JEAN JACOD
JEAN MÉMIN

Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 24-39
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__24_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UN THEOREME DE REPRESENTATION DES MARTINGALES POUR LES ENSEMBLES REGENERATIFS

par J. JACOD[1] et J. MEMIN[1]

Le texte ci-dessous tire son origine d'une question posée par A.N. Shiryaev: soient (W_t) un mouvement brownien et $\bar{M} = \{t: W_t = 0\}$ l'ensemble de ses "zéros"; quelle est la forme des martingales relatives à la famille des tribus associées à $\bar{M}$? Bien entendu, il n'est pas plus difficile de traiter le même problème lorsque $\bar{M}$ est un ensemble régénératif quelconque; en réalité, lorsqu'on dispose d'un théorème de représentation des martingales pour un processus à accroissements indépendants, il s'agit même d'un problème très facile à résoudre. Comme corollaire, nous en déduisons une expression explicite du temps local de l'ensemble régénératif.

1- INTRODUCTION, ENONCE DU THEOREME DE REPRESENTATION

a) Ensembles régénératifs. Pour tout ce qui concerne les ensembles régénératifs, nous renvoyons à Meyer [7] et Maisonneuve [6], en ne donnant ici que le strict minimum nécessaire en matière de rappels.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de

-un semi-groupe de translations $(\theta_t)_{t \geq 0}$,

-un fermé aléatoire homogène mesurable $\bar{M}$, c'est-à-dire une partie $\bar{M}$ de $\Omega \times [0,\infty[$ appartenant à la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,\infty[)$, vérifiant identiquement $1_{\bar{M}}(\omega, t+s) = 1_{\bar{M}}(\theta_t(\omega), s)$, et dont toutes les coupes $\bar{m}(\omega)$ sont fermées dans $[0,\infty[$.

La formule $U_t(\omega) = t - \sup(s \leq t, s \in \bar{m}(\omega))$ (avec la convention $\sup(\emptyset) = 0$) définit un processus mesurable, continu à droite et pourvu de limites à gauche, en "dents de scie" (cf. [7]). On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la plus petite famille de tribus, continue à droite et rendant (U_t) adapté (donc bien-mesurable); c'est aussi la plus petite famille de tribus rendant $\bar{M}$ bien-mesurable. Par ailleurs M désigne le fermé droit minimal d'adhérence $\bar{M}$, c'est-à-dire l'ensemble tel que chaque coupe $m(\omega)$ soit

---

(1) I.R.I.S.A. (Laboratoire associé n° 227), et Université de Rennes.

le plus petit fermé pour la topologie droite de $[0,\infty[$, dont la fermeture au sens usuel soit $\overline{m}(\omega)$.

DEFINITION: <u>Le terme</u> $(\Omega,\mathcal{F}_t,\overline{M},P)$ <u>est un ensemble régénératif si</u>

-(i)- $P(0\in\overline{M}) = 1$,

-(ii)- pour tout $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt T dont le graphe est contenu dans M et pour tout $A\in\mathcal{F}_\infty$, on a

(1) $$P(\theta_T^{-1}(A)|\mathcal{F}_T) = P(A) .$$

Pour simplifier la discussion, on supposera que P-presque chaque coupe $\overline{m}(\omega)$ <u>n'est pas bornée</u>. On peut alors distinguer quatre types d'ensembles régénératifs:

I- On a $\overline{m}(\omega) = [0,\infty[$ P-ps.

II- $\overline{m}(\omega)$ ne comporte P-ps que des points isolés; si $X_n(\omega)$ désigne la longueur du $n^{\text{ème}}$ intervalle contigu à $\overline{m}(\omega)$, les (X_n) sont alors indépendantes et de même loi (autrement dit, $\overline{M}$ est constitué d'un processus de renouvellement).

III- $\overline{m}(\omega)$ est constitué P-ps d'une suite d'intervalles de longueurs successives $Y_n(\omega)$; si $X_n(\omega)$ est défini comme ci-dessus, les variables $(X_n,Y_n,n\geq 1)$ sont mutuellement indépendantes, les Y_n suivent la même loi exponentielle, et les X_n suivent la même loi quelconque.

IV- $\overline{m}(\omega)$ est P-ps un ensemble parfait d'intérieur vide.

Par exemple si $(\Omega,\mathcal{G}_t,W_t,P)$ est un mouvement brownien, l'ensemble $\overline{M} = \{(\omega,t):W_t(\omega)=0\}$ des zéros de W est régénératif de type IV (il vérifie d'ailleurs (1) pour ses tribus propres $\mathcal{F}_t$, et aussi pour les tribus $\mathcal{G}_t$).

b) <u>La mesure aléatoire associée à</u> $\overline{M}$. Comme (U_t) est un processus continu à droite et pourvu de limites à gauche, on peut lui associer une mesure de transition positive (mesure aléatoire) $\mu(\omega;dt,dx)$ de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(]0,\infty[^2,\mathcal{B}(]0,\infty[^2))$ par

(2) $$\mu(\omega;dt,dx) = \sum_{s:\ \Delta U_s(\omega)\neq 0} \varepsilon_{(s,-\Delta U_s(\omega))}(dt,dx)$$

(ΔU_s désigne le saut de (U_t) à l'instant s ; on a nécessairement $\Delta U_s\leq 0$). Remarquons que la mesure μ détermine entièrement $\overline{M}$: en effet $\overline{M}$ est la fermeture de l'ensemble $\{(\omega,t): U_t(\omega)=0\}$, et (U_t) étant en dents de scie est déterminée par ses sauts.

Soit B un borélien de $]0,\infty[$ situé à un distance strictement positive de 0. Le processus $(\mu(]0,t]\times B))_{t\geq 0}$ est croissant et localement intégrable (il est fini pour tout $t<\infty$, adapté, et ses sauts sont d'amplitude unité); il admet donc une projection prévisible duale A^B unique (à un ensemble P-nul près), et il n'est pas difficile de voir que si B et B' sont disjoints, $A_t^B + A_t^{B'} = A_t^{B\cup B'}$ P-ps. On en déduit alors l'existence d'une mesure aléatoire positive $\nu(\omega;dt,dx)$ unique (à un ensemble P-nul près) telle que pour tout borélien B de $]0,\infty[$ avec $d(0,B)>0$,

$$(3)\quad \begin{cases} - \nu(]0,t]\times B) \text{ est un processus croissant prévisible;} \\ - \mu(]0,t]\times B) - \nu(]0,t]\times B) \text{ est une martingale locale.} \end{cases}$$

(voir par exemple [3] pour plus de détails). On appelle ν la <u>projection prévisible duale</u> de μ.

c) <u>L'intégrale stochastique par rapport à</u> $(\mu-\nu)$. Au vu de la seconde propriété (3), on pressent qu'il est possible d'intégrer certaines fonctions sur $\Omega\times[0,\infty[\times]0,\infty[$ par rapport à la mesure $\mu-\nu$, de façon à obtenir des martingales. C'est ce que nous allons faire ici, en renvoyant à [4] pour toutes les démonstrations.

Voici d'abord quelques notations:

$\mathcal{M}$ = ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables,

$\mathcal{M}^2$ = ensemble des martingales continues à droite, de carré intégrable,

$\mathcal{V}$ = ensemble des processus à variation intégrable (i.e. $A\in\mathcal{V}$ si $E(\int|dA_s|)<\infty$),

$\tilde{\Omega} = \Omega\times[0,\infty[\times]0,\infty[$, muni de la tribu $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(]0,\infty[)$, où $\mathcal{P}$ désigne la tribu prévisible de $\Omega\times[0,\infty[$.

Commençons d'abord par le cas où le processus (U_t) est <u>quasi-continu à gauche</u>, ce qui équivaut à dire que $\nu(\omega;\{t\}\times]0,\infty[)\equiv 0$ en dehors d'un ensemble P-nul. Soient $\mathcal{G}^1$ (resp. $\mathcal{G}^2$) l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurables W sur $\tilde{\Omega}$ telles que $E[\int|W(s,x)|\nu(ds,dx)]<\infty$ (resp. $E[\int W^2(s,x)\nu(ds,dx)]<\infty$). Lorsque $W\in\mathcal{G}^1$ on a également $E[\int|W(s,x)|\mu(ds,dx)]<\infty$ et on peut donc définir un processus $W*(\mu-\nu)$ par

$$(4)\quad W*(\mu-\nu)_t(\omega) = \int W(s,x)1_{\{s\leq t\}}\mu(ds,dx) - \int W(s,x)1_{\{s\leq t\}}\nu(ds,dx)\ ;$$

il est facile de voir que $W*(\mu-\nu) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$. Lorsque $W \in \mathcal{G}^2$, on peut l'approcher (au sens de la semi-norme de $\mathcal{G}^2$) par une suite (W_n) d'éléments de $\mathcal{G}^1 \cap \mathcal{G}^2$; la méthode classique de définition des intégrales stochastiques permet alors de définir un élément $W*(\mu-\nu)$ de $\mathcal{M}^2$ comme limite des $W_n*(\mu-\nu)$ dans $\mathcal{M}^2$ (car si $W_n \in \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{G}^2$, il est facile de voir que $W_n*(\mu-\nu) \in \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{V}$).

Cette construction est tout à fait élémentaire (voir par exemple Skorokhod [8]). Par contre dans le cas où (U_t) <u>n'est pas quasi-continu à gauche</u>, il convient de prendre quelques précautions. Soit $J = \{(\omega,t): \nu(\omega,\{t\}\times]0,\infty[) > 0\}$, qui n'est plus P-évanescent; $\mathcal{G}^1$ est l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurables W telles que

$$E\Big[\int 1_{J^c}(t)|W(t,x)|\nu(dt,dx) + \sum_{t\in J}\Big|1_{\{\Delta U_t\neq 0\}}W(t,-\Delta U_t) - \int \nu(\{t\},dx)W(t,x)\Big|\Big] < \infty$$

et $\mathcal{G}^2$ est l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurables W telles que

$$E\Big[\int 1_{J^c}(t)W^2(t,x)\nu(dt,dx) + \sum_{t\in J}\Big\{\int \nu(\{t\},dx)W^2(t,x) - \Big[\int \nu(\{t\},dx)W(t,x)\Big]^2\Big\}\Big] < \infty$$

(bien entendu, les deux définitions de $\mathcal{G}^1$ coïncident dans le cas quasi-continu à gauche).

Lorsque $W \in \mathcal{G}^1$, la formule (4) n'a plus nécessairement un sens; cependant le lecteur se convaincra aisément qu'on peut définir $W*(\mu-\nu)$ "trajectoire par trajectoire" comme un élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$, et par la procédure standard on définit un élément $W*(\mu-\nu)$ de $\mathcal{M}^2$ pour tout $W \in \mathcal{G}^2$.

d) <u>Le théorème de représentation des martingales</u>. Nous avons (enfin) tous les concepts nécessaires à l'énoncé du théorème de représentation.

DEFINITION: <u>On dit qu'on a la propriété de représentation des martingales</u> (sous-entendu: relativement à $(\mu-\nu)$) <u>si pour tout</u> $M \in \mathcal{M}^2$, <u>il existe</u> $W \in \mathcal{G}^2$ <u>tel que</u>

(5) $$M_t = E(M_o) + W*(\mu-\nu)_t \qquad \text{P-ps.}$$

THEOREME 1: <u>Tout ensemble régénératif de type I, II ou IV possède la propriété de représentation des martingales; aucun ensemble régénératif de type III ne possède cette propriété.</u>

Lorsque la propriété de représentation est satisfaite, tout élément de $\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$ se met également sous la forme (5), avec $W\in\mathcal{G}^1$; de même toute martingale locale est représentée par une formule du type (5), où l'intégrale stochastique $W*(\mu-\nu)$ est définie pour une classe de W plus large que $\mathcal{G}^1$ ou $\mathcal{G}^2$ (cf. [5] pour plus de détails).

Quand l'ensemble régénératif $\overline{M}$ est de type I, le théorème est trivial, puisqu'alors tout $A\in\mathcal{F}_\infty$ vérifie $P(A) = 0$ ou 1 (donc toute martingale continue à droite est P-ps constante). Si $\overline{M}$ est de type II, ce théorème est bien connu ([3], ou Chou-Meyer [1]). Si $\overline{M}$ est de type III, le théorème est également trivial; en effet la variable Y_1 est un temps d'arrêt totalement inaccessible, et toute martingale $W*(\mu-\nu)$ est continue en Y_1, donc la formule (5) ne saurait donner toutes les martingales.

Il nous reste à montrer le théorème pour un ensemble de type IV. Mais auparavant nous allons donner une expression explicite de la projection prévisible duale ν.

2- CALCUL DE LA PROJECTION PREVISIBLE DUALE

Il se trouve que le calcul de ν est exactement le même lorsque $\overline{M}$ est régénératif, ou lorsque $\overline{M}$ est un fermé aléatoire quelconque. Supposons donc, au début de ce paragraphe, que $\overline{M}$ soit un fermé aléatoire (pas nécessairement régénératif). Pour tout $x>0$, on pose

$$T_1^x = \inf(t: U_t > x),\quad S_n^x = \inf(t>T_n^x:\ t\in\overline{M}),\quad T_{n+1}^x = \inf(t>S_n^x:\ U_t>x),$$

ce qui définit par récurrence deux suites (T_n^x) et (S_n^x) de temps d'arrêt.

<u>LEMME 1: Soit</u> T <u>un temps d'arrêt. Soient</u> $x>0$ <u>et</u> $n\geq 1$. <u>Il existe alors une variable positive</u> $\mathcal{F}_{T_n^x}$<u>-mesurable</u> R_n^x <u>telle que</u> $T\wedge S_n^x = (T_n^x + R_n^x)\wedge S_n^x$ <u>sur</u> $\{T_n^x\leq T\}$.

<u>Démonstration</u>: Pour tout $s>0$ on pose $F_s = \{T_n^x + s < S_n^x\}$. La tribu $\mathcal{F}_{(T_n^x+s)-}$ est engendrée par les ensembles de la forme $D = \{U_r\in A\}\cap\{t<T_n^x+s\}$, où $r\leq t$ et $A\in\mathcal{B}([0,\infty[)$. Mais si

$$D' = [\{U_r\in A\}\cap\{r<T_n^x\}\cap\{t<T_n^x+s\}]\cup[\{x+r-T_n^x\in A\}\cap\{T_n^x\leq r\}\cap\{t<T_n^x+s\}],$$

on voit d'une part que $D'\in\mathcal{F}_{T_n^x}$, et d'autre part que $D\cap F_s = D'\cap F_s$.

Par suite $\mathcal{F}_{(T_n^x+s)-}\cap F_s = \mathcal{F}_{T_n^x}\cap F_s$. Quand $s\downarrow t$, on a $F_s\uparrow F_t$ et $\mathcal{F}_{(T_n^x+s)-}\downarrow\mathcal{F}_{T_n^x+t}$, et on en déduit que $\mathcal{F}_{T_n^x+t}\cap F_t = \mathcal{F}_{T_n^x}\cap F_t$.

Il s'ensuit l'existence, pour tout $t>0$, de $G_t\in\mathcal{F}_{T_n^x}$ tel que $G_t\cap F_t = \{T<T_n^x+t\}\cap F_t$. Il suffit alors de vérifier que la variable aléatoire R_n^x définie par la formule $\{R_n^x<t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q},r<t} G_r$ répond à la question. ∎

Sur l'ensemble $\{T_n^x<\infty\}$ on peut définir une version régulière $G_n^x(\omega,dy)$ de la loi de la variable aléatoire $S_n^x - T_n^x + x$ conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{T_n^x}$ (comme $\bar{M}$ est P-ps borné, on a $G_n^x(\omega,]x,\infty[) = 1$).

THEOREME 2: <u>Pour tous</u> $t>0$ <u>et</u> $x>0$ <u>on a</u> P-<u>ps</u>

$$(6)\qquad \nu(]0,t]\times]x,\infty[) = 0 \qquad \text{si } t\leq T_1^x,$$

$$= \nu(]0,T_n^x]\times]x,\infty[) + \int\frac{G_n^x(du)}{G_n^x([u,\infty[)}1_{\{x<u\leq x-T_n^x+t\wedge S_n^x\}} \qquad \text{si } T_n^x\leq t\leq T_{n+1}^x.$$

Ce théorème nous donne donc une version explicite de la projection prévisible duale ν de μ.

<u>Démonstration</u>: Soit A^x le processus croissant défini par le second membre de (6). D'une part $A^x_{T_n^x}$ est $\mathcal{F}_{S_{n-1}^x}$-mesurable et $S_{n-1}^x<T_n^x$; d'autre part si $T_n^x\leq t<T_{n+1}^x$, A^x s'écrit comme $A_t^x = A^x_{T_n^x}+B_{t\wedge S_n^x}$, où B est un processus croissant $\mathcal{F}_{T_n^x}$-mesurable; il est facile d'en déduire que A^x est prévisible, et il suffit alors de montrer que pour tout temps d'arrêt T on a $E(A_T^x) = E[\mu(]0,T]\times]x,\infty[)]$.

Mais un calcul simple montre que, si R_n^x est la variable intervenant au lemme 1, on a

$$E[1_{\{T_n^x\leq T\}}(A^x_{(T_n^x+R_n^x)\wedge S_n^x} - A^x_{T_n^x})] = E[1_{\{T_n^x\leq T,S_n^x\leq T_n^x+R_n^x,S_n^x<\infty\}}]$$

(ce calcul est laissé au lecteur; il est fait explicitement dans [3]; voir également Dellacherie [2]). L'addition pour tous $n\geq1$ des deux membres de la relation ci-dessus conduit au résultat cherché. ∎

Revenons maintenant aux <u>ensembles régénératifs</u>, pour lesquels nous allons encore rappeler quelques propriétés tirées de Maisonneuve [6]. On peut d'abord construire une "fonctionnelle additive", c'est-à-dire un processus croissant L vérifiant identiquement $L_{t+s} = L_t + L_s \circ \theta_t$, jouissant des propriétés suivantes:

$$(7)\begin{cases} \text{-on a } E(\int e^{-t} dL_t) = 1; \\ \text{-le "support" de } L_{\cdot}(\omega) \text{ est } \bar{m}(\omega) \text{ pour P-presque tout } \omega; \\ \text{-si } \bar{M} \text{ est de type II (resp. I, III ou IV), L est purement discontinu (resp. continu).} \end{cases}$$

L s'appelle le <u>temps local</u> de $\bar{M}$. Soit alors τ l'inverse de L, défini par $\tau_t = \inf(s:L_s > t)$. Maisonneuve a montré que le processus τ est un subordinateur (i.e. un processus à accroissements positifs, indépendants et homogènes). Si de plus a et F désignent respectivement le drift et la mesure de Lévy de τ, on sait que

$$(8)\begin{cases} \bar{M} \text{ de type I} \iff a>0,\ F=0 \\ \bar{M} \text{ de type II} \iff a=0,\ F(]0,\infty[)<\infty \\ \bar{M} \text{ de type III} \iff a>0,\ F(]0,\infty[)<\infty \\ \bar{M} \text{ de type IV} \iff F(]0,\infty[)=\infty. \end{cases}$$

Enfin on peut choisir pour version de $G_n^x(\omega,.)$ la probabilité

$$G_n^x(\omega,dy) = \frac{F(dy)}{F(]x,\infty[)} 1_{\{y>x\}} \qquad \text{si } T_n^x(\omega)<\infty$$

(lorsque $\bar{M}$ est de type II ou III, cela vient de ce que $\frac{F(dy)}{F(]0,\infty[)}$ est la loi commune des variables X_n ; lorsque $\bar{M}$ est de type IV, cela vient de la propriété forte de Markov de (U_t) et de l'expression du semi-groupe de transition de ce processus, donnée dans [6]).

On a alors le

COROLLAIRE: <u>Lorsque</u> $\bar{M}$ <u>est un ensemble régénératif, on a</u> P-<u>ps</u>

$$(9)\qquad \nu(]0,t]\times]x,\infty[) = 0 \qquad \text{si } t\leq T_1^x$$

$$= \nu(]0,T_n^x]\times]x,\infty[) + \int \frac{F(du)}{F([u,\infty[)} 1_{\{x<u\leq x-T_n^x+t\wedge S_n^x\}} \quad \text{si } T_n^x<t\leq T_{n+1}^x$$

<u>pour tout</u> $x>0$ (et tout $x\geq 0$ si $\bar{M}$ n'est pas de type IV).

<u>3- REPRESENTATION DES ELEMENTS DE $\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$ LORSQUE $\bar{M}$ N'A PAS DE POINT ISOLE</u>.

Dans ce paragraphe nous supposons que $\bar{M}$ est un ensemble régénératif <u>sans point isolé</u>. Tout élément de $\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$ se transforme par changement de temps en une martingale du subordinateur τ, pour lequel on dispose d'une propriété de représentation des martingales; en opérant le changement de temps inverse, on peut ainsi déterminer la structure des éléments de $\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$.

Plus précisément soit $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ la plus petite famille de tribus continue à droite et rendant τ adapté. On note $\hat{\mathcal{M}}$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}^2$) l'ensemble des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-martingales continues à droite, uniformément intégrables (resp. de carré intégrable).

LEMME 2: -(a)- <u>Pour tout</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-<u>temps d'arrêt</u> T, τ_T <u>est un</u> $(\mathcal{F}_t)$-<u>temps d'arrêt et</u> $\hat{\mathcal{F}}_T\subset\mathcal{F}_{\tau_T}$.

-(b)- <u>Pour tout</u> $(\mathcal{F}_t)$-<u>temps d'arrêt</u> T, L_T <u>est un</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-<u>temps d'arrêt et</u> $\mathcal{F}_T\subset\hat{\mathcal{F}}_{L_T}$.

<u>Démonstration</u>: On sait que τ_t est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt et que $\hat{\mathcal{F}}_t\subset\mathcal{F}_{\tau_t}$, d'où la partie (a). On a $\{L_t\leq s\} = \{t\leq\tau_s\}$, donc L_t est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt; de plus $U_s = s-\tau_{(L_s)-}$ est $\hat{\mathcal{F}}_{L_s}$-mesurable, donc $\mathcal{F}_t\subset\hat{\mathcal{F}}_{L_t}$ et on en déduit la partie (b). ∎

LEMME 3: <u>Soient</u> $M\in\mathcal{M}$ <u>(resp.</u> $\mathcal{M}^2$<u>)</u> <u>et</u> $\hat{M}_t = M_{\tau_t}$. <u>On a alors</u> $M_t = E(\hat{M}_{L_t}|\mathcal{F}_t)$ <u>et</u> $\hat{M}\in\hat{\mathcal{M}}$ <u>(resp.</u> $\hat{\mathcal{M}}^2$<u>)</u>.

<u>Démonstration</u>: Comme τ_{L_t} est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt plus grand ou égal à t, la première assertion est triviale. Une application du lemme 2-(b) à $T = \tau_t$, qui satisfait $L_T=t$, montre que $\hat{M}_t$ est $\hat{\mathcal{F}}_t$-mesurable. D'après le lemme 2-(a), la famille $(\hat{M}_T$: T $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt) est uniformément intégrable, et pour tout $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt T on a $E(\hat{M}_T) = E(M_{L_T}) = E(M_0) = E(\hat{M}_0)$. Par suite $\hat{M}\in\hat{\mathcal{M}}$. Enfin il est évident que $\hat{M}\in\hat{\mathcal{M}}^2$ lorsque $M\in\mathcal{M}^2$. ∎

Pour tout t on pose $D_t = \inf(s>t:\ s\in\bar{M})$. On a alors le

THEOREME 3: <u>Soit</u> $M\in\mathcal{M}\cap\mathcal{V}$. <u>Il existe une fonction</u> $\tilde{\mathcal{P}}$-<u>mesurable</u> W <u>sur</u> $\tilde{\Omega}$ <u>telle que</u> -(i)- $E[\int ds F(dx)\,|W(\tau_s,x)|] < \infty$,

-(ii)- $W(\omega,s,x) = W(\omega,D_s(\omega),x)$ <u>identiquement</u>,

<u>et que</u> M <u>soit donnée par la formule</u>

$$(10)\quad M_t = E(M_0) + \sum_{s\leq t,\Delta U_s\neq 0} W(s,-\Delta U_s) - \int_0^t dL_s\int F(dx)W(s,x) + 1_{\{U_t>0\}}\frac{1}{F(]U_t,\infty[)}\int F(dy)W(t,y)1_{\{y>U_t\}}$$

(L et F ont été définis au paragraphe 2; remarquons que le second membre de (10) est continu à droite).

L'outil principal pour la démonstration de (10) est constitué du théorème de représentation des martingales d'un processus à accroissements indépendants, tel qu'il est démontré par exemple dans [5]. Soient $\hat{\mu}$ la mesure associée au processus τ par

$$\hat{\mu}(\omega;dt,dx) = \sum_{s:\Delta\tau_s(\omega)\neq 0} \varepsilon_{(s,\Delta\tau_s(\omega))}(dt,dx) ,$$

et $\hat{\nu}$ la mesure $\hat{\nu}(\omega;dt,dx) = dt\,F(dx)$. Il est bien connu que $\hat{\nu}$ est la projection prévisible duale de $\hat{\mu}$ (au sens du paragraphe 1-b) relativement à la famille de tribus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. On désigne par $\hat{\mathcal{G}}^1$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}^2$) l'ensemble des fonctions $\hat{\mathcal{P}}\otimes\mathcal{B}(]0,\infty[)$-mesurables $\hat{W}$ sur $\tilde{\Omega}$ ($\hat{\mathcal{P}}$ est la tribu $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-prévisible) telles que $E[\int dtF(dx)|\hat{W}(t,x)|]<\infty$ (resp. $E[\int dtF(dx)\hat{W}^2(t,x)]<\infty$). Si $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^1$ on définit un élément $\hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})$ de $\hat{\mathcal{M}}\cap\mathcal{V}$ par la formule (4); si $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^2$, on définit $\hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})\in\hat{\mathcal{M}}^2$ par le procédé standard.

On a alors le

THEOREME 4 [5]: <u>Si</u> $\hat{M}\in\hat{\mathcal{M}}\cap\mathcal{V}$ (<u>resp.</u> $\hat{\mathcal{M}}^2$), <u>il existe</u> $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^1$ (<u>resp</u>. $\hat{\mathcal{G}}^2$) <u>tel que</u> $\hat{M} = E(\hat{M}_0)+\hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})$.

<u>Démonstration du théorème 3</u>: Posons $\hat{M}_t = M_{\tau_t}$. Comme $\int|d\hat{M}_t|\leq\int|dM_t|$, on a $\hat{M}\in\hat{\mathcal{M}}\cap\mathcal{V}$, et il existe $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^1$ tel que $\hat{M} = E(\hat{M}_0)+\hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})$. La fonction $W(\omega,s,x) = \hat{W}(\omega,L_s(\omega),x)$ vérifie les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. Montrons que W est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable: en utilisant un argument de classe monotone, il suffit de montrer que si $\hat{V}(\omega,t,x) = f(x)1_{\{t\leq T(\omega)\}}$, où f est borélienne et T est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt, alors $V(\omega,t,x) = \hat{V}(\omega,L_t(\omega),x)$ est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable; or $V(\omega,t,x) = f(x)1_{\{t\leq\tau_T(\omega)\}}$ et il suffit d'appliquer le lemme 2-(a).

Considérons l'expression

$$\hat{M}_{L_t} = E(\hat{M}_0) + \sum_{s\leq L_t,\Delta\tau_s\neq 0}\hat{W}(s,\Delta\tau_s) - \int_0^{L_t} ds\int F(dx)\hat{W}(s,x) .$$

On remarque d'abord que $\Delta\tau_s>0$ si et seulement si $\Delta U_t<0$, avec $s=L_t$ et $t=\tau_s$, et alors $\Delta\tau_s = -\Delta U_t$; on peut appliquer la "formule du changement de variable" au dernier terme de l'expression ci-dessus; comme $\hat{W}(s,x) = W(\tau_s,x)$ et $D_t=\tau_{L_t}$, il vient

$$\hat{M}_{L_t} = E(M_0) + \sum_{s\leq D_t,\Delta U_s\neq 0} W(s,-\Delta U_s) - \int_0^{D_t} dL_s\int F(dx)W(s,x) .$$

Or $L_{D_t}=L_t$; en utilisant le fait que $\hat{M}_0=M_0$ et le lemme 3, on voit que

$$M_t = E(M_o) + \sum_{s\leq t, \Delta U_s \neq 0} W(s,-\Delta U_s) - \int_0^t dL_s \int F(dx)W(s,x)$$
$$+ 1_{\{t < D_t\}} E(W(D_t, -\Delta U_{D_t}) | \mathcal{F}_t) .$$

Mais d'après Maisonneuve [6], on a d'une part $P(t \in \overline{M} - M) = 0$, donc $1_{\{t < D_t\}} = 1_{\{U_t > 0\}}$ P-ps; d'autre part la loi de $-\Delta U_{D_t}$ conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_t$ est $\frac{F(dy)}{F(]U_t,\infty[)} 1_{\{y > U_t\}}$, sur l'ensemble $\{U_t > 0\}$. Comme $W(\omega, D_t(\omega), x) = W(\omega, t, x)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(]0,\infty[)$-mesurable, on en déduit que

$$1_{\{t < D_t\}} E(W(D_t, -\Delta U_{D_t}) | \mathcal{F}_t) = 1_{\{U_t > 0\}} \frac{1}{F(]U_t,\infty[)} \int F(dy) W(t,y) 1_{\{y > U_t\}} . \blacksquare$$

4- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Il nous reste maintenant à montrer le théorème 1, dans le seul cas non encore examiné, celui où $\overline{M}$ est de type IV.

Soit donc $M \in \mathcal{M}^2$. D'après [4] on dispose d'un résultat de "décomposition" de M. Plus précisément, M se met sous la forme

$$M = M_o + W*(\mu - \nu) + M' + M'' ,$$

où $W \in \mathcal{G}^2$ et où M' et M'' sont des éléments de $\mathcal{M}^2$ nuls en 0 et tels que: -M' n'a aucun saut commun avec (U_t),

-M'' est une somme compensée de sauts, ne sautant qu'aux instants de saut de (U_t), et vérifiant pour tous $x > 0$ et $n \geq 1$:

(11) $$E[\Delta M''_{S^x_n} | \mathcal{F}_{(S^x_n)-} \vee \sigma(\Delta U_{S^x_n})] = 0 .$$

Il s'agit de montrer que $M' = M'' = 0$, et que $M_o = E(M_o)$.

a) On a $M_o = E(M_o)$: comme $\tau_o = L_o = 0$, on a $\mathcal{F}_o = \widehat{\mathcal{F}}_o$ et on sait (loi 0-1 pour τ) que $P(A) = 0$ ou 1 si $A \in \widehat{\mathcal{F}}_o$, d'où le résultat.

b) On a $M'' = 0$: Fixons $x > 0$ et $n \geq 1$. D'après (11), le processus $N_t = \Delta M''_{S^x_n} 1_{\{t \geq S^x_n\}}$ est un élément de $\mathcal{M} \cap \mathcal{V}$, donc il lui correspond une fonction $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable V satisfaisant les conditions du théorème 3. Un calcul élémentaire sur la formule (10) prouve que

(12) $$\Delta N_t = V(t,-\Delta U_t) - \frac{1}{F([-\Delta U_t,\infty[)} \int F(dy) V(t,y) 1_{\{y \geq -\Delta U_t\}} \quad \text{si } U_t > 0 .$$

Mais pour tout temps d'arrêt T, $V(T,x)$ est $\mathcal{F}_{T-} \otimes \mathcal{B}(]0,\infty[)$-mesurable, donc $\Delta N_{S^x_n}$ est $\mathcal{F}_{(S^x_n)-} \vee \sigma(\Delta U_{S^x_n})$-mesurable. En appliquant encore une fois

(11), on en déduit que $\Delta N_{S_n^x} = \Delta M''_{S_n^x} = 0$ P-ps. Comme les sauts de (U_t) sont épuisés par les temps d'arrêt $(S_n^{1/p}, n\geq 1, p\geq 1)$, on voit que M'' ne saute pas lorsque (U_t) saute, donc est nul.

c) <u>On a</u> $M' = 0$: Considérons $\hat{M}'_t = M'_{\tau_t}$, qui appartient à $\hat{\mathcal{M}}^2$. D'après le théorème 4 il existe $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^2$ tel que $\hat{M}' = \hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})$. Posons $R_n^x = L_{S_n^x}$.

LEMME 4: <u>Pour tous</u> $n\geq 1$, $x>0$, <u>on a</u> P-<u>ps sur</u> $\{R_n^x<\infty\}$.

$$\hat{W}(R_n^x,\Delta\tau_{R_n^x}) - \frac{1}{F([\Delta\tau_{R_n^x},\infty[)}\int F(dy)\hat{W}(R_n^x,y)1_{\{y\geq\Delta\tau_{R_n^x}\}} = 0. \tag{13}$$

<u>Démonstration</u>: Pour tout $p\geq 1$ on pose $\hat{W}^p(\omega,s,x) = \hat{W}(\omega,s,x)1_{\{s\leq p, x>1/p\}}$, $W^p(\omega,s,x) = \hat{W}^p(\omega,L_s(\omega),x)$, $\hat{M}^p = \hat{W}^p*(\hat{\mu}-\hat{\nu})$ et $M_t^p = E(\hat{M}^p_{L_t}|\mathcal{F}_t)$.

Remarquons en premier lieu que $\hat{W}\in\hat{\mathcal{G}}^2$ implique $\hat{W}^p\in\hat{\mathcal{G}}^1$, donc $\hat{M}^p\in\hat{\mathcal{M}}\cap\mathcal{V}$. Mais alors, d'après la preuve du théorème 3, qu'on peut recopier ici, M^p et W^p sont reliés par la formule (10). On a donc d'après (12)

$$\Delta M^p_{S_n^x} = \hat{W}^p(R_n^x,\Delta\tau_{R_n^x}) - \frac{1}{F([\Delta\tau_{R_n^x},\infty[)}\int F(dy)\hat{W}^p(R_n^x,y)1_{\{y\geq\Delta\tau_{R_n^x}\}}$$

sur $\{R_n^x<\infty\}$, et cette expression égale le premier membre de (13) dès que $p>1/x$ et $p>R_n^x$.

Par ailleurs $E[\int dsF(dx)\{\hat{W}(s,x)-\hat{W}^p(s,x)\}^2] \longrightarrow 0$, donc $\hat{M}^p$ tend vers $\hat{M}'$ dans $\hat{\mathcal{M}}^2$, et par suite M^p tend vers M' dans $\mathcal{M}^2$. Donc $\Delta M^p_{S_n^x}$ tend vers $\Delta M'_{S_n^x}=0$ dans L^2, et (13) s'ensuit. ∎

LEMME 5: <u>Soient</u> $\alpha>0$ <u>et</u> f <u>une fonction telle que</u> $\int F(dx)|f(x)|1_{\{x>\alpha\}}$ <u>soit fini. Si</u> $f(x) = \frac{1}{F([x,\infty[)}\int F(dy)f(y)1_{\{y\geq x\}}$ <u>pour</u> F-<u>presque tout</u> x <u>sur l'intervalle</u> $]\alpha,\infty[$, <u>alors</u> f <u>est</u> F-<u>pp constante sur cet intervalle</u>.

(par suite si $\alpha<\beta$ et si $F([\beta,\infty[)>0$, on a $f(x) = \frac{1}{F([\beta,\infty[)}\int F(dy)f(y)1_{\{y\geq\beta\}}$ F-pp sur $]\alpha,\infty[$).

<u>Démonstration</u>: Posons $g(x) = F([x,\infty[)$ et $h(x) = \frac{1}{g(x)}\int F(dy)f(y)1_{\{y\geq x\}}$ (avec la convention $\frac{0}{0}=0$). Comme $h=f$ F-pp sur $]\alpha,\infty[$, on a $h(x) = \frac{1}{g(x)}\int F(dy)h(y)1_{\{y\geq x\}}$ pour tout $x>\alpha$. La fonction g est décroissante, et la fonction $k(x) = \int F(dy)h(y)1_{\{y\geq x\}}$ est à variation finie sur $]\alpha,\infty[$, donc h est à variation finie sur tout intervalle $]\alpha,y]$ tel que $g(y)>0$; de plus g, h et k sont continues à gauche et pourvues de limites à droite sur un tel intervalle.

La formule d'intégration par parties donne alors $dk(u) = h(u)dg(u) + g(u+)dh(u)$ sur $]\alpha,y]$ (car $k = gh$); comme par ailleurs $dk(u) = -h(u)F(du)$ et $F(du) = -dg(u)$, la mesure $g(u+)dh(u)$ est nulle sur $]\alpha,y]$. Or $g(u+) \geq g(y) > 0$ sur cet intervalle, donc la mesure $dh(u)$ est nulle et h est constante sur $]\alpha,y]$. Par suite f est F-pp constante sur tout intervalle $]\alpha,y]$ tel que $g(y) > 0$, donc F-pp sur $]\alpha,\infty[$. ∎

Nous pouvons maintenant montrer que $M' = 0$. Choisissons $\beta > 0$ tel que $F(]\beta,\infty[) > 0$ et posons $\widetilde{W}_s(\omega) = \frac{1}{F([\beta,\infty[)}\int F(dy)\widehat{W}(\omega,s,y)1_{\{y \geq \beta\}}$ (avec la convention $\widetilde{W}_s = \infty$ si cette intégrale n'est pas définie). On définit ainsi un processus $\widehat{\mathcal{P}}$-mesurable $\widetilde{W}$.

Soient $0 < x < \beta$ et $n \geq 1$; pour simplifier les notations, on pose $R = R_n^x$ et $X = \Delta\tau_{R_n^x}$. On sait que R, instant du $n^{\text{ème}}$ saut de τ d'amplitude plus grande que x, est P-ps fini, et que la variable X est indépendante de R et suit la loi $\frac{F(dy)}{F(]x,\infty[)}1_{\{y > x\}}$; de plus $\Delta M'_R = \widehat{W}(R,X)$ est intégrable. En utilisant (13), on voit alors que pour P-presque tout ω on a

$$\begin{cases} \int F(dy)|\widehat{W}(\omega,R(\omega),y)|1_{\{y > x\}} < \infty \\ \widehat{W}(\omega,R(\omega),z) = \frac{1}{F([z,\infty[)}\int F(dy)\widehat{W}(\omega,R(\omega),y)1_{\{y \geq z\}} \quad \text{F-pp en } z \text{ sur }]x,\infty[. \end{cases}$$

D'après le lemme 5 on a donc $\widehat{W}(\omega,R(\omega),z) = \widetilde{W}_R(\omega)$ F-pp en z sur $]x,\infty[$, donc finalement $\widehat{W}(R,X) = \widetilde{W}_R$ P-ps.

Or les sauts de τ sont épuisés par la suite $(R_n^{1/p}, n \geq 1, p > 1/\beta)$. Donc en dehors d'un ensemble P-nul on a $\widehat{W}(t,\Delta\tau_t) = \widetilde{W}_t$ pour tout t tel que $\Delta\tau_t > 0$. Comme $\widehat{W} \in \widehat{\mathcal{G}}^2$ et comme $\widetilde{W}$ est $\widehat{\mathcal{P}}$-mesurable, on a

$$E[\int dsF(dx)\widetilde{W}_s^2] = E[\int\widehat{\mu}(ds,dx)\widetilde{W}_s^2] = E[\int\widehat{\mu}(ds,dx)\widehat{W}^2(s,x)] = E[\int dsF(dx)\widehat{W}^2(s,x)]$$

qui est fini. Mais $F(]0,\infty[) = \infty$ donc le premier terme ci-dessus ne peut prendre que les valeurs 0 et $+\infty$, donc il prend la valeur 0 (c'est là qu'intervient le fait que l'ensemble régénératif est de type IV, et non de type III). Par suite $E[\int dsF(dx)\widehat{W}^2(s,x)] = 0$ et la martingale $\widehat{M}' = \widehat{W}*(\widehat{\mu} - \widehat{\nu})$ est nulle, ce qui implique $M' = 0$.

La démonstration est enfin achevée.

5-REMARQUES SUR LE THEOREME 1.

a) Supposons l'ensemble régénératif de type III. On n'a pas la propriété de représentation des martingales relativement à $(\mu-\nu)$. Cependant un tel ensemble est entièrement décrit par les temps d'arrêt T_n^o et S_n^o, et il a donc une structure très simple, permettant de donner la forme générale des éléments de $\mathcal{M}^2$.

Plus précisément les processus croissants $N_t = \sum 1_{\{S_n^o \leq t\}}$ et $N'_t = \sum 1_{\{T_n^o \leq t\}}$ admettent respectivement pour projection prévisible duale les processus $A_t = \nu(]0,t]\times]0,\infty[)$ (donné par la formule (9)) et $A'_t = b\int_0^t 1_{\overline{M}}(s)ds$ (où b est relié aux caractéristiques a et F du subordinateur τ par $b = \frac{F(]0,\infty[)}{a}$). D'après [3] on sait alors que tout $M\in\mathcal{M}^2$ s'écrit comme

$$(14) \quad M_t = E(M_0) + \int_0^t V_s(dN_s - dA_s) + \int_0^t V'_s(dN'_s - dA'_s)$$

où V et V' sont des processus prévisibles vérifiant $E[\int V_s^2 dA_s - \sum_{(s)}(V_s\Delta A_s)^2]<\infty$ et $E[\int V_s'^2 dA'_s]<\infty$, les intégrales intervenant dans (14) pouvant être calculées trajectoire par trajectoire. Il y a d'ailleurs identité entre les martingales $W*(\mu-\nu)$ où $W\in\mathcal{G}^2$, et les martingales $\int_0^t V_s(dN_s - dA_s)$, où V satisfait les conditions ci-dessus.

b) On sait d'après [5] que la propriété de représentation des martingales est liée à l'unicité de la probabilité P "faisant de ν la projection prévisible duale de μ".

Soyons plus précis: soient Ω l'ensemble de tous les fermés de $[0,\infty[$ et $\overline{M}$ le fermé aléatoire canonique sur Ω; les termes U_t, $\mathcal{F}_t$, μ sont définis comme au paragraphe 1; F étant une mesure positive sur $]0,\infty[$ telle que $\int(x\wedge 1)F(dx)<\infty$, on définit la mesure aléatoire ν par la formule (9). On désigne par $\underline{\underline{P}}$ l'ensemble des solutions au "problème des martingales associé à ν", c'est-à-dire l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ telles que, pour P, ν soit la projection prévisible duale de μ. Alors si $\underline{\underline{P}}$ ne comporte qu'un seul élément P, la propriété de représentation des martingales est satisfaite pour cette probabilité.

Mais, sauf dans le cas trivial où $F=0$ (donc $\nu=0$), $\underline{\underline{P}}$ comporte plusieurs éléments: en effet pour tout $a\geqslant 0$ il existe un subordinateur (X_t) de drift a et de mesure de Lévy F; il lui correspond une probabilité $P_a\in\underline{\underline{P}}$, qui est la "loi" de l'ensemble régénératif $\overline{M} = \overline{\{X_t : t\geqslant 0\}}$, et si $a \neq a'$, on a $P_a \neq P_{a'}$ ($\underline{\underline{P}}$ contient d'ailleurs d'autres probabilités, pour lesquelles $\bar{M}$ n'est pas un ensemble régénératif).

Cependant $\underline{\underline{P}}$ est toujours un ensemble convexe, et on peut montrer que si $P \in \underline{\underline{P}}$, la propriété de représentation des martingales est satisfaite par P <u>si et seulement si</u> P <u>est un élément extrémal de</u> $\underline{\underline{P}}$. Le théorème 1 s'interprête donc ainsi:

- si $F(]0,\infty[) = +\infty$, tout $P \in \underline{\underline{P}}$ faisant de $\bar{M}$ un ensemble régénératif est extrémal ($\bar{M}$ est alors de type IV);
- si $0 < F(]0,\infty[) < +\infty$, parmi tous les $P \in \underline{\underline{P}}$ faisant de $\bar{M}$ un ensemble régénératif (nécessairement de type II ou III), seule celle qui fait de $\bar{M}$ un ensemble de type II est extrémale.

Lorsque $0 < F(]0,\infty[) < +\infty$, il est d'ailleurs très facile de construire tous les éléments extrémaux (et même tous les éléments) de $\underline{\underline{P}}$. En fait à toute famille $H_n(\omega,dx)$ $(n \geq 1)$ de probabilités de transition de $(\Omega,\mathcal{F}_{S^o_{n-1}})$ dans $[0,\infty]$ (avec, par convention, $S^o_0 = 0$) correspond un élément $P \in \underline{\underline{P}}$ et un seul, pour lequel H_n représente la loi conditionnelle de $T^o_n - S^o_{n-1}$ par rapport à $\mathcal{F}_{S^o_{n-1}}$. Les $P \in \underline{\underline{P}}$ extrémaux correspondent aux H_n de la forme $H_n(\omega,dy) = \varepsilon_{Y_n(\omega)}(dy)$, où chaque Y_n est une fonction $\mathcal{F}_{S^o_{n-1}}$-mesurable: en particulier $\bar{M}$ est régénératif de type II si $H_n(\omega,dy) = \varepsilon_0(dy)$; par contre $\bar{M}$ est régénératif de type III si $H_n(\omega,dy) = be^{-by}dy$.

<u>6- UNE EXPRESSION EXPLICITE POUR LE TEMPS LOCAL</u> L.

Lorsque $\bar{M}$ est de type I, II ou III il est très facile de donner explicitement le temps local L. A titre de rappel, signalons que si $\bar{M}$ est de type I, on a évidemment $L_t = t$; si $\bar{M}$ est de type II, on a

$$L_t = \frac{\int e^{-x}F(dx)}{\int(1-e^{-x})F(dx)} \sum_{(n)} 1_{\{S^o_n \leq t\}}.$$

Enfin si $\bar{M}$ est de type III, on a

$$L_t = \frac{a + \int(1-e^{-x})F(dx)}{F(]0,\infty[)} \int_0^t 1_{\bar{M}}(s)ds$$

(dans ce dernier cas, il suffit d'écrire que L est de la forme $L_t = \beta\int_0^t 1_{\bar{M}}(s)ds$, et de calculer β de sorte que $E(\int e^{-t}dL_t) = 1$).

Supposons maintenant que $\bar{M}$ soit de type IV. Le rapprochement des théorèmes 1 et 3 indique qu'on doit pouvoir calculer L à partir de ν ; autrement dit, le temps local dépend explicitement de F, mais non de a. Nous allons dans ce qui suit procéder à ce calcul.

Pour cela, nous nous appuyons essentiellement sur les résultats de [4]. On désigne par $\mathcal{G}^2_{loc}$ l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurables W sur $\tilde{\Omega}$ pour lesquelles il existe une suite (R_n) de temps d'arrêt croissant P-ps vers $+\infty$, et telle que chaque fonction $W_n(\omega,t,x) = W(\omega,t,x)1_{\{t\leq R_n(\omega)\}}$ appartienne à $\mathcal{G}^2$; dans ce cas $W_n*(\mu-\nu)$ est une martingale "arrêtée" en R_n, et $W_n*(\mu-\nu) = W_{n+1}*(\mu-\nu)$ sur $[0,R_n]$: on peut donc définir un processus $W*(\mu-\nu)$ en posant $W*(\mu-\nu)_t = W_n*(\mu-\nu)_t$ si $t\leq R_n$, et $W*(\mu-\nu)$ appartient à l'espace $\mathcal{M}^2_{loc}$ des martingales qui sont localement de carré intégrable.

Ces préliminaires étant faits, on peut énoncer le

THEOREME 5: Supposons $\bar{M}$ de type IV. Soient $x>0$ tel que $F([x,\infty[)>0$ et

$$(15)\quad U(\omega,t,y) = F([x,\infty[)\Big[1_{\{y<x\}}\frac{1}{F([y,\infty[)} + 1_{\{U_{t-}(\omega)<x\}}\frac{F(\{U_{t-}(\omega)\})}{F([U_{t-}(\omega),\infty[)F(]U_{t-}(\omega),\infty[)}\Big].$$

Alors $U\in\mathcal{G}^2_{loc}$ et le temps local L est donné par la formule

$$(16)\quad L_t = U*(\mu-\nu)_t + \sum_{s\leq t}1_{\{\Delta U_s\leq -x\}}\frac{1}{F([x,\infty[)} + 1_{\{U_t>0\}}\frac{F(]U_t,\infty[\cap[x,\infty[)}{F(]U_t,\infty[)F([x,\infty[)}.$$

Le lecteur pourra vérifier que (contrairement aux apparences !) le second membre de (16) est continu; de plus il ne dépend pas de x.

Démonstration: Posons $\hat{W}(\omega,t,y) = 1_{\{y\geq x\}}$ et $W(\omega,t,y) = \hat{W}(\omega,L_t(\omega),y)$ ($= 1_{\{y\geq x\}}$ également). Comme $E(\int dsF(dx)1_{\{s\leq t\}}|\hat{W}(s,x)|)<\infty$, le processus $\hat{M}^t_s = \hat{W}*(\hat{\mu}-\hat{\nu})_{s\wedge t}$ est un élément de $\hat{\mathcal{M}}\cap\mathcal{V}$. Donc si M est le processus défini à partir de W par (10), $(M_{s\wedge L_t})_{s\geq 0}$ est un élément de $\mathcal{M}$ pour tout $t<\infty$; comme $L_t\uparrow+\infty$ si $t\uparrow+\infty$, M est donc une martingale locale relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)$.

Pour simplifier les notations, on pose $g(x) = F([x,\infty[)$. A l'aide de (12) il est facile de vérifier que si $V(\omega,t,y) = -1_{\{y<x\}}\frac{g(x)}{g(y)}$, on a $\Delta M_t = V(t,-\Delta U_t)$ dès que $\Delta U_t<0$, et V est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable. D'autre part (9) implique que

$$\nu(\{t\},dy) = \frac{F(\{U_{t-}\})}{g(U_{t-})} \varepsilon_{U_{t-}}(dy) .$$

Donc

$$\int \nu(\{t\},dy)V(t,y) = -1_{\{U_{t-}<x\}} \frac{g(x)F(\{U_{t-}\})}{g(U_{t-})^2}$$

et si $a_t = \nu(\{t\}\times]0,\infty[)$ on a $a_t < 1$ et

$$V(t,y) + \frac{1}{1-a_t} 1_{\{a_t<1\}} \int \nu(\{t\},dy)V(t,y) = -U(t,y) .$$

D'autre part il est facile de vérifier que $|U| \leq 2$. Il découle alors de [6, théorème (4-1) et proposition (5-1)] que $U \in \mathcal{G}^2_{loc}$, et d'après la propriété de représentation des martingales on a $M = -U*(\mu - \nu)$.

Il suffit maintenant d'écrire que $-U*(\mu-\nu)$ égale le second membre de (10), en remarquant que $\int_0^t dL_s \int F(dy)W(s,y) = g(x)L_t$, pour obtenir la formule (16).∎

BIBLIOGRAPHIE

1 CHOU C.S., MEYER P.A.: Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Sém. Strasbourg IX, Lect. Notes 465, 1975, Springer.

2 DELLACHERIE C.: Un exemple de la théorie générale des processus. Sém. Strasbourg IV, Lect. Notes 124, 1970, Springer.

3 JACOD J.: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. Wahr. 31, pp 235-253, 1975.

4 JACOD J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinue. A paraître au Z. Wahr.

5 JACOD J., MEMIN J.: Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. A paraître.

6 MAISONNEUVE B.: Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs. Sém. Strasbourg V, Lect. Notes 191, 1971, Springer.

7 MEYER P.A.: Ensembles régénératifs d'après Hoffman-Jørgensen. Sém. Strasbourg IV, Lect. Notes 124, 1970, Springer.

8 SKOROKHOD A.V.: Studies in the theory of random processes. 1965, Addison-Wesley.