles sont les modifications à apporter à la démonstration ?
Dans (16), tout d'abord, le côté gauche est $\underline{\underline{F}}^o_{(S+t)+}$-mesurable. Du côté droit, il nous faut savoir, pour recopier le raisonnement, que pour tout $\varepsilon>0$ θ_S est $\underline{\underline{F}}^o_{S+t+\varepsilon}/\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mesurable, et Z^μ_S $\underline{\underline{F}}^o_{S+t+\varepsilon}$-mesurable, ce qui est bien vrai.

Le point délicat est maintenant le suivant : <u>étant donnée une v.a.</u> U , $\underline{\underline{F}}^o_{(S+t)+}$-<u>mesurable</u>, <u>existe t'il une fonction</u> $\overline{U}(\omega,w)$, $\underline{\underline{F}}^o_{S-}\times\underline{\underline{F}}^o$-<u>mesurable</u>, <u>telle que pour tout</u> ω $U(\omega,.)$ <u>soit</u> $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-<u>mesurable</u>, <u>et que</u> $U(\omega) = \overline{U}(\omega,\theta_S\omega)$ <u>identiquement</u> ? La réponse est <u>oui</u>, mais le choix évident $\overline{U}(\omega,w)=U(\omega/S(\omega)/w)$ ne marche pas. Nous renverrons à l'article de Yor dans ce volume pour la démonstration.

Ce point étant admis, le reste de la démonstration est le même que pour les temps constants.

Nous en arrivons au théorème principal de Knight. C'est un résultat <u>très remarquable</u>, qui exprime que, pour toute loi μ , le processus (Z^μ_t) est un processus markovien homogène, avec un semi-groupe de transition (borélien par construction) qui ne dépend pas de la loi μ. Compte tenu de la remarque précédente, ce processus est même <u>fortement</u> markovien.

THEOREME 3. <u>Posons pour</u> $\lambda\in M$, $A\in\mathfrak{M}$

(21) $$J_t(\lambda,A) = \lambda\{\ \omega\ :\ Z^\lambda_t(\omega,.)\in A\ \}$$

<u>Alors on a pour toute loi</u> μ

(22) $$P_\mu\{\ Z^\mu_{s+t}\in A\ |\underline{\underline{F}}^o_{s+}\ \} = J_t(Z^\mu_s,A)\quad \mu\text{-}\underline{\text{p.s.}}.$$

DEMONSTRATION. On a d'après (16)

$$P_\mu\{\ Z^\mu_{s+t}\in A\ |\ \underline{\underline{F}}^o_{s+}\ \} = P_\mu\{\ Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(\theta_s\omega)\in A\ |\underline{\underline{F}}^o_{s+}\ \}$$

Nous appliquons alors (18) avec $V(\omega,w) = I_A\circ Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(w)$, et nous obtenons pour cette espérance conditionnelle

$$P_{Z^\mu_s(\omega)}\{\ Z_t^{Z^\mu_s(\omega)}(.)\in A\ \} = J_t(Z^\mu_s(\omega),A)\ .\quad \text{cqfd}\ .$$

REMARQUES. a) Vérifions que les J_t forment un vrai semi-groupe :

$J_{s+t}(\mu,A) = P_\mu\{Z^\mu_{s+t}\in A\} = E_\mu[P_\mu\{Z^\mu_{s+t}\in A|\underline{\underline{F}}^o_{s+}\}] = E_\mu[J_t(Z^\mu_s,A)] = J_s(\mu,J_tI_A)$.

b) On a $\varepsilon_\mu J_0=\varepsilon_\mu$ si et seulement si $\mu\{Z^\mu_0=\mu\}=1$, ou encore si μ-p.s. $E_\mu[Y|\underline{\underline{F}}^o_{0+}]=\mu(Y)$ pour toute Y $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable bornée, ou encore si $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$ est une tribu dégénérée pour la loi μ.

c)* Dans le cas particulier de l'espace des fonctions lipschitziennes, nous avons signalé au début du § III que le processus (Z^μ_t) a des trajectoires p.s. continues à droite et limitues à gauche dans la topologie étroite de M . Pour le cas général, voir l'article de Yor.*

d) Comme $\mu\{\zeta^\mu=+\infty\}=1$ pour $\mu\in M_1$, les K^μ_t , donc les Z^μ_t , appartiennent p.s. à M_1 si $\mu\in M_1$. Le semi-groupe (J_t) est donc <u>markovien</u> sur M_1.

e) Soit S l'ensemble des lois sur Ω pour lesquelles $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$ est dégénérée. On a $\mu\in S$ si et seulement si $\varepsilon_\mu J_0=\varepsilon_\mu$, et S est borélien (prop.2 ou vérification directe). D'autre part, le processus (Z^μ_t) est μ-indistinguable d'un processus à valeurs dans S (prop. 2 ou vérification directe). C'est donc S qui est le véritable espace d'états du processus de prédiction. Pour une loi quelconque μ, la loi initiale du processus de Markov (Z^μ_t) est μJ_0 portée par S, et la formule

$$\mu(Y) = \int\mu(d\omega)J_0(\omega,Y)$$

"désintègre" μ suivant les mesures " extrémales", pour lesquelles $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$ est dégénérée. Les mesures $\mu\notin S$ jouent le rôle de points de branchement pour le processus de prédiction.

IV. RETOUR AU PROBLEME INITIAL

*Si l'on connaît la trajectoire $Z^\mu_\cdot(\omega)$, on peut reconstruire complètement l'application lipschitzienne ω de la manière suivante : modifions légèrement les v.a. δ_t que nous avons définies au début de l'exposé, en posant

(23) $$\delta_0 = \lim\sup_n n\omega(1/n) \ , \quad \delta_t=\delta_0\circ\theta_t$$

δ_0 est une v.a. $\underline{\underline{F}}^o_{0+}$-mesurable. Posons alors pour toute mesure $\mu\in M$

(24) $$p(\mu) = E_\mu[\delta_0]$$

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 8. <u>Pour μ-presque tout</u> ω, <u>on a pour tout</u> t

(25) $$\omega(t) = \int_0^t p(Z_s^\mu(\omega))ds \; .$$

DEMONSTRATION. Considérons le processus mesurable $(\delta_t)=(\delta_0\circ\theta_t)$; le processus $\varepsilon_t = E_{Z_t^\mu}[\delta_0] = p(Z_t^\mu)$ en est une projection optionnelle pour la loi μ. Mais le processus (δ_t) est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$, donc $\delta_t=\varepsilon_t$ p.s. pour chaque t, et le théorème de Fubini entraîne que pour μ-presque tout ω on a $\delta_t(\omega)=\varepsilon_t(\omega)$ pour presque tout t, donc $\int_0^t \varepsilon_s(\omega)ds=\int_0^t \delta_s(\omega)ds$. On conclut en remarquant que, ω étant lipschitzienne, est l'intégrale de sa dérivée, donc $\omega(t)=\int_0^t \delta_s(\omega)ds$, d'où le même résultat pour ε_s.

Revenons alors au problème du début : nous sommes partis d'un espace probabilisé $(W,\underline{\underline{G}},P)$ sur lequel nous était donné un processus (ξ_t) mesurable, à valeurs dans l'intervalle [0,1]. Nous avons construit une première version " canonique" de ce processus, qui était en fait le processus (δ_t) ci-dessus, sur l'espace Ω des applications lipschitziennes. Puis nous avons construit le processus de prédiction (Z_t^μ) sur Ω... et maintenant nous venons de déterminer une seconde version canonique de (ξ_t) , qui est le processus $\varepsilon_t=p(Z_t^\mu)$. Le fait remarquable, c'est que (Z_t^μ) est un processus de Markov à semi-groupe de transition homogène. Ainsi, si l'on se place du point de vue de Knight, tout processus (ξ_t) a " même loi" qu'un processus de la forme $(p\circ Z_t)$, où (Z_t) est un processus de Markov droit, p une fonction borélienne sur l'espace d'états de (Z_t).

Cela éclaire peut être le rôle des processus de Markov en théorie générale des processus, et la raison pour laquelle tant de théorèmes ont été établis d'abord pour les Markov, puis généralisés. L'exposé suivant montrera tout de même les limites de l'analogie markovienne.*

V. GENERALISATIONS

En ce qui concerne la partie " Schwartzienne" de l'exposé, nous avons déjà signalé que tout s'étendait au cas où $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ était un espace compact métrisable muni de sa tribu borélienne, et d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ se sous-tribus <u>séparables</u> de $\underline{\underline{F}}^\circ$. Ceci est plus général qu'il n'y paraît à première vue. En effet, soit $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ un espace mesurable lusinien non dénombrable (on suppose que $\underline{\underline{F}}^o$ sépare les points de Ω). Alors $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ est isomorphe à l'intervalle $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne (Dellacherie-Meyer [1], chap.III , n°80, p.248), de sorte qu'il existe une topologie compacte métrisable sur Ω - évidemment tout à fait artificielle - dont $\underline{\underline{F}}^o$ est la tribu borélienne.

Quant au reste de la théorie, je me garderai bien de faire de l'axiomatique. Je soulignerai simplement que tout ce qu'on a dit s'applique à l'espace des applications càdlàg. de $\mathbb{R}_+$ dans E polonais, muni de ses opérateurs usuels de translation et de raccordement, et que c'est là sans doute que la théorie de la prédiction s'avérera le plus utile. Les démonstrations de l'exposé ont été rédigées de telle manière qu'elles s'appliquent à cette situation sans en changer un mot.

BIBLIOGRAPHIE

C.Dellacherie et P.A.Meyer. [1]. Probabilités et potentiel, 2e éd. des chapitres I-IV. Hermann, Paris 1975.

K.Ito.[1]. The canonical modification of stochastic processes. J. M.Soc. Japan, 20, 1968, p.130-150

[2]. Canonical measurable random functions. Proc. Int.Conf. on Funct. Anal. p.369-377. Univ. of Tokyo Press, 1970.

L.Schwartz.[1]. Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. J.Anal. Math.,26,1973,p.1-168.