CLAUDE DELLACHERIE

Compléments aux exposés sur les ensembles analytiques et les temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 579-593

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__579_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

COMPLEMENTS AUX EXPOSES SUR LES ENSEMBLES ANALYTIQUES ET LES TEMPS D'ARRET

par C. Dellacherie

Depuis la parution du volume IX , plusieurs problèmes signalés ouverts dans ces exposés ont été résolus. La nouvelle la plus sensationnelle est que le logicien D.A. Martin a démontré que tous les jeux boréliens sont déterminés (cf "Borel Determinacy" Ann of Math 102 , 1975 , p 363-371). Un autre résultat, tout récent : St Raymond a établi que tout borélien à coupes $\underline{\underline{K}}_\sigma$ (dans un espace-produit métrisable compact) est réunion dénombrable de boréliens à coupes compactes - ce qui est, à mon avis, très profond. Par ailleurs, Mokobodzki (cf ce volume) et St Raymond ont trouvé indépendamment une démonstration du théorème de séparation de Novikov (dans un espace métrisable compact) qui ne fait pas intervenir le second théorème de séparation.

Nous allons étendre ici ce dernier résultat en un théorème d'approximation pour les multicapacités dépendant d'une infinité dénombrable de variables en utilisant essentiellement les idées de Mokobodzki. Puis nous montrerons, en nous inspirant notablement des travaux des logiciens, que la technique des temps d'arrêt permet de donner une démonstration très simple du théorème de section de Kondô-Novikov.

1. LE THEOREME DE NOVIKOV

Rappelons en l'énoncé : soit (A_n) une suite de parties analytiques d'un espace métrisable compact E. Si $\bigcap_n A_n = \emptyset$, il existe une suite (B_n) de boréliens de E tels que $A_n \subset B_n$ pour tout n et que $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

Définissons une fonction I de suites d'ensembles en posant, pour toute suite (H_n) de parties de E,

$$\begin{aligned} I[H_1,\dots,H_n,\dots] &= 0 \text{ si } \textstyle\bigcap_n H_n = \emptyset \\ &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Posons $E_n = E$ pour tout n : I est une fonction de $\underline{P}(E_1)\times\dots\times\underline{P}(E_n)\times\dots$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions suivantes

1) Si $H_i = \emptyset$ pour un i, $I[(H_n)] = 0$

2) I est globalement croissante :

$$H_i \subset H_i' \text{ pour tout } i \Rightarrow I[(H_n)] \leq I[(H_n')]$$

3) I monte séparément sur $\underline{P}(E_i)$, pour tout i : si tous les arguments H_n sont fixés sauf pour $n = i$, et si $H_i^k \uparrow H_i$, alors

$$I[H_1,..,H_{i-1},H_i^k,H_{i+1},\dots] \uparrow I[H_1,..,H_{i-1},H_i,H_{i+1},\dots]$$

4) si les H_n sont compacts, I descend séparément sur $\underline{\underline{K}}(E_i)$, pour tout i : si tous les arguments compacts H_n sont fixés sauf pour $n = i$, et si $H_n^k \downarrow H_n$, alors

$$I[H_1,..,H_{i-1},H_i^k,H_{i+1},\dots] \downarrow I[H_1,\dots,H_{i-1},H_i,H_{i+1},\dots]$$

5) si les H_n sont compacts, on a

$$\lim_n I[H_1,..,H_n,E_{n+1},..,E_{n+p},\dots] = I[H_1,..,H_n,H_{n+1},..,H_{n+p},\dots]$$

On vérifie aisément que, étant donné 2), les conditions 3) et 4) équivalent au fait que I descende globalement sur $\underline{\underline{K}}(E_1)\times.\times\underline{\underline{K}}(E_n)\times\dots$

Etendant au cas des suites infinies la définition 1 de notre exposé "Sur la construction des noyaux boréliens", nous dirons qu'une application I de $\underline{P}(E_1)\times.\times\underline{P}(E_n)\times\dots$ dans $[0,1]$ - où les E_n, métrisables compacts, peuvent être distincts - est une <u>multicapacité</u> si elle vérifie les conditions 1) à 5). Le théorème de Novikov résultera alors du théorème d'approximation suivant

THEOREME.- <u>Soit</u> I <u>une multicapacité sur une suite</u> (E_n) <u>d'espaces métrisables compacts</u>, <u>et</u>, <u>pour tout</u> n, <u>soit</u> A_n <u>une partie analytique de</u> E_n. <u>On a alors</u>

$$I(A_1,..,A_n,...) = \sup I(K_1,..,K_n,...) \,,\ K_i \in \underline{\underline{K}}(E_i) \,,\ K_i \subset A_i \text{ pour tout } i$$
$$= \inf I(B_1,..,B_n,...) \,,\ B_i \in \underline{\underline{B}}(E_i) \,,\ B_i \supset A_i \text{ pour tout } i$$

(<u>l'inf est atteint dans la seconde formule</u>)

DEMONSTRATION. Supposons la première formule établie et démontrons la seconde. Définissons une fonction J sur $\underline{P}(E_1)\times \ldots \times \underline{P}(E_n)\times\ldots$ par

$$J(H_1,..,H_n,...) = \inf I(B_1,..,B_n,...) \,,\ B_i \in \underline{\underline{B}}(E_i) \,,\ B_i \supset H_i \text{ pour tout } i$$

Comme I est globalement croissante, l'inf est atteint pour des boréliens $\overset{\frown}{H}_i$ (non uniquement déterminés). Et J est une multicapacité qui coincide avec I sur les suites de boréliens ; le seul point un peu délicat est la montée séparée de J. Supposons par exemple que $H_1^k \uparrow H_1$ et que $H_2,..,H_n,...$ sont fixés, et soient $\overset{\frown}{H}{}_1^k, \overset{\frown}{H}{}_2^k,..,\overset{\frown}{H}{}_n^k,...$ des boréliens correspondant à $H_1^k, H_2,..,H_n,...$: quitte à remplacer, pour $i \geq 2$, $\overset{\frown}{H}{}_i^k$ par $\bigcap_k \overset{\frown}{H}{}_i^k$, on peut supposer que les $\overset{\frown}{H}{}_i^k$ ne dépendent pas de k et donc supprimer l'indice k pour $i \geq 2$. Posons alors $\overset{\frown}{H}_1 = \liminf \overset{\frown}{H}{}_1^k$: comme on peut remplacer $\overset{\frown}{H}{}_1^k$ par $\bigcap_{m\geq k} \overset{\frown}{H}{}_1^m$, il résulte de la montée de I que $J(H_1^k,..,H_n,...) = I(\overset{\frown}{H}{}_1^k,..,\overset{\frown}{H}_n,...) \uparrow I(\overset{\frown}{H}_1,..,\overset{\frown}{H}_n,...) = J(H_1,..,H_n,...)$

Les multicapacités I et J coincidant sur les suites de compacts, elles coincident sur les suites d'analytiques d'après la première formule : d'où la seconde.

Démontrons maintenant la première formule. En utilisant un argument classique (espaces-produits auxiliaires etc), on se ramène au cas où A_n est un $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$ de E_n pour tout n. D'autre part, on peut évidemment supposer que $I(A_1,..,A_n,...) > 0$ et il nous suffit de montrer que, pour tout $t \in [0,1]$ tel que $I(A_1,..,A_n,...) > t$, il existe des compacts $K_i \subset A_i$ tels que $I(K_1,..,K_n,...) \geq t$. Le nombre t étant fixé, nous nous donnons, pour chaque n, une écriture de A_n sous la forme

$$A_n = \bigcap_q \bigcup_p {}_nL_p^q \quad \text{avec} \quad {}_nL_p^q \in \underline{\underline{K}}(E_n)$$

où, pour n et q fixés, ${}_nL_p^q$ croît avec p. Nous allons construire par récurrence, pour chaque n , une suite (K_n^m) de compacts de E_n vérifiant les conditions suivantes

a) $K_n^m = E_n$ pour $m \leq n$ (et donc $K_n^1 = E_n$)

b) $K_n^{m+1} \subset K_n^m \cap (\bigcup_p {}_nL_p^m)$

c) $I(A_1^m,..,A_n^m,...) > t$ où $A_n^m = A_n \cap K_n^m$ (et donc $= A_n$ pour $m \leq n$)

Il résultera alors de b) que, pour n fixé, (K_n^m) est une suite décroissante dont l'intersection K_n est contenue dans A_n , et on aura bien $I(K_1,..,K_n,...) \geq t$ d'après c) , la croissance globale de I et ses propriétés de descente. Nous supposons les K_n^k construits pour tout $k \leq m$ et tout n , et nous construisons les K_n^{m+1} pour tout n . Comme on a, pour tout n ,

$$A_n^m = A_n \cap K_n^m = A_n \cap K_n^m \cap (\bigcup_p {}_nL_p^m)$$

et que I monte séparément sur les $\underline{P}(E_n)$, donc globalement sur $\underline{P}(E_1) \times ... \times \underline{P}(E_m)$, il existe des entiers $p_1,...,p_m$ tels que

$$I[A_1^m \cap {}_1L_{p_1}^m , ... , A_m^m \cap {}_mL_{p_m}^m , A_{m+1}^m , ... , A_n^m , ...] > t$$

et nous posons

$$K_n^{m+1} = K_n^m \cap {}_nL_{p_n}^m \quad \text{pour } n \leq m$$

$$K_n^{m+1} = E_n \quad \text{pour } n > m$$

Cela achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. On a bien entendu une forme abstraite du théorème, qui se démontre de la même manière, où, pour tout n , E_n est un ensemble muni d'un pavage semi-compact $\underline{\underline{K}}(E_n)$ stable pour $(\cup f, \cap f)$ et $\underline{\underline{B}}(E_n)$ est le stabilisé de $\underline{\underline{K}}(E_n)$ pour $(\cup d, \cap d)$.

Signalons encore, sans démonstration, une application du théorème de Novikov (donnée comme sujet d'examen en juin 75 !) :

THEOREME.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>des espaces métrisables compacts</u>. <u>Si</u> A <u>et</u> A' <u>sont deux parties analytiques disjointes de</u> $E \times F$ <u>telles que les coupes</u> A(y) <u>et</u> A'(y) <u>soient fermées pour tout</u> $y \in F$, <u>il existe deux boréliens disjoints</u> B <u>et</u> B' <u>de</u> $E \times F$, <u>contenant respectivement</u> A <u>et</u> A', <u>telles que les coupes</u> B(y) <u>et</u> B'(y) <u>soient ouvertes pour tout</u> $y \in F$.

2. LE THEOREME DE LUSIN-JANKOV

Ce théorème[1] assure que tout analytique dans un espace produit (métrisable compact) a une section par un graphe d'application universellement mesurable. Nous le démontrons ici, sous une forme "canonique" , comme introduction au théorème de Kondô. Il est beaucoup plus simple que ce dernier, dont la démonstration fera intervenir la théorie de l'indice.

Nous commençons par rappeler quelques faits élémentaires sur les temps d'arrêt, en étendant et modifiant légèrement les définitions introduites dans les exposés de l'année dernière. Ces rappels seront complétés au paragraphe suivant.

Soit X un ensemble non vide, muni de la topologie discrète. Un <u>temps d'arrêt</u> T sur $X^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit, est une application de $X^{\mathbb{N}}$ dans $\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ vérifiant la condition

$$\forall n\geq 0 \quad \forall u,v\in X^{\mathbb{N}} \quad T(u)>n \text{ et } u|n=v|n \Rightarrow T(v)>n$$

où $u|n$ désigne la suite finie $u(1),\dots,u(n)$ si $n>0$ et la suite vide, notée ϕ , si $n=0$. Nous dirons que u est un <u>pôle</u> de T si $T(u) = \infty$; un temps d'arrêt fini est donc un temps d'arrêt sans pôles. L'ensemble des pôles d'un temps d'arrêt est un fermé de $X^{\mathbb{N}}$; réciproquement, si H est un fermé de $X^{\mathbb{N}}$, il existe un plus petit temps d'arrêt T dont H est l'ensemble des pôles, défini par

$$T(u) = \inf\{n\geq 0 : \forall v \quad u|n=v|n \Rightarrow v\notin H\}$$

D'autre part, si on munit l'ensemble $\underline{\underline{T}}(X^{\mathbb{N}})$ des temps d'arrêt sur $X^{\mathbb{N}}$ (noté $\underline{\underline{T}}$ s'il n'y a pas d'ambiguité) de la topologie de la convergence simple, $\underline{\underline{T}}$ est un espace compact et la fonction $(T,u)\to T(u)$ de $\underline{\underline{T}}\times X^{\mathbb{N}}$ dans $\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est continue. Si X est dénombrable, $X^{\mathbb{N}}$ est polonais et $\underline{\underline{T}}$ est métrisable compact. Dans ce cas, l'ensemble $\underline{\underline{P}}$ des temps d'arrêt à pôles est analytique[2], l'ensemble $\underline{\underline{P}}^c$ des temps d'arrêt finis est coanalytique, et ces ensembles sont universels en un certain sens si X est infini dénombrable.

---

1) Ce théorème a été aussi démontré par Von Neumann, et par Sion. Nous l'avons cité dans "Ensembles analytiques : ..." p 350

2) Si X est fini, tout t.d'a. fini est borné et $\underline{\underline{P}}$ est compact.

Maintenant, trouver une section d'un ensemble dans un espace produit, c'est choisir un point dans chaque coupe. Un choix se fait généralement en mettant un ordre et en choisissant le plus petit élément pour cet ordre. Mais on ne peut espérer avoir une "bonne" section que si ce choix a une certaine "effectivité" .

Regardons donc, d'abord, le problème du choix "effectif" d'un point dans une partie analytique "effectivement" donnée de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Nous posons, comme l'an dernier, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \Omega$ et $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}} = \Omega\times\Omega$: un temps d'arrêt sur $\Omega\times\Omega$ est donc un temps d'arrêt à deux variables sur Ω. Que l'on passe par les schémas de Souslin, ou les projections de fermés, se donner "effectivement" une partie analytique A de Ω (en un sens faible, que nous ne chercherons pas à préciser), c'est finalement se donner un temps d'arrêt T sur $\Omega\times\Omega$ tel que l'on ait

$$\omega \in A \iff \exists w \ T(\omega,w) = \infty$$

Désignons, pour chaque ω, par T_ω le temps d'arrêt sur Ω défini par $T_\omega(w) = T(\omega,w)$. On a donc

$$\omega \in A \iff T_\omega \text{ a un pôle}$$

et l'ensemble

$$H_T = \{(\omega,w) : w \text{ est un pôle de } T_\omega\}$$

est fermé dans $\Omega\times\Omega$. Munissons $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ du bon ordre défini comme suit

$$(m,p) < (n,q) \iff p < q \text{ ou } [p = q \text{ et } m < n]$$

puis $\Omega\times\Omega = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique associé : toute partie fermée non vide de $\Omega\times\Omega$ a un plus petit élément pour cet ordre. Supposons A non vide : H_T est fermé, non vide, et a donc un plus petit élément (ω_o,w_o), qui est le plus petit pôle de T . Le point choisi dans A est ω_o , et w_o est le plus petit pôle de T_{ω_o} pour l'ordre lexicographique sur $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

En regardant la dépendance de (ω_o,w_o) en fonction de T , on obtient le théorème suivant

THEOREME.- <u>Soient $\underline{\underline{T}}$ l'espace des temps d'arrêt sur</u> $\Omega\times\Omega$ <u>et $\underline{\underline{P}}$ le sous-espace analytique des temps d'arrêt à pôles</u>. <u>Il existe une</u>

<u>application</u> Ψ <u>de</u> $\underline{\underline{P}}$ <u>dans</u> $\Omega\times\Omega$ <u>telle que</u>

1) $\Psi(T)$ <u>soit un pôle de</u> T <u>pour tout</u> $T\in\underline{\underline{P}}$

2) <u>le graphe de</u> Ψ <u>soit coanalytique dans</u> $\underline{\underline{T}}\times\Omega\times\Omega$

3) Ψ <u>soit mesurable si</u> $\Omega\times\Omega$ <u>est muni de sa tribu borélienne et</u> $\underline{\underline{P}}$ <u>de la tribu engendrée par ses parties analytiques</u>.

DEMONSTRATION. Pour tout $T\in\underline{\underline{P}}$, posons, comme ci-dessus,

$\Psi(T)$ = le plus petit pôle de T pour l'ordre lexicographique défini sur $\Omega\times\Omega$

On a

$$(\omega_0,w_0)=\Psi(T) \Leftrightarrow T(\omega_0,w_0)=\infty \text{ et } \forall(\omega,w)\ T(\omega,w)=\infty \Rightarrow (\omega_0,w_0)\leqq(\omega,w)$$

Comme le graphe de l'ordre lexicographique sur $\Omega\times\Omega$ est fermé, on en déduit immédiatement que le graphe de Ψ est coanalytique. D'autre part, on a, pour tout (ω,w),

$$\Psi(T)<(\omega,w) \quad\Leftrightarrow\quad \exists(\omega',w')\ T(\omega',w')=\infty \text{ et } (\omega',w')<(\omega,w)$$

On en conclut que l'image réciproque de $J_{\omega,w}=\{(\omega',w') : (\omega',w')<(\omega,w)\}$ par Ψ est analytique. Comme les ouverts $J_{\omega,w}$ engendrent la tribu borélienne de $\Omega\times\Omega$, Ψ a bien la mesurabilité désirée.

COROLLAIRE (Lusin-Jankov) <u>Soit</u> H <u>une partie analytique d'un espace produit</u> $E\times F$ <u>métrisable compact. Il existe une section de</u> H <u>par un graphe d'application universellement mesurable définie sur la projection de</u> H <u>sur</u> E.

DEMONSTRATION[1]. Tout espace métrisable compact étant plongeable par un isomorphisme borélien dans Ω, on se ramène aussitôt au cas où H est une partie analytique de $\Omega\times\Omega$. Il existe alors un temps d'arrêt U sur $\Omega\times\Omega\times\Omega$ tel que l'on ait $(v,\omega)\in H \Leftrightarrow \exists w\ U(v,\omega,w)=\infty$. Et U définit une application continue $v\to U(v,.,.)$ de Ω dans $\underline{\underline{T}}(\Omega\times\Omega)$. Les ensembles analytiques étant universellement mesurables, il suffit, pour obtenir la section voulue, de composer cette application avec l'application Ψ de $\underline{\underline{P}}$ dans $\Omega\times\Omega$ et la 1ère projection de $\Omega\times\Omega$ sur Ω.

---

1) Il existe une démonstration beaucoup plus directe, reposant sur une idée voisine. Voir par exemple la nouvelle édition de "Probabilités et potentiels" p 251.

3. LE THEOREME DE NOVIKOV-KONDO

Le théorème de Novikov dont il est question ici montre comment on peut choisir "effectivement" un point dans un coanalytique. Le théorème de Kondô assure que tout coanalytique dans un espace produit (métrisable compact) a une section par un graphe coanalytique. (Nous discuterons, à la fin, de l'intérêt de ce théorème pour les analystes).

Le lien entre ces deux théorèmes est clair : pour avoir le théorème de Kondô, il doit "suffire" d'appliquer le théorème de Novikov à chaque coupe. Il semble cependant que ce "suffire" ait posé quelque problème. L'article de Novikov (et Lusin) date de 1935, celui de Kondô de 1938 - je ne les ai jamais vus -, et, jusque vers 1960, le théorème de Kondô passait auprès des spécialistes pour un des théorèmes les plus difficiles de la théorie descriptive des ensembles.

En nous inspirant d'une démonstration trouvée dans un cours manuscrit du logicien Kechris , nous allons donner une démonstration lumineuse de ces deux théorèmes. Disons, au passage, que les logiciens, non seulement connaissent bien depuis une quinzaine d'années les travaux classiques en théorie descriptive des ensembles (ils manipulent en particulier depuis longtemps les temps d'arrêt sous la forme "arbre"), mais encore les ont englobés d'une manière magistrale dans leurs travaux sur l'effectivité. Malheureusement, les textes de synthèse publiés sont rares, et souvent difficilement abordables pour un non-logicien. En dehors des livres de H. Rogers et Shoenfield cités l'an dernier, et qui datent déjà, signalons l'excellent recueil d'exposés du Séminaire de théorie descriptive des ensembles (1974/75) publié par l'Equipe de Logique de l'Université de Paris VII. Par ailleurs, le logicien Moschovakis annonce depuis un certain temps une monographie de théorie descriptive lisible par tous : sachant, pour avoir lu la partie existante du manuscrit, que "lisible par tous" n'est pas un euphémisme, nous espérons qu'elle paraîtra bientôt.

Nous reprenons nos rappels sur les temps d'arrêt en reprenant maintenant la définition du dérivé et de l'indice d'un temps d'arrêt. Nous nous limitons au cas des temps d'arrêt sur Ω. Soit donc T un temps d'arrêt sur Ω. On définit le <u>dérivé</u> T^* de T par

$$T^* = \text{le plus petit temps d'arrêt} \geq T-1$$

puis la <u>suite transfinie des dérivés</u> successifs de T par[1]

$$T^{i+1} = (T^i)^* \quad \text{pour tout ordinal } i$$

$$T^j = (\inf_{i<j} T^i)^* \quad \text{pour tout ordinal limite } j$$

Il existe alors un plus petit ordinal dénombrable $i(T)$ tel que $T^{i(T)} = T^{i(T)+1} = \ldots$; en fait, $T^{i(T)}$ est le plus petit temps d'arrêt ayant les mêmes pôles que T. On a donc

$$T \text{ est fini} \Leftrightarrow T^{i(T)} = 0 \qquad T \text{ a un pôle} \Leftrightarrow T^{i(T)} \neq 0$$

On définit l'<u>indice</u> $j(T)$ de T par $j(T) = i(T)$ si T est fini et $j(T) = \underline{\Omega}$, premier ordinal non dénombrable, sinon. Quand T parcourt $\underline{\underline{T}}$, on obtient ainsi une application surjective de $\underline{\underline{T}}$ sur le segment d'ordinaux $[0,\underline{\Omega}]$: $\underline{\underline{P}}$ est envoyé sur $\{\underline{\Omega}\}$ et $\underline{\underline{P}}^c$ sur $I = [0,\underline{\Omega}[$, ensemble des ordinaux dénombrables[3]. Et on a le théorème fondamental suivant

THEOREME.- <u>L'ensemble</u> $\{(S,T) : j(S) \leq j(T)\}$ <u>est une partie analytique de l'espace métrisable compact</u> $\underline{\underline{T}} \times \underline{\underline{T}}$.

La démonstration de ce théorème reposait sur deux idées : l'une, essentielle, était l'introduction de la notion de codage ou stratégie[2]; l'autre, la mise en place de la possibilité d'un raisonnement par récurrence. Nous reprenons ici ce dernier point, essentiel pour la suite.

---

1) La définition n'est pas tout à fait celle de "Ensembles analytiques et temps d'arrêt", ni celle de "Jeux infinis..." . Elle conduit à l'indice signalé dans la note 1) de la page 378 de "Ensembles analytiques et temps d'arrêt", qui a de meilleures propriétés que ceux considérés principalement dans ces exposés.

2) Dans "Jeux infinis..." , p 401, nous avons montré d'après Blackwell que le lemme fondamental sur les codages résulte facilement du théorème de Gale et Stewart. Signalons qu'il existe une démonstration par l'absurde, très simple, de ce dernier théorème : voir par exemple l'article de D. Martin cité dans l'introduction.

3) Si on adopte la définition des ordinaux de Von Neumann, I et $\underline{\Omega}$ désignent le même ensemble.

Désignons par S l'ensemble des suites finies d'entiers (ϕ comprise). Pour tout $s\in S$, de longueur $l(s)$, et tout $T\in\underline{\underline{T}}$, on définit un temps d'arrêt T_s par la formule

$$T_s(\omega) = [T(s.\omega) - l(s)]^+$$

où $s.\omega$ désigne la suite obtenue en concaténant s et ω. On a alors $(T_s)^* = (T^*)_s$ pour tout t et tout s. Identifiant les suites de longueur un aux entiers, on vérifie aisément que l'on a, pour tout s et tout T fini,

$$T_s = 0 \iff j(T_s) = 0$$

$$T_s \neq 0 \iff j(T_s) = \sup_{k\in\mathbb{N}} [j(T_{s.k}) + 1] \qquad (\text{"1"} = \text{"un"})$$

La fonction $j_T : s \to j(T_s)$ de S dans I associée au temps d'arrêt fini T sera appelée la <u>fonction indice de</u> T (on a $j(T) = j_T(\phi)$).

Disons, plus généralement, qu'une fonction r de S dans I est une <u>fonction de rang du temps d'arrêt</u> T si on a, pour tout $s\in S$,

$$T_s = 0 \iff r(s) = 0$$

$$T_s \neq 0 \iff r(s) \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} [r(s.k) + 1]$$

On vérifie aisément que le temps d'arrêt T a une fonction de rang ssi il est fini et que, si T est fini, sa fonction indice est sa plus petite fonction de rang. On peut voir par ailleurs une fonction de rang r de T comme une fonction sur S, "surharmonique" sur l'arbre $\{s : T_s \neq 0\}$ pour une certaine opération de "moyenne", et voir la fonction indice j_T de T comme la fonction "harmonique" sur l'arbre $\{s : T_s \neq 0\}$, solution du problème de Dirichlet pour la donnée frontière $j_T(s) = 0$ si $T_s = 0$.

Nous munissons I de la topologie discrète, et I^S - ensemble des applications de S dans I - de la topologie de la convergence simple. Voici le lemme fondamental pour notre propos, dont la démonstration, à peu près immédiate, est laissée au lecteur.

LEMME. <u>L'ensemble</u> $\{(T,r) : r \text{ est une fonction de rang de } T\}$ <u>est une partie fermée de l'espace produit</u> $\underline{\underline{T}} \times I^S$.

REMARQUE. L'ensemble analytique $\underline{\underline{P}}$ est projection sur $\underline{\underline{T}}$ du fermé $\{(T,\omega)$: ω est un pôle de $T\}$ de $\underline{\underline{T}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: cela se traduit en une représentation par un certain schéma de Souslin, ou encore par une certaine application de $\underline{\underline{T}}$ dans l'ensemble des temps d'arrêt sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (en fait, l'identité !). D'après le lemme, si on identifie S à $\mathbb{N}$ par une bijection, l'ensemble coanalytique $\underline{\underline{P}}^c$ est projection sur $\underline{\underline{T}}$ du fermé $\{(T,r)$: r est une fonction de rang de $T\}$ de $\underline{\underline{T}} \times I^{\mathbb{N}}$: cela peut se traduire aussi en une représentation par un schéma de Souslin généralisé (les multiindices sont des suites finies d'ordinaux dénombrables) ou encore par une application de $\underline{\underline{T}}$ dans l'ensemble des temps d'arrêt sur $I^{\mathbb{N}}$. Nous ne développerons pas plus qu'il nous est nécessaire ici ces idées, simples et importantes, qui me semblent un apport essentiel des logiciens à la théorie classique.

Nous passons maintenant au théorème de Novikov-Kondô, en paraphrasant ce qui a été dit pour le théorème de Lusin-Jankov.

Se donner "effectivement" une partie coanalytique C de Ω, c'est finalement se donner un temps d'arrêt T sur $\Omega \times \Omega$ tel que l'on ait

$$\omega \in C \iff \forall w \; T(\omega,w) < \infty$$

soit encore, en introduisant l'application continue $\omega \to T_\omega$ de Ω dans $\underline{\underline{T}}(\Omega)$ induite par T,

$$\omega \in C \iff T_\omega \text{ est fini} \iff T_\omega \text{ a une fonction de rang}$$

et, d'après le lemme précédent, l'ensemble

$$H_T = \{(\omega,r) : r \text{ est une fonction de rang de } T_\omega\}$$

est fermé dans $\Omega \times I^S$. Identifions S et $\mathbb{N}$ par une bijection, ce qui permet d'identifier $\Omega \times I^S$ et $(\mathbb{N} \times I)^{\mathbb{N}}$, y compris pour les topologies. Puis munissons $\mathbb{N} \times I$ du bon ordre défini comme suit

$$(m,i) < (n,i) \iff i < j \text{ ou } [i=j \text{ et } m < n]$$

et $\Omega \times I^S = (\mathbb{N} \times I)^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique associé. Si C est non vide, H_T est fermé, non vide, dans $(\mathbb{N} \times I)^{\mathbb{N}}$ et a donc un plus petit élément (ω_o, r_o). Le point choisi dans C est ω_o, et r_o est la fonction indice du temps d'arrêt T_{ω_o}.

En regardant la dépendance de ω_o en fonction de T - on oublie ici r_o - on obtient le théorème suivant

THEOREME.- <u>Soient</u> $\underline{\underline{T}}$ <u>l'espace des temps d'arrêt sur</u> $\Omega \times \Omega$ <u>et</u> $\underline{\underline{Q}}$ <u>le sous-ensemble</u> $\{T \in \underline{\underline{T}} : \exists\omega\ \forall w\ T(\omega,w) < \infty\}$. <u>Il existe une application</u> Ψ <u>de</u> $\underline{\underline{Q}}$ <u>dans</u> Ω <u>telle que</u>

1) $T(\Psi(T),.)$ <u>soit un temps d'arrêt fini sur</u> Ω <u>pour tout</u> $T \in \underline{\underline{Q}}$

2) <u>le graphe de</u> Ψ <u>soit coanalytique dans</u> $\underline{\underline{T}} \times \Omega$

DEMONSTRATION. Après avoir identifié S à $\mathbb{N}$ par une bijection $k \to s_k$, on pose comme ci-dessus

$\Psi(T)$ = la 1ère composante du plus petit élément de H_T pour l'ordre lexicographique sur $\Omega \times I^S$

Notons que, pour T et ω fixés, $H_T \cap (\{\omega\} \times I^S)$ est fermé dans $\Omega \times I^S$; il a donc, s'il n'est pas vide, un plus petit élément qui n'est autre que la fonction indice j_{T_ω} du temps d'arrêt fini T_ω sur Ω.
Par conséquent, on a $\omega_o = \Psi(T)$ ssi on a

$$T_{\omega_o} \in \underline{\underline{P}}^c(\Omega) \text{ et } \forall\omega\ [\omega \neq \omega_o \Rightarrow j(T_{\omega_o}) < j(T_\omega) \text{ ou } (T_\omega \in \underline{\underline{P}}^c(\Omega) \text{ et } \ldots)]$$

où "..." est le prédicat

$$\exists m\ \forall k < m \quad \omega_o(k) = \omega(k) \text{ et } j_{T_{\omega_o}}(s_k) = j_{T_\omega}(s_k) \text{ et}$$
$$[j_{T_{\omega_o}}(s_m) < j_{T_\omega}(s_m) \text{ ou } (j_{T_{\omega_o}}(s_m) = j_{T_\omega}(s_m) \text{ et } \omega_o(m) < \omega(m))]$$

Comme l'application $(T,\omega) \to T_\omega$ de $\underline{\underline{T}} \times \Omega$ dans $\underline{\underline{T}}(\Omega)$ est continue, il nous reste finalement à vérifier, pour conclure que le graphe de Ψ est coanalytique, que les prédicats suivants sur $\underline{\underline{T}}(\Omega) \times \underline{\underline{T}}(\Omega)$

(1) $j(U) < j(V)$ (2) $U \in \underline{\underline{P}}^c$ et $V \in \underline{\underline{P}}^c$ et $j(U) < j(V)$

(3) $U \in \underline{\underline{P}}^c$ et $V \in \underline{\underline{P}}^c$ et $j(U) = j(V)$

définissent des parties coanalytiques. Pour (1) et (2), cela résulte immédiatement du théorème sur l'indice, et pour (3) aussi, si l'on remarque que (3) est équivalent à

$$U \in \underline{\underline{P}}^c \text{ et } V \in \underline{\underline{P}}^c \text{ et } j(U) < j(V+1) \text{ et } j(V) < j(U+1)$$

(autrement dit, le graphe de la relation de préordre définie par l'indice est <u>bianalytique dans</u> $\underline{\underline{P}}^c \times \underline{\underline{P}}^c$).

COROLLAIRE (Kondô). Soit H une partie coanalytique d'un espace produit $E \times F$ métrisable compact. Il existe une section de H par un graphe coanalytique.

DEMONSTRATION. Tout espace métrisable compact étant plongeable par un isomorphisme borélien dans Ω, on se ramène aussitôt au cas où H est une partie coanalytique de $\Omega \times \Omega$. Il existe alors un temps d'arrêt U sur $\Omega x \Omega x \Omega$ tel que l'on ait $(v,\omega) \in H \Leftrightarrow \forall w \quad (v,\omega,w) < \infty$. Et U définit une application continue $v \to U(v,.,.)$ de Ω dans $\underline{\underline{T}}(\Omega x \Omega)$. Il ne reste plus qu'à composer cette application avec l'application Ψ de $\underline{\underline{Q}}$ dans Ω pour avoir la section voulue.

Restant dans la catégorie des espaces "ambiants" métrisables compacts ou, plus généralement, polonais, disons qu'une partie d'un tel espace est PCA si elle est projection d'une partie coanalytique d'un espace produit. On a alors une extension simple du résultat précédent :

THEOREME (Kondô). Soit H une partie PCA d'un espace produit $E \times F$ métrisable compact. Il existe une section de H par un graphe PCA.

DEMONSTRATION. Il existe un espace métrisable compact G et une partie coanalytique H' de $E \times F \times G$ telle que H soit égale à la projection de H' sur $E \times F$. D'après le résultat précédent, il existe une application f définie sur la projection de H' sur E et à valeurs dans $F \times G$ dont le graphe est coanalytique et est une section de H'. Pour obtenir la section voulue de H, il ne reste plus qu'à composer cette application avec la projection de $F \times G$ sur F.

La plupart des ensembles pour lesquels un analyste peut se poser raisonnablement un problème de section sont au plus PCA, et le théorème de Kondô-Novikov fournit une section du même ordre de complexité, avec un bon degré d'effectivité. Cependant, l'analyste est surtout intéressé par la mesurabilité d'une section, et, malheureusement (?), on ne peut démontrer, avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles (en abrégé, "ZF" sans l'axiome de choix et "ZFC" avec l'axiome de choix) que tout ensemble PCA est universellement mesurable. Plus précisément, on a les résultats suivants, où l'on suppose que "ZF" est consistant.

1) Si on ajoute à "ZF" l'axiome de constructibilité "V = L" de Goedel, on obtient une théorie consistante dans laquelle l'axiome de choix et l'hypothèse généralisée du continu sont des théorèmes. De plus, il existe alors un bon ordre sur [0,1] , effectivement donné par une formule de la théorie, dont le graphe est PCA dans [0,1]x[0,1] On en déduit aisément l'existence d'une application de [0,1] dans [0,1] , de graphe coanalytique, et non mesurable pour la mesure de Lebesgue. Pour moi, cependant, l'axiome de constructibilité n'est pas "réaliste" : on ne doit pas pouvoir nommer effectivement un bon ordre sur les réels.

2) En supposant consistante la théorie "ZFC + il existe un cardinal inaccessible" , Solovay a montré que la théorie "ZFC + tout ensemble de réels définissable en termes de réels est Lebesgue-mesurable" est consistante. Dans cette dernière théorie, tout ensemble PCA et, plus généralement, tout ensemble projectif est universellement mesurable. C'est une théorie très séduisante pour l'analyste (quoiqu'elle tente à ôter le gagne-pain de quelques probabilistes dont je suis !)

Nous terminerons en faisant un peu de publicité pour une troisième théorie (les trois théories citées sont étudiées dans le Lecture Notes n°217 "Lectures in Set Theory" de Jech, Springer 1971).

Beaucoup d'analystes sont prêts à ajouter, sans hésitations, l'hypothèse du continu à "ZFC", car cela permet de belles constructions. Cependant, on sait que Goedel, qui est platonicien, et Cohen, quand il est platonicien, n'y croient pas (cf Goedel, Amer Math Monthly 54, 1947 et Cohen, Proc of Symp in pure Math, vol 13 part 1 , AMS 1971). De fait, on peut ajouter d'autres axiomes à "ZFC" de sorte que l'hypothèse du continu soit fausse, et que l'on ait une situatio plus régulière que l'habituelle pour les analystes, dans laquelle sont encore permises la plupart des constructions utiles qu'autorisait l'hypothèse du continu (par exemple, les limites médiales de Mokobodzki). Voici un tel système d'axiomes, que l'on sait être consistant si "ZFC" l'est : ZFC +

$2^{\text{aleph}_0} = \text{aleph}_2$ (donc l'hypothèse du continu est fausse) +

Axiome de Martin (qui est un théorème dans "ZFC + hyp. du cont.")

Nous ne donnerons pas ici la forme exacte de l'axiome de Martin (voir l'article de Shoenfield dans Amer. Math. Monthly de Juin-Juillet 1975). Dans cette théorie on a, pour toute mesure de probabilité sur un espace métrisable compact,

- la réunion de aleph_1 ensembles négligeables (resp mesurables) est encore négligeable (resp mesurable), et la mesure est aleph_1-additive
- toute partie PCA est mesurable (car, d'après la théorie des constituants, tout PCA est la réunion de aleph_1 boréliens)

Plus généralement, dans cette théorie, aleph_1 ressemble beaucoup plus à aleph_0 qu'à 2^{aleph_0} - ce qui, personnellement, ne me choque pas du tout.