GABRIEL MOKOBODZKI

Démonstration élémentaire d'un théorème de Novikov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 539-543
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__539_0>

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE D'UN THEOREME DE NOVIKOV.

par G. MOKOBODZKI

Dans son article d'exposition [2] sur les théorèmes de séparation d'ensembles projectifs, C.DELLACHERIE se déclare convaincu que l'on peut démontrer sans recourir au second théorème de séparation le théorème ci-après :

THEOREME 1 : *Soit (E_n) une suite finie ou infinie de parties analytiques d'un espace métrisable compact F. Si l'on a $\cap E_n = \emptyset$, alors il existe une suite (B_n) de boréliens de F telle que B_n contienne E_n pour tout n et que l'on ait $\cap B_n = \emptyset$.*

Je propose ici une démonstration de ce résultat qui s'inspire de celle du premier théorème de séparation et qui justifie la ténacité exprimée dans [2] .

Disons qu'une suite (A_n) de parties de F est emboitable s 'il existe une suite (B_n) de boréliens de F telle que $A_n \subset B_n$ pour tout n et $\cap A_n = \cap B_n$. On dira aussi que la suite (B_n) emboite la suite (A_n). On a alors le lemme fondamental suivant :

LEMME 2 : *Soient (D_n), (C_n) deux suites de parties de F et soit $D = \bigcup_p D_p$. Si pour tout p, la suite $(D_p,(C_n))$[1] est emboitable, alors la suite $(D,(C_n))$ est emboitable.*

1. On note ainsi la suite $D_p, C_0, C_1, \ldots$

<u>Démonstration</u> : Soient (B_o^p) , $(B_m^p)_{m \geq 1}$ des suites de boréliens de F telle que $B_o^p \supset D_p$, $B_m^p \supset C_n$ et telles que pour tout p

$$D_p \cap \left(\bigcap C_n\right) = \bigcap_{m \geq 0} B_m^p$$

Posons alors $B_m = \bigcap_{p \geq 1} B_m^p$, pour $m \geq 1$, $B_o = \bigcup_p B_o^p$ et

$$B = \bigcap_{m \geq 1} B_m ,$$

Pour tout p , on a encore $D_p \cap (\bigcap_n C_n) = B_o^p \cap B$

et par suite $D \cap \left(\bigcap_n C_n\right) = B_o \cap B$.

On en conclut que la suite $(B_m)_{m \geq 0}$ emboite la suite $(D,(C_n))$.

Rappelons quelques notations nécessaires à l'emploi des schémas de Souslin.

S = ensemble de suites ordonnées finies d'éléments de $\mathbb{N}$.

Σ = ensemble des suites ordonnées infinies d'éléments de $\mathbb{N}$.

Pour $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ (s,n) désigne la suite obtenue en adjoignant n à la droite de la suite finie s .

Pour $s \in S$, $|s|$ désigne la longueur, ou le nombre d'éléments de s .

Pour $s \in S$ et $\sigma \in \Sigma$ (resp. $s' \in S$) la notation $s \dashv \sigma$ signifie que s est une section commençante de Σ.

Pour $\sigma \in \Sigma$, $(\sigma|p)$ désignera la suite finie obtenue en prenant les p. premiers éléments de σ .

Un schéma de Souslin sur un ensemble F est une application Δ de S dans l'ensemble $\mathcal{P}(F)$.

On dit que Δ est régulier si $\Delta(s,n) \subset \Delta(s)$, $\forall s \in S$, $n \in \mathbb{N}$.

Le noyau du schéma Δ est l'ensemble

$$\Delta(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \left(\bigcap_{s \dashv \sigma} \Delta(s)\right)$$

Tout ensemble analytique de F est alors le noyau d'un schéma régulier Δ à valeurs dans les parties compactes de F.

Soit Δ un schéma de Souslin et soit $t \in S$. Le sous-ensemble $S_t = \{s \in S \mid t \dashv s\}$ est isomorphe à S et permet de définir un nouveau schéma de Souslin à l'aide de Δ.

Posons alors $\Sigma_s = \{\sigma \in \Sigma \mid s \dashv \sigma\}$ pour $s \in S$.

et $\Delta(\Sigma_s) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_s} \left(\bigcap_{t \dashv \sigma} \Delta(t) \right)$

On a la règle simple de calcul :

pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\Delta(\Sigma_s) = \bigcup_n \Delta\left(\Sigma_{(s,n)}\right)$

Soit alors (E_n) une suite infinie de parties analytiques de F, (Δ^n) une suite de schémas de Souslin réguliers à valeurs dans les parties compactes de F telle que

$$\Delta^n(\Sigma) = E_n \quad \text{pour tout } n.$$

Le lemme suivant est une conséquence directe du lemme 2.

<u>*LEMME 3*</u> : *Si la suite $(\Delta^n(\Sigma))$ n'est pas emboitable,*

1°) il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que la suite $\Delta^1(\Sigma_k)$, $(\Delta^n(\Sigma))_{n \geq 2}$, ne soit pas emboitable

2°) il existe une suite $(\sigma_n) \subset \Sigma$ telle que pour tout p la suite
$$\Delta^1\left(\Sigma_{(\sigma_1 \mid p)}\right), \ldots, \Delta^p\left(\Sigma_{(\sigma_p \mid p)}\right), \left(\Delta^r(\Sigma)\right)_{r \geq p+1}$$
ne soit pas emboitable

<u>Démonstration</u> :

1°) il suffit de rappeler que pour tout $s \in S$ $\Delta^p(\Sigma_s) = \bigcup_n \Delta^p\left(\Sigma_{(s,n)}\right)$ et d'appliquer le lemme 2.

Pour

2°) on construit les suites (σ_n) pas à pas, c'est à dire par exemple pour σ_1 , en construisant par récurrence une suite $(s_n) \subset S$ telle que $s_n \dashv s_{n+1}$ pour tout n de sorte que s_p s'interprête comme $(\sigma_1 | p)$.

Démonstration du théorème 1 :

Supposons que la suite $(E_n) = (\Delta^n(\Sigma))$ ne soit pas emboitable et soit $(\sigma_n) \subset \Sigma$ une suite infinie vérifiant les conditions du lemme 3 .

Rappelons qu'on a toujours $\Delta^p(\Sigma_s) \subset \Delta^p(s)$ puisque l'on a supposé les Δ^p réguliers.

Si la suite

$$\Delta^1(\Sigma_{(\sigma_1 | p)}), \ldots, \Delta^p\left(\Sigma_{(\sigma_p | p)}\right), \quad (\Delta^r(\Sigma))_{r \geq p+1}$$

n'est pas emboitable, il en résulte en particulier que $K_p = \bigcap_{k \leq p} \Delta^k(\sigma_k | p)$ est un compact non vide pour tout p . On vérifie aisément que la suite (K_p) est décroissante et que $K = \bigcap K_p$ est contenu dans $\bigcap_n E_n$. Autrement dit si la suite (E_n) n'est pas emboitable $\bigcap E_n \neq \emptyset$.

Par négation, on obtient le théorème 1 .

Mr. Gabriel MOKOBODZKI

- EQUIPE D'ANALYSE -
E.R.A. au C.N.R.S. n°294

UNIVERSITE PARIS VI - Tour 46
4 Place Jussieu
75230 - PARIS - CEDEX 05

PREPRINT N°54 - Septembre 1975

B I B L I O G R A P H I E

[1] CHOQUET G.

Ensembles K-analytiques et K-Sousliniens.
Ann. Inst. Fourier 1959.

[2] DELLACHERIE C.

Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications .
Séminaire de Probabilités IX. STRASBOURG
Lecture Notes in Mathematics - N°465 - SPRINGER