Maurizio Pratelli

# Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 10 (1976), p. 401-413
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__401_0>

Mars 1975

# SUR CERTAINS ESPACES DE MARTINGALES LOCALEMENT DE CARRE INTEGRABLE.

Maurizio PRATELLI

------

Un espace bien connu en théorie des martingales est l'espace $\mathfrak{H}^p$ constitué par les martingales locales $M$ satisfaisant à la condition $[M,M]_\infty^{1/2} \in L^p$ .

Grâce aux inégalités de Burkholder, on sait que si $p$ et $q$ sont deux exposants conjugués $(1 < p < +\infty)$ , le dual de $\mathfrak{H}^p$ est égal à $\mathfrak{H}^q$ .

On sait aussi que le dual de $\mathfrak{H}^1$ est l'espace $\mathfrak{BMO}$ .

Dans cet article, on étudie l'espace $\mathfrak{h}^p$ constitué par les martingales $M$ , localement de carré intégrable, satisfaisant à la condition $\langle M,M\rangle_\infty^{1/2} \in L^p$ .

On démontre notamment, pour les espaces $\mathfrak{h}^p$ , des résultats de dualité analogues aux résultats rappelés ci-dessus à propos des espaces $\mathfrak{H}^p$ .

0. NOTATIONS. - Les notions fondamentales de la théorie générale des processus (voir, p. ex., [4]) , ainsi que celles de la théorie des intégrales stochastiques (voir [5]), sont supposées connues par la suite. Les notations sont celles de [5] L'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ est muni d'une famille $(\mathfrak{F}_t)_{t\in R_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Toutes les martingales (locales) sont supposées continues à droite. La notation $\mathfrak{M}^2$ désigne l'espace des martingales de carré intégrable et nulles pour $t=0$ .

Si $M$ est une telle martingale, on note $<M,M>$ le seul processus croissant prévisible tel que $M^2 - <M,M>$ soit une martingale. (v. [3], p.80) . Pour tout temps d'arrêt $T$ , on a

$$E[(M_\infty - M_T)^2 \mid \mathfrak{F}_T] = E[<M,M>_\infty - <M,M>_T \mid \mathfrak{F}_T] .$$

On dit qu'un processus $X$ possède <u>localement</u> une propriété donnée, s'il existe une suite croissante $(T_n)$ de temps d'arrêt, tendant vers l'infini, telle que, pour tout $n$ , le processus arrêté $X^{T_n}$ possède la propriété en question.

On désigne par $\mathfrak{M}^2_{loc}$ l'espace des martingales localement de carré intégrable. Pour une telle martingale $M$ , le processus $<M,M>$ est défini par la condition

$$<M,M>^T = <M^T,M^T>$$

(pour tout temps d'arrêt $T$ tel que $M^T$ soit dans $\mathfrak{M}^2$) . Il peut être caractérisé comme le seul processus croissant prévisible $A$ , tel que $M^2 - A$ soit une martingale locale.

## 1. - <u>DEUX INEGALITES CONCERNANT LES PROCESSUS CROISSANTS</u>.

Soit $B$ un processus croissant optionnel, et soit $A$ son <u>compensateur</u> prévisible, c'est-à-dire, soit $A$ le processus croissant prévisible tel que l'on ait

$$E[A_\infty - A_T \mid \mathcal{F}_T] = E[B_\infty - B_T \mid \mathcal{F}_T]$$

pour tout temps d'arrêt $T$ , et

$$E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_{T-}] = E[B_\infty - B_{T-} \mid \mathcal{F}_{T-}]$$

pour tout temps d'arrêt $T$ prévisible.

Dans ces conditions, on a les inégalités suivantes, dont la première est démontrée dans [2] , Lemme 2 .

PROPOSITION 1.1. - Pour toute fonction réelle positive $F$ , définie dans $\mathbb{R}_+$ , nulle en $0$ , convexe, à croissance modérée (c'est-à-dire satisfaisant à la condition $F(2t) \leq cF(t)$ , où c est une constante réelle positive), on a

$$E[F(A_\infty)] \leq c_F E[F(B_\infty)] ,$$

où $c_F$ est une constante réelle positive, ne dépendant que de $F$ .

PROPOSITION 1.2. - Pour toute fonction réelle positive $F$ , définie dans $\mathbb{R}_+$ , nulle en $0$ , croissante et concave, on a

$$E[F(B_\infty)] \leq 2E[F(A_\infty)] .$$

Démonstration. - Désignons par $f$ la dérivée gauche de $F$ et par $\mu$ la mesure positive sur $]0,+\infty[$ déterminée par la condition :

$$\mu([a,b[) = f(a) - f(b) \quad \text{pour} \quad 0 < a < b < +\infty .$$

Pour toute v.a. positive $Z$ , on a alors (v. [1], th. 20.1, p.38-39):

$$E[F(Z)] = f(+\infty) E[Z] + \int E[Z \wedge t] \, d\mu(t) .$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité

$$E[B_\infty \wedge t] \leq 2E[A_\infty \wedge t]$$

pour tout nombre réel $t$ positif. A cet effet, $t$ étant fixé, désignons par $T$ le temps d'arrêt prévisible ainsi défini :

$$T = \inf\{s : A_s \geq t\} .$$

On a alors

$$B_\infty \wedge t \leq B_{T-} + t\, I_{\{T < +\infty\}} \quad ,$$

$$E[B_{T-}] = E[A_{T-}] \leq E[A_\infty \wedge t] \quad ,$$

$$E[t\, I_{\{T < +\infty\}}] \leq t\, \mathbb{P}\{A_\infty \geq t\} \leq E[A_\infty \wedge t] \ ,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité à démontrer.

Nous n'utiliserons dans la suite que le corollaire suivant (dont la démonstration est évidente) :

COROLLAIRE 1.3. - Pour tout élément $M$ de $\mathfrak{M}^2_{loc}$ et pour tout nombre réel $p$ strictement positif, on a

$$E[\,[M,M]^p_\infty] \leq 2\, E[<M,M>^p_\infty] \quad \text{si} \quad p \leq 1 \ ,$$
$$E[<M,M>^p_\infty] \leq c_p\, E[\,[M,M]^p_\infty\,] \quad \text{si} \quad p \geq 1 \ .$$

## 2. - LES ESPACES $\mathfrak{h}^p$ ET **bmo** .

On dit qu'une martingale $M$ appartient à **bmo** si elle appartient à $\mathfrak{M}^2$ et s'il existe une constante réelle positive $c$ telle que l'on ait, pour tout temps d'arrêt $T$ :

$$E[(M_\infty - M_T)^2 \mid \mathcal{F}_T] \leq c^2 \quad \text{p.s.} \quad .$$

La borne inférieure de tous les nombres $c$ possédant cette propriété est appelée la norme de $M$ dans **bmo** et notée $\|M\|_{<\infty>}$.

Le théorème suivant montre qu'il n'est pas possible d'associer à toute martingale locale $M$ un processus croissant prévisible $<M,M>$ de telle façon que $M^2 - <M,M>$ soit une martingale locale. Ce résultat a été trouvé indépendamment par YOEURP dans la préparation de sa thèse : on le démontre ici, car il ne figure pas dans la litérature.

THEOREME 2.1. - *Soit* $M$ *une martingale locale, et supposons qu'il existe un processus croissant* $A$ *prévisible, continu à droite (pas forcément intégrable), avec* $A_0 = 0$ *et tel que* $M^2 - A$ *soit une martingale locale. Alors* $M$ *appartient à* $\mathfrak{M}^2_{loc}$ *et* $A$ *est indistinguable du processus* $\langle M,M \rangle$ .

*Démonstration.* - On voit facilement que, pour tout temps d'arrêt $T$ réduisant les martingales locales $M$ et $M^2 - A$ , la v.a. $A_T^{1/2}$ est intégrable. Cela prouve que le processus $A^{1/2}$ est localement intégrable.

Si, pour tout entier $n$ , on pose $S_n = \inf\{s : A_s \geq n\}$ , on obtient une suite croissante $(S_n)$ de temps d'arrêt prévisibles tendant vers l'infini. Tout $S_n$ est de la forme $S_n = \sup_m S_{n,m}$ , avec $S_{n,m} < S_n$ sur l'ensemble $\{S_n > 0\}$, où $(S_{n,m})$ est une suite double de temps d'arrêt que l'on pourra supposer croissante par rapport à chacun des indices.

Si alors $(R_n)$ est une suite, croissant vers l'infini, de temps d'arrêt réduisant la martingale locale $M^2 - A$ , il en est de même de la suite $(T_n)$ définie par $T_n = R_n \wedge S_{n,n}$ . Puisque la martingale $(M^2 - A)^{T_n}$ est uniformément intégrable et que la v.a. $A_{T_n}$ est bornée (par la constante $n$ ) , la martingale $M^{T_n}$ est de carré intégrable. Il est alors évident que les processus $A$ et $\langle M,M \rangle$ sont indistinguables.

Pour tout nombre réel $p \geq 1$ , et pour tout élément $M$ de $\mathfrak{M}^2_{loc}$ , on pose

$$\|M\|_{\langle p \rangle} = \|\langle M,M \rangle_\infty^{1/2}\|_{L^p} .$$

On désigne par $\mathfrak{h}^p$ l'espace constitué par les éléments $M$ de $\mathfrak{M}^2_{loc}$ pour lesquels le nombre ci-dessus est fini. Les espaces $\mathfrak{h}^p$ ainsi définis sont des espaces de Banach. Nous nous bornerons ici à démontrer cette assertion pour $p \leq 2$ , car pour $p > 2$ elle résultera des Théorèmes du § 4 .

THEOREME 2.2. - *L'espace* $\mathfrak{h}^p$ *(pour* $1 \leq p \leq 2$*) est un espace de Banach par rapport à la norme* $\|\cdot\|_{\langle p \rangle}$ *définie ci-dessus. En outre, de toute suite* $(M^n)$ *convergente vers* $M$ *dans* $\mathfrak{h}^p$ , *on peut extraire une sous-suite qui converge vers* $M$ *dans* $\mathfrak{M}^2_{loc}$

Démonstration. - Soit $(M^n)$ une suite de Cauchy dans $\mathfrak{h}^p$. Grâce au Corollaire 1.3, $(M^n)$ est de Cauchy dans $\mathfrak{H}^p$, de sorte qu'elle converge, dans ce dernier espace, vers un élément $M$. Quitte à remplacer $(M^n)$ par une suite extraite, on pourra supposer que l'on ait

$$\sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p/2} < +\infty .$$

Pour tout entier $j$, désignons par $S_j$ le temps d'arrêt prévisible défini par

$$S_j = \inf\{t : \langle M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}\rangle_t \geq j \text{ pour un } n \text{ au moins}\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_j < +\infty\} &\leq \sum_n \mathbb{P}\{\langle M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}\rangle_\infty \geq j\} \\ &\leq j^{-p/2} \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p} , \end{aligned}$$

de sorte que la suite $(S_j)$ croît vers l'infini p.s. .

En raisonnant comme dans le Théorème 2.1., on peut construire une suite croissante $(T_j)$ de temps d'arrêt, tendant vers l'infini, telle que l'on ait

$$\langle M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}\rangle_{T_j} \leq j \quad \text{pour tout } n .$$

On a en outre

$$\begin{aligned} \sum_n \|(M^n - M^{n+1})^{T_j}\|_{<2>} &= \sum_n E[\langle M^n - M^{n+1}, M^n - M^{n+1}\rangle_{T_j}]^{1/2} \\ &\leq j^{(\frac{1}{2}-\frac{p}{4})} \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>}^{p/2} < +\infty . \end{aligned}$$

La série $\sum_n (M^n - M^{n+1})^{T_j}$ converge donc dans $\mathfrak{M}^2$ et admet comme somme $M^{T_j}$. Cela prouve que $M$ appartient à $\mathfrak{M}^2_{loc}$.

Mais la série $\sum_n (M^n - M^{n+1})^{T_j}$ admet $M^{T_j}$ comme somme aussi dans l'espace $\mathfrak{h}^p$, et l'on a :

$$\|M^{T_j}\|_{<p>} \leq \sum_n \|(M^n - M^{n+1})^{T_j}\|_{<p>} \leq \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>} < +\infty .$$

Il en résulte, en faisant tendre $j$ vers l'infini :

$$\|M\|_{<p>} \leq \sum_n \|M^n - M^{n+1}\|_{<p>} ,$$

de sorte que $M$ appartient à $\mathfrak{h}^p$ .

De la même façon, on prouve l'inégalité

$$\|M - M^n\|_{<p>} \leq \sum_{k\geq n} \|M^k - M^{k+1}\|_{<p>} ,$$

et on a donc la convergence de $(M^n)$ vers $M$ dans $\mathfrak{h}^p$ .

La proposition suivante montre que toute martingale "prévisiblement bornée dans $L^p$ " appartient à $\mathfrak{h}^p$ .

PROPOSITION 2.3. - <u>Soient</u> $M$ <u>une martingale et</u> $A$ <u>un processus croissant optionnel, tels que l'on ait</u>

$$|M_s| \leq A_{s-} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad s \ , \ A_\infty \in L^p \quad (1 \leq p \leq 2) \ .$$

<u>La martingale</u> $M$ <u>appartient alors à</u> $\mathfrak{h}^p$ , <u>et on a</u>

$$\|M\|^p_{<p>} \leq 2\ E[A^p_\infty] \ .$$

<u>Démonstration</u>. - On peut se ramener (par arrêt) au cas où $A_\infty$ appartient à $L^2$ . Soit $t$ un nombre réel positif et posons $T = \inf\{s : A^2_s > t\}$ . On a alors :

$$<M,M>_\infty \wedge t \leq <M,M>_T + t\, I_{\{T<+\infty\}} ,$$

$$E[<M,M>_T] = E[M^2_T] \leq E[A^2_{T-}] \leq E[A^2_\infty \wedge t] ,$$

$$E[t\, I_{\{T<+\infty\}}] = t\,\mathbb{P}\{A^2_\infty > t\} \leq E[A^2_\infty \wedge t] .$$

Il en résulte

$$E[<M,M>_\infty \wedge t] \leq 2\ E[A^2_\infty \wedge t] ,$$

d'où la conclusion (voir la dém. de 1.2) .

3. - LE DUAL DE $\mathfrak{h}^1$ EST $\mathbf{bmo}$ .

Le raisonnement qui prouve que le dual de l'espace $\mathfrak{h}^1$ s'identifie à $\mathbf{bmo}$ est tout à fait semblable à celui qui démontre l'assertion analogue concernant les espaces $\mathfrak{H}^1$ et $\mathfrak{BMO}$ (voir [6]) : ici on se bornera à indiquer les modifications qu'il faut apporter aux démonstrations qui figurent dans [6] .

L'analogue du Lemme 2, page 140, est le suivant :

THEOREME 3.1. - Pour tout élément M de $\mathfrak{h}^1$ et pour tout élément N de $\mathbf{bmo}$ , on a :

$$E[\int_0^\infty |\, d<M,N>_s| \,] \leq \sqrt{2}\, \|M\|_{<1>} \|N\|_{<\infty>} .$$

Démonstration. - Si $\|N\|_{<\infty>} = c$ , on a, pour tout temps d'arrêt T :

$$E[<N,N>_\infty - <N,N>_T \,|\, \mathfrak{F}_T] \leq c^2 .$$

Si T est prévisible, en approchant T par une suite croissante $(T_n)$ qui "annonce" T et en rappelant que $\bigvee_n \mathfrak{F}_{T_n} = \mathfrak{F}_{T-}$ , on trouve :

$$E[<N,N>_\infty - <N,N>_{T-} \,|\, \mathfrak{F}_{T-}] \leq c^2 .$$

En d'autres termes, la projection prévisible du processus $(<N,N>_\infty - <N,N>_{s-})$ est bornée par $c^2$ .

Si H,K sont prévisibles, on a l'inégalité de KUNITA-WATANABE :

$$E[\int_0^\infty |H_s|\, |K_s|\, |d<M,N>_s|] \leq (E[\int_0^\infty H_s^2\, d<M,M>_s])^{1/2} (E[\int_0^\infty K_s^2\, d<N,N>_s])^{1/2} .$$

(voir [5], Prop. 3, page 77) . Posons maintenant

$$H_s^2 = \frac{d\sqrt{<M,M>_s}}{d\,<M,M>_s} = \frac{1}{\sqrt{<M,M>_s} + \sqrt{<M,M>_{s-}}} \quad , \quad K_s^2 = 2\sqrt{<M,M>_s} .$$

Puisque $|H_s|\, |K_s| \geq 1$ p.s. , on a l'inégalité

$$\begin{aligned} E[\int_0^\infty |d<M,N>_s|] &\leq E[\int_0^\infty H_s^2\, d<M,M>_s]^{1/2}\; E[\int_0^\infty K_s^2\, d<N,N>_s]^{1/2} . \\ &= \|M\|_{<1>}^{1/2}\; E[\int_0^\infty K_s^2\, d<N,N>_s]^{1/2} . \end{aligned}$$

On a d'autre part (en intégrant par parties) :

$$E[\int_0^\infty \sqrt{<M,M>_s}\; d<N,N>_s] = E[\int_0^\infty (<N,N>_\infty - <N,N>_{s-})\, d\sqrt{<M,M>_s}] .$$

Puisque $d\sqrt{<M,M>_s}$ est une mesure "prévisible", le processus $(<N,N>_\infty - <N,N>_{s-})$ peut être remplacé par sa projection prévisible, qui est bornée par $\|N\|^2_{<\infty>}$ . Cela achève la démonstration.

L'analogue du théorème final de [6] (page 141) est le théorème suivant :

THEOREME 3.2. - <u>Soit</u> $M \in \mathfrak{M}^2$ . <u>On a alors</u>

$$\|M\|_{<\infty>} \leq \sup_L E[M_\infty L_\infty] \quad \underline{\text{pour}} \quad L \in \mathfrak{M}^2 , \ \|L\|_{<1>} \leq 1 .$$

<u>Démonstration</u>. - Même dans ce cas, la démonstration n'est qu'une modification du cas optionnel. Supposons en effet que le deuxième membre soit $\leq 1$ . Soient $T$ un temps d'arrêt et $A$ un élément de la tribu $\mathcal{F}_T$ . Posons $Z = <M,M>_\infty - <M,M>_T$ , $D = I_A I_{\{t>T\}}$ , $Y = D.M$ (intégrale stochastique). On a alors

$$Y = (M - M^T) I_A , \quad <Y,M>_\infty = <Y,Y>_\infty = I_A . Z. \ .$$

Il en résulte

$$\|Y\|_{<1>} = E[I_A . \sqrt{Z}] ,$$

et par conséquent

$$E[I_A Z] = E[<Y,M>_\infty] \leq E[I_A \sqrt{Z}] \leq E[Z I_A]^{1/2} \ \mathbb{P}(A)^{1/2} .$$

L'ensemble $A$ étant arbitraire, cela prouve la relation conditionnelle :

$$E[Z | \mathcal{F}_T] = E[<M,M>_\infty - <M,M>_T | \mathcal{F}_T] \leq 1 .$$

Le théorème est ainsi établi.

## 4. - <u>LE DUAL DE</u> $\mathfrak{h}^p$ <u>EST</u> $\mathfrak{h}^q$ .

P.A. MEYER a récemment démontré l'inégalité suivante (version renforcée de l'inégalité de KUNITA - WATANABE) :

$$\int_0^\infty |H_s|\ |K_s|\ |d\langle M,N\rangle_s| \le \sqrt{\int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s}\ \sqrt{\int_0^\infty K_s^2\, d\langle N,N\rangle_s} \quad \text{p.p.}\ ,$$

valable pour tout couple $H,K$ de processus prévisibles et pour tout couple $M,N$ d'éléments de $\mathfrak{M}^2_{loc}$. On en déduit, si $p,q$ sont deux exposants conjugués $(1<p<\infty)$ :

$$E[\int_0^\infty |d\langle M,N\rangle_s|\ ] \le \|M\|_{\langle p\rangle}\ \|N\|_{\langle q\rangle}\ .$$

Grâce à cette inégalité, la forme bilinéaire $(M,N) \mapsto E[\langle M,N\rangle_\infty]$ met en dualité séparante les espaces $\mathfrak{h}^p$ et $\mathfrak{h}^q$.

Soit maintenant $\Phi$ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{h}^p$ $(1<p\le 2)$, et soit $\|\Phi\|$ sa norme en tant que forme linéaire sur $\mathfrak{h}^p$. La restriction de $\Phi$ à $\mathfrak{M}^2$ étant une forme linéaire continue sur $\mathfrak{M}^2$, il existe un élément $M$ de $\mathfrak{M}^2$ tel que l'on ait

$$\Phi(N) = E[N_\infty M_\infty] = E[\langle N,M\rangle_\infty] \quad \text{pour tout} \quad N\in\mathfrak{M}^2\ .$$

On a aussi :

$$|E[\langle N,M\rangle_\infty]\ | \le \|\Phi\|\ \|N\|_{\langle p\rangle}\ .$$

Le théorème suivant montre que $\Phi$ peut être identifié à un élément de $\mathfrak{h}^q$.

THEOREME 4.1. - <u>Soit</u> $M\in\mathfrak{M}^2$. <u>On a alors</u> :

$$\|M\|_{\langle q\rangle} \le \frac{q}{2} \sup_N E[\langle M,N\rangle_\infty] \quad \underline{\text{pour}} \quad N\in\mathfrak{M}^2 \quad \underline{\text{et}} \quad \|N\|_{\langle p\rangle} \le 1\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord $\|M\|_{\langle 2q-2\rangle} < +\infty$, et posons $N = H.M$, où :

$$H_s = \frac{\langle M,M\rangle_s^{\frac{q}{2}-1}}{a}\ , \quad a = E[\langle M,M\rangle_\infty^{q/2}]^{1-\frac{1}{q}}\ .$$

On a alors

$$\langle N,N\rangle_\infty = \int_0^\infty H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \langle M,M\rangle_s^{q-2}\, d\langle M,M\rangle_s \le \frac{1}{a^2}\langle M,M\rangle_\infty^{q-1}\ ,$$

et par conséquent $N \in \mathfrak{M}^2$ , $\|N\|_{<p>} \leq 1$ .

En utilisant l'inégalité établie dans [7], page 76, on trouve :

$$\|M\|_{<q>} = \frac{1}{a} E[\int_0^\infty d<M,M>_s^{q/2}] \leq \frac{q}{2a} E[\int_0^\infty <M,M>_s^{\frac{q}{2}-1} d<M,M>_s]$$

$$= \frac{q}{2} E[\int_0^\infty H_s \, d<M,M>_s] = \frac{q}{2} E[\int_0^\infty d<M,N>_s] = \frac{q}{2} E[<M,N>_\infty] .$$

Passons maintenant au cas général. Soit $(T_n)$ une suite croissante de temps d'arrêt, tendant vers l'infini et telle que, pour tout $n$ , $M^{T_n}$ appartienne à $\mathfrak{h}^{2q-2}$ . On a alors, pour tout $n$ :

$$\|M^{T_n}\|_{<q>} \leq \frac{q}{2} \sup_N E[<M^{T_n},N>_\infty] \leq \frac{q}{2} \sup_N E[<M,N>_\infty]$$

(la borne supérieure étant prise sur les éléments $N$ de $\mathfrak{M}^2$ satisfaisant à la condition $\|N\|_{<p>} \leq 1$) .

En faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit l'inégalité désirée.

Enfin, le fait que le dual de $\mathfrak{h}^q$ $(2<q<+\infty)$ s'identifie à $\mathfrak{h}^p$ est une conséquence du théorème suivant :

THEOREME 4.2. - Soit $q \geq 2$ . L'espace de Banach $\mathfrak{h}^q$ est alors uniformément convexe (donc réflexif : voir [8], p. 127) .

Démonstration. - Rappelons qu'un espace de Banach $X$ est dit uniformément convexe si , pour tout $\epsilon>0$ , il existe un $\delta>0$ tel que, pour tout couple $x,y$ d'éléments de $X$ , les relations $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geq \epsilon$ entraînent $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$ .

En partant des inégalités suivantes (valables pour $x,y$ réels positifs et $p \geq 1$) :

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p+y^p) , \qquad (x+y)^p \geq x^p+y^p$$

et de l'identité

$$<M+N, M+N> + <M-N, M-N> = 2(<M,M> + <N,N>) ,$$

on obtient, pour $q \geq 2$ :

$$<M+N,M+N>^{\frac{q}{2}} + <M-N,M-N>^{\frac{q}{2}} \le (<M+N,M+N> + <M-N,M-N>)^{\frac{q}{2}}$$

$$\le 2^{q-1}(<M,M>^{\frac{q}{2}} + <N,N>^{\frac{q}{2}}) \quad ,$$

$$<M+N,M+N>^{\frac{q}{2}} \le 2^{q-1}(<M,M>^{\frac{q}{2}} + <N,N>^{\frac{q}{2}}) - <M-N,M-N>^{\frac{q}{2}} \quad :$$

Soit maintenant $\|M\|_{<q>} = \|N\|_{<q>} = 1$ et $\|M-N\|_{<q>} \ge \epsilon$ . On a alors :

$$\|M+N\|_{<q>} \le (2^q - \epsilon^q)^{\frac{1}{q}} = 2(1-\frac{\epsilon^q}{2^q})^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

de sorte que la condition de convexité uniforme est satisfaite avec

$$\delta = 1 - (1-\frac{\epsilon^q}{2^q})^{\frac{1}{q}} \quad .$$

--------

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BURKHOLDER D.L. Distribution function inequalities for martingales. Annals of Probability, Vol. 1, n° 1, pp. 19-42 (1973) .

[2] CHOU C.S. Les méthodes de Garsia en théorie des martingales ; extension au cas continu. A paraître.

[3] DOLEANS-DADE C. et P.A. MEYER Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, pp. 77-107. Lectures Notes in M. 124 . Springer, Berlin (1970) .

[4] MEYER P.A. Guide détaillé de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités II, pp. 140-170 . Lecture Notes in M. 51. Springer, Berlin (1968) .

[5] MEYER P.A. Intégrales stochastiques I et II . Séminaire de Probabilités I, pp. 72-117. Lectures Notes in M. 39 . Springer, Berlin (1967) .

[6] MEYER P.A. Le dual de $H^1$ est BMO (cas continu) . Séminaire de Probabilités VII, pp. 136 - 145 . Lecture Notes in M. 321 Springer - Berlin (1973) .

[7] MEYER P.A. Martingales and stochastic integrals. Lecture Notes in M. 284 Springer, Berlin (1972) .

[8] YOSIDA K. Functional Analisis. Springer, Berlin (1971) .

ISTITUTO di MATEMATICA
Universita di Pisa

56100 PISA

Italie

INSTITUT de RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Université Louis Pasteur

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG CEDEX