

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 481-500

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__481_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES OPTIONNELLES ET UNE
SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

par Marc YOR

INTRODUCTION

L'origine de ce travail a été la remarque suivante : si X est une martingale locale quasi continue à gauche, et dont les sauts sont uniformément bornés, on peut associer à X au moins deux formules exponentielles intéressantes, à savoir l'exponentielle de C. Doléans

$$E(X)_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

et une seconde exponentielle

$$E_\infty(X)_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t - \int \nu_t(dx) (e^x - 1 - x) \right\}$$

ν étant la " mesure de Lévy " de X , c'est à dire la projection (duale !) prévisible de la mesure $\eta(dt \times dx) = \sum_{s > 0} \mathbb{I}_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \varepsilon_s(dt) \varepsilon_{\Delta X_s}(dx)$.

On construit ci-dessous une suite de martingales locales $E_n(X)$ telle que $E_1(X) = E(X)$ et, au moins formellement, $E_n(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_\infty(X)$. De plus, ces martingales locales permettent de caractériser le processus croissant $\langle X^c, X^c \rangle$ et la mesure prévisible ν .

On donne également une nouvelle expression de la formule d'Itô associée à X - sous une condition d'intégrabilité - où intervient de manière naturelle une intégrale stochastique optionnelle.

NOTATIONS.

Les notations utilisées sont principalement celles du " Cours sur les intégrales stochastiques " de P.A.Meyer, qui figure dans ce volume (référence [5] de la bibliographie). En particulier, on considère les espaces $\underline{\underline{M}}$ (martingales de carré intégrable), $\underline{\underline{W}}$ (martingales à variation intégrable), $\underline{\underline{L}}$ (martingales locales), $\underline{\underline{V}}$ (processus à variation finie)... définis à partir d'un espace probabilisé complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, vérifiant les conditions habituelles.

On dit que X vérifie localement la propriété (P) (le long de la suite (T_n)) s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt, $T_n \uparrow \infty$ p.s., telle que pour tout n $X^{T_n} = X_{\cdot \wedge T_n}$ vérifie (P). Ainsi un processus X est dit localement borné dans L^p s'il existe des $T_n \uparrow \infty$ p.s. et tels que

$$\sup_{0 \leq s < \infty} E[|X_{s \wedge T_n}|^p] < \infty$$

Par exemple, \underline{M}_{loc} est l'espace des martingales locales, localement de carré intégrable. Enfin, la notation suivante permet de simplifier de nombreuses égalités entre semi-martingales : si X et Y sont adaptés, on dit qu'ils sont associés si $X-Y \in \underline{L}$, et on note $X \equiv Y (\underline{L})$ (X est congru à Y modulo \underline{L}), ou simplement $X \equiv Y$.

1. UN LEMME FONDAMENTAL ET QUELQUES CONSEQUENCES

1.1. Les intégrales stochastiques optionnelles apparaîtront très souvent dans tout le travail. Montrons tout d'abord que l'extension de l'intégrale stochastique aux intégrands optionnels faite en [5] est "maximale".

Rappelons l'inégalité générale de Kunita-Watanabe obtenue en [5] : si H et K sont deux processus $\underline{F} \otimes \underline{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables, et $M, N \in \underline{M}$, on a

$$\int_0^\infty |H_s| |K_s| |d[M, N]_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d[M, M]_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d[N, N]_s \right)^{1/2} \text{ p.s.}$$

En particulier, si H est un processus mesurable vérifiant $E\left(\int_0^\infty H_s^2 d[M, M]_s\right) < \infty$, l'application $N \longrightarrow E\left(\int_0^\infty H_s d[M, N]_s\right)$ est continue sur $(\underline{M}, \|\cdot\|_2)$,

et donc il existe une unique martingale de carré intégrable, notée $H \cdot M$, telle que

$$\forall N \in \underline{M}, E\left(\left[(H \cdot M), N\right]_\infty\right) = E\left(\int_0^\infty H_s d[M, N]_s\right)$$

Pour continuer, nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 1 . L'application de projection optionnelle $H \longrightarrow {}^1H$ définie sur les processus mesurables bornés se prolonge de façon unique en une application linéaire contractante de $(L_m^2(M), \|\cdot\|_2)$ dans $(L_0^2(M), \|\cdot\|_2)$, où

$$L_m^2(M) = \{ H \text{ mesurable} : \mathbb{M} \|H\|_2^2 = E(\int_0^\infty H_S^2 d[M, M]_S) < \infty \}$$

$$L_0^2(M) = \{ H \text{ optionnel} : \mathbb{M} \|H\|_2^2 < \infty \}$$

On note encore $H \longrightarrow {}^1H$ ce prolongement.

Démonstration . Soit H un processus mesurable borné. On a pour tout temps d'arrêt T

$$({}^1H_T)^2 I_{\{T < \infty\}} = (E[H_T I_{\{T < \infty\}} | \underline{\mathbb{F}}_T])^2 \leq E[H_T^2 I_{\{T < \infty\}} | \underline{\mathbb{F}}_T] = {}^1(H^2)_T I_{\{T < \infty\}}$$

D'après le théorème de section optionnel, on a donc $({}^1H)^2 \leq {}^1(H^2)$ sauf sur un ensemble évanescent, et donc $\mathbb{M} \|{}^1H\|_2^2 \leq \mathbb{M} \|H\|_2^2$. Les processus mesurables bornés sont denses dans $L_m^2(M)$, et le lemme est démontré.

Proposition 1 . Soit $H \in L_m^2(M)$. Alors $H \cdot M = {}^1H \cdot M$.

Démonstration . D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe, l'application $H \longrightarrow H \cdot M$ définie sur $L_m^2(M)$, à valeurs dans $\underline{\mathbb{M}}$, est continue (et même contractante). Il en est de même de $H \longrightarrow {}^1H \cdot M$, à l'aide du lemme 1. Il suffit donc de montrer que $H \cdot M = {}^1H \cdot M$ pour H mesurable, borné. Or soit $N \in \underline{\mathbb{M}}$. Nous avons par définition de $H \cdot M$

$$E([H \cdot M, N]_\infty) = E(\int_0^\infty H_S d[M, N]_S) = E(\int_0^\infty {}^1H_S d[M, N]_S)$$

car le processus à variation intégrable $[M, N]$ est optionnel. Or ceci est l'égalité caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle ${}^1H \cdot M$ ([5], chap.II, déf. 32).

On est ainsi ramené à la théorie de l'intégrale stochastique optionnelle de [5], II.31-35 pour $\underline{\mathbb{M}}$, et V.19 pour $\underline{\mathbb{L}}$.

1.2. Comme cela apparaîtra dans la suite dans diverses applications, le lemme suivant permet de résoudre de nombreuses questions liées à la théorie des intégrales stochastiques. Il est dû à Ch. Yoeurp et figure, avec démonstration, dans son article [8] dans ce volume.

Lemme fondamental . Soit $A \in \underline{\mathbb{V}}$ prévisible, et soit $M \in \underline{\mathbb{M}}$. Alors $[A, M] = \Delta A \cdot M$. En particulier, $[A, M]$ est une martingale locale.

1.3. Voici deux premières applications de ce lemme fondamental. On commence par une nouvelle démonstration de la formule de M. Prattelli et Ch. Yoeurp ([5], II.37 et V.21).

Proposition 2 . Soit $M \in \underline{M}_{loc}$. Alors l'intégrale $\Delta M \cdot M$ et le processus $\langle M, M \rangle$ sont bien définis et

$$(1) \quad \Delta M \cdot M = [M, M] - \langle M, M \rangle .$$

Démonstration. On renvoie à [5], V.21 pour le début de la proposition. Pour démontrer (1), on peut évidemment supposer $M^c = 0$. Par la caractérisation des intégrales stochastiques optionnelles, il suffit de vérifier que pour toute martingale N bornée

$$[[M, M] - \langle M, M \rangle, N] = \Delta M \cdot [M, N] \quad (\underline{I})$$

Or le membre de gauche est égal à

$$\sum_{s \leq \cdot} (\Delta M_s)^2 \Delta N_s - [\langle M, M \rangle, N] = \sum_{s \leq \cdot} (\Delta M_s)^2 \Delta N_s = \sum_{s \leq \cdot} \Delta M_s \Delta [M, N]_s$$

d'après le lemme fondamental. Cela démontre la proposition.

La proposition suivante montre que l'intégrale stochastique optionnelle $H \cdot M$ est la compensée de l'intégrale de Stieltjes $H * M$ ⁽¹⁾, lorsque celle-ci existe. L'énoncé est implicite dans la construction de [5], II.34, mais n'est explicité nulle part dans [5].

Proposition 3 . Soient $M \in \underline{W}_{loc}$, H un processus optionnel tel que $\int_0^\cdot |H_s| |dM_s|$ soit localement intégrable. Alors $(\int_0^\cdot H_s^2 d[M, M]_s)^{1/2}$ l'est aussi, et l'on a

$$(2) \quad H \cdot M = H * M - (H * M)^\circ$$

(on rappelle que $()^\circ$ désigne la projection duale prévisible).

Démonstration . M appartenant à \underline{W}_{loc} n'a pas de partie martingale continue, de sorte que la première phrase de l'énoncé se réduit à l'inégalité $\sum_{s \leq t} H_s^2 \Delta M_s^2 \leq (\sum_{s \leq t} |H_s| |\Delta M_s|)^2$. Vérifions que $H * M - (H * M)^\circ$ satisfait à la propriété caractéristique de l'intégrale stochastique optionnelle, c'est à dire que pour toute martingale bornée N

$$[H * M - (H * M)^\circ, N] = H \cdot [M, N] \quad (\underline{I})$$

Or les deux membres diffèrent par $-[(H * M)^\circ, M]$, et le lemme fondamental s'applique encore.

(1). Nous employons la notation $*$ au lieu de \cdot pour les intégrales de Stieltjes, seulement lorsqu'il y a risque de confusion.

2. DIFFERENTES EXPONENTIELLES DE SEMI-MARTINGALES

2.1. Rappelons tout d'abord, pour notation et référence par la suite, le théorème suivant dû à C. Doléans, qui est valable pour tout X appartenant à l'espace \underline{S}_0 des semi-martingales nulles en 0.

Théorème 1 . Soit $X \in \underline{S}_0$. Il existe alors une et une seule semi-martingale $\Lambda = E(X)$ solution de

$$(e_X) \quad \Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_{s-} dX_s .$$

Elle est donnée par la formule

$$(3) \quad E(X)_t = \exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} .$$

La propriété fondamentale d'une exponentielle est sa multiplicativité. Etudions cette propriété pour E .

Proposition 4 . Pour $X, Y \in \underline{S}_0$ on a

$$(4) \quad E(X)E(Y) = E(X+Y+[X,Y]) .$$

Démonstration . On peut obtenir la formule (4) par calcul direct à partir de la formule (3). On préfère ici appliquer la formule d'Ito à $U_t V_t$, où $U = E(X)$, $V = E(Y)$, ce qui revient à la formule d'intégration par parties $d(UV) = U_d V + V_d U + d[U, V]$. Ici on a $dV = V_d Y$, $dU = U_d X$, $d[U, V] = U_d V_d [X, Y]$, donc

$$d(UV) = U_d V_d Y + U_d V_d X + U_d V_d [X, Y]$$

et UV est donc l'unique solution de $(e_{X+Y+[X,Y]})$, d'où (4).

La proposition 4 permet de définir naturellement l'application bilinéaire $\{ , \}$ sur $\underline{S}_0 \times \underline{S}_0$ par

$$\{X, Y\} = X + Y + [X, Y]$$

Une notation d'opération telle que $X \perp Y$ serait d'ailleurs appropriée, car l'opération ainsi définie est associative :

$$X \perp Y \perp Z = X + Y + Z + [X, Y] + [Y, Z] + [Z, X] + \sum_{s \leq \cdot} \Delta X_s \Delta Y_s \Delta Z_s .$$

On explicite dans la proposition suivante la suite $X^{(n)}$ d'éléments de \underline{S}_0 déterminée par la relation de récurrence $X^{(1)} = X \in \underline{S}_0$, $X^{(n)} = \{ X, X^{(n-1)} \}$ (les puissances de X pour l'opération \perp).

Proposition 5 . Pour tout $X \in \underline{S}_0$ et $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(5) \quad X^{(n)} = nX + \frac{n(n-1)}{2} \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \leq \cdot} P_n(\Delta X_s) \text{ où } P_n(x) = (1+x)^{n-1} - nx.$$

Démonstration . Elle se fait par une succession de récurrences faciles. Nous commençons par vérifier la conséquence suivante de (5)

$$\Delta X^{(n)} = Q_n(\Delta X) \text{ où } Q_n(x) = (1+x)^n - 1$$

En effet, la formule $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + [X, X^{(n-1)}]$ nous donne la relation de récurrence $Q_n(x) = x + Q_{n-1}(x) + xQ_{n-1}(x)$ avec $Q_1(x) = x$, qui conduit bien à l'expression ci-dessus.

Nous posons ensuite $Y^{(n)} = [X, X^{(n)}]$. La formule $X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + [X, X^{(n-1)}]$ nous donne

$$\begin{aligned} Y^{(n)} &= [X, X] + Y^{(n-1)} + \sum_{s \leq \cdot} \Delta X_s^2 \Delta X_s^{(n-1)} \\ &= Y^{(n-1)} + \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \leq \cdot} R_n(\Delta X_s) \end{aligned}$$

où $R_n(x) = x^2(1+Q_{n-1}(x)) = x^2(1+x)^{n-1}$. La solution de cette équation de récurrence est

$$Y^{(n)} = n \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \leq \cdot} T_n(\Delta X_s) \text{ où } T_n(x) = x \{(1+x)^n - 1\}$$

car $T_n - T_{n-1} = R_n$. La relation de récurrence sur $X^{(n)}$ devient alors

$X^{(n)} = X + X^{(n-1)} + Y^{(n-1)}$, soit

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + X + (n-1) \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \leq \cdot} T_{n-1}(\Delta X_s)$$

dont la solution est (5), car $P_{n-1} + T_{n-1} = T_n$.

2.2. On donne maintenant une autre démonstration de la forme explicite de la solution d'une équation différentielle stochastique posée et résolue par Ch. Yoeurp ([8] et [5]).

Soit X une semi-martingale spéciale ([5], IV.31), dont la décomposition canonique est $X = X_0 + M + A$ ($M \in \underline{L}_0$, $A \in \underline{V}_0$ et prévisible¹). On note $\hat{X} = X_0 + M_- + A$ la projection prévisible de X . D'après [8] ou [5], si le processus $1 - \Delta A$ ne s'annule pas, il existe une unique semi-martingale spéciale $\Lambda = \hat{E}(X)$, solution de

$$(\hat{e}_X) \quad \Lambda_t = 1 + \int_{]0, t]} \hat{\Lambda}_s dX_s$$

donnée par $\hat{E}(X) = E(Y)$, où $Y_t = \int_{]0, t]} \frac{dX_s}{1 - \Delta A_s}$.

1. En réalité, X_0 n'intervient pas.

Proposition 6 . $\hat{E}(X) = \frac{E(M)}{E(-A)}$

Démonstration . Avec les notations précédentes, il s'agit de montrer $E(Y)E(-A)=E(M)$. D'après la proposition 4, cela revient à $Y-A-[Y,A] = M$. Or par définition de Y

$$dY - dA - d[Y,A] = \frac{dM+dA}{1-\Delta A} - dA - \frac{d[M,A]+d[A,A]}{1-\Delta A}$$

Nous remplaçons $d[A,A]$ par $\Delta A dA$, et $d[M,A]$ par $\Delta A dM$ (lemme fondamental). Il reste

$$\frac{dM}{1-\Delta A} + \frac{dA}{1-\Delta A} - dA - dM \frac{\Delta A}{1-\Delta A} - dA \frac{\Delta A}{1-\Delta A} = dM$$

Comme tous les processus sont nuls en 0, la proposition est établie.

2.3. L'existence des intégrales stochastiques optionnelles permet de poser le problème de la résolution de l'équation stochastique

$$(\hat{e}_X^+) \quad dZ_s = Z_s dX_s .$$

On le résoudra ci-dessous dans une sous-classe de l'espace des semi-martingales spéciales, formée des semi-martingales spéciales X admettant une décomposition canonique $X=X_0+M+A$, où la martingale locale M est quasi-continue à gauche. Nous dirons pour abrégier qu'une telle semi-martingale est très spéciale. Il faudra aussi imposer une condition d'intégrabilité.

Proposition 7 . Soit $X = X_0+M+A$ la décomposition canonique d'une semi-martingale très spéciale.¹ On suppose que $1-\Delta X$ ne s'annule jamais,²

et que le processus croissant $(\sum_{s \leq t} \frac{1}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s| < 1/2\}})^{1/2}$ est localement intégrable. Alors il existe une et une seule semimartingale Z telle que (les i.s. ci-dessous aient un sens et que) l'on ait

$$(\hat{e}_X^+) \quad Z_t = 1 + \int_{]0,t]} Z_s dX_s \quad (= 1 + \int_{]0,t]} Z_s dM_s + \int_{]0,t]} Z_s dA_s) .$$

Cette solution est $\hat{E}(X)=E(\hat{X})$, où $\hat{X}_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{1-\Delta X_s} = \int_{]0,t]} \frac{dM_s}{1-\Delta M_s} + \int_{]0,t]} \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$. De plus, \hat{X} et Z sont très spéciales.³

Démonstration . Nous commençons par quelques remarques sur la condition d'intégrabilité imposée. D'abord, A n'a que des sauts prévisibles, M que des sauts totalement inaccessibles, donc la condition que $1-\Delta X$ ne s'annule pas signifie que $1-\Delta M$ et $1-\Delta A$ ne s'annulent pas. Ensuite,

1. En réalité, X_0 n'intervient pas. 2. Cela entraîne que $1-\Delta X_t(\omega)$ est borné inférieurement par un nombre >0 sur tout intervalle compact (ne pas confondre cela avec "localement borné inf^t" au sens des t.d'arrêt). 3. Ce théorème a été démontré indépendamment par Ch.Yoeurp (non publié)

il revient au même de dire que le processus croissant de l'énoncé est localement intégrable, ou que le processus croissant

$$\left(\sum_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s| < 1/2\}} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Mais d'autre part, nous savons que $(\sum_{s \leq t} \Delta M_s^2)^{1/2}$ est localement intégrable, donc le processus croissant

$$\left(\sum_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} I_{\{|1-\Delta M_s| \geq 1/2\}} \right)^{1/2}$$

est toujours localement intégrable, et l'intégrabilité locale de l'énoncé équivaut à celle du processus croissant

$$\alpha_t = \left(\sum_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

- d'où il résulte en particulier que $I_{\{|1-\Delta M_s| < 1/2\}}$ aurait pu être remplacé par $I_{\{|1-\Delta M_s| < \varepsilon\}}$ pour n'importe quel $\varepsilon \in]0, 1[$. Une autre remarque, qui interviendra par la suite : le processus croissant

$$\beta_t = \sum_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{|1-\Delta M_s|} \quad (\text{fini : note 2 page précédente})$$

est localement intégrable, si la condition de l'énoncé est satisfaite. En effet, choisissons des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$, réduisant fortement la martingale locale M , et tels que $\beta_{T_n} \leq n$, $\alpha_{T_n} \in L^1$.

Montrons que $\beta_{T_n} \in L^1$, ce qui revient à dire que $\Delta \beta_{T_n} = \frac{\Delta M_{T_n}^2}{|1-\Delta M_{T_n}|}$ est intégrable. Comme T_n réduit fortement M , ΔM_{T_n} est intégrable, donc $\Delta \beta_{T_n} I_{\{|1-\Delta M_{T_n}| \geq 1/2\}}$ est intégrable. D'autre part, on a

$$\frac{|\Delta M_{T_n}|}{|1-\Delta M_{T_n}|} \leq \alpha_{T_n} \in L^1$$

et le côté gauche majore $\frac{2}{3} |\Delta \beta_{T_n}| I_{\{|1-\Delta M_{T_n}| \leq 1/2\}}$ (car $|\Delta M_{T_n}|^2 I_{\{|1-\Delta M_{T_n}| \leq 1/2\}} \leq \frac{3}{2} |\Delta M_{T_n}|$). On pourra comparer ce raisonnement à celui de [5], IV.

n°32.

Par un raisonnement tout à fait analogue, mais plus simple, on démontre que la condition de l'énoncé est équivalente à l'intégrabilité locale du processus croissant à valeurs finies

$$\delta_t = \sum_{s \leq t} \frac{1}{|1-\Delta M_s|} \mathbb{I}\{|1-\Delta M_s| < 1/2\}$$

Enfin, une dernière remarque : dans ces conditions d'intégrabilité, on peut partout faire disparaître la décomposition¹, en remplaçant M par X . En effet, les processus croissants analogues relatifs aux sauts prévisibles de X , par exemple

$$\left(\sum_{s \leq t} \frac{1}{(1-\Delta A_t)} \mathbb{I}\{|1-\Delta A_t| \leq 1/2\} \right)^{1/2}$$

sont prévisibles à valeurs finies, donc toujours localement intégrables.

Passons à la démonstration proprement dite. Vérifions d'abord que l'on peut définir \tilde{X} . L'intégrale de Stieltjes $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s}$ est bien définie, car la fonction $|1-\Delta X_s(\omega)|$ est bornée inférieurement sur tout intervalle compact. D'autre part, $1-\Delta M$ n'est $\neq 0$ qu'en des temps totalement inaccessibles, donc $1-\Delta M = 1$ p.p. pour la mesure dA , et $\int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta X_s} = \int_0^t \frac{dA_s}{1-\Delta A_s}$, ce qui montre que ce processus à variation finie est prévisible.

En ce qui concerne l'intégrale stochastique optionnelle $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta X_s}$, nous remarquons de même que $1-\Delta A$ n'est $\neq 1$ qu'en des temps d'arrêt prévisibles, donc que $1-\Delta A = 1$ p.p. pour la mesure $d[M, M]$. L'intégrale stochastique est donc égale à $\int_0^t \frac{dM_s}{1-\Delta M_s}$. Pour vérifier que celle-ci a un sens, il nous faut examiner si le processus croissant $(\int_0^s \frac{d[M, M]_s}{(1-\Delta M_s)^2})^{1/2}$ est localement intégrable. Comme $1-\Delta M_s$ ne diffère de 1 que pour des s en infinité dénombrable, il n'y a aucune difficulté quant à l'intégrale relative à $\langle M^c, M^c \rangle$, et il suffit de voir si

$$\left(\sum_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{(1-\Delta M_s)^2} \right)^{1/2}$$

est localement intégrable. Nous avons vu plus haut que c'est bien le cas. Ainsi \tilde{X} est bien définie, et il apparaît sur sa décomposition que c'est une semi-martingale très spéciale.

1. Désormais, nous supposons que $X_0=0$.

Pour prouver l'unicité, nous remarquons que $(\overset{+}{e}_X)$ entraîne, comme X est très spéciale ([5], II.35 et V.20) que $\Delta Z_t = Z_t \Delta X_t$, et donc que $Z_t = Z_{t-} / (1 - \Delta X_t)$. D'autre part, si H est prévisible localement borné, K optionnel tel que l'intégrale $K \cdot X$ ($= K \cdot M + K \cdot A$) ait un sens, l'intégrale optionnelle $(HK) \cdot X$ a un sens et l'on a $(HK) \cdot X = H \cdot (K \cdot X)$. Ici, prenant $H = Z_-$, $K = 1/1 - \Delta X$, $(\overset{+}{e}_X)$ devient

$$(*) \quad Z_t = 1 + \int_{]0, t]} Z_{s-} \frac{dX_s}{1 - \Delta X_s} = 1 + \int_{]0, t]} Z_{s-} d\overset{+}{X}_s$$

dont nous savons que la seule solution est $E(\overset{+}{X})$. Inversement, soit $Z = E(\overset{+}{X})$, montrons qu'elle satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$. Nous avons $\Delta Z_t = Z_{t-} \Delta \overset{+}{X}_t$, donc - à nouveau grâce au caractère très spécial de X - $\Delta Z_t = Z_{t-} \Delta X_t / (1 - \Delta X_t)$, et enfin $Z_{t-} = Z_t (1 - \Delta X_t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} Z_t &= 1 + \int_{]0, t]} Z_{s-} \left(\frac{1}{1 - \Delta X_s} dX_s \right) = 1 + \int_{]0, t]} \frac{Z_{s-}}{1 - \Delta X_s} dX_s \\ &= 1 + \int_{]0, t]} Z_s dX_s \end{aligned}$$

de sorte que Z satisfait à $(\overset{+}{e}_X)$.

Donnons maintenant une forme plus explicite de $\overset{+}{E}(X)$.

Proposition 8. Sous les hypothèses de la proposition 7, on a

$$\overset{+}{E}(X) = \frac{\exp(-\gamma \langle X^c, X^c \rangle)}{E(-X)}$$

où γ est la projection prévisible duale de $\Sigma_{s \leq t} \frac{\Delta M_s^2}{1 - \Delta M_s}$.

Démonstration. Nous savons que γ existe (étude du processus croissant β dans la démonstration précédente). Comme M est quasi-continue à gauche, γ est continu, et la formule s'écrit

$$\overset{+}{E}(X) E(-X) = E(-\gamma \langle X^c, X^c \rangle)$$

Comme $\overset{+}{E}(X) = E(\overset{+}{X})$, cette formule s'écrit, d'après la prop.4

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = -\gamma - \langle X^c, X^c \rangle$$

Nous remplaçons X par $M+A$, $\overset{+}{X}$ par $\frac{1}{1-\Delta M} \cdot M + \frac{1}{1-\Delta A} \cdot A$, de sorte que

$$\overset{+}{X} - X = \frac{\Delta M}{1 - \Delta M} \cdot M + \frac{\Delta A}{1 - \Delta A} \cdot A. \text{ Quant à } [X, \overset{+}{X}], \text{ nous avons vu que } \overset{+}{X} = X^c,$$

et que $\Delta \overset{+}{X} = \frac{\Delta X}{1 - \Delta X} = \frac{\Delta M}{1 - \Delta M} + \frac{\Delta A}{1 - \Delta A}$. Ainsi, comme $[M, A] = 0$

$$\overset{+}{X} - X - [X, \overset{+}{X}] = \left(\frac{\Delta M}{1 - \Delta M} \cdot M - \sum_{s \leq \cdot} \frac{\Delta M_s^2}{1 - \Delta M_s} \right) - \left(\frac{\Delta A}{1 - \Delta A} \cdot A - \sum_{s \leq \cdot} \frac{\Delta A_s^2}{1 - \Delta A_s} \right) - \langle X^c, X^c \rangle$$

La seconde parenthèse est nulle, car c'est un processus à variation ~~purement discontinu~~ finie dont les sauts sont nuls. Il reste seulement à vérifier que

$$\frac{\Delta M}{1-\Delta M} \cdot M = \sum_{s \leq \cdot} \frac{\Delta M_s^2}{1-\Delta M_s} - \gamma$$

Or les deux membres sont des martingales locales sans partie continue, qui ont les mêmes sauts.

3. MESURE DE LEVY ET FORMULE D'ITO POUR UNE MARTINGALE LOCALE QUASI-CONTINUE A GAUCHE.

3.1. Contrairement à ce qui se passe pour les processus de Markov, la notion de "mesure de Lévy" d'une martingale locale n'a été utilisée que très rarement (voir cependant [2] et [3]).

Nous avons tout d'abord besoin de quelques généralités sur les mesures aléatoires.

Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable lusinien. On note $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, \infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ (\mathcal{P} est la tribu prévisible sur $\Omega \times [0, \infty[$), ainsi que $\tilde{E} =]0, \infty[\times E$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(]0, \infty[) \otimes \mathcal{E}$.

On appelle mesure aléatoire tout noyau positif $\eta(\omega ; dt dx)$ de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ dans $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$. Une mesure aléatoire η est dite prévisible si, pour tout $Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+$ le processus ηY suivant est prévisible

$$(\eta Y)_t(\omega) = \int_{]0, t]} \int_E Y(\omega, s, x) \eta(\omega ; ds, dx) .$$

D'après [1] (lemme 2.2) on a la

Proposition 9 . Soit η mesure aléatoire telle que la mesure M_η définie sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ par

$$\forall Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+ \quad M_\eta(Y) = E \left[\int_{\tilde{E}} Y(\cdot, t, x) \eta(\cdot; dt, dx) \right]$$

soit σ -finie. Il existe alors une unique mesure prévisible, notée η^a , telle que

$$\forall Y \in \tilde{\mathcal{P}}_+, \quad E \left[\int_{\tilde{E}} Y(\cdot, t, x) \eta(\cdot; dt, dx) \right] = E \left[\int_{\tilde{E}} Y(\cdot, t, x) \eta^a(\cdot; dt, dx) \right]$$

Nous appliquons ce résultat dans la situation suivante : $E = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$, X est une martingale locale réelle, et

$$\eta(\omega ; dt dx) = \sum_{s > 0} I_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_s(dt) \varepsilon_{\Delta X_s(\omega)}(dx)$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 9, on établit le

Lemme 2 . La mesure M_η est σ -finie.

Démonstration . Le processus croissant $\Sigma_{s \leq t} (\Delta X_s^2 \wedge 1) \leq [X, X]_t$ est à valeurs finies et à sauts bornés par 1. Il est donc localement intégrable. Cela signifie qu'il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$, des constantes $a_n > 0$, tels que la fonction

$$H(\omega, s, x) = \Sigma_n a_n^{-1}]0, T_n](s, \omega) x^2 \wedge 1$$

soit M_{η} -intégrable. Comme H est strictement positive sur $\tilde{\Omega}$, M_{η} est σ -finie. \square

On appelle mesure de Lévy de X , et on note $\nu(\omega, ds dx)$, la mesure prévisible η^3 . Elle interviendra pour nous de la manière suivante : si $f(s, x)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$, la projection duale prévisible du processus croissant $\Sigma_{s \leq t} f(s, \Delta X_s) I_{\{\Delta X_s \neq 0\}}$ est le processus croissant $\int_{]0, t] \times \mathbb{R}^*} \nu(ds dx) f(s, x)$. On passe de là au cas des fonctions f , non nécessairement positives, telles que le processus $\Sigma_{s \leq t} |f(s, \Delta X_s)| I_{\{\Delta X_s \neq 0\}}$ soit localement intégrable. On note pour $f \in \underline{B}_+(\mathbb{R})$ $\nu_t(\cdot, f) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*} \nu(\cdot, ds dx) I_{]0, t]}(s) f(x)$.

3.2. Voici, à l'aide de la mesure ν - sous des hypothèses convenables - une nouvelle écriture de la formule d'Ito.

Théorème 2 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, et f fonction de classe C^2 telle que le processus $\Sigma_{s \leq t} |f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s|$ soit localement intégrable. Alors,

$$(6) \quad f(X_t) = f(X_0) + \int_{]0, t]} \delta f(X_{s-}, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X^c, X^c \rangle_s \\ + \int_{]0, t] \times \mathbb{R}^*} \nu(ds dx) [f(X_{s-} + x) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})x]$$

où ν est la mesure de Lévy de X , et $\delta f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ si $y \neq x$, et $f'(x)$ si $y = x$.

Démonstration . On écrit la formule d'Ito usuelle, dans laquelle le dernier terme est

$$S(f)_t = \Sigma_{s \leq t} \{ f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s \} .$$

D'après l'hypothèse d'intégrabilité que l'on vient de faire, $S(f)$ admet pour projection duale prévisible le processus suivant, continu du fait que X est quasi-continue à gauche

$$S(f)_t^3 = \int_{]0,t] \times \mathbb{R}^*} \nu(ds \times dx) [f(X_{s-+x}) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})x]$$

Le processus $\overset{C}{S}(f) = S(f) - S(f)^3$ est donc une martingale locale, somme compensée de sauts. De plus

$$\begin{aligned} \Delta \overset{C}{S}(f)_s &= (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s) I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \\ &= \left(\frac{f(X_s) - f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-}) \right) I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \Delta X_s \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \left(\int_{]0,t] } \left[\frac{f(X_s) - f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-}) \right]^2 I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} d[X, X]_s \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{s \leq t} \left[\frac{f(X_s) - f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-}) \right]^2 I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \Delta X_s^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{s \leq t} |f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s| \end{aligned}$$

qui est un processus localement intégrable par hypothèse. L'intégrale stochastique

$$M_t^f = \int_{]0,t] } \left(\frac{f(X_s) - f(X_{s-})}{\Delta X_s} - f'(X_{s-}) \right) I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} dX_s$$

est donc bien définie. De plus, l'intégrale relative à X^C est nulle, donc M^f est une somme compensée de sauts. Comme M^f et $\overset{C}{S}(f)$ ont les mêmes sauts, elles sont égales. Ajoutant alors M^f à l'intégrale stochastique qui figure dans la formule d'Ito usuelle, on obtient

$$M_t^f + \int_{]0,t] } f'(X_{s-}) dX_s = \int_{]0,t] } \delta f(X_{s-}, X_s) dX_s$$

et le théorème est établi.

Remarquons que, dans le cadre des martingales quasi-continues à gauche, la formule d'Ito que l'on vient d'obtenir étend la formule de Pratelli et Yor appelée dans la proposition 2. En effet, X appartient à \underline{M}_{loc} si et seulement si $f(x) = x^2$ vérifie la condition du théorème 1, et on peut écrire la proposition 2

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_{]0,t] } (X_{s-} + X_s) dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

Or $\langle X, X \rangle_t = \langle X^C, X^C \rangle_t + \langle X^d, X^d \rangle_t$, et $\langle X^d, X^d \rangle_t = \int \nu_t(dx) x^2$.

4. UNE SUITE REMARQUABLE DE FORMULES EXPONENTIELLES

4.1. Rappelons tout d'abord l'extension du théorème de Girsanov obtenue par J. Van Schuppen et E. Wong en [7] :

Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U, X]$ soit localement intégrable, ce qui est équivalent, d'après [8], à supposer l'existence de $\langle U, X \rangle$. Supposons de plus $1 + \Delta U \geq 0$, de sorte que la martingale locale $E(U)$ est positive, et soit T un temps d'arrêt tel que $E(U)^T$ soit uniformément intégrable. On définit la probabilité P_U^T sur (Ω, \mathcal{F}_T) par $dP_U^T = E(U)_T dP|_{\mathcal{F}_T}$. Alors, d'après [7], ${}^U X = X - \langle X, U \rangle$ arrêtée à T est une P_U^T -martingale locale. Ou encore (sans arrêt à T), $E(X)^U X$ est une P -martingale locale ([8]), variante pour laquelle la condition $1 + \Delta U \geq 0$ n'est plus nécessaire. Le point clé de la démonstration est encore le lemme fondamental.

Il en est de même pour la variante que nous proposons maintenant¹

Proposition 10 . Soient U et X deux martingales locales nulles en 0 telles que $[U, X]$ soit localement intégrables. Alors $E({}^U X)E(U)$ est une martingale locale.

Démonstration . $E({}^U X)E(U) = E({}^U X + U + [{}^U X, U])$. Il suffit donc de démontrer que

$${}^U X + U + [{}^U X, U] = X - \langle X, U \rangle + U + [X, U] - [\langle X, U \rangle, U]$$

est une martingale locale. Or $X, U, [X, U] - \langle X, U \rangle$ sont des martingales locales, et $[\langle X, U \rangle, U]$ est une martingale locale d'après le lemme fondamental.

4.2. Soit X martingale locale nulle en 0 et quasi-continue à gauche.

La proposition précédente va permettre d'obtenir de façon naturelle une suite de formules exponentielles associées à X .

Supposons tout d'abord que X soit localement de carré intégrable.

En remplaçant dans la proposition précédente X et U par $\frac{1}{2}X$, on obtient

1. Elle contient, au moins formellement, les autres résultats. En effet, remplaçant X par tX on a que $E(t^U X)E(U)$ est une martingale locale, et tous les coefficients du développement de Taylor en t sont des martingales locales ; ${}^U X E(U)$ est le premier.

$$E_2(X) = E\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\langle X, X \rangle\right)E\left(\frac{1}{2}X\right) \in \underline{\mathbb{L}}$$

Comme X est quasi-continue à gauche, $\langle X, X \rangle$ est continu, $[\langle X, X \rangle, X] = 0$, et la proposition 4 nous donne

$$E_2(X) = E\left(\frac{1}{2}X\right)E\left(-\frac{1}{4}\langle X, X \rangle\right)E\left(\frac{1}{2}X\right) = E\left(\frac{1}{2}X\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\langle X, X \rangle\right)$$

Plus généralement, nous allons calculer un processus prévisible $A^{(n)}$ (continu) tel que

$$E_n(X) = E\left(\frac{1}{n}X\right)^n \exp(-A^{(n)}) \in \underline{\mathbb{L}}$$

Le calcul est fait dans l'énoncé suivant, avec des notations un peu différentes.

Théorème 3. Soit X martingale locale nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $\lambda \geq 2$. On suppose que $1 + \Delta X$ est un processus ≥ 0 (restriction inutile si λ est entier) et que X est localement bornée dans L^λ .

Alors si l'on pose

$$(7) \quad A_t = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t + \int_{\mathbb{R}} \nu_t(dx) \{(1+x)^\lambda - 1 - \lambda x\}$$

le processus

$$\Lambda_t = E(X)^\lambda \exp(-A)$$

est une martingale locale.

Démonstration. Nous vérifions d'abord que A_t est fini, et continu. Nous traiterons le cas où $\lambda = n$ est entier, sans l'hypothèse de positivité de $1 + \Delta X$, ce qui est un peu plus délicat. Il s'agit de vérifier que le processus croissant quasi-continu à gauche

$$\sum_{s \leq t} |(1 + \Delta X_s)^n - 1 - n \Delta X_s|$$

est localement intégrable. Nous le coupons en deux morceaux, l'un relatif aux s tels que $|\Delta X_s| < 1$, pour lequel on a une majoration de la forme $c \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2 \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s| < 1\}}$, processus localement intégrable, et l'autre, relatif aux s tels que $|\Delta X_s| > 1$. Pour ce second processus, nous utilisons une majoration de la forme

$$c \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^n \leq c \sum_{s < t} |\Delta X_s|^n + c 2^n \sup_{s \leq t} |X_s|^n$$

le premier terme au second membre est un processus croissant localement borné, car fini et continu à gauche, et le second terme un processus croissant localement intégrable, d'après l'inégalité de Doob.

Revenant à λ quelconque, nous écrivons la formule d'Ito pour $F(E(X), A)$ où $F(u, v) = u^\lambda e^{-v}$. Il vient après quelques calculs

$$\Lambda_t = 1 + \lambda \int_{]0, t]} \Lambda_{s-} dX_s - \int_{]0, t]} \Lambda_{s-} dA_s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \int_0^t \Lambda_s d\langle X^c, X^c \rangle_s + \sum_{s \leq t} \{ \Lambda_s - \Lambda_{s-} - \lambda \Lambda_{s-} \Delta X_s \},$$

(on a tenu compte ici de la continuité de A , mais non de son expression explicite (7)). On a $\Lambda_s = \Lambda_{s-} (1 + \Delta X_s)^\lambda$, donc la dernière somme s'écrit $\sum_{s \leq t} \Lambda_{s-} ((1 + \Delta X_s)^\lambda - 1 - \lambda \Delta X_s)$, qui est une intégrale stochastique par rapport au processus $C_t = \sum_{s \leq t} ((1 + \Delta X_s)^\lambda - 1 - \lambda \Delta X_s)$, localement intégrable par hypothèse. Il reste donc

$$\Lambda_t \stackrel{(\underline{L})}{=} \int_{]0, t]} \Lambda_{s-} \left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} d\langle X^c, X^c \rangle_s + dC_s - dA_s \right)$$

et si l'on remplace maintenant A par sa valeur (7), la parenthèse est une martingale locale, car $\int v_t(dx) \{(1+x)^\lambda - 1 - \lambda x\}$ est la projection duale prévisible de C .

Remarques. a) Si $1 + \Delta X \geq 0$ (i.e. si $E(X)$ est positive), on peut étendre ce résultat à toutes les valeurs de $\lambda > 1$. Cela exige un passage à la limite pour vérifier la validité de la formule d'Ito utilisée ci-dessus, car $u^\lambda e^{-v}$ n'est plus de classe C^2 , et il faut considérer $(u+\varepsilon)^\lambda e^{-v}$, et faire tendre ε vers 0.

Si $\lambda > 1$, et $1 + \Delta X$ ne s'annule pas, un calcul analogue donne la compensation multiplicative de $|E(X)|^\lambda$.

b) Le processus A est unique si $1 + \Delta X$ ne s'annule pas. En effet, soit $Y = E(X)^\lambda$, et soit $B = \exp(-A)$. Notons les propriétés : Y est une semimartingale, et Y et Y_- ne s'annulent jamais (le produit infini de $E(X)$ est absolument convergent et sans facteur nul); B est un processus à variation finie prévisible, $B_0 = 1$, B et B_- ne s'annulent jamais; YB est une martingale locale. Y étant donnée, cela caractérise uniquement B . En effet, d'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp ([5], V.38 : c'est une autre forme du lemme fondamental) $d(YB) = B dY + Y_- dB$, donc $\frac{dY}{Y_-} + \frac{dB}{B}$ est la différentielle d'une martingale locale. Cela caractérise uniquement le processus à variation finie prévisible $C_t = \int_{]0, t]} \frac{dB_s}{B_s}$, puis on a $B = 1/E(-C)$. Voir le chapitre de [8] sur les décompositions multiplicatives.

c) Considérons la martingale locale

$$\hat{X}_t^{(\lambda)} = \lambda X_t + \sum_{s \leq t} \{ (1 + \Delta X_s)^\lambda - 1 - \lambda \Delta X_s \} - \int \nu_t(dx) \{ (1+x)^\lambda - 1 - \lambda x \}$$

Nous avons vu au cours de la démonstration que $\Lambda_t = 1 + \int_{]0,t]} \Lambda_s^- d\hat{X}_s^\lambda$, donc $\Lambda = E(\hat{X}^{(\lambda)})$.

Revenons alors aux notations précédant l'énoncé du théorème 3. Le processus

$$A_t^{(n)} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n}) \langle X^c, X^c \rangle_t + \int \nu_t(dx) \{ (1 + \frac{x}{n})^n - 1 - x \}$$

est l'unique processus prévisible à variation finie tel que

$$\begin{aligned} E_n(X) &= E(\frac{1}{n} X)^n \exp(-A^{(n)}) \\ &= \exp\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle - \int \nu_t(dx) [(1 + \frac{x}{n})^n - 1 - x] \} \prod_{s \leq t} (1 + \frac{\Delta X_s}{n})^n e^{-\Delta X_s} \end{aligned}$$

soit une martingale locale. De plus, nous avons vu que $E_n(X) = E(\hat{X}^n)$, avec

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^n &= X_t + \sum_{s \leq t} Q_n(\Delta X_s) - \int \nu_t(dx) Q_n(x) \quad \text{où } Q_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n - 1 - x \\ &= X_t + \int_0^t U_n(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } U_n(x) = \frac{Q_n(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, $Q_n(x)$ tend vers $e^x - 1 - x$, et on a de même le théorème suivant :

Théorème 4 . Soit X martingale locale quasi-continue à gauche, telle que le processus $\sum_{s \leq t} |e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s|$ soit localement intégrable (condition qui est en particulier réalisée si les sauts de X sont uniformément bornés). Le processus $A_t^{(\infty)} = \int \nu_t(dx) (e^x - 1 - x)$ est l'unique processus prévisible, à variation finie tel que

$$E_\infty(X) = \exp\{ X - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle - A^{(\infty)} \}$$

soit une martingale locale.

La démonstration est identique à celle du théorème 3. On a $E_\infty(X) = E(\hat{X}^\infty)$, avec

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^\infty &= X_t + \sum_{s \leq t} (e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s) - \int \nu_t(dx) (e^x - 1 - x) \\ &= X_t + \int_{]0,t]} f(\Delta X_s) dX_s \quad \text{où } f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}, \quad f(0) = 0. \end{aligned}$$

L'application E_∞ a été utilisée en [4] et [6] pour la résolution du problème des martingales lié aux opérateurs intégral-différentiels qui sont générateurs infinitésimaux de processus de Markov sur \mathbb{R}^n . Toutes

les applications E_i ($i=n$ ou ∞) sont des "exponentielles", en ce sens que si X et Y sont quasi-continues à gauche et $[X,Y]=0$ on a $E_i(X+Y)=E_i(X)E_i(Y)$.

4.3. On peut maintenant caractériser de plusieurs manières le processus croissant $\langle X^C, X^C \rangle$ et la mesure aléatoire $\nu(dsdx)$ d'une martingale locale quasi-continue à gauche, dont on supposera en général les sauts uniformément bornés.

Caractérisons tout d'abord le processus $\langle X^C, X^C \rangle$.

Théorème 5. Soit X martingale locale telle que $1+\Delta X$ ne s'annule jamais. $A = \langle X^C, X^C \rangle$ est l'unique processus croissant prévisible tel que

$$\Lambda^1(X, A) = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}A_t\right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \in \underline{\mathbb{L}}$$

Démonstration. Si Y est la semimartingale $\exp(X_t) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$, le produit infini est absolument convergent et aucun de ses facteurs n'est nul, donc Y ne s'annule jamais. On applique alors le principe général d'unicité des décompositions multiplicatives, remarque b) suivant le théorème 3.

On caractérise maintenant la mesure de Lévy ν .

Théorème 6. Soit X martingale locale quasi-continue à gauche telle que $|\Delta X| \leq 1$. La mesure de Lévy $\nu(dsdx)$ est caractérisée par les propriétés suivantes

- elle est prévisible, portée par $]0, \infty[\times ([-1, +1] \setminus \{0\})$,
- le processus $\int \nu_t(dx) x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout entier n , $2 \leq n < \infty$

$$\Lambda^n(X, \nu) = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^C, X^C \rangle_t - \int \nu_t(dx) Q_n(x)\right\} \prod_{s \leq t} (1 + \frac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$$

est une martingale locale, où $Q_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n - 1 - x$.

Démonstration. Soit $\bar{\nu}(\omega; dsdx)$ une seconde mesure aléatoire prévisible possédant les mêmes propriétés. Nous définissons de manière évidente $\bar{\nu}_t(\omega, dx)$ et $\Lambda^n(X, \bar{\nu})$. Nous introduisons la semimartingale $Y^n = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^C, X^C \rangle_t\right\} \prod_{s \leq t} (1 + \frac{1}{n}\Delta X_s)^n e^{-\Delta X_s}$, et les processus à variation finie prévisibles $B_t^n = \exp(-\int \nu_t(dx) Q_n(x))$, et \bar{B}_t^n de même. Comme $Y^n B^n$ et $Y^n \bar{B}^n$ sont des martingales locales, le principe général d'unicité (remarque b) suivant le th.3) entraîne que $B^n = \bar{B}^n$, ou encore $\int \nu_t(dx) Q_n(x) = \int \bar{\nu}_t(dx) Q_n(x)$ pour tout n , donc par combinaison linéaire $\int \nu_t(dx) x^n = \int \bar{\nu}_t(dx) x^n$ pour tout $n \geq 2$, puis par le théorème de Weierstrass $\int \nu_t(dx) x^2 f(x) = \int \bar{\nu}_t(dx) x^2 f(x)$ pour toute f continue sur $[-1, 1]$.

Donc les mesures $\nu_t(dx)x^2$ et $\bar{\nu}_t(dx)x^2$ sont égales, et comme $\nu_t(dx)$ $\bar{\nu}_t(dx)$ ne chargent pas 0, elles sont aussi égales. On en déduit aisément l'égalité de ν et de $\bar{\nu}$ elles mêmes.

On a de même, avec l'application E_∞ , des théorèmes analogues aux précédents, permettant de caractériser $\langle X^C, X^C \rangle$ et ν .

Théorème 7. Soit X processus càdlàg., à valeurs dans \mathbb{R} , adapté, quasi-continu à gauche, et tel que $|\Delta X| \leq 1$.

1) Si X est une martingale locale, la mesure de Lévy ν de X est uniquement caractérisée par les propriétés suivantes :

- elle est prévisible, portée par $]0, \infty [\times ([-1, 1] \setminus \{0\})$,
- le processus $\int \nu_t(dx)x^2$ est à valeurs finies,
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le processus

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha, X, \nu) = \exp\left\{\alpha X_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \langle X^C, X^C \rangle_t - \int \nu_t(dx)(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x)\right\}$$

est une martingale locale.

2) Supposons seulement que le processus croissant $\sum_{s \leq t} \Delta X_s^2$ soit localement intégrable, et soit ν la projection duale prévisible¹ de la mesure aléatoire $\sum_u \mathbb{I}_{\{\Delta X_u \neq 0\}} \varepsilon_u(ds) \varepsilon_{\Delta X_u}(dx)$. Soit A un processus croissant nul en 0, adapté et continu. Pour que X soit une martingale locale et que l'on ait $\langle X^C, X^C \rangle = A$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Lambda^{(\infty)}(\alpha, X, A) = \exp\left\{\alpha X_t - \frac{1}{2}\alpha^2 A_t - \int \nu_t(dx)(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x)\right\}$$

soit une martingale locale.

Démonstration. 1) La démonstration est identique à celle du théorème 6, si l'on développe $e^{\alpha x} - 1 - \alpha x$ en série entière.

2) Avec les hypothèses faites, $\frac{d}{d\alpha} \Lambda^{(\infty)}(\alpha, X, A)|_{\alpha=0} = X$ est une martingale locale. On montre ensuite que $A = \langle X^C, X^C \rangle$ de même qu'au théorème 5.

1. Elle existe d'après la prop.9.

REFERENCES

- [1]. J. Jacod. Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z.f.W. 31, 1975, 235-246.
- [2]. J. Jacod et J. Mémin. Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales. A paraître.
- [3]. N. El Karoui et J.P. Lepeltier. Processus de Poisson ponctuel associé à un processus ponctuel, représentation des martingales de carré intégrable quasi-continues à gauche (à paraître).
- [4]. J.P. Lepeltier . Thèse de 3e Cycle, Université de Paris VI.
- [5]. P.A.Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. Dans ce vol.
- [6]. D.W. Stroock. Diffusion processes associated with Lévy generators. Z.f.W. 32, 1975, 209-244.
- [7]. J.H. Van Schuppen et E. Wong. Transformations of local martingales under a change of law. Annals of Prob. 2, 1974, p. 879-888.
- [8]. Ch. Yoeurp . Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Dans ce volume.