PAUL-ANDRÉ MEYER

Un cours sur les intégrales stochastiques (exposés 1 à 6)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 245-400
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__245_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(Octobre 1974 / Décembre 1975)

Parmi les auditeurs du séminaire, tous mes remerciements vont à MM. G. Letta, M. Pratelli, C. Stricker, Yen Kia-An, Ch. Yoeurp pour de nombreuses corrections et améliorations. La première rédaction a été relue par Catherine Doléans - Dade, B. Maisonneuve, M. Weil et Ch. Yoeurp, qui y ont relevé d'innombrables erreurs matérielles ou mathématiques . Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

P.A. Meyer

INTRODUCTION ET NOTATIONS GENERALES

Intégrer f par rapport à g, c'est rechercher la limite de sommes de la forme $\Sigma_i f(t_i)(g(t_{i+1})-g(t_i))$, lorsque les subdivisions (t_i) de l'intervalle $[0,t]$ deviennent arbitrairement fines. La limite, si elle existe, se note $\int_0^t f dg$. Le cas classique est celui où g est une fonction à variation bornée sur tout intervalle $[0,t]$, et où f est borélienne, par exemple bornée sur tout intervalle $[0,t]$. Lorsque f et g sont des processus, i.e. dépendent d'un paramètre ω parcourant un espace probabilisé, le résultat de l'intégration est une fonction à la fois de t et de ω, i.e. un nouveau processus, et on a affaire à un problème d'intégrale stochastique.

C'est WIENER qui a remarqué le premier que l'on pouvait donner un sens à des intégrales de la forme suivante[1]

$$\int_0^t f(s)dB_s(\omega) \quad (\, B_t \text{ est le mouvement brownien, f est certaine})$$

par un procédé global sur Ω, alors que l'intégrale individuelle, pour chaque ω fixé, est dépourvue de sens du fait que les trajectoires du mouvement brownien ne sont nulle part à variation bornée. Mais l'étape essentielle a été franchie par ITO[2], qui a défini des intégrales de la forme

$$\int_0^t f_s(\omega)dB_s(\omega) = I_t(\omega)$$

pour certains processus (f_t), adaptés à la famille de tribus de (B_t). Dans la présentation des résultats d'ITO qui figure dans le livre [3] de DOOB, celui-ci met bien en évidence le fait que **la définition de l'intégrale** n'utilise que deux propriétés du mouvement brownien : (B_t) et (B_t^2-t) sont des martingales. Aussi la première application de la décomposition des surmartingales fut l'extension de la définition d'ITO à toutes les martingales de carré intégrable.

Nous verrons cela en détail plus loin. Mais le travail d'ITO n'aurait pas été aussi fondamental **s'il** en était resté à la définition de l'intégrale : ITO a développé tout un calcul différentiel et intégral sur.

1. WIENER considérait même des intégrales multiples (de telles intégrales interviennent en physique, où dB est le "bruit blanc"). Voir aussi ITO [5] et [6].
2. Référence [4].

le mouvement brownien, même à plusieurs dimensions, même dans des variétés. La pièce maîtresse en est la formule du changement de variables : si F est une fonction sur la droite, deux fois différentiable, et si I_t est le processus défini plus haut par l'intégrale stochastique, alors

$$F(I_t) = F(0) + \int_0^t F'(I_s)f_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(I_s)f_s^2 ds$$

Il y a une formule analogue pour le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Toute une série de travaux font suite à ceux d'ITO, en particulier ceux de l'école Russe (le théorème de SKOROKHOD sur la représentation des martingales du mouvement brownien à n dimensions comme intégrales stochastiques, les innombrables applications à la construction de diffusions). En même temps, l'intérêt se porte sur des martingales non continues. A vrai dire, des travaux de mathématiques appliquées utilisaient depuis longtemps les intégrales stochastiques du processus de Poisson, mais celles-ci ont une apparence triviale, puisqu'elles se réduisent à des sommes finies !

Le lecteur pourra trouver un très bel exposé des intégrales stochastiques browniennes dans le livre de McKEAN [7].

Après ITO, l'étape essentielle est le travail de KUNITA-WATANABE [8], sur lequel repose toute la théorie ultérieure. L'apport de KUNITA-WATANABE est triple : l'extension de la formule d'ITO à toutes les martingales continues ; la démonstration d'une forme assez générale de la formule du changement de variables pour les martingales discontinues (mais qui, utilisant le système de LEVY, ne pouvait encore s'étendre aux martingales quelconques). Enfin, alors que les travaux antérieurs ne faisaient intervenir que le processus croissant $\langle M,M\rangle$ associé à une martingale de carré intégrable, KUNITA et WATANABE le "polarisent" en une fonction bilinéaire $\langle M,N\rangle$, qu'ils utilisent pour la démonstration de théorèmes de projection. A cet égard, le travail de KUNITA-WATANABE devait être grandement simplifié par CORNEA et LICEA [9].

L'article de KUNITA-WATANABE a été étudié en détail à Strasbourg [10] (exposés sur les intégrales stochastiques dans le volume I du séminaire), avec pour résultat la découverte de la forme générale des formules de changement de variables, du second processus croissant $[M,M]$ associé à une martingale de carré intégrable, du rôle de la tribu prévisible

visible. L'emploi de $[M,M]$ au lieu de $\langle M,M\rangle$ a permis d'étendre l'intégrale stochastique aux martingales locales, introduites par ITO et WATANABE [11]. Depuis lors, et avec les améliorations apportées par Catherine DOLEANS-DADE ([12],et DOLEANS-MEYER [1]), la théorie semble avoir atteint une forme à peu près définitive.

Seulement, alors qu'autrefois il suffisait de deux heures d'exposé pour traiter l'intégrale d'ITO, et qu'ensuite les belles applications commençaient, il faut à présent un cours de six mois sur les définitions. Que peut on y faire ? Les mathématiques et les mathématiciens ont pris cette tournure. Il est temps de commencer.

NOTATIONS. Tous les processus considérés dans ce cours sont en principe définis sur un même espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$ satisfaisant aux conditions habituelles :

$$\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{F}}_{t+} = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{F}}_s \quad \text{pour tout } t$$

et $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles P-négligeables (d'où la même propriété pour tout $\underline{\underline{F}}_t$). Nous supposerons de plus que $\underline{\underline{F}}=\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$. On convient que $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0$ pour $t<0$.

Toutes les notions de théorie des processus que nous rencontrerons : processus adaptés, temps d'arrêt, martingales... seront relatives à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Toutes les martingales sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Si $M=(M_t)$ est une martingale, ou plus généralement un processus à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche ("càdlàg"), on note M_{t-} la limite à gauche en t - en convenant toujours que $M_{0-}=0$ (ce qui ne préserve pas la propriété de martingale en général, mais c'est sans importance) et que $M_t=0$ pour $t<0$. On note ΔM_t le saut M_t-M_{t-} en t, et on abrège $(\Delta M_t)^2,(\Delta M_t)^p$ en ΔM_t^2, ΔM_t^p malgré la légère ambiguité de ces notations.

Nous ne faisons aucune distinction dans le langage entre deux processus $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$ indistinguables , c.à.d. tels que pour presque tout $\omega\in\Omega$ on ait $X_\cdot(\omega)=Y_\cdot(\omega)$. En particulier, tous les énoncés d'unicité de processus figurant dans le cours établissent en réalité l'unicité d'une classe de processus indistinguables.

Les rappels de théorie générale des processus dans l'exposé I figurent en note , avec références soit à DELLACHERIE [2], aussi noté [D], soit à la nouvelle édition [13] de Probabilités et Potentiels, aussi notée [P], et dont seuls les chapitres I-IV sont parus.

CHAPITRE I. INTEGRALES DE STIELTJES STOCHASTIQUES

Ce chapitre n'introduit aucune définition nouvelle de l'intégrale : il s'agit d'un bout à l'autre d'intégrales de Stieltjes ordinaires sur la droite. Et cependant, il est loin de se réduire à des évidences. A mon avis, il est même plus difficile que le chapitre concernant les martingales de carré intégrable.

PROCESSUS CROISSANTS ET PROCESSUS A VARIATION FINIE

1 Soit $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus. Nous dirons que (A_t) est un processus croissant brut (c'est la terminologie de GETOOR : "raw additive functional") si les trajectoires $A_{\bullet}(\omega)$ sont des fonctions croissantes et continues à droite, un processus à variation finie (VF) brut si les trajectoires $A_{\bullet}(\omega)$ sont des fonctions à variation bornée sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$, continues à droite. Rappelons qu'elles ont alors des limites à gauche A_{t-}, et que $A_{0-}=0$ par convention.

Conformément aux bons principes de "rectification des noms", qui exigent que les êtres les plus fréquemment utilisés aient les noms les plus beaux et les plus simples, nous appellerons simplement processus croissant, processus à variation finie (VF) un processus croissant brut (resp. VF brut) adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Soit (A_t) un processus VF brut. La variation totale $\int_{[0,\infty[}|dA_s|$ se calcule comme la limite de sommes $|A_0|+\Sigma_i|A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|$ relatives à des subdivisions dyadiques $t_i=i2^{-n}$ de la droite : c'est donc une variable aléatoire. Nous dirons que A est à variation intégrable (VI) brut si $\|A\|_V = E[\int_{0-}^{\infty}|dA_s|] < +\infty$. Comme plus haut, l'omission du mot brut signifie que le processus est adapté. Sur l'ensemble des processus VI bruts, l'application $A\mapsto\|A\|_V$ est une norme.

Nous noterons $\underline{\underline{V}}$ l'espace des processus VF (adaptés !).

Etant donné un processus VI brut (A_t), posons pour tout processus mesurable borné X

(2.1) $$\mu(X) = E[\int_{0-}^{\infty}X_s dA_s]$$

Il est évident que l'on définit ainsi une mesure signée sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ muni de la tribu produit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$, bornée, qui ne charge pas les ensembles évanescents (N1)

N1. Une partie H de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est dite évanescente si elle est contenue dans une "bande" $\mathbb{R}_+\times U$, où U est négligeable dans Ω - autrement dit, si la projection de H sur Ω est P-négligeable.

La réciproque est à la fois facile et importante :

THEOREME. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ qui ne charge pas les ensembles évanescents, il existe un processus VI brut (A_t) unique tel que l'on ait (2.1), et $\|A\|_V$ est la norme de la mesure μ.

DEMONSTRATION. On décompose μ en deux mesures positives μ^+ et μ^- comme toujours, et celles-ci ne chargent pas les ensembles évanescents. On se trouve donc ramené au cas où μ est positive. On définit alors une mesure α_t sur Ω ($t\geqq 0$) par $\alpha_t(B)=\mu([0,t]\times B)$ pour $B\in\underline{\underline{F}}$. Comme μ ne charge pas les ensembles évanescents, α_t est absolument continue et admet une densité A_t^1 par rapport à P, que l'on régularise en posant successivement $A_t^2 = \sup_r A_r^1$, le sup étant pris sur les r rationnels $\leqq t$, et $A_t=A_{t+}^2$. Les détails sont laissés au lecteur (cf.[D]IV.T41, p.90).

3 Comment reconnaître sur la mesure μ si le processus VI brut (A_t) est adapté (resp. prévisible : N2) ? C'est l'objet d'un important théorème dû à Catherine DOLEANS-DADE.

N2. La tribu optionnelle (aussi appelée bien-mesurable), sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, est engendrée par les ensembles évanescents (N1) et par les processus adaptés à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche - en particulier, pour les processus VI bruts, "adapté" et "optionnel" sont synonymes . De même, la tribu prévisible est engendrée par les processus adaptés, à trajectoires continues à gauche sur $]0,\infty[$; elle est contenue dans la tribu optionnelle.

La tribu optionnelle est engendrée par les intervalles stochastiques $[\![T,\infty[\![=\{(t,\omega) : t\geqq T(\omega)\}$, où T est un temps d'arrêt. La tribu prévisible est engendrée par les intervalles $[\![T,\infty[\![$, où T est un temps (d'arrêt) prévisible, i.e. il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt telle que $T_n\uparrow T$ partout, et $T_n<T$ partout sur l'ensemble $\{T>0\}$ (on dit que la suite (T_n) annonce T).

Voir [D]IV.D2, p.67, [D]IV.D36, ou [P]IV.61, IV.64, IV.67, IV.69-77.

N3. Etant donné un processus mesurable borné $X=(X_t)$, il existe un processus optionnel X^o unique tel que l'on ait, pour tout temps d'arrêt T, $X_T^o I_{\{T<\infty\}} = E[X_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T]$ p.s.. X^o est la projection optionnelle de X. Par exemple, soit Y une v.a. bornée, et soit (Y_t) la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$. Alors la projection optionnelle du processus $X_t(\omega)=I_{[a,b[}(t)Y(\omega)$ est le processus $X_t^o=I_{[a,b[}(t)Y_t(\omega)$. L'extension du cas borné au cas positif, par convergence monotone, ne présente aucune difficulté.

Voir [D]V.T14, p.98.

THEOREME. <u>Le processus VI (A_t) associé à la mesure μ est adapté (resp. prévisible) si et seulement si μ commute avec la projection optionnelle</u> (N3) (<u>resp. la projection prévisible</u> (N4)).

Cela signifie que si X est un processus mesurable borné, si X^o est sa projection optionnelle (resp. X^p sa projection prévisible) on a $\mu(X^o)=\mu(X)$ (resp. $\mu(X^p)=\mu(X)$). Noter que cela a bien un sens : X^o et X^p sont des classes de processus indistinguables, mais $\mu(X^o)$ et $\mu(X^p)$ sont bien définis, du fait que μ ne charge pas les ensembles évanescents.

DEMONSTRATION. Nous ne donnerons pas tous les détails (voir [D]V.T26) et nous traiterons uniquement le cas prévisible, qui est plus délicat.

Soit T un temps prévisible, et soit Y une variable aléatoire bornée, orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{T-}$. La projection prévisible du processus $X = I_{[[0,T]]}Y$ est nulle (N5,N4 ; vérification laissée au lecteur). Donc, si μ commute avec la projection prévisible, on a $\mu(X)=E[\int_0^\infty X_s dA_s]=0$, donc $E[YA_T]=0$, et comme Y est arbitraire A_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. En particulier A_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, et A est adapté.

N4. Pour tout temps d'arrêt T, on note $\underline{\underline{F}}_{T-}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et les ensembles $A\cap\{t<T\}$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$ ([D]III.27, p.52 ; [P]IV.54). Si T est un temps prévisible, et T_n est une suite annonçant T, on a $\underline{\underline{F}}_{T-}=\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n}$.

Etant donné un processus mesurable borné $X=(X_t)$, il existe un processus prévisible X^p unique tel que l'on ait, pour tout temps prévisible T, $X^p_T I_{\{T<\infty\}} = E[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s.. X^p est la <u>projection prévisible</u> de X. Avec les notations de 3 ci-dessus, la projection prévisible du processus (X_t) est le processus $I_{[a,b[}(t)Y_{t-}(\omega)$, en convenant que $Y_{0-}=Y_0$.

Voir [D]V.T14, p.98.

N5. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S\leq T$, $[[S,T]]$ est l'ensemble des (t,ω) tels que $S(\omega)\leq t\leq T(\omega)$. On définit de même les intervalles stochastiques $[[S,T[[$ etc. En particulier, $[[T]]=[[T,T]]$ désigne le <u>graphe</u> de T ([D]III.17, p.49 ; [P]IV.60).

N6. Un temps d'arrêt T est dit <u>totalement inaccessible</u> si $P\{S=T<\infty\}=0$ pour tout temps prévisible S ([D]III.D39, p.58 ; [P]IV.80-81). La caractérisation inverse, à laquelle on s'attend : S est prévisible si et seulement si $P\{S=T<\infty\}=0$ pour tout T totalement inaccessible, n'est pas toujours vraie : en général, cette propriété signifie seulement que le graphe de S est contenu dans la réunion d'une suite de graphes $[[S_n]]$ de temps d'arrêt prévisibles, que l'on peut supposer disjoints ([D]III.39-41 ; [P]IV.80-81). On dit alors que S est accessible.

Si T est un temps totalement inaccessible (N6), la projection prévisible du processus $X=I_{[[T]]}$ est nulle (la vérification est très simple, et laissée au lecteur). Comme μ commute avec la projection prévisible, $E[\int X_s dA_s]=E[\Delta A_T]=0$. Remplaçant T par les temps d'arrêt T_B, $B\in\underline{\underline{F}}_T$ (N7) on voit que $E[\Delta A_T|\underline{\underline{F}}_T]=0$. Or nous avons vu que A est adapté, donc ΔA_T est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et $\Delta A_T=0$: A ne charge pas les temps totalement inaccessibles.

Il est facile de représenter l'ensemble $\{(t,\omega) : \Delta A_t(\omega)\neq 0\}$ comme une réunion de graphes de temps d'arrêt U_n (regarder le premier, le 2è,..., le n-e saut $>\varepsilon$, puis faire tendre ε vers 0 : on n'exige pas ici que les graphes soient disjoints). Comme A ne charge pas les temps totalement inaccessibles, les U_n sont accessibles (N6), donc la réunion des graphes $[[U_n]]$ est contenue dans une réunion dénombrable de graphes prévisibles $[[T_n]]$, que l'on peut rendre disjoints ([D]IV.T17, [P]IV.88). On a alors, comme les trajectoires de A sont des fonctions à variation bornée

(3.1) $$A_t = A_t^c + \Sigma_n \Phi_n I_{\{t\geq T_n\}}$$ où A^c est continu et adapté, et $\Phi_n=\Delta A_{T_n}$

Φ_n est $\underline{\underline{F}}_{T_n-}$-mesurable d'après ce qui précède. On vérifie alors sans peine que le processus VI $\Phi_n I_{\{t\geq T_n\}}$ est prévisible (en approchant Φ_n par des v.a. étagées, et en considérant des temps d'arrêt de la forme $(T_n)_B$ où $B\in\underline{\underline{F}}_{T_n-}$, on se ramène à démontrer que si S est prévisible, le processus $I_{\{t\geq S\}}$ est prévisible : cela résulte aussitôt de l'existence d'une suite annonçant S. Mais cf. N8). Par sommation, A^c étant continu , donc prévisible, on voit que A est prévisible, et la moitié du théorème est établie.

Inversement, supposons A prévisible. Comme le processus (A_{t-}) est adapté et continu à gauche. il est aussi prévisible, donc le processus

---

N7. Si T est un temps d'arrêt, et $B\in\underline{\underline{F}}_T$, la v.a. $T_B=\begin{cases} T \text{ sur } B \\ +\infty \text{ sur } B^c\end{cases}$ est un temps d'arrêt. De même, si T est prévisible et $B\in\underline{\underline{F}}_{T-}$, T_B est prévisible ([D]III.40 p.58, III.49 p.61 ; [P]IV.73).

Si T est un temps d'arrêt quelconque, il existe $B\in\underline{\underline{F}}_T$ tel que T_B soit totalement inaccessible, T_{B^c} accessible.

N8. Le raisonnement indiqué ci-dessus correspond à l'ordre de l'exposé de [D], mais non à celui de [P]. On a tendance maintenant à <u>définir</u> un temps prévisible comme une v.a. T telle que $[[T,\infty[[$ soit un ensemble prévisible, et à <u>démontrer</u> qu'il existe alors une suite annonçant T.

$\Delta A_t = A_t - A_{t-}$ est prévisible, et l'ensemble $\{(t,\omega) : |\Delta A_t| \geq \varepsilon\}$ est prévisible. Son début T est alors prévisible (N9), car cet ensemble est à coupes fermées. D'autre part, ΔA_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable (N10), et nous avons déjà signalé plus haut qu'alors le processus $\Delta A_T I_{\{t \geq T\}}$ est prévisible. Recommençant l'opération sur $A_t - \Delta A_T . I_{\{t \geq T\}}$, et ainsi de suite indéfiniment, on débarrasse A des sauts $>\varepsilon$. Puis faisant tendre ε vers 0, on arrive à une représentation de A du type (3.1).

Nous regardons maintenant $\int_0^t |dA_s| = \int_0^t |dA_s^c| + \Sigma_n |\Phi|_n I_{\{t \geq T_n\}}$. Du côté droit, le 1[er] processus croissant est continu, donc prévisible, et ceux de la somme aussi. Par différence, on voit que (A_t) peut s'écrire $(B_t - C_t)$, où B et C sont deux processus prévisibles croissants à variation intégrable.

On est donc ramené à démontrer que la mesure μ associée à un processus prévisible à variation intégrable croissant A commute avec la projection prévisible. On utilise alors la représentation (3.1), où maintenant A^c est croissant, et les Φ_n sont positives. Soit X un processus mesurable positif, et soit X^p sa projection prévisible. On a

$$E[\Phi_n X_{T_n}] = E[\Phi_n X^p_{T_n}] \quad \text{puisque } X^p_{T_n} = E[X_{T_n} | \underline{\underline{F}}_{T_n -}] \text{ sur } \{T_n < \infty\}$$

$$E[\int_0^\infty X_s dA_s^c] = \int_0^\infty ds\, E[X_{C_s} I_{\{C_s < \infty\}}] = \int_0^\infty ds\, E[X^p_{C_s} I_{\{C_s < \infty\}}]$$
$$= E[\int_0^\infty X^p_s dA^c_s]$$

N9. Le début d'un ensemble prévisible à coupes fermées à droite est un temps prévisible : [D]IV.T16, p.74. Cela résulte du théorème de section prévisible (N11).

N10. Si T est un temps d'arrêt (prévisible ou non) et X un processus prévisible, X_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable (et toute v.a. $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable s'obtient ainsi). Cf. [D]IV.T20, p.77.

N11. Toute la théorie générale des processus repose sur les théorèmes de section, conséquences du théorème de Choquet sur les capacités, que nous n'aurons guère l'occasion d'utiliser directement ici. En voici l'énoncé : soit H une partie optionnelle (resp. prévisible) de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, et soit h la probabilité de sa projection sur Ω. Il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ un temps optionnel (resp. prévisible) T, tel que $(T(\omega),\omega) \in H$ pour tout ω tel que $T(\omega) < \infty$ - le graphe de T passe dans H - et que $P\{T < \infty\} \geq h - \varepsilon$.

où pour tout ω, $C_{\bullet}(\omega)$ est la fonction inverse continue à gauche de $A^c_{\bullet}(\omega)$. Chaque C_s est un temps d'arrêt prévisible, donc $E[X_{C_s} I_{\{C_s<\infty\}}] = E[X^p_{C_s} I_{\{C_s<\infty\}}]$ par définition de la projection prévisible.

Le cas optionnel est analogue, mais plus simple.

La démonstration précédente a des conséquences importantes.

4 THEOREME. Soit (A_t) un processus à V.I. prévisible (resp. adapté) On peut alors écrire

(4.1) $$A_t = A^c_t + \Sigma_n \lambda_n I_{\{t \geqq T_n\}}$$

où les λ_n sont des constantes , les T_n des temps d'arrêt prévisibles (resp. des t.d'a.) - à graphes non nécessairement disjoints -, où (A^c_t) est un processus V.I. continu, où la série converge absolument :

(4.2) $$\int_0^t |dA_s| = \int_0^t |dA^c_s| + \Sigma_n |\lambda_n| I_{\{t \geqq T_n\}}$$

La différence avec (3.1) est ici le remplacement des v.a. Φ_n par des constantes : il suffit pour cela de représenter Φ^+_n et Φ^-_n comme sommes de v.a. étagées. Mais noter que chaque T_n de (3.1) se trouve ainsi décomposé en temps d'arrêts à graphes non disjoints.

5 THEOREME. Si μ commute avec la projection optionnelle (resp. prévisible), il en est de même de $|\mu|$.

En effet, si μ est associée au processus V.I. brut (A_t), $|\mu|$ est associée à $(\int_0^t |dA_s|)$.

6 THEOREME. Si λ et μ commutent toutes deux avec la projection prévisible (resp. optionnelle) et λ est absolument continue par rapport à μ , λ admet par rapport à μ une densité prévisible (resp. optionnelle).

DEMONSTRATION. Traitons par exemple le cas prévisible. Soit ℓ une densité de λ par rapport à $|\lambda|$ sur la tribu prévisible , ne prenant que les valeurs ± 1 : ℓ est un processus prévisible, et on a $\lambda=\ell.|\lambda|$, $|\lambda|=\ell.\lambda$. Comme les deux mesures commutent toutes deux avec la projection prévisible, cette relation valable sur la tribu prévisible a lieu sur $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$. On peut de même écrire $\mu=m.|\mu|$, $|\mu|=m.\mu$ où m est prévisible à valeurs dans $\{+1,-1\}$. De même, on peut écrire $|\lambda|=a|\mu|$, où a est un processus prévisible positif (pour vérifier que cette relation s'étend de la tribu prévisible à la tribu produit, il faut la positivité, car a n'est pas borné) . Et enfin on a $\lambda=a\ell m.\mu$.

PROJECTION DE MESURES, COMPENSATION DE PROCESSUS V.I.

7 Soit μ une mesure bornée sur $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$, qui ne charge pas les ensembles évanescents. Nous définissons ses projections μ^o (optionnelle) et μ^p (prévisible) par les formules suivantes, où X est un processus mesurable borné

$$(7.1) \qquad \mu^o(X)=\mu(X^o) \qquad ; \qquad \mu^p(X)=\mu(X^p)$$

Il est clair que μ^o commute avec la projection optionnelle, μ^p avec la projection prévisible. Du point de vue des processus V.I., partons d'un processus V.I. **brut** A et faisons les constructions

$$A \longleftrightarrow \mu \begin{cases} \longrightarrow \mu^o \longleftrightarrow \hat{A}^o, \text{ processus V.I.} \\ \longrightarrow \mu^p \longleftrightarrow \hat{A}^p, \text{ processus V.I. prévisible} \end{cases}$$

Nous avons mis un chapeau ^ pour souligner que $\hat{A}^o$, $\hat{A}^p$ ne sont pas les projections optionnelle et prévisible du processus **A** : on les appelle projections duales de A. De toute façon, ces notations ne sont pas très souvent utilisées. En revanche, la suivante l'est beaucoup en théorie des martingales :

8 DEFINITION. Soit A un processus V.I. (adapté !). La projection duale prévisible de A est appelée le compensateur de A, et notée $\tilde{A}$, et le processus $A-\tilde{A}$ est appelé le compensé de A, et noté $\overset{c}{A}$.

(On espère que, malgré la ressemblance des notations, le lecteur ne confondra pas le compensé $\overset{c}{A}$ avec la partie continue A^c de A).

La notion qui vient d'être introduite est fondamentale. Elle a été introduite par Paul LEVY en théorie des processus à accroissements indépendants : si (X_t) est un processus à accroissements indépendants réel, les trajectoires de X ne sont pas en général des fonctions à variation bornée, et la somme des sauts de X entre 0 et t n'est en général pas convergente. Mais si l'on considère la somme des sauts ΔX_t dont l'amplitude est comprise entre $\varepsilon>0$ et 1, soit

$$A_t^\varepsilon = \Sigma_{s\leqq t} \quad \Delta X_s I_{\{\varepsilon\leqq|\Delta X_s|\leqq 1\}}$$

on peut montrer que A^ε est un processus VI sur tout intervalle fini. Ce processus est adapté, mais n'est absolument pas prévisible : **il** ne saute en fait qu'en des temps totalement inaccessibles. Son compensateur est de la forme $\tilde{A}_t^\varepsilon = c_\varepsilon t$. Lorsque $\varepsilon\rightarrow 0$, ni c_ε ni A^ε n'ont de limite, mais en revanche la somme compensée des sauts $A_t^\varepsilon-c_\varepsilon t$ a, comme LEVY l'a montré, une limite (au sens de L^2, par exemple), et ce résultat donne la clé de la structure des processus à accroissements indépendants.

Cette idée de Paul LEVY pourra être suivie tout le long du cours.

9 THEOREME. <u>Pour qu'un processus VI</u> M <u>soit une martingale</u>, <u>il faut et il suffit qu'il soit de la forme</u> $M_t=M_0+\overset{c}{A}_t$, <u>où</u> A <u>est un processus VI</u>. <u>On peut choisir pour</u> A <u>le processus VI sans partie continue et nul en</u> 0

(9.1) $$A_t = \Sigma_{0<s\leqq t} \Delta M_s$$

<u>dont le compensateur</u> $\tilde{A}$ <u>est continu</u>.

<u>Pour toute martingale bornée</u> N, <u>on a</u>

(9.2) $$E[M_\infty N_\infty] = E[\Sigma_s \Delta M_s \Delta N_s] \quad (\ \underline{\text{y compris}}\ \Delta M_0 \Delta N_0 = M_0 N_0\ )$$

<u>et le processus</u>

(9.3) $$M_t N_t - \Sigma_{s\leqq t} \Delta M_s \Delta N_s$$

<u>est une martingale uniformément intégrable nulle en</u> 0.

DEMONSTRATION. a) Montrons d'abord que si A est un processus VI, $\overset{c}{A}$ est une martingale nulle en 0 . La mesure μ associée à $\overset{c}{A}$ est nulle sur la tribu prévisible, en particulier

$$\mu(\{0\}\times B) = 0 \text{ si } B\in\underline{\underline{F}}_0$$

(9.4) $$\mu(]s,t]\times B) = 0 \text{ si } s<t\leqq+\infty\ ,\ B\in\underline{\underline{F}}_s$$

La première condition entraîne que $\overset{c}{A}_0=0$. La seconde s'écrit

$$E[\int_0^\infty I_{]s,t]\times B}(r,\omega)d\overset{c}{A}_r(\omega)\ ] = E[(\overset{c}{A}_t-\overset{c}{A}_s)I_B]$$

et cela exprime que $\overset{c}{A}$ est une martingale.

Inversement, soit (A_t) une martingale VI nulle en 0, et soit μ la mesure associée à A. Les réunions finies d'ensembles disjoints de la forme $\{0\}\times B$ ($B\in\underline{\underline{F}}_0$) et $]s,t]\times B$ ($s<t$, $B\in\underline{\underline{F}}_s$) forment une algèbre de Boole qui engendre la tribu prévisible ([P] IV.67). Donc μ est nulle sur celle ci, et $\tilde{A}=0$, donc $A=\overset{c}{A}$.

Soit M une martingale VI nulle en 0, et soit A le processus donné par (9.1). Posons D=M-A : c'est un processus VI nul en 0 et continu, donc prévisible, et $\tilde{D}=D$. Donc $D=\tilde{D}=\tilde{M}-\tilde{A} = 0-\tilde{A}$, et $M=D+A=A-\tilde{A}=\overset{c}{A}$. On a vu aussi que $\tilde{A}$ est continu, et cela achève la première partie.

b) Passons à (9.2). La projection optionnelle du processus constant égal à N_∞ est la martingale (N_t), et la mesure dM commute avec la projection optionnelle. On a donc (comme $M_{0-}=0$)

$$E[M_\infty N_\infty] = E[\int_{[0,\infty[} N_\infty dM_s\ ] = E[\int_{[0,\infty[} N_s dM_s\ ]$$

D'autre part, la mesure dM est nulle sur tout ensemble prévisible contenu dans $]0,\infty[\times\Omega$ (nous ne supposons pas $M_0=0$!), et le processus (N_{t-}) est prévisible, nul pour t=0 par convention. Donc

$$0 = E[\int_{[0,\infty[} N_{s-}dM_s\,]$$

d'où par différence $E[M_\infty N_\infty] = E[\int \Delta N_s dM_s] = E[\Sigma_s\ \Delta M_s \Delta N_s\,]$.

Soit T un temps d'arrêt. Appliquons ce résultat à la martingale arrêtée (bornée) $N_{t\wedge T}$. Il vient

$$E[M_\infty N_T] = E[\Sigma_{s\leq T}\ \Delta M_s \Delta N_s\ ]\ .$$

Le côté gauche vaut aussi $E[M_T N_T]$. Si nous notons $L_t=M_tN_t-\Sigma_{s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s$, nous avons donc $E[L_T]=0$ pour tout temps d'arrêt T. Un petit lemme nous permet alors de conclure la démonstration :

LEMME. Soit $(L_t)_{t\leq+\infty}$ un processus adapté continu à droite, tel que $E[|L_T|]<\infty$, $E[L_T]\equiv 0$ pour tout temps d'arrêt T. Alors L est une martingale uniformément intégrable.

DEMONSTRATION. Comme on va le voir, les hypothèses de l'énoncé sont beaucoup trop fortes ! Prenons $t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$, $T=t_A$= t sur A, $+\infty$ sur A^c (N7), il vient

$$\int_A L_t + \int_{A^c} L_\infty = 0, \quad \text{et aussi} \int_A L_\infty + \int_{A^c} L_\infty = 0$$

donc $\int_A L_t = \int_A L_\infty$ et $L_t=E[L_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$.

REMARQUE. La démonstration précédente n'exige pas que N soit bornée, mais seulement que $E[N^*.\int_{[0,\infty[}|dM_s|] < \infty$, où $N^*= \sup_s|N_s|$.

Il faut expliciter les résultats obtenus, suivant l'idée de LEVY citée au n°8 : la première partie de l'énoncé (formule (9.1)) exprime que toute martingale VI est la somme compensée de ses sauts. Les formules (9.2) et (9.3) entraînent des propriétés d'orthogonalité d'une martingale VI, et d'une martingale qui n'a pas de saut commun avec elle. Tout cela sera bien développé plus loin.

10 Il faut noter que l'application $A\mapsto\widetilde{A}$ diminue la norme $\|\ \|_v$ (décomposer A en deux processus croissants). Il résulte alors du théorème précédent que

(10.1) $$E[\int_0^\infty |dM_s|\,] \leq 2E[\Sigma_s|\Delta M_s|\,]$$

pour toute martingale VI (M_t) .

INTEGRALES DE STIELTJES STOCHASTIQUES

11 Soit (A_t) un processus V.I., et soit (H_t) un processus optionnel tel que $E[\int_0^\infty |H_s||dA_s|] < \infty$. on peut alors définir le processus $I_t = \int_0^t H_s dA_s$ hors d'un ensemble de mesure nulle. Comme nous ne travaillons qu'à des processus indistinguables de 0 près, nous le considérons comme bien défini : il est manifestement adapté et continu à droite, donc optionnel, et c'est un processus V.I. Dans toute la suite, nous le noterons $H\cdot A$, rarement $H_{\dot{s}}A$ pour rappeler qu'il est construit au moyen de l'intégrale de Stieltjes ordinaire sur chaque trajectoire.

Rappelons que nous avons convenu que ΔA_0, la masse en 0, est égale à A_0 . Cela entraîne que $I_0=H_0A_0$.

Cette notion d'intégrale stochastique est évidemment tout à fait terre à terre, et sans intérêt apparent... et cependant, nous allons rencontrer ici, après l'idée de la compensation des processus croissants, une deuxième idée fondamentale de la théorie des intégrales stochastiques : le rôle des processus prévisibles : à quelle condition, lorsque A est une martingale VI, peut on affirmer que $H\cdot A$ est aussi une martingale VI ? La réponse est dans le petit théorème suivant :

12 THEOREME. Soit M une martingale VI, et soit H un processus prévisible tel que $E[\int|H_s||dM_s|] < \infty$. Alors $H\cdot M$ est encore une martingale VI.

DEMONSTRATION. On se ramène aussitôt au cas où $M_0=0$. Soit μ la mesure bornée associée à M (n°2) ; μ est nulle sur la tribu prévisible, H est prévisible et μ-intégrable, donc $H\mu$ est une mesure bornée, nulle sur la tribu prévisible. C'est la mesure associée au processus VI $H\cdot M$, donc celui-ci est une martingale (cf. n°9).

Nous poserons la définition suivante : on évitera de confondre $\underline{\underline{W}}$, qui est un espace de martingales, avec l'espace $\underline{\underline{V}}$ des processus VF, défini au n°I.1.

13 DEFINITION. Nous notons $\underline{\underline{W}}$ l'espace des martingales VI, muni de la norme variation $\|M\|_V = E[\int_{[0,\infty[}|dM_s|]$.

CARACTERISTIQUES D'UN PROCESSUS VI ET DECOMPOSITION

Nous n'avons encore jamais utilisé les théorèmes de décomposition des surmartingales : notre construction du compensateur d'un processus VI, par exemple, n'utilisait que le théorème de Radon-Nikodym. Nous allons énoncer brièvement les résultats dont nous aurons besoin plus loin.

14 DEFINITION. Soit (A_t) un processus V.I.. On appelle potentiel droit (ou simplement potentiel) associé à A la projection optionnelle (X_t) du processus $(A_\infty - A_t)$, potentiel gauche la projection optionnelle (X'_t) du processus $(A_\infty - A_{t-})$.

Il est facile de calculer (X_t) : en effet, la projection optionnelle de A_∞ est la martingale continue à droite $E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$, et par conséquent ($(A_t)$ étant un processus optionnel)

(14.1) $\qquad X_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - A_t \qquad$ (aussi $X_{0-} = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_0]$)

Il est évident que X est continu à droite. En revanche,

(14.2) $\qquad X'_t = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - A_{t-}$

n'est continu ni à droite, ni à gauche.

Les résultats d'unicité suivants font comprendre l'intérêt de la notion de potentiel gauche (qui n'est pas tout à fait classique : elle figure sous une forme implicite dans un travail de MERTENS, d'où elle a été dégagée par AZEMA).

15 THEOREME. Un processus croissant prévisible nul en 0 est uniquement déterminé par son potentiel.

Un processus croissant optionnel est uniquement déterminé par son potentiel gauche[1].

DEMONSTRATION. Soit A un processus croissant prévisible nul en 0, et soit μ la mesure associée à A. Si l'on a $s<t$, $B \in \underline{\underline{F}}_s$, on a

$$\mu(]s,t]\times B) = \int_B (A_t - A_s)P = \int_B (X_s - X_t)P \quad \text{où X est le potentiel de A}$$

Comme $A_0=0$, on a $\mu(\{0\}\times B)=0$ pour $B\in\underline{\underline{F}}_0$. La mesure μ est donc connue sur une algèbre de Boole qui engendre la tribu prévisible, donc sur celle-ci, donc sur la tribu $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$ puisqu'elle commute avec la projection prévisible, et finalement μ détermine A (n°2).

Si A n'était pas nul en 0, il faudrait introduire une v.a. supplémentaire $X_{0-} = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_0]$ (A_{0-} est nulle par convention, mais X_{0-} n'est pas nulle !), et on aurait alors $\mu(\{0\}\times B) = \int_B (X_{0-} - X_0)P$.

Passons au cas optionnel. Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$; on a , X' désignant le potentiel gauche de A

$$\mu([\![S,T [\![ ) = E[A_{T-} - A_{S-}] = E[(A_\infty - A_{S-}) - (A_\infty - A_{T-})] = E[X'_S - X'_T]$$

Les réunions finies d'ensembles disjoints de la forme $[\![S,T [\![$ forment

1. Dans les deux cas, l'extension aux processus VI est évidente.

une algèbre de Boole qui e gendre la tribu optionnelle ([D]IV.1, p.67). X' détermine donc la restriction de μ à la tribu optionnelle. Mais μ commute à la projection optionnelle, et on conclut comme dans le cas prévisible.

Il nous reste enfin à rappeler le théorème de décomposition des surmartingales, sous sa forme usuelle (nous n'aurons pas besoin de la forme relative aux potentiels gauches)

16 THÉORÈME. Pour qu'un processus X soit le potentiel droit d'un processus croissant intégrable prévisible A tel que $A_0=0$, il faut et il suffit que

X soit une surmartingale positive continue à droite,

X appartienne à la classe (D) : toutes les v.a. X_T, T parcourant l'ensemble des temps d'arrêt p.s. finis, sont uniformément intégrables.

X soit nul à l'infini : $\lim_{t\to\infty} X_t=0$, p.s. ou dans L^1.

(voir [D]V.T49, p.116, la démonstration de Catherine DOLÉANS. Il existe des démonstrations plus élémentaires, telles que celle de RAO [14].

La condition de nullité à l'infini n'est pas essentielle : on a un théorème de représentation analogue, au moyen d'un processus croissant présentant un saut à l'infini $A_\infty - A_{\infty-} = X_\infty$, qui s'interprète au moyen d'une mesure μ sur $[0,\infty]\times\Omega$.

Le théorème suivant est fréquemment utilisé. L'égalité (17.1) est une conséquence simple de la définition de X, et du fait que ΔA_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. Voir [D] V.T52, p.119.

17 THÉORÈME. Si X satisfait aux propriétés précédentes, soit A l'unique processus croissant intégrable prévisible dont X est le potentiel, et soit T un temps prévisible . Alors

(17.1) $\Delta A_T = X_{T-} - E[X_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ (conventions pour 0 : $X_0=X_{0-}$, $A_0=0$ $\Delta A_0=0$, $\underline{\underline{F}}_{0-}=\underline{\underline{F}}_0$)

En particulier, A est continu si et seulement si X est régulier : pour toute suite croissante $(S_n)\uparrow S$ de temps d'arrêt, on a $E[X_S]=\lim_n E[X_{S_n}]$

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(P.A.Meyer)

CHAPITRE II . MARTINGALES DE CARRÉ INTEGRABLE

La théorie de l'intégrale stochastique est un édifice que l'on construit avec deux sortes de briques : la théorie de l'intégrale de Stieltjes stochastique (chap.I) et la théorie de l'intégrale dans L^2 que l'on va développer maintenant. Ce chapitre contient aussi des résultats sur la structure des martingales de carré intégrable.

DEFINITION. ORTHOGONALITÉ

1 $\underline{\underline{M}}$ est l'ensemble des (classes de) martingales $(M_t)_{t\geq 0}$ telles que $\sup_t E[M_t^2] < \infty$. Les éléments de $\underline{\underline{M}}$ sont appelés <u>martingales de carré intégrable</u> . Le sous-espace de $\underline{\underline{M}}$ formé des martingales M nulles en 0 est noté $\underline{\underline{M}}_0$.

On rappelle qu'une telle martingale M admet une limite à l'infini, $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$, que $M_T=E[M_\infty|\underline{\underline{F}}_T]$ pour tout temps d'arrêt T, que $\sup_t E[M_t^2] = \lim_{t\to\infty} E[M_t^2] = E[M_\infty^2]$, et cette quantité est notée $\|M\|_2^2$.

Comme $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_\infty$, la correspondance $M \leftrightarrow M_\infty$ est une bijection entre $\underline{\underline{M}}$ et $L^2(\underline{\underline{F}})$. Cela permet de considérer $\underline{\underline{M}}$ comme un espace de Hilbert, avec le produit scalaire $(M,N)\mapsto E[M_\infty N_\infty]$. L'orthogonalité au sens de ce produit scalaire sera dite <u>faible</u>.

Rappelons l'inégalité de DOOB : soit $M\in\underline{\underline{M}}$, et soit $M_\infty^* = \sup_t|M_t|$. Alors

$$\| M_\infty^* \|_2^2 \leqq 4\| M_\infty \|_2^2 \tag{1.1}$$

Avec une conséquence bien connue : si des martingales $M^n \in \underline{\underline{M}}$ convergent vers $M\in\underline{\underline{M}}$ en norme, il existe une suite $(n_k)\uparrow+\infty$ telle que $(M^{n_k}-M)^*$ tende vers 0 p.s., et par conséquent telle que p.s. la trajectoire $M_\cdot^{n_k}(\omega)$ converge <u>uniformément sur</u> $\mathbb{R}_+$ vers $M_\cdot(\omega)$, ce qui permet de passer à la limite sur les limites à gauche, les sauts, etc.

2 DEFINITION. Deux martingales M et N $\in \underline{\underline{M}}$ sont dites <u>orthogonales</u> si $E[M_T N_T]=0$ pour tout temps d'arrêt T (avec la convention que sur $\{T=\infty\}$ on a $M_T=M_\infty$, $N_T= N_\infty$) et si $M_0 N_0 = 0$.

Prenant $T=+\infty$, on voit que M et N sont alors faiblement orthogonales.

3 THEORÈME. <u>Deux martingales</u> M <u>et</u> N ε $\underline{\underline{M}}$ <u>sont orthogonales si et seulement si leur produit</u> MN <u>est une martingale nulle en</u> 0.

DEMONSTRATION. Il n'y a aucun problème d'intégrabilité, car le processus MN est dominé par la v.a. $M^*N^*\varepsilon L^1$.

Si MN est une martingale d'espérance nulle, nous avons $M_TN_T = E[M_\infty N_\infty | \underline{\underline{F}}_T]$, donc $E[M_TN_T]=E[M_\infty N_\infty]=E[M_tN_t]=0$.

Inversement, le raisonnement de la démonstration de I.9, dernier lemme , montre que si $E[M_TN_T]=0$ pour tout T, alors $M_TN_T=E[M_\infty N_\infty | \underline{\underline{F}}_T]$.

La notation suivante sera utilisée dans toute la suite :

4 NOTATION. <u>Si</u> X <u>est un processus</u>, T <u>un temps d'arrêt</u>, X^T <u>désigne le processus</u> X <u>arrêté à</u> T (<u>i.e.</u> $X_t^T=X_{t\wedge T}$).

La définition suivante est due à KUNITA-WATANABE en substance, mais sous cette forme très commode, elle est empruntée à CORNEA-LICEA.

5 DEFINITION. On appelle <u>sous-espace stable</u> de $\underline{\underline{M}}$ un sous-espace <u>fermé</u> $\underline{\underline{H}}$, <u>stable par arrêt</u>, et tel que si $M\varepsilon\underline{\underline{H}}$, $A\varepsilon\underline{\underline{F}}_0$, on ait I_AM e $\underline{\underline{H}}$.

6 THEORÈME. <u>Soit</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>un sous-espace stable</u>, <u>et soit</u> $\underline{\underline{H}}^\perp$ <u>son orthogonal faible dans</u> $\underline{\underline{M}}$. <u>Alors</u> $\underline{\underline{H}}^\perp$ <u>est stable</u>, <u>et si</u> M <u>et</u> N <u>appartiennent à</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>et</u> $\underline{\underline{H}}^\perp$ <u>respectivement</u>, M <u>et</u> N <u>sont orthogonales</u> (sens fort !).

DEMONSTRATION. Remarquer que nous n'utiliserons pas le fait que $\underline{\underline{H}}$ est fermé, ni la stabilité pour les opérations vectorielles. Soient $M\varepsilon\underline{\underline{H}}$, $N\varepsilon\underline{\underline{H}}^\perp$, T un t.d'a.. Comme nous avons $E[L_\infty N_\infty]=0$ pour $L\varepsilon\underline{\underline{H}}$, et $\underline{\underline{H}}$ est stable par arrêt, prenant $L=M^T$, il vient que $E[M_TN_\infty]=0$. Or $E[M_TN_\infty]= E[M_TN_T]$, donc $E[M_TN_T]=0$ pour tout t.d'a.. De même, remplaçant M par $I_AM\varepsilon\underline{\underline{H}}$ ($A\varepsilon\underline{\underline{F}}_0$), on a $E[I_AM_TN_T]=0$, d'où pour T=0 la relation $M_0N_0=0$. On a établi l'orthogonalité forte de M et N.

La relation $E[I_AM_TN_T]=0$ s'écrit aussi $E[M_\infty (I_AN^T)_\infty]=0$, et montre que I_AN^T appartient à $\underline{\underline{H}}^\perp$, de sorte que $\underline{\underline{H}}^\perp$ est stable.

COMMENTAIRE. La théorie usuelle ne se fait que pour les martingales nulles en 0. Nous avons un peu modifié la définition des sous-espaces stables pour tenir compte de M_0 .

6 bis COROLLAIRE. <u>Si</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>est un sous-espace stable</u>, <u>tout élément</u> M <u>de</u> $\underline{\underline{M}}$ <u>admet une décomposition</u> M=N+N', <u>où</u> N <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}$, N' <u>est orthogonale à</u> $\underline{\underline{H}}$ (au sens des martingales), <u>et</u> $N_0N_0'=0$

C'est la décomposition <u>ordinaire</u> de M en sa projection N sur $\underline{\underline{H}}$ et le morceau restant $M-N=N'\varepsilon\underline{\underline{H}}^\perp$.

EXEMPLES DE SOUS-ESPACES STABLES

Dans les énoncés qui suivent, la continuité en 0 doit s'entendre en tenant compte de la convention $M_{0-}=0$.

7 DEFINITION. On note $\underline{\underline{M}}^c$ l'espace des martingales continues, et $\underline{\underline{M}}^d$ l'orthogonal de $\underline{\underline{M}}^c$. Les martingales $M\in\underline{\underline{M}}^d$ sont dites purement discontinues (on verra plus loin que ce sont aussi les sommes compensées de sauts).

On a $\underline{\underline{M}}^c\subset\underline{\underline{M}}_0$ d'après la convention ci-dessus, et $\underline{\underline{M}}^c$ est évidemment stable par arrêt, fermé d'après l'inégalité de DOOB (n°1), donc stable. $\underline{\underline{M}}^d$ est donc également stable.

Les projections de $H\in\underline{\underline{M}}$ sur $\underline{\underline{M}}^c$ (partie continue de H) et $\underline{\underline{M}}^d$ (partie discontinue) sont en général notées H^c, H^d.

On va étudier des sous-espaces remarquables de $\underline{\underline{M}}^d$

8 NOTATION. Soit T un temps d'arrêt. On désigne par $\underline{\underline{M}}[T]$ l'espace des martingales $H\in\underline{\underline{M}}$ purement discontinues, continues hors du graphe de T.

1) Prenons T=0. Si H appartient à $\underline{\underline{M}}[0]$, la martingale $M_t=H_t-H_0$ est continue partout, aussi purement discontinue, donc orthogonale à elle même, donc nulle. $\underline{\underline{M}}[0]$ est l'espace des martingales constantes (en t , non en ω) : $H_t=H_0$ pour tout t.

2) Nous supposons maintenant $\boxed{T>0 \text{ partout}}$. D'après la convention du haut de la page, on a $\underline{\underline{M}}[T]\subset\underline{\underline{M}}_0$. $\underline{\underline{M}}[T]$ est évidemment un sous-espace stable.

Nous avons alors les deux théorèmes suivants

9 THEOREME . Supposons T totalement inaccessible. Alors $\underline{\underline{M}}[T]\subset\underline{\underline{W}}_0$, et est constitué de toutes les martingales de la forme $M=\overset{c}{A}$, où A est le processus V.I. à un seul saut

(9.1) $$A_t = \Phi I_{\{t\geq T\}} \quad \text{avec } \Phi\in L^2(\underline{\underline{F}}_T) \qquad \text{(cf. I.8)}$$

Pour toute martingale $N\in\underline{\underline{M}}$, le processus

(9.2) $$M_tN_t - \Delta N_T\Delta M_T I_{\{t\geq T\}}$$

est alors une martingale uniformément intégrable, nulle en 0. En particulier on a que

(9.3) $$M_t^2-\Delta M_T^2 I_{\{t\geq T\}} \text{ est une martingale,} \quad E[M_\infty^2] = E[\Delta M_T^2].$$

Pour toute $N\in\underline{\underline{M}}$, la projection de N sur $\underline{\underline{M}}[T]$ est $M=\overset{c}{A}$ (9.1), avec $\Phi=\Delta N_T$.

10 THEOREME. Supposons T partout >0 et prévisible. Alors l'énoncé précédent reste valable, avec la seule modification que $\Phi\in L^2(\underline{\underline{F}}_T)$ doit être assujetti à la condition $E[\Phi|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, et qu'alors $\overset{c}{A}=A$.

La démonstration sera divisée en plusieurs parties assez simples.

1) Vérifions que si A est donné par (9.1), alors $\overset{c}{A}$ est une martingale de carré intégrable. Il suffit de traiter le cas où Φ est positive, et de montrer que $E[\tilde{A}_\infty^2]<\infty$ (I.8).

Le processus VI $\tilde{A}$ est <u>continu</u>. Il suffit en effet de vérifier que la mesure associée à $\tilde{A}$ (qui est prévisible) ne charge aucun temps prévisible. Or elle coincide sur la tribu prévisible avec la mesure associée à A, et celle ci est portée par le graphe de T totalement inaccessible.

On applique alors la formule d'intégration par parties, puis le fait que $d\tilde{A}$ commute avec la projection optionnelle, pour obtenir

$$E[\tilde{A}^2_\infty] = 2E[\int_0^\infty (\tilde{A}_\infty - \tilde{A}_s)d\tilde{A}_s] = 2E[\int_0^\infty (A_\infty - A_s)d\tilde{A}_s]$$

En effet, les deux processus $(\tilde{A}_\infty - \tilde{A}_t)$ et $(A_\infty - A_t)$ ont même projection optionnelle (cela signifie juste que $\tilde{A}$-A est une martingale). Donc, comme $\Phi \geqq 0$

$$E[\tilde{A}^2_\infty] \leqq 2E[\Phi\tilde{A}_\infty]$$

d'où d'après l'inégalité de Schwarz $\|\tilde{A}_\infty\|_2 \leqq 2\|\Phi\|_2$ dès que l'on sait que le premier membre est fini. On commence par supposer $\Phi \leqq c$, puis l'on atteint le cas général par troncation.

Dans le cas prévisible, le calcul est explicite : $A_\infty = \Phi - E[\Phi|\underline{\underline{F}}_{T-}] = \Phi$. Donc il n'y a rien à démontrer. Dans tous les cas, noter que $\Phi = \Delta M_T$.

2) La martingale M appartient à $\underline{\underline{M}}[T]$.

D'abord, le processus A n'est discontinu qu'à l'instant T. Dans les deux cas, le processus $\tilde{A}$ est continu (dans le cas prévisible, il est nul). Donc $M = \overset{c}{A}$ n'est discontinue qu'à l'instant T. Il faut montrer que $M \in \underline{\underline{M}}^d$. Nous allons prouver mieux : pour toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$ nous avons

(10.1) $\quad E[M_\infty N_\infty] = E[\Delta M_T \Delta N_T] = E[\Phi.\Delta N_T]$

En effet, le résultat est connu lorsque N est bornée puisque M est une martingale V.I. (I.9), et le passage à la limite est immédiat. Il en résulte que M est orthogonale, non seulement à toute martingale continue $N \in \underline{\underline{M}}$, mais à toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$ continue à l'instant T.

3) Si $N \in \underline{\underline{M}}$, $M_t N_t - \Delta M_T \Delta N_T I_{\{t \geqq T\}}$ est une martingale.

Notons L_t ce processus. Soit S un temps d'arrêt. Appliquons (10.1) à la martingale arrêtée N^S. Il vient comme $N^S_\infty = N_S$, $E[M_\infty N^S_\infty] = E[M_S N_S]$:

$$E[M_S N_S] = E[\Delta M_T \Delta N_T I_{\{T \leqq S\}}]$$

ou encore $E[L_S]=0$. On en conclut que L est une martingale par le lemme du chap.I, n°9.

(On notera que cette martingale est dominée par $5M^*N^*$, donc uniformément intégrable).

4) Si N appartient à $\underline{\underline{M}}$, sa projection sur $\underline{\underline{M}}[T]$ est $M = \overset{c}{A}$, avec $\Phi = \Delta N_T$.

Dans le cas prévisible comme dans le cas totalement inaccessible, on a vu plus haut que $\Delta M_T=\Phi=\Delta N_T$. Donc N-M est continue à l'instant T. D'après 2) on a $M\in\underline{\underline{M}}[T]$, N-M est continue à l'instant T donc orthogonale à $\underline{\underline{M}}[T]$, et M est bien la projection de N sur $\underline{\underline{M}}[T]$.

La démonstration est achevée.

STRUCTURE DES MARTINGALES PUREMENT DISCONTINUES

11 Soit $M\in\underline{\underline{M}}_0$, et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt, soit totalement inaccessibles, soit prévisibles, tous > 0, à graphes disjoints, et tels que $\{(t,\omega):\Delta M_t(\omega)\neq 0\}$ soit contenu dans la réunion des graphes $[\![T_n]\!]$ (N12). Posons pour tout n

(11.1) $$A_t^n = \Delta M_{T_n} I_{\{t\geqq T_n\}} \qquad M_t^n = \tilde{A}_t^n$$

M^n est une martingale de carré intégrable, qui est continue hors de $[\![T_n]\!]$, et dont le saut à cet instant est exactement ΔM_{T_n} . Posons aussi

$$H^k = M^1+\ldots+M^k$$

La martingale $M-H^k$ est continue aux instants $T_1,\ldots,T_k$, donc orthogonale à $M^1\ldots M^k$, donc à leur somme H^k . Les martingales $M^1,\ldots,M^k$ sont orthogonales entre elles, et nous avons

$$E[M_\infty^2] = E[(H_\infty^k)^2]+E[(M-H^k)_\infty^2]=\Sigma_0^k E[(M_\infty^n)^2]+E[(M-H^k)_\infty^2]$$
$$= \Sigma_0^k E[\Delta M_{T_n}^2] + E[(M-H^k)_\infty^2]$$

Nous en déduisons que la série orthogonale $\Sigma_n M^n$ converge dans $\underline{\underline{M}}$ vers une martingale H . Comme $M-H^k$ est orthogonale à H^k, M-H est orthogonale à H. En utilisant une sous-suite de H^k qui converge p.s. uniformément vers H (n°1) on voit que M-H n'a plus de sauts : elle est continue et nous avons

(11.2) $$E[M_\infty^2] = E[\Sigma_n \Delta M_{T_n}^2] + E[(M-H)_\infty^2]$$

N12. Soit A une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt U_n. Alors A est contenue dans une réunion dénombrable de graphes <u>disjoints</u> de temps d'arrêt, <u>soit</u> totalement inaccessibles <u>soit</u> prévisibles.

En effet, quitte à remplacer $[\![U_n]\!]$ par $[\![U_n]\!]\setminus\cup_{m<n}[\![U_m]\!]$, nous pouvons supposer les graphes des U_n disjoints. Nous représentons chaque $[\![U_n]\!]$ comme la réunion de deux graphes $[\![U_n^i]\!]$ et $[\![U_n^a]\!]$, l'un totalement inaccessible, l'autre accessible (N7). Les graphes $[\![U_n^i]\!]$ sont disjoints, quant à ceux des U_n^a , nous les recouvrons au moyen d'une réunion dénombrable de graphes prévisibles (N6), que nous rendons disjoints à leur tour par différence comme ci-dessus (cf.[D]IV.T15, p.74).

Si M n'était pas nulle en 0, on ajouterait à la suite $T_1,T_2,\ldots$ le temps d'arrêt $T_0=0$, avec la martingale correspondante $M^0_t=M_0$, et on poserait $H^k=M^0+\ldots+M^k$. Les résultats seraient les mêmes.

Il est clair que M-H est la projection de M sur l'espace $\underline{\underline{M}}^c$ des martingales continues nulles en 0, et que H est la projection de M sur $\underline{\underline{M}}^d$. Nous en déduisons les propriétés suivantes.

D'abord, si M est purement discontinue, M-H=0, donc $M=\lim_k H^k$ dans $\underline{\underline{M}}$. Ainsi

12 THEOREME. <u>Toute martingale purement discontinue</u> M <u>est la somme compensée de ses sauts</u>. M <u>est orthogonale</u> (non seulement à toute martingale continue, mais) <u>à toute martingale</u> $N\in\underline{\underline{M}}$ <u>sans discontinuité commune avec</u> M.

13 THEOREME. <u>Pour toute martingale</u> $M\in\underline{\underline{M}}$, <u>on a</u>

$$(13.1)\qquad E[\Sigma_s \Delta M_s^2\ ] \leqq E[M_\infty^2] \qquad (\Delta M_0=M_0\ )$$

<u>avec l'égalité si et seulement si</u> M <u>est purement discontinue</u>.

(Cela découle aussitôt de (11.2)).

Nous écrivons maintenant que, si M et N sont deux éléments de $\underline{\underline{M}}$

$$(13.2)\qquad \Sigma_s|\Delta M_s\Delta N_s| \leqq (\Sigma_s\ \Delta M_s^2)^{1/2}(\Sigma_s\ \Delta N_s^2)^{1/2}$$

Le second membre appartient à L^1 d'après (13.1). Plus précisément

$$(13.3)\qquad E[\Sigma_s|\Delta M_s\Delta N_s|] \leqq \|M\|_2\|N\|_2\ .$$

14 THEOREME. <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{M}}$, <u>dont l'un au moins est sans partie continue</u>. <u>On a alors</u>

$$(14.1)\qquad E[M_\infty N_\infty\ ] = E[\Sigma_s\Delta M_s\Delta N_s]$$

$$(14.2)\qquad M_tN_t - \Sigma_{s\leqq t}\ \Delta M_s\Delta N_s$$ <u>est une martingale nulle en</u> 0, <u>dominée dans</u> L^1.

DEMONSTRATION. Lorsque M et N sont toutes deux sans partie continue, (14.1) résulte de l'<u>égalité</u> (13.1) appliquée à M+N, M et N, et (14.2) découle de (14.1) appliquée aux martingales arrêtées M^T et N^T, et du lemme du chap.I n°9. Le processus (14.2) est toujours dominé par la v.a. $M^*N^*+\ \Sigma_s|\Delta M_s\Delta N_s|$ qui appartient à L^1.

Supposons ensuite que M seule soit purement discontinue. Nous écrivons que $N=N^c+N'$, où N' est la projection de N sur $\underline{\underline{M}}^d$; comme M appartient à $\underline{\underline{M}}^d$, $E[M_\infty N^c_\infty\ ]=0$, et $M_tN^c_t$ est une martingale nulle en 0, dominée dans L^1, d'où aussitôt l'énoncé par addition.

15 Soit M une martingale qui appartient à la fois à $\underline{\underline{M}}$ et à l'espace $\underline{\underline{W}}$ des martingales VI. Nous savons d'après I.9 que l'on a

(15.1) $\qquad E[M_\infty N_\infty\ ] = E[\Sigma_s\ \Delta M_s\Delta N_s]$ pour toute martingale <u>bornée</u> N.

D'après (13.3), les deux membres sont des formes linéaires continues en N pour la norme de $\underline{\underline{M}}$, donc l'égalité vaut aussi pour $N\in\underline{\underline{M}}$. Prenant

$N=M$, on voit que toute martingale $M\in\underline{\underline{M}}\cap\underline{\underline{V}}$ est purement discontinue en tant qu'élément de $\underline{\underline{M}}$, i.e. n'admet pas de partie martingale-continue (en tant qu'élément de $\underline{\underline{V}}$, elle peut avoir une partie continue).

On voit donc que l'emploi de la notion de sous-espace stable, dû à CORNEA-LICEA [9], permet d'obtenir avec très peu de moyens des résultats intéressants sur la structure des martingales de carré intégrable. Nous n'avons pas encore utilisé la decomposition des surmartingales ! Nous arrivons maintenant au point où nous allons l'utiliser - mais un peu de réflexion montrera au lecteur qu'elle n'est réellement indispensable que pour définir le processus croissant $\langle M,M\rangle$ associé à une martingale continue. D'une manière générale, ce sont les martingales continues dont l'étude est délicate, et la structure mal connue : nous retrouverons cela plus loin, à propos de la formule du changement de variables.

LES PROCESSUS CROISSANTS ASSOCIES A UNE MARTINGALE

Soit $M\in\underline{\underline{M}}$. Le processus M_t^2 est une sousmartingale dominée dans L^1 par M^{*2} , donc le processus $E[M_\infty^2\,|\underline{\underline{F}}_t] - M_t^2$ est une surmartingale de la classe (D) (I.16) ; comme elle est positive et nulle à l'infini, on peut lui appliquer la théorie de la décomposition des surmartingales :

16 DEFINITION. On note $\langle M,M\rangle$ l'unique croissant prévisible tel que $\langle M,M\rangle_0 = M_0^2$, et que $M^2-\langle M,M\rangle$ soit une martingale.

17 DEFINITION. Soit M^c la partie continue de $M\in\underline{\underline{M}}$. On pose

(17.1) $$[M,M]_t = \langle M^c,M^c\rangle_t + \Sigma_{s\le t}\,\Delta M_s^2$$

D'après (14.2), si M est purement discontinue ($M^c=0$) $M_t^2-[M,M]_t$ est une martingale, et $\langle M,M\rangle$ est la compensatrice prévisible de $\langle M,M\rangle$. Compte tenu de l'orthogonalité des projections de M sur $\underline{\underline{M}}^c$ et $\underline{\underline{M}}^d$, il est toujours vrai que $[M,M]$ est un processus croissant intégrable, que $M^2-[M,M]$ est une martingale, $\langle M,M\rangle$ la compensatrice prévisible de $[M,M]$. On ne sait pas se passer de la décomposition des surmartingales pour définir $\langle M^c,M^c\rangle$. Noter que $\langle M^c,M^c\rangle$ est continu !

D'après KUNITA-WATANABE [8], nous "polarisons" maintenant les "formes quadratiques" $\langle M,M\rangle$ et $[M,M]$:

18 DEFINITION. Soient M et N deux éléments de $\underline{\underline{M}}$. On pose

(18.1) $$\langle M,N\rangle = \frac{1}{2}(\ \langle M+N,M+N\rangle - \langle M,M\rangle - \langle N,N\rangle\ )$$

l'unique processus prévisible VI tel que $\langle M,N\rangle_0=M_0N_0$ et que $MN-\langle M,N\rangle$ soit une martingale, et

(18.2) $$[M,N] = \frac{1}{2}([M+N,M+N] - [M,M] - [N,N])\ .$$

On a évidemment

(18.3) $[M,N]_t = \langle M^c,N^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s$.

Les processus $[M,N]-\langle M,N\rangle$, $MN-[M,N]$ sont des martingales. Les deux martingales M et N sont orthogonales si et seulement si $\langle M,N\rangle$ est nul.

Les deux processus VI $\langle M,N\rangle$ et $[M,N]$ sont intéressants à des titres différents, mais c'est le second sans doute qui est le plus utile : nous en étendrons plus loin la définition à des martingales locales quelconques.

19 Le processus croissant prévisible $\langle M,M\rangle$ est uniquement caractérisé (I.14) par son potentiel X, donné par

(19.1) $X_T = E[\langle M,M\rangle_\infty - \langle M,M\rangle_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_T] - M_T^2$

avec la convention $X_{0-} = E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_0]$. Le processus croissant $[M,M]$ est caractérisé par son potentiel gauche X', donné par

(19.2) $X'_T = E[[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} | \underline{\underline{F}}_T] = E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_T] - M_T^2 + \Delta M_T^2$

En effet, $[M,M]-\langle M,M\rangle$ étant une martingale, nous avons $E[[M,M]_\infty - [M,M]_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[\langle M,M\rangle_\infty - \langle M,M\rangle_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_T] - M_T^2$, et d'autre part $[M,M]_T - [M,M]_{T-} = \Delta M_T^2$.

20 Soit T un temps d'arrêt ; on a $\langle M,N^T\rangle = \langle M,N\rangle^T$ (arrêt à T), d'où aussitôt par (18.3) $[M,N^T]=[M,N]^T$.

En effet, d'après le théorème d'arrêt de DOOB $(MN)^T - \langle M,N\rangle^T$ est une martingale, et $M.N^T-(MN)^T$ est la martingale $E[(M_\infty - M_T)N_T | \underline{\underline{F}}_t]$, de sorte que $M.N^T - \langle M,N\rangle^T$ est une martingale. Comme $M.N^T - \langle M,N^T\rangle$ en est une par définition de $\langle M,N^T\rangle$, $\langle M,N\rangle^T - \langle M,N^T\rangle$ est constante, et il ne reste plus qu'à remarquer qu'elle est nulle en 0.

LES INEGALITES DE KUNITA-WATANABE

Soit un intervalle $[0,t]$, et soit $t_i^n = it2^{-n}$ pour $0 \leq i \leq 2^n$. C.DOLEANS a montré que l'on a, au sens de la convergence L^1

$$\langle M,N\rangle_t = \lim_n \Sigma_i E[(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n}) | \underline{\underline{F}}_{t_i^n}] + M_0 N_0$$

$$[M,N]_t = \lim_n \Sigma_i (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n}) + M_0 N_0 .$$

Nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser ce résultat, et ne le prouverons pas. Mais il est clair sur ces expressions que ces deux processus donnent lieu à des "inégalités de Schwarz" . Nous allons démontrer celles ci maintenant, d'après KUNITA-WATANABE (noter cependant que KUNITA-WATANABE n'en donnaient dans [8] que la forme intégrée - mais la forme "trajectorielle" fait partie du folklore des martingales).

21 THEOREME. Si M et N sont deux éléments de $\underline{\underline{M}}$, H et K deux processus mesurables, on a p.s.

$$\text{(KW1)}\quad \int_0^\infty |H_s||K_s||d\langle M,N\rangle_s|\,] \leqq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N,N\rangle_s\right)^{1/2}$$

$$\text{(KW2)}\quad \int_0^\infty |H_s||K_s||d[M,N]_s|\,] \leqq \left(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty K_s^2 d[N,N]_s\right)^{1/2}$$

22 COROLLAIRE. Si p et q sont deux exposants conjugués, on a

$$E\left[\int |H_s||K_s||d\langle M,N\rangle_s|\right] \leqq \left\|\sqrt{\int H_s^2 d\langle M,M\rangle_s}\right\|_p \left\|\sqrt{\int K_s^2 d\langle N,N\rangle_s}\right\|_q$$

et l'inégalité analogue avec des [ ].

DEMONSTRATION. Celle-ci nous a été suggérée par P. PRIOURET, qui a débarrassé le théorème d'une hypothèse inutile sur H et K.

1) Prenons s et t rationnels, $s<t$, et écrivons que l'on a pour tout λ rationnel $\langle M+\lambda N,M+\lambda N\rangle_t - \langle M+\lambda N,M+\lambda N\rangle_s \geqq 0$ p.s.. Il vient, avec des notations abrégées claires

$$|\langle M,N\rangle_s^t| \leqq (\langle M,M\rangle_s^t)^{1/2}(\langle N,N\rangle_s^t)^{1/2}$$

et aussi en 0 $|\Delta\langle M,N\rangle_0| = |\Delta\langle M,M\rangle_0||\Delta\langle N,N\rangle_0|$.

Prenons maintenant une subdivision finie de la droite : $0=t_0<t_1<\dots<t_{n+1}=+\infty$, des v.a. H_0,K_0, H_{t_i},K_{t_i} ($0\leqq i\leqq n$) bornées, et posons

$$H_t = H_0 I_{\{t=0\}} + \Sigma_i\, H_{t_i} I_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

et K_t de même. Ecrivons les inégalités précédentes pour $s=t_i, t=t_{i+1}$, multiplions les par $|H_{t_i}K_{t_i}|$, sommons, et appliquons l'inégalité de Schwarz. Il vient

$$|\int H_sK_s d\langle M,N\rangle_s| \leqq |H_0K_0\Delta\langle M,N\rangle_0| + \Sigma_0^n |H_{t_i}K_{t_i}||\langle M,N\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}|$$

$$= \left(H_0^2\Delta\langle M,M\rangle_0 + \Sigma H_{t_i}^2 \langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{1/2}\left(K_0^2\Delta\langle N,N\rangle_0 + \Sigma K_i^2\langle N,N\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{1/2}$$

c'est à dire l'inégalité (KW1) dans le cas particulier de deux processus étagés continus à gauche H et K, à cela près que le signe | | est hors du symbole $\int$ au lieu d'être à l'intérieur.

2) Les processus étagés du type précédent forment une algèbre qui engendre la tribu produit sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Un argument de classes monotones permet alors d'étendre l'inégalité (toujours avec le signe | | hors de l'intégrale) à deux processus mesurables H et K bornés.

3) Soit J_s un processus mesurable à valeurs dans $\{-1,1\}$ tel que $|d\langle M,N\rangle_s| = J_s d\langle M,N\rangle_s$; en appliquant le résultat précédent aux processus H_s et K_sJ_s on fait entrer le signe | | dans l'intégrale. Après quoi l'inégalité se trouve ramenée au cas positif, et la dernière extension au cas non borné se fait par troncation et convergence monotone.

Le raisonnement pour $[M,N]$ est identique.

REMARQUE. Nous verrons au chapitre V une autre majoration de $E[\int|d[M,N]_s|]$ liée à la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$, et plus profonde que 22.

INTEGRALE STOCHASTIQUE DE PROCESSUS PREVISIBLES

Nous abordons maintenant la théorie de l'intégrale stochastique proprement dite, en suivant d'abord exactement la définition d'ITO. Seulement, dans la théorie relative au mouvement brownien, l'importance du caractère prévisible du processus à intégrer n'apparaissait pas.

23 Nous remarquons d'abord que l'on peut toujours définir l'intégrale d'une fonction étagée continue à gauche f définie sur $\mathbb{R}_+$

$$t_0=0<t_1\ldots<t_n<+\infty=t_{n+1} \qquad f(t)=f_i \text{ pour } t\in]t_i,t_{i+1}]$$

par rapport à une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$, continue à droite et pourvue de limites à gauche :

$$\int_0^\infty fdg = f(0)g(0) + \Sigma_0^n f_i(g(t_{i+1})-g(t_i))$$

$$\int_0^t fdg = \int_0^\infty fI_{[0,t]}dg = f(0)g(0)+\Sigma_0^n f_i g(t\wedge t_{i+1})-g(t\wedge t_i))$$

La fonction $\int_0^t fdg$ est continue à droite avec des limites à gauche, et son saut en t vaut $f(t)\Delta g(t)$.

Désignons maintenant par Λ l'espace des processus prévisibles bornés (H_t) étagés sur $\mathbb{R}_+$: Il existe une subdivision (t_i) comme ci-dessus telle que $H_t=h_i$ pour $t\in]t_i,t_{i+1}]$, les v.a. h_i étant $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurables bornées, et H_0 $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable bornée.

Dans ces conditions, soit $M\in\underline{\underline{M}}$. Nous avons le lemme très facile

LEMME. Le processus $H\cdot M=(\int_0^t H_s dM_s)$ appartient à $\underline{\underline{M}}$, et on a

$$E[(H\cdot M)^2_\infty] = E[\int_{0-}^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s] \quad (= E[\int_{0-}^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^1.$$

et maintenant, nous avons le théorème d'ITO :

THEOREME. Soit $\dot{L}^2(M)$ l'espace des processus prévisibles H tels que $\|H\|_{\dot{L}^2(M)} = (E[\int H_s^2 d\langle M,M\rangle_s])^{1/2} <\infty$. Alors l'application linéaire $H\mapsto H.M$ de Λ dans $\underline{\underline{M}}$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue (une isométrie) de $\dot{L}^2(M)$ dans $\underline{\underline{M}}$, encore notée $H\mapsto H\cdot M$. Pour tout $H\in\dot{L}^2(M)$, les processus

(23.1) $\qquad \Delta(H\cdot M)_t \qquad$ et $\qquad H_t\Delta M_t$

sont indistinguables.

1. On rappelle que $[M,M]-\langle M,M\rangle$ est une martingale VI, et induit donc une mesure nulle sur la tribu prévisible.

DEMONSTRATION. $\dot{L}^2(M)$ (le rôle du $\bullet$ apparaîtra plus tard, quand $L^2(M)$ sera défini) est l'espace L^2 d'une certaine mesure sur la tribu prévisible. L'espace Λ est dense dans $\dot{L}^2(M)$, l'isométrie $H \mapsto H\cdot M$ de Λ dans $\underline{\underline{M}}$ se prolonge donc de manière unique en une isométrie de $\dot{L}^2(M)$ dans $\underline{\underline{M}}$. La dernière assertion résulte de l'inégalité de DOOB (n°1), et d'un argument de convergence uniforme p.s. à partir du cas étagé.

24 EXEMPLE. Si T est un temps d'arrêt, et $H = I_{[0,T]}$, $H\cdot M$ est la martingale arrêtée M^T (approcher T par une suite décroissante de temps d'arrêt étagés).

Nous suivons maintenant l'idée fondamentale de KUNITA-WATANABE, qui consiste à caractériser uniquement, non pas un opérateur de $\dot{L}^2(M)$ dans $\underline{\underline{M}}$, mais individuellement le processus $H\cdot M$.

25 THEOREME. Soit $H \in \dot{L}^2(M)$. Alors pour tout $N \in \underline{\underline{M}}$ on a

(25.1) $$E[\int_{0-}^{\infty} |H_s|\,|d\langle M,N\rangle_s|] < \infty \quad (\text{et } E[\int |H_s|\,|d[M,N]_s|] < \infty)$$

L'intégrale stochastique $L = H\cdot M$ est uniquement caractérisée, comme le seul élément de $\underline{\underline{M}}$ tel que, pour tout $N \in \underline{\underline{M}}$

(25.2) $$E[L_\infty N_\infty] = E[\int_{0-}^{\infty} H_s d\langle M,N\rangle_s] \quad (= E[\int_0^{\infty} H_s d[M,N]_s)$$

et on a alors pour tout N

(25.3) $$\langle L,N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle \quad , \quad [L,N] = H\cdot[M,N]$$

(les intégrales au second membre sont des intégrales de Stieltjes).

DEMONSTRATION. Les inégalités (25.1) sont des conséquences des inégalités KW1 et KW2 (n°22). Pour montrer que L satisfait à (25.2), on remarque que la forme $H \mapsto E[(H\cdot M)_\infty N_\infty - \int_0^{\infty} H_s d\langle M,N\rangle_s]$ sur $\dot{L}^2(M)$ est continue (inégalité KW1), on vérifie aussitôt qu'elle est nulle sur Λ, donc sur tout $\dot{L}^2(M)$. Quant aux deux espérances de droite de (25.2), elles sont égales du fait que $[M,N]-\langle M,N\rangle$ est une martingale VI, et induit donc sur la tribu prévisible une mesure nulle. Pour établir (25.3), introduisons le processus $J_t = L_t N_t - \int_0^t H_s d\langle M,N\rangle_s$, dominé par $L^* N^* + \int |H_s|\,|d\langle M,N\rangle_s| \in L^1$. Appliquant (25.2) à la martingale arrêtée N^T, et le n°20, nous voyons que $E[J_T]=0$ pour tout temps d'arrêt T, de sorte que J est une martingale (chap.I, lemme du n°9). Mais alors $\langle L,N\rangle_t - \int_0^t H_s d\langle M,N\rangle_s$ est une martingale prévisible, nulle en 0, donc nulle, et cela nous donne la première relation (25.3). Pour établir la seconde, nous décomposons M et N en leurs parties continue et discontinue M^c, M^d et N^c, N^d, et nous remarquons que $H\cdot M^c$ est la partie continue de L : en effet, elle est continue, et $H\cdot M^d$ est orthogonale à toute martingale continue nulle en 0 (si K est une telle martingale, on a $<H.M^d,K> = H\cdot<M^d,K> = 0$). Alors (23.1)

$$[L,N]_t = <L^c,N^c>_t + \Sigma_{s\leq t}\Delta L_s\Delta N_s = H\cdot<M^c,L^c>_t + \Sigma_{s\leq t}H_s\Delta M_s\Delta N_s$$
$$= \int_0^t H_s d[M,N]_s$$

c'est à dire la seconde égalité (25.3).

Il reste donc un seul point à établir, le fait que (25.2) caractérise uniquement L . Or le second membre est une forme linéaire continue en N connue lorsqu'on connaît H et M, tandis que le premier membre est la forme linéaire $N\mapsto(L,N)$ associée à L par le produit scalaire de l'espace de Hilbert $\underline{\underline{M}}$.

Notons explicitement un point de la démonstration précédente, qui sera d'ailleurs contenu aussi dans un énoncé plus général au paragraphe suivant , relatif aux sous-espaces stables.

26 COROLLAIRE. Si $H\in\dot{L}^2(M)$, les parties continue et purement discontinue de $H\cdot M$ sont respectivement $H\cdot M^c$ et $H\cdot M^d$.

Nous verrons plus loin que le théorème 25, caractérisant l'intégrale stochastique, permet d'en étendre la définition à des processus H optionnels , et à des processus M qui sont des martingales locales et non plus des éléments de $\underline{\underline{M}}$. Indiquons en une conséquence (dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur).

27 THEOREME. Soient $H\in\dot{L}^2(M)$, K prévisible borné, alors $(KH)\cdot M=K\cdot(H\cdot M)$.

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET SOUS-ESPACES STABLES

28 THEOREME. Soit $\underline{\underline{S}}$ un sous-espace stable de $\underline{\underline{M}}$ (5). Alors pour tout $M\in\underline{\underline{S}}$, tout $H\in\dot{L}^2(M)$, on a $H\cdot M\in\underline{\underline{S}}$.

(Inversement, comme les opérations $M\mapsto M^T$, $M\mapsto I_A M$ sont des intégrations stochastiques avec $H=I_{[\![0,T]\!]}$,$H=I_{\mathbb{R}_+\times A}$, cette propriété entraîne la stabilité).

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer que $H\cdot M\in\underline{\underline{S}}^{\perp\perp}$. Or si $N\in\underline{\underline{S}}^{\perp}$ on a $M_0N_0=0$ et M et N sont orthogonales au sens des martingales (6)', donc $<M,N>=0$ (17), donc $H\cdot<M,N>=0$, $<H\cdot M,N>=0$, $E[(H\cdot M)_\infty N_\infty]=0$ et $H\cdot M\in\underline{\underline{S}}^{\perp\perp}$.

29 THEOREME. Soit $M\in\underline{\underline{M}}$. Le sous-espace stable engendré par M est l'ensemble des intégrales stochastiques $H\cdot M$, $H\in\dot{L}^2(M)$. Si $N\in\underline{\underline{M}}$, la projection

<u>de</u> N <u>sur ce sous-espace est</u> $D\cdot M$, <u>où</u> D <u>est une densité prévisible de</u> $\langle M,N\rangle$ <u>par rapport à</u> $\langle M,M\rangle$.

DEMONSTRATION. Comme l'application $H\mapsto H\cdot M$ de $\dot{L}^2(M)$ dans $\underline{\underline{M}}$ est une isométrie, l'image $\underline{\underline{I}}$ est fermée, évidemment stable, et contenue dans tout espace stable contenant M d'après 28. C'est donc le sous-espace stable engendré par M.

Ecrivons $N=N'+N''$, où N' est la projection de N sur $\underline{\underline{I}}$, et $N''\in\underline{\underline{I}}^{\perp}$. On a vu dans la démonstration de 28 que $\langle M,N''\rangle=0$, donc $\langle M,N\rangle=\langle M,N'\rangle$. D'autre part, par définition de $\underline{\underline{I}}$ on peut écrire $N'=D\cdot M$, avec $D\in\dot{L}^2(M)$. Alors $\langle N',M\rangle=\langle D\cdot M,M\rangle = D\cdot\langle M,M\rangle$, et D est une densité prévisible de $\langle M,N\rangle$ par rapport à $\langle M,M\rangle$. On remarquera que si $\overline{D}$ est une seconde telle densité, on a $D=\overline{D}$ $\langle M,M\rangle$-p.p., donc $E[\int(D_s-\overline{D}_s)^2d\langle M,M\rangle_s]=0$, donc $\overline{D}\in\dot{L}^2(M)$ et $D\cdot M=\overline{D}\cdot M$.

COMMENTAIRE. Ces deux théorèmes ont des conséquences importantes en théorie des processus de Markov, en permettant des représentations de processus au moyen d'intégrales stochastiques. Il y a à ce sujet des résultats très utiles de KUNITA-WATANABE. Mais nous laisserons cela de côté pour l'instant. J'espère avoir le courage d'écrire un chapitre d'applications.

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET INTEGRALES DE STIELTJES

Le résultat suivant est fondamental : il explique le rôle joué par les processus prévisibles en théorie de l'intégrale stochastique (cf. plus loin le n°34 au sujet des processus optionnels), et il sera à la base de la définition de l'intégrale stochastique par rapport aux martingales locales.

30 THEOREME. <u>Soit</u> $M\in\underline{\underline{M}}\cap\underline{\underline{W}}$, <u>et soit</u> H <u>un processus prévisible tel que l'on ait à la fois</u> $E[\int_{0-}^{\infty}H_s^2d[M,M]_s]<\infty$ <u>et</u> $E[\int_{0-}^{\infty}|H_s||dM_s|]<\infty$. <u>Alors l'intégrale stochastique</u> $H\cdot M$ <u>et l'intégrale de Stieltjes stochastique</u> $H_{\dot{s}}M$ <u>sont égales.</u>

DEMONSTRATION.Nous savons déjà (I.12) que $H_{\dot{s}}M$ est une martingale à V.I., donc (I.9) que pour toute martingale bornée N on a

$$(30.1)\qquad E[N_\infty\,.(H_{\dot{s}}M)_\infty\,] = E[\Sigma_s\, H_s\Delta M_s\Delta N_s]$$

D'après 15, d'autre part, M est une martingale purement discontinue, donc $[M,N]_t = \Sigma_{s\le t}\,\Delta M_s\Delta N_s$ et on a , pour toute $N\in\underline{\underline{M}}$ (en particulier N bornée)

$$(30.2)\qquad E[N_\infty\,.(H\cdot M)_\infty\,] = E[\int H_sd[M,N]_s] = E[\Sigma_sH_s\Delta M_s\Delta N_s]$$

Comme N_∞ est une v.a. bornée arbitraire, on a $(H\cdot M)_\infty=(H_{\dot{s}}M)_\infty$, d'où $H\cdot M= H_{\dot{s}}M$ en conditionnant.

INTEGRALES STOCHASTIQUES DE PROCESSUS OPTIONNELS

Le lecteur fera sans doute bien d'omettre en première lecture le court paragraphe qui suit : en effet, cette notion d'intégrale stochastique n'a pas encore connu d'applications intéressantes, et nous verrons aussi qu'elle ne s'étend pas bien aux semimartingales (en revanche, nous l'étendrons plus loin aux martingales locales).

Quoi qu'il en soit, ces intégrales stochastiques existent. La définition en est d'une simplicité enfantine.

31 DEFINITION. Soit $M \in \underline{\underline{M}}$. On note $L^2(M)$ l'espace des processus optionnels H tels que $\|H\|_{L^2(M)} = (E[\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M,M]_s])^{1/2} < \infty$.

$\dot{L}^2(M)$ est le sous-espace de $L^2(M)$ constitué par les processus prévisibles.

32 DEFINITION. Soit $H \in L^2(M)$. On désigne par $H \cdot M = (\int_{0-}^{t} H_s dM_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'unique élément L de $\underline{\underline{M}}$ tel que

(32.1) pour tout $N \in \underline{\underline{M}}$, $E[L_\infty N_\infty] = E[\int_{0-}^{\infty} H_s d[M,N]_s]$.

En effet, d'après l'inégalité KW2 (21), $E[\int |H_s||d[M,N]_s|]<\infty$, et le côté droit de (32.1) est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $\underline{\underline{M}}$. D'après (25.2), cela étend la définition de l'intégrale stochastique prévisible.

33 En arrêtant N à un temps d'arrêt T arbitraire on vérifie , comme au n°I.9, que

(33.1) pour toute $N \in \underline{\underline{M}}$, $L_t N_t - \int_{0-}^{t} H_s d[M,N]_s$ est une martingale (dominée dans L^1 par $L^* N^* + \int_0^\infty |H_s||d[M,N]_s|$)

34 Nous allons calculer explicitement $H \cdot M$

1) Si M est une martingale indépendante de t, $M_t = M_0$, alors $(H\cdot M)_t = H_0 M$. la vérification est immédiate.

2) Si M est continue, choisissons H' prévisible tel que pour presque tout ω $\{t : H_t(\omega) \neq H'_t(\omega)\}$ soit dénombrable ([D]V.T19, p.101, [P]IV.66). On vérifie alors aussitôt que $H' \in \dot{L}^2(M)$, et que $L = H' \cdot M$ satisfait à (32.1). Donc $H\cdot M = H'\cdot M$, et dans ce cas l'intégrale stochastique optionnelle ne représente rien de nouveau.

3) Supposons que $M \in \underline{\underline{M}}[T]$ (n°8), où T est totalement inaccessible. Je dis que l'intégrale stochastique $L = H\cdot M$ appartient aussi à $\underline{\underline{M}}[T]$, et qu'elle est égale à $\overset{c}{A}$, où A est le processus V.I. $H_T \Delta M_T I_{\{t \geq T\}}$ ($H_T \Delta M_T \in L^2$ puisque $H \in L^2(M)$, et $\overset{c}{A}$ appartient à $\underline{\underline{M}}$ d'après le 1) du n°9-10). Nous savons en effet que $\overset{c}{A} \in \underline{\underline{M}}[T]$ (n°9-10, 2)), que $\Delta \overset{c}{A}_T = H_T \Delta M_T$, et que (10.1) pour tout $N \in \underline{\underline{M}}$ $E[\overset{c}{A}_\infty N_\infty] = E[H_T \Delta M_T \Delta N_T]$ ce qui équivaut à (32.1), car $[\overset{c}{A},N]_t = \Delta \overset{c}{A}_T \Delta N_T I_{\{t \geq T\}}$.

Noter que dans les trois cas qui précèdent, on a

(34.1) $\Delta(H\bullet M)_t = H_t \Delta M_t$ (processus indistinguables)

(34.2) $[H\bullet M,N] = H\bullet[M,N]$

(34.3) $E[(H\bullet M)^2_\infty] = E[\int H^2_s d[M,M]_s]$

Les choses bizarres se passent dans le cas suivant :

4) Supposons que $M\in \underline{\underline{M}}[T]$, où T partout >0 est <u>prévisible</u> . Je dis que $L=H\bullet M$ appartient à $\underline{\underline{M}}[T]$ et est égale à $\overset{c}{A}$, où A est défini comme au 3) précédent. Mais il y a ici une différence, car $\Delta\overset{c}{A}_T=H_T\Delta M_T-E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ Alors si $N\in\underline{\underline{M}}$

(34.4) $E[\overset{c}{A}_\infty N_\infty]=E[\Delta\overset{c}{A}_T\Delta N_T]=E[H_T\Delta M_T\Delta N_T]-E[E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]\Delta N_T]$
$= E[H_T\Delta M_T\Delta N_T] = E[\int_0^\infty H_s d[M,N]_s]$

c'est à dire (32.1). Mais on peut affirmer (34.1) et (34.2) seulement si $E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$, en particulier si H est prévisible... ou M=0. De même

(34.5) $E[(H\bullet M)^2_\infty] = E[\Delta\overset{c}{A}{}^2_T]=E[(H_T\Delta M_T-E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}])^2] \leqq E[H^2_T\Delta M^2_T]$
$= E[\int H^2_s d[M,M]_s]$

5) Nous passons maintenant au cas général : soit $M\in\underline{\underline{M}}$, que nous décomposons M à la manière des n^{os}11-12

(34.6) $M=M_0+M^c + \Sigma_n M^n$ $(M^n=\overset{c}{B}{}^n$, où $\Delta M_{T_n} I_{\{t\geqq T_n\}}$ est noté B^n)

les T_n étant des temps d'arrêt **partout** >0, à graphes disjoints, dont chacun est soit totalement inaccessible , soit prévisible.

Soit $H\in L^2(M)$, alors $H\in L^2(M^c)$, $L^2(M^n)$, puisque $[M,M]=M^2_0+[M^c,M^c] + \Sigma_n[M^n,M^n]$; les intégrales stochastiques $H\bullet M_0$, $H\bullet M^c$, $H\bullet M^n$ ont été définies plus haut, et nous avons vu qu'elles sont toutes orthogonales (elles appartiennent aux espaces stables orthogonaux $\underline{\underline{M}}[0]$, $\underline{\underline{M}}^c$,$\underline{\underline{M}}[T_n]$). D'après (34.3) et (34.5), la série $H\bullet M_0 + H\bullet M^c + \Sigma_n H\bullet M^n$ converge dans $\underline{\underline{M}}$, et si nous notons L sa somme, il est facile de voir que (32.1) est satisfaite (argument de convergence dominée au second membre).

Nous allons maintenant donner des énoncés formels de quelques uns des résultats obtenus :

35 THEOREME. <u>Si</u> $M\in\underline{\underline{M}}$ <u>admet la décomposition orthogonale</u> (34.6), <u>et</u> $H\in L^2(M)$, <u>alors</u> $L=H\bullet M$ <u>admet la décomposition orthogonale</u>

(35.1) $H\bullet M = H_0 M_0 + H\bullet M^c + \Sigma_n H\bullet M^n$

<u>On a</u>

(35.2) $E[L^2_\infty] \leqq E[\int H^2_s d[M,M]_s$

avec l'égalité si et seulement si $E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$ pour tout temps prévisible T partout >0. Cette condition est aussi équivalente à chacune des deux suivantes

(35.3) les processus ΔL_t et $H_t\Delta M_t$ sont indistinguables

(35.4) pour tout $N\in\underline{\underline{M}}$ on a $[L,N] = H\cdot[M,N]$

DEMONSTRATION. a) Nous avons vu la décomposition orthogonale (35.1) au n°34, ainsi que l'inégalité (35.2), qui est une égalité si et seulement si $E[H_{T_n}\Delta M_{T_n}|\underline{\underline{F}}_{T_n-}]=0$ pour tout n tel que T_n soit prévisible. Comme la condition d'égalité dans (35.2) est indépendante de la suite (T_n) choisie, et comme n'importe quel temps prévisible T partout >0 peut être pris comme temps d'arrêt T_0 d'une telle suite, cela nous donne la condition $E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$ (exprimant que la projection prévisible du processus $(H_t\Delta M_t)$ est nulle sur $]0,\infty[\times\Omega$).

Cette condition est satisfaite si (35.3) l'est, car $E[\Delta L_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$ pour toute martingale $L\in\underline{\underline{M}}$. Enfin, (35.4) entraîne l'égalité (35.2), car si (35.4) a lieu, en prenant N=L , puis N=M

$$E[L_\infty^2]=E[[L,L]_\infty] = E[\int_{0}^{\infty} H_s d[M,L]_s] = E[\int_{0}^{\infty} H_s^2 d[M,M]_s].$$

36 On dit qu'une martingale M est quasi-continue à gauche si $\Delta M_T=0$ p.s. pour tout temps prévisible T>0 . Il arrive assez fréquemment que la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ soit telle que toutes les martingales soient quasi-continues à gauche, ce qui revient à dire que $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_{T-}$ pour tout temps prévisible T (la famille est alors dite quasi-continue à gauche, ou sans temps de discontinuité, et tout temps accessible est prévisible. Nous n'aurons pas besoin de ces résultats pour l'instant ([D]III,D38, p. 57, T51, p.62, T42 p.112). Lorsque M est quasi-continue à gauche, toute la pathologie de l'intégrale stochastique optionnelle disparaît. Il faut noter en particulier l'associativité $(HK)\cdot M = H\cdot(K\cdot M)=K\cdot(H\cdot M)$.

37 **UN EXEMPLE. M. PRATELLI et C. YOEURP ont calculé l'intégrale**

(37.1) $\int_0^t \Delta M_s dM_s = [M,M]_t-\langle M,M\rangle_t$ **$M\in\underline{\underline{M}}$, nulle en 0, $\Delta M\in L^2(M)$**

qui, compte tenu de la formule classique $2\int_0^t M_{s-}dM_s$ (III.9) permet de calculer $\int M_s dM_s$. Noter par exemple la jolie formule

(37.2) $\int_0^t (M_s+M_{s-})dM_s = M_t^2-\langle M,M\rangle_t$

Le principe de la démonstration de (37.1) est simple : les deux membres sont des sommes compensées de sauts, et ils ont les même sauts aux temps prévisibles ou totalement inaccessibles. Mais on est gêné pour traiter (37.1) dans $\underline{\underline{M}}$, car ΔM n'appartient pas nécessairement à $L^2(M)$. On y reviendra au n°V.21.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(P.A.Meyer)

CHAPITRE III : LA FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES forme préliminaire

Nous allons interrompre ici l'ordre logique du cours, pour des raisons pédagogiques : ayant développé une théorie de l'intégration, nous voulons nous en servir pour faire des calculs avant de passer à une théorie plus générale. Nous y perdrons en pureté (nous serons amenés à poser des définitions provisoires, nous serons gênés par des restrictions d'intégrabilité inutiles...) mais nous ne commettrons tout de même aucun crime : la démonstration de la vraie formule du changement de variables passe obligatoirement par la réduction au cas traité dans ce chapitre.

DEFINITION DE DIVERS ESPACES DE PROCESSUS

Rappelons les espaces déjà définis :

$\underline{\underline{V}}$ espace des processus (adaptés) à variation finie sur tout intervalle compact $[0,t]$.

$\underline{\underline{W}}$ espace des martingales à variation intégrable.

$\underline{\underline{M}}$ espace des martingales de carré intégrable.

Nous y ajouterons ici :

$\underline{\underline{A}}$ espace des processus (adaptés) à variation intégrable ($\underline{\underline{W}}\subset\underline{\underline{A}}\subset\underline{\underline{V}}$), muni de la norme $\| \|_V$ de la variation totale.

et nous poserons la définition provisoire suivante

1 DEFINITION. *Un processus* $X=(X_t)$ *est une* semimartingale au sens restreint (*abrégé en* : semimartingale (r)) *s'il appartient à l'espace* $\underline{\underline{S}}=\underline{\underline{M}}+\underline{\underline{A}}$.

La vraie définition des semimartingales sera donnée au chapitre IV. La présence d'un $_0$: $\underline{\underline{M}}_0,\underline{\underline{A}}_0,\underline{\underline{S}}_0\ldots$ sert à désigner un espace de processus nuls à l'instant 0.

X appartient à $\underline{\underline{S}}$ si et seulement s'il admet une décomposition

(1.1) $$X_t = X_0 + M_t + A_t \quad , \; X_0 \in L^1(\underline{\underline{F}}_0),\; M\in\underline{\underline{M}}_0 \;,\; A\in\underline{\underline{A}}_0$$

Mais cette décomposition n'est pas unique. Quels en sont les éléments intrinsèques ? Les résultats des chapitres I-II donnent aussitôt

2 THEOREME. *Dans* (1.1), *la partie continue* M^c *de* M *est indépendante de la décomposition, et sera appelée la* partie martingale continue de X, *et notée* X^c. *On posera*

(2.1) $$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t}\Delta X_s^2 \quad (\text{ y compris } \Delta X_0^2=X_0^2)$$

Soit H un processus prévisible borné. Le processus

(2.2) $\quad H_0X_0 + \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s \quad$ (intégrales respectivement dans $\underline{\underline{M}}$, et de Stieltjes)

ne dépend pas de la décomposition (1.1), et appartient à $\underline{\underline{S}}$. Nous le noterons H•X.

DEMONSTRATION. Nous considérons deux décompositions analogues

$$X = X_0+M+A \;=\; X_0+\overline{M}+\overline{A} \;,$$

nous avons alors $M-\overline{M} = \overline{A}-A \in \underline{\underline{M}}_0 \cap \underline{\underline{W}}_0$. Il résulte de II.15 que $M-\overline{M}$ n'a pas de partie martingale continue, donc que $M^c=\overline{M}^c$. Il résulte de II.30 que $H\cdot(M-\overline{M})$ est égale à l'intégrale de Stieltjes $H \underset{s}{\cdot} (\overline{A}-A)$. C'est tout.

REMARQUES. 1) X admet une décomposition (1.1) canonique, où $A \in \underline{\underline{A}}_0$ est prévisible, mais nous ne nous en servirons pas.

2) L'inégalité $\Delta X_s^2 \leqq 2(\Delta M_s^2+\Delta A_s^2)$ prouve que [X,X] est un processus croissant à valeurs finies sur $[0,\infty]$.

LA FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES

Nous en donnons un énoncé complet, et nous passerons le reste du chapitre à le démontrer - la principale difficulté tenant au cas des martingales continues.

3 THEOREME. Soit X une semimartingale (r), et soit F une fonction sur $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable, admettant des dérivées bornées des deux premiers ordres. On a alors deux processus indistinguables

$$(3.1)\quad F\circ X_t = F\circ X_0 + \int_0^t F'\circ X_{s-}dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''\circ X_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s$$
$$+ \Sigma_{0<s\leqq t}\,(F\circ X_s - F\circ X_{s-} - F'\circ X_{s-}\Delta X_s)$$

où la première intégrale au second membre est celle d'un processus prévisible borné par rapport à X, et où la série est p.s. absolument convergente sur $[0,+\infty]$.

La convergence absolue résulte aussitôt de la formule de Taylor : si C est une borne de $|F''|$

$$\Sigma_s\; |F\circ X_s - F\circ X_{s-} - F'\circ X_{s-}\Delta X_s| \leqq \frac{C^2}{2}\Sigma_s\; \Delta X_s^2$$

Nous verrons plus tard que la condition que les dérivées de F soient bornées est trop forte, et tient à une définition trop restrictive de l'intégrale stochastique. Par exemple, $F(t)=t^2$ est exclue !

Dans la formule (3.1), nous avons écrit $\int F''\circ X_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s$ pour l'esthétique, car $\langle X^c,X^c\rangle$ est continu, et l'intégrale précédente est égale à $\int F''\circ X_s d\langle X^c,X^c\rangle_s$. Le lecteur préférera peut être aussi écrire la somme des deux derniers termes de (3.1) sous la forme suivante

$$\frac{1}{2}\int_0^t F''\circ X_{s-}d[X,X]_s + \Sigma_{0<s\leq t}(F\circ X_s-F\circ X_{s-}-F'\circ X_{s-}\Delta X_s-\frac{1}{2}F''\circ X_{s-}\Delta X_s^2)$$

l'intérêt étant ici que la partie martingale continue $<X^c,X^c>$ dépend de la loi P sur Ω, tandis que la variation quadratique $[X,X]$ n'en dépend pas . Nous reviendrons plus tard sur tout cela.

Passons à la démonstration. Nous commençons par réduire le problème.

4 LEMME. Si la formule est vraie pour des semimartingales (r) $Y=Y_0+N+B$, où Y_0 parcourt un ensemble dense dans L^1, N un ensemble dense dans $\underline{\underline{M}}_0$, B un ensemble dense dans $\underline{\underline{A}}_0$, alors elle est vraie en toute généralité.

DEMONSTRATION. Choisissons des semimartingales $Y^n=Y_0^n+N^n+B^n$ pour lesquelles la formule soit vraie, et telles que, étant donnée $X=X_0+M+A$, on ait

$$\Sigma_n \|Y_0^n-X_0\|_1 < \infty \ , \ \Sigma_n\|N_\infty^n-M_\infty\|_2 < \infty \ , \ \Sigma_n\|B^n-A\|_v < \infty \ .$$

La première inégalité entraîne que $Y_0^n \to X_0$ p.s. et dans L^1. La seconde, d'après l'inégalité de DOOB, entraîne que $(N^n-M)^* \to 0$ p.s., d'où la convergence p.s. des trajectoires de N^n vers celles de M, et en particulier la convergence des limites à gauche. Noter aussi que $N^{n*} \leq M^*+\Sigma_k(M-N^k)^*$ est dominé dans L^2.

Nous comparons alors les termes de l'égalité (3.1) écrite pour Y^n, aux termes correspondants relatifs à X.

1) Il est évident que $F\circ Y_t^n \to F\circ X_t$, $F\circ Y_0^n \to F\circ X_0$ p.s., donc en mesure.

2) Soit $I_1=\int_0^t F'\circ Y_{s-}^n dN_s^n - \int_0^t F'\circ X_{s-}dM_s$. Nous allons montrer que $I_1\to 0$ dans L^2 , donc en mesure. Pour cela, nous écrivons $I_1=I_2+I_3$

$$I_2=\int_0^t(F'\circ Y_{s-}^n-F'\circ X_{s-})dM_s \quad , \quad I_3 = \int_0^t F'\circ Y_{s-}^n d(N_s^n-M_s)$$

On majore $\|I_3\|_2^2$ par $C^2E[(N_s^n-M_s)_\infty^2]$, où C borne $|F'|$, de sorte que $I_3\to 0$

On a $\|I_2\|_2^2 = E[\int_0^t(F'\circ Y_{s-}^n-F'\circ X_{s-})^2 d<M,M>_s]$, qui tend vers 0 par convergence dominée (dominée par $4C^2<M,M>_\infty$).

3) Soit $I_4=\int_0^t F'\circ Y_{s-}^n dB_s^n - \int_0^t F'\circ X_{s-}dA_s$. Nous allons montrer que $I_4\to 0$ dans L^1, donc en mesure. Pour cela, nous écrivons $I_4=I_5+I_6$

$$I_5=\int_0^t(F'\circ Y_{s-}^n-F'\circ X_{s-})dA_s \quad , \quad I_6 = \int_0^t F'\circ Y_{s-}^n d(B_s^n-A_s)$$

On majore $\|I_6\|_1$ par $CE[\int|dB_s^n-dA_s|]$, qui tend vers 0

On a $\|I_5\|_1 \leq E[\int|\ldots||dA_s|]$, qui tend vers 0 par convergence dominée (dominée par $2C\int|dA_s|$).

4) Soit $I_7 = \int_0^t F''\circ Y_{s-}^n d<Y_s^{nc},Y_s^{nc}> - \int_0^t F''\circ X_s d<X^c,X^c>_s$. Le raisonnement est le même qu'en 3) si nous savons montrer que $E[\int|d<Y^{nc},Y^{nc}>_s - d<X^c,X^c>_s|]$ $\to 0$. Or cela vaut aussi $E[\int|d<Y^{nc}+X^c,Y^{nc}-X^c>_s|]$, et d'après l'iné-

galité KW1 c'est majoré par $\|Y^{nc}+X^c\|_{\underline{\underline{M}}}\|Y^{nc}-X^c\|_{\underline{\underline{M}}}$. Mais nous avons par définition $Y^{nc}=N^{nc}$, $X^c=M^c$, et $N^n \to M$ dans $\underline{\underline{M}}$, donc $N^{nc}\to M^c$ d'après la continuité des projections. D'où la conclusion.

5) Soit $I_8 = \Sigma_{s\leqq t}\ ((F\circ Y^n_s - F\circ Y^n_{s-} - F'\circ Y^n_{s-}\Delta Y^n_s)-(F\circ X_s - F\circ X_{s-} - F'\circ X_{s-}\Delta X_s))$.
La somme est en réalité étendue à une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt T_n. Nous allons démontrer que I_8 tend p.s. vers 0, donc aussi en mesure. Comme chaque terme de la somme tend vers 0, et que l'on a domination par $2C(\Delta Y^{n2}_s+\Delta X^2_s\ )$ - où cette fois C borne $\|F''\|$ - il nous suffit de démontrer que $\sup_n\ \Sigma_s\ \Delta Y^{n2}_s$ est p.s. fini.

Il suffit de démontrer cela séparément pour $\sup_n\ \Sigma_s\ \Delta B^{n2}_s$ et $\sup_n\ \Sigma_s \Delta N^{n2}_s$, et cela revient à $\sup_n\ \Sigma_s\ \Delta(A-B^n)^2_s$, $\sup_n\ \Sigma_s \Delta(M-N^n)^2_s$.

Pour la première somme, on majore par $(\sup_n\ \Sigma_s|\Delta(A-B^n)_s|)^2$, et on remarque que $\Sigma_n\Sigma_s|\Delta(A-B^n)|_s$ a une espérance finie, donc est finie p.s..
Pour la seconde, on remarque de même que $\Sigma_n\Sigma_s\ \Delta(M-N^n)^2_s$ a une espérance finie.

Ayant montré la convergence en mesure de tous les termes de l'égalité (3.1) relative aux Y^n, vers le terme correspondant de (3.1) relative à X, on voit que (3.1) passe à la limite, et le lemme est établi.

REMARQUE. Dans l'approximation de X par les Y^n qui sera effectivement utilisée par la suite, la discussion des parties 4) et 5) se simplifie. Mais il me semble qu'on gagne en clarté à énoncer formellement le lemme, en dehors de tout procédé particulier d'approximation.

5 Nous décrivons maintenant l'approximation utilisée.

Nous choisissons une suite de temps d'arrêt T_n à graphes disjoints, partout >0, soit prévisibles soit totalement inaccessibles (note N12, p.21) portant tous les sauts de M et A. Nous posons

$$(5.1)\qquad K^n_t=\Delta M_{T_n} I_{\{t\geqq T_n\}} \qquad C^n_t=\Delta A_{T_n} I_{\{t\geqq T_n\}}$$

Alors nous avons

$$M=M^c+\Sigma_n \overset{c}{K}{}^n \text{ dans } \underline{\underline{M}}\ ,\ A=A^c+\Sigma_n C^n \text{ dans } \underline{\underline{A}}$$

Notre première approximation va consister à remplacer Σ_n par $\Sigma_{n\leqq N}$ dans chacune des deux sommes, où N est assez grand. Autrement, dit, à nous ramener au cas de martingales et de processus croissants ayant des sauts uniquement en N temps d'arrêt $T_1\ldots T_N$.

Seulement, les martingales $\overset{c}{K}{}^1,\dots,\overset{c}{K}{}^N$ sont aussi des processus VI, et nous pouvons <u>oublier</u> que ce sont des martingales, en les faisant entrer dans la partie VI. Autrement dit, nous pouvons nous ramener à la situation suivante :

(5.2) $\left|\begin{array}{l} X = X_0+M+A \\ M\in\underline{\underline{M}}_0 \text{ est une martingale } \underline{\text{continue}} \\ A\in\underline{\underline{A}}_0 \text{ possède au plus N sauts} \end{array}\right.$

Nous rangerons ces N sauts dans leur ordre naturel : $0<R_1\leqq\dots\leqq R_N\leqq+\infty$. Une seconde approximation commode consiste à remplacer M,A,X_0 par

$$\bar{M}_t = M_{t\wedge S} \quad , \quad \bar{A}_t = A_{t\wedge S} \quad , \quad \bar{X}_0 = X_0\cdot I_{\{|X_0|\leq k\}}$$

où S est le temps d'arrêt $\inf\{ t : |M_t|\geqq k \text{ ou } \int_0^t |dA_s|\geqq k \}$. Si k est assez grand, $\bar{M}$ et $\bar{A}$ sont très près de M et de A respectivement, et de plus, la martingale $\bar{M}$ est continue <u>bornée</u>, et la variation totale du processus VI continu $\bar{A}^c$ est bornée. Ainsi, grâce au lemme,

(5.3) <u>Dans</u> (5.2) <u>on peut supposer de plus</u> M <u>bornée</u>, $\int_0^\infty |dA_s^c|$ <u>bornée</u> <u>et</u> X_0 <u>bornée</u>.

6 Nous faisons une réduction supplémentaire : supposons la formule établie <u>lorsque</u> A <u>est continu</u> (et $\int_0^\infty |dA_s|$ bornée) en plus des hypothèses précédentes, et déduisons en le cas général. Nous nous appuyons sur la remarque suivante

LEMME. <u>Les deux membres de</u> (3.1) <u>ont les mêmes sauts</u>.

En effet, le saut du côté droit à l'instant t vaut , comme $\langle X^c,X^c\rangle$ est continu ,

$$F'\circ X_{t-}\Delta X_t \;+\; (F\circ X_t - F\circ X_{t-} - F'\circ X_{t-}\Delta X_t)$$

et c'est aussi le saut du côté gauche.

Reprenons alors la situation (5.2)-(5.3). Introduisons la semimartingale auxiliaire, continue

$$\bar{X}_t = X_0+M+A^c$$

Nous avons $X_t=\bar{X}_t$ sur $[[0,R_1[[$, donc $X_{t-}=\bar{X}_{t-}$ sur $[[0,R_1]]$, et aussi $\int_0^t F'\circ X_{s-}dM_s = \int_0^t F'\circ\bar{X}_{s-}dM_s$ sur $[[0,R_1]]$. Sur $[[0,R_1[[$ nous avons $\int_0^t F'\circ X_{s-}dA_s = \int_0^t F'\circ\bar{X}_{s-}dA_s^c$ (il s'agit d'intégrales de Stieltjes ordinaires). Les autres termes pour les deux semimartingales sont égaux, X et $\bar{X}$ ayant même partie martingale continue, sur l'intervalle $[[0,R_1[[$. La formule du changement de variables, supposée vraie pour $\bar{X}$ sur $[[0,\infty[[$, est donc vraie pour X sur $[[0,R_1[[$. Mais les deux membres ont le même saut en R_1 d'après le lemme, et la formule est donc vraie sur $[[0,R_1]]$.

Mais alors, en décalant, le même raisonnement permet d'avoir l'égalité sur $[[R_1,R_2]]$, et ainsi de suite jusqu'à $[[R_N,+\infty]]$. Le théorème sera donc complètement établi.

LA FORMULE D'ITO : DEMONSTRATION POUR LE CAS CONTINU

7 Nous écrivons $X=X_0+M+A$: $|X_0|\leqq K$, $M\in\underline{\underline{M}}_0$ continue bornée par K , $A\in\underline{\underline{A}}_0$ continu avec $\int_0^\infty|dA_s|\leqq K$, et nous voulons établir la formule d'ITO

$$(7.1)\quad F(X_t)-F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)dM_s + \int_0^t F'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)d\langle M,M\rangle_s$$
$$= \quad I_1 \quad + \quad I_2 \quad + \frac{1}{2}\quad I_3$$

Le processus X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-3K,+3K]$. Nous désignons par C une constante majorant $|F'|,|F''|$ sur cet intervalle, et nous écrivons la formule de Taylor pour deux points de $[-3K,+3K]$

$$(7.2)\qquad F(b)-F(a) = (b-a)F'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2F''(a) + r(a,b)$$

où d'après la continuité uniforme de F" sur l'intervalle

$$(7.3)\qquad |r(a,b)| \leqq \varepsilon(|b-a|).(b-a)^2 \qquad \begin{array}{l}\varepsilon(t) \text{ fonction croissante de } t\\ \varepsilon(t)\to 0 \text{ lorsque } t\to 0\end{array}$$

Nous considérons maintenant une subdivision (t_i) de l'intervalle $[0,t]$. Bien que notée avec des t et non des T, il s'agira d'une subdivision <u>aléatoire</u> ainsi définie : $a>0$ étant choisi , $t_0=0$ et

$$t_{i+1} = t\wedge(t_i+a)\wedge\inf\{s>t_i : |M_s-M_{t_i}|>a \text{ ou } |A_s-A_{t_i}|>a\}$$

ainsi, lorsque $a\to 0$, le pas de la subdivision $\sup_i(t_{i+1}-t_i)\leqq a$ tend vers 0 uniformément, et la v.a. $\sup_i |M_{t_{i+1}}-M_{t_i}|\leqq a$ tend vers 0 uniformément. Plus précisément, l'oscillation du processus X sur chaque intervalle $[[t_i,t_{i+1}]]$ est majorée par 4a. Nous écrivons

$$(7.4)\quad F(X_t)-F(X_0) = \Sigma_i[F(X_{t_{i+1}})-F(X_{t_i})]$$
$$= \Sigma_i F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) + \frac{1}{2}\Sigma_i F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2 + \Sigma_i r(X_{t_i},X_{t_{i+1}})$$
$$= \quad S_1 \quad + \quad \frac{1}{2}S_2 \quad + \quad R$$

et nous allons montrer successivement que S_1 tend vers I_1+I_2 en mesure, que S_2 tend vers I_3 en mesure, que R tend vers 0 en mesure, lorsque $a\to 0$. Cela achèvera la démonstration.

ETUDE DE S_1. Nous coupons la somme en deux

$$U_1 = \Sigma_i F'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i}) \qquad U_2 = \Sigma_i F'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$$

et nous montrons que $U_1 \to I_1$ dans L^2, $U_2 \to I_2$ dans L^1 lorsque $a \to 0$.
Première somme : Nous écrivons $\int_0^t = \Sigma_i \int_{t_i}^{t_{i+1}}$, puis en utilisant l'orthogonalité des différents termes de la somme

$$\begin{aligned} \|U_1-I_1\|_2^2 &= \Sigma_i \| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s)-F'(X_{t_i}))dM_s\|_2^2 \\ &= E[\ \Sigma_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s)-F'(X_{t_i}))^2 d\langle M,M\rangle_s\ ] \\ &\leq E[\{\sup_i \sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} (F'(X_s)-F'(X_{t_i}))^2\}.\langle M,M\rangle_t] \end{aligned}$$

Le sup entre $\{\ \}$ converge uniformément vers 0 sur Ω, $\langle M,M\rangle_t$ est intégrable, d'où le résultat annoncé plus haut.

Seconde somme. Raisonnement analogue, plus simple : nous majorons directement $|U_2 - I_2|$ par

$$\Sigma_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F'(X_s)-F'(X_{t_i})||dA_s|$$

qui se majore encore par $\{\sup_i \sup_{s\in ..} |\ \ |\}.\int_0^t |dA_s|$ et on conclut comme ci-dessus.

ETUDE DE S_2. Nous coupons la somme en trois

$$V_1 = \Sigma_i F''\circ X_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2 \quad , \quad V_2 = 2\Sigma_i F''\circ X_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})$$

$$V_3 = \Sigma_i F''(X_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$$

Nous montrons que V_1 et V_2 tendent vers 0 p.s. et dans L^1, et que $V_3 \to I_3$ en mesure.
Traitons par exemple V_1 : nous la majorons par $C.\ \sup_i |A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|.\int_0^t |dA_s|$.
Le $\sup_i$ est majoré par a, d'où aussitôt la conclusion.

L'étude de V_3 est plus délicate. Nous aurons besoin de savoir que $\langle M,M\rangle_\infty \in L^2$, du fait que M est bornée, de sorte que la martingale $M^2-\langle M,M\rangle$ appartient à $\underline{\underline{M}}$. Pour voir cela, nous écrivons que

$$E[\langle M,M\rangle_\infty - \langle M,M\rangle_t | \underline{\underline{F}}_t] = E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_t] - M_t^2 \leq K^2 \text{, donc}$$

$$E[\langle M,M\rangle_\infty^2] = 2E[\int_0^\infty (\langle M,M\rangle_\infty - \langle M,M\rangle_t)d\langle M,M\rangle_t]$$

$$(7.5) \qquad = 2E[\int_0^\infty (E[M_\infty^2 | \underline{\underline{F}}_t]-M_t^2)d\langle M,M\rangle_t] \leq 2K^2 E[\langle M,M\rangle_\infty] \leq 2K^4$$

Nous allons montrer que $V_3-J_3 \to 0$ dans L^2, donc en mesure, où J_3 est la somme

$$J_3 = \Sigma_i \; F''(X_{t_i}) \langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}$$

Un argument déjà utilisé montre aisément que $I_3-J_3 \to 0$ dans L^1, donc en mesure, et nous en déduirons bien que $V_3-I_3 \to 0$ en mesure, achevant ainsi l'étude de S_2.

La v.a. $\langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}} -(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$ est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{t_i}$ (propriété de martingale de $\langle M,M\rangle - M^2$) et le reste après multiplication par $F''(X_{t_i})$, donc les différents termes de la somme V_3-J_3 sont orthogonaux et on a

$$\|V_3-J_3\|_2^2 = \Sigma_i \; E[(F''\circ X_{t_i})^2(\langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}-(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2)^2]$$

Nous majorons $(F''\circ X_{t_i})^2$ par C^2, et pour l'autre terme nous utilisons la majoration grossière $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. Nous sommes ramenés à montrer que les espérances suivantes tendent vers 0

$$E[\Sigma_i(\langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2 \;] \quad , \quad E[\; \Sigma_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^4]$$

La première est semblable à la somme V_1 : nous la majorons par

$$E[(\sup_i \langle M,M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}).\langle M,M\rangle_t]$$

Le $\sup_i$ tend vers 0 simplement (continuité uniforme de $\langle M,M\rangle$), en restant dominé par $\langle M,M\rangle_t$; comme nous avons vu que $\langle M,M\rangle_t \in L^2$, le théorème de Lebesgue s'applique.

La seconde est majorée par

$$E[(\sup_i \; (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2).\Sigma_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]$$
$$\leq a^2E[\Sigma_i\ldots] = a^2E[M_t^2]$$

qui tend bien vers 0. C'est ici, et ici seulement, que le caractère aléatoire de la subdivision (t_i) a été utilisé, dans le fait que $|M_{t_{i+1}}-M_{t_i}| \leq a$ identiquement. Sans cela, on a besoin de raisonnements plus compliqués.

ETUDE DE R. Conformément à (7.3), nous majorons R par

$$\Sigma_i(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2\varepsilon(|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|) \leq 2\varepsilon(2a).\Sigma_i((A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2+(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2)$$

$E[\Sigma_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]=E[M_t^2]$ reste fixe, $E[\Sigma_i(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2] \leq aE[\Sigma_i|A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|]$ reste borné, $\varepsilon(2a)$ tend vers 0 avec a, et la démonstration est finie.

Il est bon de jeter un regard en arrière : la démonstration est elle vraiment compliquée ? Dans une première étape, **au** n°4, nous nous sommes débarrassés des sauts pour n'en laisser qu'un nombre fini. Au n°6, nous nous sommes ramenés au cas continu. Au n°7, nous avons traité ce dernier cas, où se présentent les difficultés tenant au fait qu' une

martingale continue n'est pas un processus à variation finie, mais a en quelque sorte une "variation finie d'ordre 2". Tout cela a pris du temps - et cependant il n'y a rien de réellement difficile : on a été tout droit, en utilisant comme seul outil la formule de Taylor à l'ordre 2, ajoutée aux résultats élémentaires sur les martingales.
Au chapitre IV, nous étendrons la formule à une classe de processus plus générale, mais sans grand effort.

8 La formule de changement de variables admet l'extension suivante à n dimensions : si $X^1,\dots,X^n$ sont n semi-martingales (r), si F est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable , avec des dérivées partielles bornées du premier et du second ordre, notées D_iF, D_iD_jF, on a l'identité

$$\begin{aligned} F(X_t^1,\dots,X_t^n) &= F(X_0^1,\dots,X_0^n) + \sum_i \int_0^t D_iF(X_{s-}^1,\dots,X_{s-}^n)dX_s^i + \\ (8.1) \qquad &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t D_iD_jF(X_{s-}^1,\dots,X_{s-}^n)d\langle X^{ic},X^{jc}\rangle_s \\ &+ \Sigma_s(F(X_s^1,\dots X_s^n)-F(X_{s-}^1,\dots,X_{s-}^n)-\Sigma_i D_iF(X_{s-}^1,\dots X_{s-}^n)\Delta X_s^i) \end{aligned}$$

La démonstration est exactement la même, avec des notations plus lourdes.

9 EXEMPLE D'APPLICATIONS . Si M est une martingale bornée, il suffit évidemment que F soit continûment dérivable à l'ordre 2, sans que l'on ait à exiger des dérivées bornées. On peut alors appliquer le résultat à $F(t)=t^2$, et obtenir

$$(9.1) \qquad M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_{s-}dM_s + \langle M^c,M^c\rangle_s + \Sigma_{0<s\leqq t}\,\Delta M_s^2$$

ou encore la formule bien connue (on l'étendra plus tard aux martingales locales, sans aucune restriction)

$$(9.2) \qquad 2\int_0^t M_{s-}dM_s = M_t^2 - [M,M]_t$$

et en polarisant, la formule d'intégration par parties, qui sera aussi étendue plus loin

$$d(M_sN_s) = M_{s-}dN_s + N_{s-}dM_s + d[M,N]_s$$

Cette formule est vraie plus généralement pour les semi-martingales (r) bornées, en posant (cf. (2.1)) $[X,Y]_t = \langle X^c,Y^c\rangle_t + \Sigma_{s\leqq t}\,\Delta X_s\Delta Y_s$. Elle contient en particulier la formule d'intégration par parties pour les processus croissants déterministes !
Nous reprendrons cela plus tard.

APPLICATION AU MOUVEMENT BROWNIEN ET AU PROCESSUS DE POISSON

Nous reproduisons maintenant la magnifique démonstration, due à KUNITA-WATANABE [8], du théorème de LEVY caractérisant le mouvement brownien, et du théorème analogue relatif au processus de Poisson. DELLACHERIE a remarqué ([15],[16]) que ces théorèmes sont étroitement liés au théorème de SKOROKHOD sur la représentation de martingales au moyen d'intégrales stochastiques. Ici, nous allons donner une démonstration commune des deux théorèmes, après quoi nous dirons quelques mots de la démonstration de DELLACHERIE.

10 THEOREME. Soit (B_t) une martingale à trajectoires continues de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, telle que B_t^2-t soit une martingale. Alors (B_t) est un mouvement brownien : pour tout couple (s,t) tel que $s<t$, B_t-B_s est gaussienne centrée de variance $t-s$, indépendante de $\underline{\underline{F}}_s$.

Soit $(\underline{\underline{G}}_t)$ la famille de tribus naturelle de (B_t), rendue continue à droite[1] et complétée. Toute v.a. $X\in L^2(\underline{\underline{G}}_\infty)$ admet une représentation comme intégrale stochastique

(10.1) $X=E[X|\underline{\underline{G}}_0]+\int_0^\infty H_s dB_s$ où H est prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$ et $E[\int H_s^2 ds]<\infty$

et l'on a

(10.2) $E[X|\underline{\underline{G}}_t] = E[X|\underline{\underline{F}}_t]$ p.s. pour tout t .

DEMONSTRATION. Tout tient dans le calcul suivant. Soit $X\in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$, et soit X_t la martingale $E[X|\underline{\underline{F}}_t]$. Supposons que le produit X_tB_t soit une martingale. Alors, pour tout $u\in\mathbb{R}$, pour tout couple (s,t) tel que $s<t$

(10.3) $E[e^{iu(B_t-B_s)}X_t|\underline{\underline{F}}_s] = X_s e^{-(t-s)u^2/2}$

Pour démontrer cela, nous simplifions les notations en nous ramenant, par décalage, au cas où $\boxed{s=0,\ B_0=0}$ (poser pour $u\geq 0$: $\underline{\underline{F}}'_u=\underline{\underline{F}}_{s+u}$, $X'_u=X_{s+u}$, $B'_u=B_{s+u}-B_s$, $t'=t-s$, et appliquer le cas particulier à ces tribus et processus). Le changement de notation étant fait, écrivons la formule du changement de variables entre les instants 0 et t, avec la fonction deux fois dérivable $F(x)=e^{iux}$

(10.4) $e^{iuB_t} = 1 + iu\int_0^t e^{iuB_s}dB_s - \frac{u^2}{2}\int_0^t e^{iuB_s}\,ds$

puisque $\langle B,B\rangle_s=s$. Soit $A\in\underline{\underline{F}}_0$, et soit

$$j(s) = \int_A e^{iuB_s} X_s\, P$$

Multiplions (10.4) par X_t , intégrons sur A, et regardons. Du côté gauche, nous trouvons $j(t)$. Du côté droit, nous trouvons successivement : $\int_A X_t P = \int_A X_0 P$. Puis 0 : en effet, X est orthogonale à B, donc à

1. En fait, l'adjonction des ens. P-négligeables rend la famille c.à d..

toute intégrale stochastique de B , donc $\int_A X_t P \int_0^t e^{iuB_s} dB_s = 0$.
Enfin $\int_A X_t P \int_0^t e^{iuB_s} ds = \int_0^t j(s)ds$. Donc

$$j(t) = \int_A X_0 P \quad - \quad \frac{u^2}{2} \int_0^t j(s)ds$$

équation différentielle qui se résout aisément

$$j(t) = (\int_A X_0 P)\ e^{-tu^2/2}$$

qui équivaut à $E[e^{iuB_t} X_t | \underline{\underline{F}}_0] = X_0 e^{-tu^2/2}$, la formule cherchée.

1) Prenons X=1. La formule s'écrit alors (après décalage de s)

$$E[e^{iu(B_t - B_s)} | \underline{\underline{F}}_s] = e^{-(t-s)u^2/2}$$

qui nous dit que la loi conditionnelle de $(B_t - B_s)$ connaissant $\underline{\underline{F}}_s$ est une loi fixe, gaussienne centrée de variance t-s. Cela nous donne la première assertion.

Pour la seconde, nous pouvons nous restreindre à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, et supposer que $X_0 = E[X|\underline{\underline{G}}_0] = 0$. Soit (Y_t) la projection de la martingale (X_t) sur (B_t) - il y a ici une minuscule difficulté, due au fait que (B_t) n'est de carré intégrable que sur tout intervalle compact, et n'appartient pas à $\underline{\underline{M}}$, mais elle se lève très facilement . D'après II.29, (Y_t) est une intégrale stochastique H•B . Quitte à remplacer X_t par $X_t - Y_t$, nous pouvons supposer que (X_t) <u>est orthogonale à</u> (B_t). Il s'agit alors de montrer que $X = X_\infty = 0$.

D'après (10.3) nous avons, quels que soient $t_1 < t_2 \ldots < t_n$, $u_1 \ldots u_n \in \mathbb{R}$

(10.5) $E[e^{iu_1 B_{t_1}} e^{iu_2(B_{t_2} - B_{t_1})} \ldots e^{iu_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})} X_\infty]$

$$= E[X_0 e^{-t_1 u_1^2/2} \ldots e^{-(t_n - t_{n-1})u_n^2/2}] = 0$$

Soit μ la mesure bornée X.P sur $\underline{\underline{G}}_\infty$: la mesure image de μ par le vecteur aléatoire $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est nulle, puisque sa transformée de Fourier est nulle. Il en est de même de la mesure image de μ par $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ puis, par limites projectives, de μ elle même. Cela entraîne que X=0 P-p.s. Si le lecteur n'aime pas raisonner sur des mesures signées, il pourra séparer μ en μ^+ et μ^- et montrer que $\mu^+ = \mu^-$!

Enfin, pour la troisième assertion, soit (Z_t) une version continue à droite de la martingale $E[X|\underline{\underline{G}}_t]$. Comme elle s'écrit comme intégrale stochastique (10.1), et que (B_t) est une martingale de $(\underline{\underline{F}}_t)$, (Z_t) est aussi une martingale de $(\underline{\underline{F}}_t)$, bornée dans L^2 : donc elle admet une limite à l'infini Z_∞ dans L^2 et p.s., et $Z_t = E[Z_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$. Mais comme X est $\underline{\underline{G}}_\infty$ -mesurable on a d'après le théorème de convergence appliqué dans $(\underline{\underline{G}}_t)$ que $Z_\infty = X$, et cela donne (10.2).

11 Le théorème admet une extension à $\mathbb{R}^n$, qui se démontre de la même manière : si $(B_t)=(B_t^1,\dots,B_t^n)$ est une martingale vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, à trajectoires continues, et si l'on a $\langle B^i,B^j\rangle_t=\delta^{ij}t$, alors (B_t) est un mouvement brownien à n dimensions, et les martingales (X_t) de carré intégrable, de la famille naturelle $(\underline{\underline{G}}_t)$ de (B_t), sont des sommes d'intégrales stochastiques $\Sigma_1^n \int_0^t H_s^i dB_s^i$. Seules les notations sont plus lourdes.

L'application au processus de Poisson est en substance beaucoup plus triviale : le calcul différentiel stochastique qui y intervient est celui des martingales V.I. Nous en donnons deux formes.

12 THEOREME. Soit (P_t) un processus croissant (adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$) purement discontinu, dont tous les sauts sont égaux à +1. On désigne par $S_1,\dots,S_n$ .. les instants de sauts successifs. Si le processus $Q_t = P_t-t$ est une martingale, (P_t) est un processus de Poisson : les v.a. S_1, $S_2-S_1,\dots S_n-S_{n-1}$ sont exponentielles de paramètre 1, indépendantes respectivement de $\underline{\underline{F}}_0,\underline{\underline{F}}_{S_1},\dots,\underline{\underline{F}}_{S_{n-1}}$.

Soit $(\underline{\underline{G}}_t)$ la famille de tribus naturelle de (P_t), rendue continue à droite et complétée[1] . Toute v.a. $X\in L^2(\underline{\underline{G}}_\infty)$ admet une représentation comme intégrale stochastique

(12.1) $X = E[X|\underline{\underline{G}}_0] + \int_0^\infty H_s dQ_s$, où H est prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$ et $E[\int H_s^2 ds]<\infty$.

et l'on a

(12.2) $E[X|\underline{\underline{G}}_t] = E[X|\underline{\underline{F}}_t]$ p.s. pour tout t.

13 VARIANTE. Soit (Q_t) une martingale telle que $E[Q_t^2]<\infty$ pour tout t, purement discontinue en tant que martingale, dont tous les sauts sont égaux à +1. Si Q_t^2-t est une martingale, $P_t=Q_t+t$ est un processus de Poisson.

14 VARIANTE. Soit S un temps d'arrêt de$(\underline{\underline{F}}_t)$. Si le processus $I_{\{t\geqq S\}}-t\wedge S$ est une martingale, on a pour tout t

(14.1) $P\{S\geqq t+u|\underline{\underline{F}}_t\} = e^{-u}I_{\{S\geqq t\}}$.

DEMONSTRATION. Nous donnerons moins de détails que pour le cas brownien. Nous laisserons entièrement de côté la variante 14, et supposerons $Q_0=P_0=0$. Ramenons d'abord à 12 la variante 13. Comme (Q_t) est purement discontinue en tant que martingale

$$E[[Q,Q]_t] = E[Q_t^2]<\infty \quad , \ [Q,Q]_t = \Sigma_{s\leqq t} \Delta Q_s^2 = \Sigma_{s\leqq t} \Delta Q_s$$

1. En fait, l'adjonction des ens. P-négligeables rend la famille c.à d..

puisque tous les sauts sont égaux à +1. $P_t = \Sigma_{s\leq t} \Delta Q_s$ est un processus croissant, et l'intégrabilité de $[Q,Q]_t$ entraîne celle de P_t . Comme[1] Q est la somme compensée de ses sauts, $Q=P-\tilde{P}$. Comme $P=[Q,Q]$ et $[Q,Q]_t-t = (Q_t^2-t)+([Q,Q]_t-Q_t^2)$ est une martingale, on a $\tilde{P}_t=t$, d'où finalement $Q_t=P_t-t$.

Passons à la démonstration de 12. Nous écrivons la formule du changement de variables entre les instants 0 et $S=S_1$, pour la martingale Q et la fonction $F(x)=e^{iux}$:

$$e^{iuQ_S} = 1 + iu\int_0^S e^{iuQ_{r-}}dQ_r + 0 + (e^{iuQ_S} - e^{iuQ_{S-}} - iue^{iuQ_{S-}}\Delta Q_S)$$

puisqu'il n'y a pas de partie continue et qu'il y a un seul saut entre 0 et S compris. A vrai dire, ce calcul n'est pas absolument rigoureux, du fait que Q n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ entier, et que S n'est pas borné, mais la justification est facile (appliquer à $S\wedge n$ et passer à la limite) et nous ne voulons pas donner les détails. On a $\Delta Q_S=1$, $Q_{S-}= -S$, il reste donc

$$0 = 1 + iu\int_0^S e^{iuQ_{r-}}dQ_r -(1+iu)e^{-iuS}$$

Prenons une espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_0$, il vient que $E[e^{-iuS}|\underline{\underline{F}}_0]=1/(1+iu)$, donc S est indépendante de $\underline{\underline{F}}_0$ avec une loi exponentielle de paramètre 1. Par décalage, S_n-S_{n-1} est indépendante de $\underline{\underline{F}}_{n-1}$ avec une loi exponentielle de paramètre 1, et (P_t) est bien un processus de Poisson.

Sachant cela, nous pouvons vérifier que $(Q_{t\wedge S})$ appartient à $\underline{\underline{M}}$, et mettre dans le calcul la martingale (X_t) orthogonale à (Q_t), et voir

$$E[e^{iuS}X_\infty\,|\underline{\underline{F}}_0] = X_0/(1+iu) \qquad E[e^{iu(S_n-S_{n-1})}X_\infty\,|\underline{\underline{F}}_{S_{n-1}}]=X_{S_{n-1}}/(1+iu)$$

et finalement

$$E[e^{iu_1S_1}e^{iu_2(S_2-S_1)}..e^{iu_n(S_n-S_{n-1})}X]=E[X_0]/(1+iu_1)...(1+iu_n)$$

qui est nul si $E[X_0]=0$. Comme la tribu $\underline{\underline{G}}_\infty$ est engendrée par les v.a. $S_1,\dots,S_n-S_{n-1}\dots$ aux ensembles de mesure nulle près, on en déduit comme pour 10 que si X est $\underline{\underline{G}}_\infty$ -mesurable et $E[X_0]=0$, alors X est nulle, ce qui entraîne (12.1) et (12.2) comme au n°10.

15 Indiquons maintenant, en suivant DELLACHERIE, le rapport direct entre le théorème d'unicité en loi (caractérisation des lois du mouvement brownien et du processus de Poisson) et le théorème de représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Traitons le cas du mouvement brownien, qui est plus simple. Nous pouvons prendre pour Ω

1.Ecrire la décomposition du n°II.11, et constater qu'elle converge en $\|\ \|_V$.

l'espace des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, avec ses applications coordonnées B_t et ses tribus naturelles $\underline{\underline{F}}_t$. Soit (X_t) une martingale <u>bornée</u> ($|X_t| \leq M$) orthogonale à (B_t), telle que $X_0=0$, et soit Q la loi de probabilité $(1+\frac{X_\infty}{2M}).P$, équivalente à P. Comme (X_t) est orthogonale à (B_t), elle est aussi orthogonale à toute intégrale stochastique de (B_t), donc à la martingale (B_t^2-t). On vérifie alors aussitôt que

- B_t est une martingale de carré intégrable <u>pour la loi</u> Q ,
- B_t^2-t est une martingale <u>pour la loi</u> Q

Mais alors, (B_t) est un mouvement brownien pour la loi Q, et comme B_0 a la même loi pour Q et pour P, on a Q=P, donc $X_\infty=0$.

Cela ne suffit pas à montrer le théorème de représentation : il faudrait savoir que toute martingale <u>de carré intégrable</u>, orthogonale à (B_t), est nulle. DELLACHERIE explique dans [16] comment on peut ramener cela au cas borné avec un minimum de travail.

Une démonstration analogue vaut pour le processus de Poisson compensé (Q_t), mais il est moins évident que Q_t^2-t soit une intégrale stochastique de (Q_t), et le passage du cas borné au cas des martingales de carré intégrable n'est pas aussi facile.

POLYNOMES D'HERMITE ET MARTINGALES BROWNIENNES

16 Nous allons profiter des calculs précédents pour indiquer un résultat amusant sur le mouvement brownien. Plaçons nous par exemple à deux dimensions. La formule (10.3) - avec X=1 - nous dit que le processus

$$\exp(iu_1B_t^1+iu_2B_t^2+\tfrac{1}{2}|u|^2t) \qquad (|u|^2=u_1^2+u_2^2)$$

est une martingale . Autrement dit, si s<t, $A\in\underline{\underline{F}}_s$, on a

$$(16.1) \quad \int_A \exp(iu_1B_t^1+iu_2B_t^2+\tfrac{1}{2}t|u|^2).P=\int_A \exp(iu_1B_s^1+iu_2B_s^2+\tfrac{1}{2}s|u|^2).P$$

Les deux membres sont des fonctions indéfiniment différentiables de u_1,u_2, et ont les mêmes dérivées de tous ordres en 0. Pour calculer celles-ci, nous partons de la série génératrice des polynômes d'HERMITE

$$(16.2) \quad \exp(u_1x_1+u_2x_2-\tfrac{1}{2}|u|^2) = \Sigma_{n,m}\frac{u_1^n\,u_2^m}{n!\;m!}H_{nm}(x_1,x_2)$$

que nous transformons en

$$(16.3) \quad \exp(iu_1x_1+iu_2x_2-\tfrac{1}{2}t|u|^2)=\Sigma\,\frac{i^{n+m}t^{(n+m)/2}u_1^nu_2^m}{n!m!}H_{nm}(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\,,\,\frac{x_2}{\sqrt{t}})$$

Portant cela dans (16.1), nous voyons que pour tout (n,m) le processus $t^{(n+m)/2}H_{nm}(B_t^1/\sqrt{t},\,B_t^2/\sqrt{t})$ est une martingale.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(P.A. Meyer)

CHAPITRE IV . MARTINGALES LOCALES
CHANGEMENT DE VARIABLES, FORMULES EXPONENTIELLES

Dans ce chapitre, en introduisant la notion de *martingale locale* (ITO et WATANABE [11]) puis celle de *semimartingale*, nous donnons au calcul sur les intégrales stochastiques toute la souplesse nécessaire. Nous étendons la formule du changement de variables, et en donnons des applications aux "formules exponentielles" . Cependant, nous nous limitons ici à l'intégration d'une classe restreinte de processus : les processus prévisibles localement bornés. Au chapitre V, nous traiterons plus en détails la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux martingales locales (et non plus par rapport aux semimartingales), en utilisant les espaces $\mathbf{H}^1$ et $\mathbf{BMO}$.

MARTINGALES LOCALES

1 DEFINITION. *Soit* M *un processus adapté, nul en* 0. *On dit que* M *est une* martingale locale *s'il existe des temps d'arrêt* $T_n \uparrow +\infty$ *tels que les processus arrêtés* M^{T_n} *soient des martingales uniformément intégrables.*

On dit que M *est* localement dans $\mathbf{M}$ (localement de carré intégrable) *si l'on peut choisir les* T_n *de telle sorte que* M^{T_n} *soit de carré intégrable pour tout* n.

Si M *n'est pas nulle en* 0, *on dit que* M *est une martingale locale* (*est localement dans* $\mathbf{M}$) *si* $M-M_0$ *possède cette propriété*.

2 REMARQUES. a) Une martingale locale est un processus à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche.

b) M est une martingale locale si et seulement s'il existe des $T_n \uparrow \infty$ tels que les processus $M^{T_n} I_{\{T_n > 0\}}$ soient des martingales uniformément intégrables.

3 NOTATIONS. L'espace des martingales locales (nous verrons dans un instant que c'en est un !) est noté $\mathbf{L}$. L'espace des martingales locales nulles en 0 est noté $\mathbf{L}_0$. L'espace des martingales locales localement de carré intégrable est noté $\mathbf{M}_{loc}$.

Soit H un processus adapté nul en 0. Nous dirons qu'un temps d'arrêt S *réduit* H si H^S est une martingale uniformément intégrable.

Nous énonçons maintenant quelques propriétés simples des martingales locales : le lecteur énoncera les résultats analogues pour $\underline{\underline{M}}_{loc}$.

4 a) Si le temps d'arrêt T réduit H, et S est un temps d'arrêt tel que $S\leqq T$, alors S réduit H.

b) La somme de deux martingales locales est une martingale locale (on se ramène à $\underline{\underline{L}}_0$. Si les $S_n \uparrow +\infty$ réduisent M, si les $T_n \uparrow +\infty$ réduisent N, alors les $S_n \wedge T_n$ réduisent M+N).

c) <u>Soit</u> M <u>une martingale locale nulle en</u> 0. <u>Alors un temps d'arrêt</u> S <u>réduit</u> M <u>si et seulement si le processus</u> M^S <u>appartient à la classe</u> (D). On rappelle qu'un processus H appartient à la classe (D) si et seulement si toutes les v.a. H_T , où T est un temps d'arrêt fini, sont uniformément intégrables.

DEMONSTRATION. Si S réduit M, M^S est une martingale uniformément intégrable, donc appartient à la classe (D) (résultat cité dans [D],V.T9, p.98, avec renvoi à la première édition de [P], V.T19). Inversement, soient des $T_n\uparrow\infty$ réduisant M. Soit s<t. Alors $M_{s\wedge S\wedge T_n}=E[M_{t\wedge S\wedge T_n}|\underline{\underline{F}}_s]$ puisque $M^{S\wedge T_n}=(M^{T_n})^S$ est une martingale. Grâce à l'intégrabilité uniforme on peut faire tendre n vers $+\infty$, ce qui donne $E[M_{s\wedge S}]=E[M_{t\wedge S}|\underline{\underline{F}}_s]$, donc M^S est une martingale.

d) <u>Si</u> M <u>est une martingale locale nulle en</u> 0, <u>si</u> S <u>et</u> T <u>réduisent</u> M, <u>alors</u> $S\vee T$ <u>réduit</u> M.

En effet, le processus $|M^{S\vee T}|$ majoré par $|M^S|+|M^T|$ appartient à la classe (D).

e) <u>Soit</u> M <u>un processus quelconque</u>. <u>S'il existe des temps d'arrêt</u> $T_n\uparrow\infty$ <u>tels que les</u> M^{T_n} <u>soient des martingales locales</u>, M <u>est une martingale locale</u>.

DEMONSTRATION. On se ramène au cas où $M_0=0$. Pour chaque n soient des $R_{nm}\uparrow\infty$ réduisant M^{T_n} , et soit $S_{nm}=R_{nm}\wedge T_n \uparrow T_n$. Rangeons les S_{nm} en une seule suite S_k et posons $H_k=S_1\vee\ldots\vee S_k \uparrow\infty$. Il suffit de voir que les H_k réduisent M. Or en revenant aux notations à deux indices, soit $S_1=S_{n_1m_1}$,..., $S_k=S_{n_km_k}$, et soit $r=n_1\vee\ldots\vee n_k$. $S_{n_im_i}$ réduit $M^{T_{n_i}}$; or $M^{T_{n_i}}$ et M^{T_r} ont la même arrêtée à l'instant $S_{n_im_i}$, donc $S_{n_im_i}$ réduit M^{T_r} . D'après d) il en est de même de H_k . Comme M et M^{T_r} ont même arrêtée à l'instant H_k, H_k réduit M.

4bis Avant de passer à des propriétés plus fines des martingales locales, on va indiquer la raison pour laquelle celles-ci ont été introduites par ITO et WATANABE dans [11]. Considérons une surmartingale positive (X_t). Il est bien connu que la limite $X_\infty = \lim_t X_t$ existe et est finie, de sorte que les temps d'arrêt

$$T_n = \inf \{t : X_t \geq n\}$$

tendent p.s. vers $+\infty$ avec n - **il est même vrai que pour presque tout** ω on a $T_n(\omega)=+\infty$ pour n grand. D'après le théorème d'arrêt de DOOB, la v.a. X_{T_n} est intégrable, de sorte que la surmartingale arrêtée X^{T_n} est dominée par la v.a. $n \vee X_{T_n}$, et admet donc une décomposition de DOOB

$$X_{t\wedge T_n} = M_t^n - A_t^n$$

où (A_t^n) est un processus croissant intégrable prévisible nul en 0, (M_t^n) une martingale uniformément intégrable. D'après l'unicité de la décomposition, il existe un processus M, un processus A tels que l'on ait pour tout n $M_t^n = M_{t\wedge T_n}$, $A_t^n = A_{t\wedge T_n}$

On vérifie aussitôt que A est un processus croissant, prévisible, et l'inégalité $E[A_\infty] = \lim_n E[A_\infty^n] \leq E[X_0]$ montre que A est intégrable. Quant à M, c'est une martingale locale d'après la définition 1. Il n'y a aucune difficulté à prouver l'unicité d'une telle décomposition.

On voit donc que la notion de martingale locale s'introduit de manière parfaitement naturelle, et toute la suite ne fera que confirmer cela : c'est la "bonne" extension de la notion de martingale.

REDUCTION FORTE : UN LEMME FONDAMENTAL

On va maintenant établir un résultat concernant la structure des martingales locales, qui va permettre de les ramener aux deux éléments avec lesquels on a travaillé jusqu'à maintenant : martingales de carré intégrable, processus VI. Ce lemme (8 ci-dessous) est lié à la "décomposition de GUNDY" des martingales discrètes.

5 DEFINITION. Soit M une martingale locale nulle en 0. On dit que le temps d'arrêt T réduit fortement M si T réduit M et si la martingale $E[|M_T| | \underline{\underline{F}}_s]$ est bornée sur $[[0,T[[$.

Alors , si $S \leq T$, et si l'on note (Y_s) la martingale $E[|M_T| | \underline{\underline{F}}_s]$, on a $E[|M_S| | \underline{\underline{F}}_s] \leq Y_{S\wedge s}$, et on peut en déduire que S réduit fortement M.

6 LEMME. Si S et T réduisent fortement M, il en est de même de $S \vee T$.

DEMONSTRATION. $S\vee T$ réduit M. Il suffit de montrer que $I_{\{t<T\}} E[|M_{S\vee T}| | \underline{\underline{F}}_t]$

est une martingale bornée (remplacer T par S et ajouter). Or c'est majoré par

$$E[|M_T||\underline{\underline{F}}_t]I_{\{t<T\}} + E[|M_S|I_{\{S>T\}}|\underline{\underline{F}}_t]I_{\{t<T\}}$$

Le premier terme est borné (T réduit fortement M). Le second vaut

$$E[|M_S|I_{\{t<T<S\}}|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[|M_S|I_{\{t<S\}}|\underline{\underline{F}}_t] \quad \text{qui est borné.}$$

7 LEMME. <u>Si</u> M <u>est une martingale locale nulle en</u> 0, <u>il existe des temps d'arrêt</u> $T_n \uparrow \infty$ <u>réduisant fortement</u> M.

DEMONSTRATION. Nous utiliserons la remarque suivante, qui devrait être classique : si S et T sont deux temps d'arrêt, $E[\cdot|\underline{\underline{F}}_T|\underline{\underline{F}}_S]=E[\cdot|\underline{\underline{F}}_{S\wedge T}]$ (en terme d'arrêt, cela revient à $(X^T)^S=X^{S\wedge T}$).

On prend des $R_n \uparrow \infty$, réduisant M. Puis on pose

$$S_{nm} = R_n \wedge \inf \{t : E[|M_{R_n}||\underline{\underline{F}}_t] \geqq m \}$$

On les range en une seule suite S_n , et on prend $T_n=S_1\vee\ldots\vee S_n$. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que S_{nm} réduit fortement M , ou encore - en enlevant les indices - que $E[|M_S||\underline{\underline{F}}_t]$ est bornée sur $[[0,S[[$.

Or soit (Y_t) la martingale $E[|M_R||\underline{\underline{F}}_t]$, bornée sur $[[0,S[[$ par la constante m. On a $E[|M_S|I_{\{t<S\}}|\underline{\underline{F}}_t] = E[|E[M_R I_{\{t<S\}}|\underline{\underline{F}}_S] \mid \underline{\underline{F}}_t] \leqq$
$E[E[|M_R|I_{\{t<S\}}|\underline{\underline{F}}_S|\underline{\underline{F}}_t] = E[|M_R|I_{\{t<S\}}|\underline{\underline{F}}_{S\wedge t}] = Y_{S\wedge t}I_{\{t<S\}} = Y_t I_{\{t<S\}} \leqq m.$

8 THEOREME. <u>Soit</u> M <u>une martingale locale. Alors il existe des temps d'arrêt</u> $T_n \uparrow \infty$ <u>tels que la martingale arrêtée</u> M^{T_n} <u>puisse s'écrire</u> (de manière non unique)

(8.1) $\qquad M_0 + U^n + V^n$

<u>où</u> U^n <u>appartient à</u> $\underline{\underline{M}}_0$ (est de carré intégrable), <u>et</u> V^n <u>à</u> $\underline{\underline{W}}_0$ (est à variation intégrable), U^n <u>et</u> V^n <u>étant aussi arrêtées à</u> T^n.

DEMONSTRATION. Compte tenu de ce qui précède, il suffit de prouver que si M est une martingale locale <u>nulle en 0</u> , et T <u>réduit fortement</u> M , alors M^T admet une décomposition $M^T=U+V$ du type précédent.

Par définition , $|M_T|$ (éventuellement prolongé par sa limite sur $\{T=\infty\}$) est intégrable, et la martingale $E[|M_T||\underline{\underline{F}}_t]$ est bornée sur $[[0,T[[$ par une constante K. Nous pouvons aussi supposer que $M=M^T$.

Posons $C_t=M_T I_{\{t\geqq T\}}=M_t I_{\{t\geqq T\}}$

$X_t=M_t I_{\{t<T\}}$

C est un processus à variation intégrable, soit $\tilde{C}$ sa compensatrice prévisible. Nous posons $V=C-\tilde{C}$, martingale à variation intégrable (la norme variation de V est au plus $2E[|M_T|]$), et $U=X+\tilde{C}$. C'est U qu'il faut étudier.

Nous introduisons les divers processus suivants (et les processus analogues avec des - au lieu de +)

$$\overset{+}{M}_t = E[M_T^+|\underline{\underline{F}}_t] \ , \ C_t^+=M_T^+I_{\{t\geq T\}} \ , \ \overset{+}{X}_t=M_t^+I_{\{t<T\}} \ , \ \overset{+}{U}_t = \overset{+}{X}_t+\tilde{C}_t^+$$

Le processus $\overset{+}{X}$ est une surmartingale bornée positive, le processus $\overset{+}{U}$ une martingale, donc $\tilde{C}^+$ est le processus croissant intégrable prévisible engendrant la partie potentiel de $\overset{+}{X}$, qui est elle aussi bornée par K. Nous allons montrer qu'alors $E[(\tilde{C}_\infty^+)^2]\leq 2K^2$ (cf. le début de la démonstration de II.10). Pour alléger les notations, nous écrirons x_t, c_t au lieu de $\overset{+}{X}_t$, $\tilde{C}_t^+$. Nous avons (intégration par parties)

$$c_\infty^2 = \int_{0-}^{\infty} [(c_\infty-c_s)+(c_\infty-c_{s-})]dc_s \leq 2\int_{0-}^{\infty}(c_\infty-c_{s-})dc_s$$

Prenons une espérance. Comme (c_t) est prévisible, on peut remplacer le processus $(c_\infty-c_{s-})$ par sa projection prévisible. Comme on a $x_T= E[c_\infty-c_T|\underline{\underline{F}}_T]$ pour tout temps d'arrêt T, on a aussi $x_{T-}=E[c_\infty-c_{T-}|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ pour tout temps prévisible T (utiliser une suite annonçant T). Donc la projection prévisible en question est le processus (x_{t-}) et on a

$$E[c_\infty^2] \leq 2E[\int x_{s-}dc_s] \leq 2KE[\int dc_s] = 2KE[x_0] = 2K^2 \ .$$

REMARQUES. La martingale U a de bien meilleures propriétés que l'appartenance à $\underline{\underline{M}}$: on verra plus loin (n°V.5) qu'elle appartient à l'espace $\underline{\underline{BMO}}$.

L'inégalité que nous venons d'utiliser est la seule inégalité sur les martingales et surmartingales que nous utilisons dans ce cours, et qui ne figure pas dans le livre de DOOB. Les inégalités plus récentes seront établies au chap.V, par les méthodes de GARSIA, mais il est bon de souligner que la théorie de l'intégrale stochastique repose, en fin de compte, sur des résultats plutôt élémentaires.

APPLICATIONS

9 Soit M une martingale locale, que nous supposons d'abord nulle en 0. Si T est un temps d'arrêt qui réduit fortement M, $M^T \in \underline{\underline{M}}_0+\underline{\underline{W}}_0$ est une "semimartingale au sens restreint" (n°III.1), et nous pouvons lui appliquer les résultats du chap.III - en particulier, définir les processus

$(M^T)^c$, partie martingale continue de M^T

$[M^T,M^T]_t = <(M^T)^c,(M^T)^c>_t + \Sigma_{s\leq t\wedge T} \Delta M_s^2$

Si maintenant S et T réduisent tous deux fortement M, les processus que l'on vient de construire coïncident jusqu'à l'instant $S\wedge T$. Faisant tendre S et T vers l'infini, on en déduit sans peine que

THEOREME. Si M est une martingale locale nulle en 0, il existe une martingale locale continue M^c nulle en 0, la partie continue de M, telle que pour tout t.d'a. T réduisant fortement M on ait

(9.1) $\qquad (M^c)^T = (M^T)^c$

On désigne par $<M^c,M^c>$ l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que l'on ait

(9.2) $\qquad <M^c,M^c>_{t\wedge T} = <(M^T)^c,(M^T)^c>_t$

pour tout T réduisant fortement M. On désigne par [M,M] le processus croissant (fini pour t fini)

(9.3) $\qquad [M,M]_t = <M^c,M^c>_t + \Sigma_{s\leq t} \Delta M_s^2$

et [M,N] se définit par polarisation. Si M n'est pas nulle en 0, soit $\overline{M}_t=M_t-M_0$; on pose $M_t^c=\overline{M}_t^c$, $[M,M]_t= [\overline{M},\overline{M}]_t+M_0^2$ (de même pour [M,N]).

10 REMARQUES. L'inégalité KW2 (II.21) s'étend aussitôt aux martingales locales par arrêt.

On peut définir $<M,M>$ pour une martingale locale M localement de carré intégrable. Nous verrons plus loin (j'espère) que l'on a dans certains cas avantage à définir $<M,N>$ sans supposer l'existence de $<M,M>$ et $<N,N>$.

PROCESSUS A VARIATION LOCALEMENT INTEGRABLE

11 DEFINITION. On dit qu'un processus A est un processus à variation localement intégrable s'il est à VF (adapté) et s'il existe des t.d'a. $T_n\uparrow\infty$ tels que $E[\int_{]0,T_n]}|dA_s|] < \infty$ pour tout n.

L'espace des processus à variation localement intégrable est noté $\underline{\underline{A}}_{loc}$ ($\underline{\underline{A}}$ était, rappelons le, l'espace des processus à variation intégrable).

Rien n'est exigé quant à l'intégrabilité de A_0.

Si l'on sait à l'avance que A est un processus à VF, on dira souvent " A est localement intégrable" pour " A est à variation localement intégrable".

12 THEOREME. a) Tout $A \in \underline{\underline{V}}$ prévisible, ou à sauts bornés, est localement intégrable.

b) Si $A \in \underline{\underline{V}}$ est localement intégrable, il existe un processus $\tilde{A} \in \underline{\underline{V}}$ prévisible unique tel que le processus $\overset{c}{A} = A - \tilde{A}$ soit une martingale locale nulle en 0. On dit que $\tilde{A}$ est le compensateur de A, $\overset{c}{A}$ le compensé de A.

c) Tout $A \in \underline{\underline{V}}$ qui est aussi une martingale locale est localement intégrable.

DEMONSTRATION. a) On se ramène aussitôt au cas où $A_0=0$. On vérifie comme au n°I.4 que si A est prévisible, le processus $\int_0^t |dA_s|$ est prévisible. Soit alors

$$S_k = \inf \{ t : \int_0^t |dA_s| \geq k \}$$

Comme A_0 est nul, S_k est partout >0, et il est prévisible (N9, p.9). Soit (S_{km}) une suite annonçant S_k. La variation de A sur $[[0,S_{km}]]$ est $\leq k$, donc intégrable, et pour obtenir une suite $T_n \uparrow \infty$ satisfaisant à la définition 12 il suffit de prendre $T_n = \sup_{k \leq n, m \leq n} S_{km}$.

Le cas des processus à sauts bornés est immédiat : prendre $T_n = S_n$. Démontrons maintenant c). On se ramène au cas où $A_0=0$. Soit $R_n \uparrow \infty$ une suite de t.d'a. réduisant fortement la martingale locale A. Soit $S_n = \inf \{ t : \int_0^t |dA_s| \geq n \}$, et soit $T_n = R_n \wedge S_n$. Il nous suffit de montrer que $E[\int_{[0,T_n]} |dA_s|] < \infty$. Comme $E[\int_{[0,T_n[} |dA_s|] \leq n$, il suffit de prouver que $E[|\Delta A_{T_n}|] < \infty$. Cela résulte de 8, T_n réduisant fortement A : A^{T_n} s'écrit U+V, $U \in \underline{\underline{M}}$, $V \in \underline{\underline{A}}$, de sorte que $\Delta U_{T_n} \in L^2$, $\Delta V_{T_n} \in L^1$.

Passons à b). On peut supposer que $A_0=0$. A étant localement intégrable, considérons des $T_n \uparrow +\infty$ tels que $E[\int_0^{T_n} |dA_s|] < \infty$; les processus à VI A^{T_n} admettent des compensateurs B^n, et on vérifie aussitôt que si $n < m$ $B^n = (B^m)^{T_n}$, de sorte qu'il existe un processus B tel que $B^n = B^{T_n}$ pour tout n. Il n'y a aucune difficulté à vérifier que B est prévisible, que B est un processus à variation loc. intégrable, et que A-B est une martingale locale (réduite par les T_n). L'unicité résulte du lemme plus précis suivant :

13 LEMME. Toute martingale locale prévisible M est continue. Toute martingale locale prévisible à VF est constante (et donc nulle si $M_0=0$).

DEMONSTRATION. Par arrêt à un t.d'a. réduisant fortement M, on se ramène au cas où M est une martingale uniformément intégrable. Pour tout temps d'arrêt prévisible S on a alors $\Delta M_S = M_S - M_{S-} = M_S - E[M_S | \underline{\underline{F}}_{S-}]$ (utiliser une suite annonçant S). Or M_S est $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable puisque M est prévisible (N10, p.9), donc $\Delta M_S=0$. M étant prévisible, on en déduit que M est continue (N11, p.9, par exemple). Si M est VF, $\int_0^t |dM_s|$ est continue, et par arrêt on peut supposer que M est VI. Mais alors M, prévisible et ayant un potentiel droit nul, est constante (I.15).

14 NOTATIONS . On notera $\underline{\underline{W}}_{loc}$ l'espace des martingales locales à VF (donc à variation localement intégrable : cf. $\underline{\underline{W}}$, espace des martingales VI).

Pour tout **couple** de martingales locales M,N tel que [M,N] soit loc. intégrable, on notera $\langle M,N\rangle$ la compensatrice prévisible de [M,N].

SEMIMARTINGALES

Nous pouvons maintenant donner la vraie définition des semimartingales (cf. III.1 pour la définition provisoire). Nous en donnons plus loin une forme plus facile à vérifier (n°33).

15 DEFINITION. Un processus adapté X est une semimartingale s'il admet une décomposition de la forme

(15.1) $$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où M est une martingale locale **nulle** en 0, A un processus VF nul en 0.

On n'impose à A aucune restriction d'intégrabilité. La décomposition n'est, bien entendu, pas unique.

EXEMPLE. Soit X un processus à accroissements indépendants (non homogène) à trajectoires continues à droite. Il est bien connu que les trajectoires de X sont alors càdlàg (cf. [3]). Soit Z_t la somme des sauts de X d'amplitude ≥ 1 entre 0 et t ; c'est un processus à VF. Il est bien connu que Y=X-Z est un processus à accroissements indépendants, admettant des moments de tous les ordres, de sorte que le processus $Y_t - E[Y_t]$ est une martingale. Ainsi, X est une semimartingale si et seulement si la fonction $t \mapsto E[Y_t]$ est à variation bornée.

16 Considérons deux décompositions du type (15.1)

$$X = X_0 + M + A = X_0 + \overline{M} + \overline{A}$$

alors $M - \overline{M} = \overline{A} - A$ appartient à $\underline{\underline{L}}_0 \cap \underline{\underline{V}}_0$, d'après 12 c) c'est un processus à variation localement intégrable. En tant que martingale locale elle est sans partie continue d'après II.15[1] donc $M^c = \overline{M}^c$. Nous poserons $M^c = X^c$, et nous l'appellerons la partie martingale continue de X (on devrait ajouter "locale", mais c'est trop lourd). On pose aussi

(16.1) $$[X,X]_t = \langle X^c, X^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t} \Delta X_s^2 \quad (2)$$

1. C'est trop rapide. Voir p.75. 2. Voir aussi p.75 , et le chap.VI,n°4.

INTEGRALES STOCHASTIQUES

Notre but est d'arriver maintenant à la formule du changement de variables pour les semimartingales. A cette fin, nous définissons une notion très simple d'intégrale stochastique, d'abord par rapport aux martingales locales, puis par rapport aux semimartingales.

17 DEFINITION. Un processus optionnel (H_t) est dit localement borné s'il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ et des constantes K_n tels que

(17.1) $$|H_t| I_{\{0<t\leqq T_n\}} \leqq K_n$$

(Quant à H_0, on exige simplement qu'il soit fini).

18 THEOREME. a) Soit M une martingale locale, et soit H un processus prévisible localement borné. Il existe alors une martingale locale $H{\bullet}M$ et une seule telle que l'on ait, pour toute martingale bornée N

(18.1) $$[H{\bullet}M,N] = H{\bullet}[M,N]$$

(au second membre, il s'agit d'une intégrale de Stieltjes ordinaire).

b) On a $(H{\bullet}M)_0 = H_0M_0$, $(H{\bullet}M)^c = H{\bullet}M^c$, et les processus $\Delta(H{\bullet}M)_s$ et $H_s\Delta M_s$ sont indistinguables.

c) Si M appartient à $\underline{\underline{W}}_{loc}$, $H{\bullet}M$ se calcule comme une intégrale de Stieltjes sur les trajectoires.

DEMONSTRATION. a) Nous supposerons que $M_0=0$, en laissant au lecteur le soin de passer au cas général, ce qui est immédiat. Nous pouvons alors supposer également que $H_0=0$. Il existe alors des temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$, à la fois réduisant fortement M et tels que H^{T_n} soit un processus borné. On sait alors décomposer la martingale $M^n=M^{T_n}$ en U^n+V^n , où U^n appartient à $\underline{\underline{M}}_0$, V^n à $\underline{\underline{A}}_0$, et U^n,V^n sont arrêtées à T_n. On peut alors définir (III.2, b)) l'intégrale stochastique $H{\bullet}M^n = H{\bullet}U^n+H{\bullet}V^n$, qui est une martingale uniformément intégrable. Si $n<p$, on a par arrêt (l'arrêt étant une opération d'intégrale stochastique, si l'on veut !)

$$H{\bullet}M^n = (H{\bullet}M^p)^{T_n} \quad \text{du fait que } M^n=(M^p)^{T_n}$$

Il en résulte qu'il existe un processus $H{\bullet}M$ tel que pour tout n $H{\bullet}M^n = (H{\bullet}M)^{T_n}$. Il est clair que $H{\bullet}M$ est une martingale locale, et que l'on a (par recollement)

$$\Delta(H{\bullet}M)_t = H_t\Delta M_t$$

Il résulte aussi de la définition de M^c (9), et de II.26 que l'on a $H{\bullet}M^c = (H{\bullet}M)^c$. Il en résulte que l'on a , par addition

$$[H\bullet M,N]_t = [H\bullet M^c,N^c]_t + \Sigma_{s\leq t} H_s \Delta M_s \Delta N_s = (H\bullet[M,N])_t$$

pour toute martingale bornée N. Enfin, si M appartient à $\underline{\underline{W}}_{loc}$, on peut choisir les T_n de telle sorte que les martingales M^n appartiennent à $\underline{\underline{W}}$, les intégrales $H\bullet M^n$ sont alors des intégrales ordinaires (II.30), d'où c).

S'il existait deux martingales $H\bullet M$ et $H\bar{\bullet}M$ satisfaisant à (18.1), leur différence L serait une martingale locale telle que $[L,N]=0$ pour toute martingale bornée N. Nous allons montrer que cela entraîne $L=0$. Même mieux :

19 THEOREME. <u>Soit</u> L <u>une martingale locale</u>.
a) <u>Le processus</u> $[L,N]\in\underline{\underline{V}}$ <u>est localement intégrable pour toute martingale bornée</u> N. <u>Plus précisément, si</u> T <u>réduit fortement</u> L, $\int_{0+}^{T}|d[L,N]_s|$ <u>est intégrable</u>.
b) <u>S'il existe des</u> $T_n\uparrow\infty$ <u>réduisant fortement</u> L <u>tels que</u> $E[[L,N]_{T_n}]=0$ <u>pour toute martingale bornée</u> N, <u>on a</u> $L=0$.

DEMONSTRATION. Nous supposerons que $L_0=0$. Ecrivons que $L^T=U+V$, $U\in\underline{\underline{M}}_0$, $V\in\underline{\underline{W}}_0$. D'après l'inégalité KW2 (II.21), comme U et N appartiennent à $\underline{\underline{M}}$ nous avons $E[\int|d[U,N]_s|]<\infty$ et $E[\int d[U,N]_s]=E[U_\infty N_\infty]$ d'après la définition de $[U,N]$ par polarisation (et II.18). De même, V n'a pas de partie continue, de sorte que $[V,N]_t=\Sigma_{s\leq t}\Delta V_s\Delta N_s$. Comme N est bornée, V à variation intégrable, $\int|d[V,N]_s|$ est intégrable, et $E[\int d[V,N]_s]=E[V_\infty N_\infty]$ d'après I.9. Finalement, la relation $E[[L,N]_T]=0$ s'écrit $E[L_T N_\infty]=0$. Comme N_∞ est une v.a. bornée arbitraire, cela entraîne $L_T=0$, puis (comme L^T est une martingale uniformément intégrable) que $L^T=0$. D'où b). Le lecteur étendra cela au cas où $L_0\neq 0$.

REMARQUE. a) permet de définir $\langle M,N\rangle$ si M est une martingale locale, et N une martingale locale <u>localement bornée</u>, **comme compensatrice de [M,N].**

Nous définissons maintenant l'intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné par rapport à une semimartingale.

20 THEOREME. <u>Soient</u> $X=X_0+M+A$ <u>une semimartingale</u> ($M\in\underline{\underline{L}}_0$, $A\in\underline{\underline{V}}_0$) <u>et</u> H <u>un processus prévisible localement borné</u>. <u>Le processus</u>

(20.1) $\qquad H\bullet X = H_0X_0 + H\bullet M + H\bullet A$

<u>ne dépend pas de la décomposition choisie</u>. $H\bullet X$ <u>est une semimartingale et l'on a</u> (<u>à des processus évanescents près</u>)

(20.2) $\qquad H\bullet X^c = (H\bullet X)^c \quad , \; H_t\Delta X_t = \Delta(H\bullet X)_t$

<u>et, si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>

(20.3) $\qquad H\bullet X^T = (H\bullet X)^T$.

DEMONSTRATION. Considérons deux décompositions

$$X=X_0+M+A = X_0+\bar{M}+\bar{A} \quad (M,\bar{M} \in \underline{\underline{L}}_0 \ , \ A,\bar{A}\in\underline{\underline{V}}_0)$$

Alors $M-\bar{M} = \bar{A}-A$ appartient à $\underline{\underline{L}}_0$ et à $\underline{\underline{V}}_0$ (est une martingale locale à VF), donc est à variation localement intégrable (12,c)). Mais alors l'intégrale $H\cdot(M-\bar{M})$ se calcule comme une intégrale de Stieltjes (18,c)), donc $H\cdot(M-\bar{M})=H\cdot(\bar{A}-A)$. Le reste est immédiat d'après 18.

LA FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLES (CAS GENERAL)

Comme au chapitre III, nous ne démontrerons que le cas des semimartingales réelles, mais nous énoncerons le théorème pour les semimartingales à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

21 THEOREME. Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont les n composantes X^i sont des semimartingales. Soit F une fonction deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$ (on ne suppose pas les dérivées partielles bornées). Alors le processus $F\circ X$ est une semimartingale et on a l'identité

$$(21.1) \quad F\circ X_t = F\circ X_0 + \Sigma_i \int_{]0,t]} D^iF\circ X_{s-}dX^i_s + \frac{1}{2}\Sigma_{i,j} \int_0^t D^iD^jF\circ X_{s-}d\langle X^{ic},X^{jc}\rangle_s$$
$$+ \Sigma_{0<s\leq t} (F\circ X_s-F\circ X_{s-}-\Sigma_i D^iF\circ X_{s-}\Delta X^i_s)$$

DEMONSTRATION (une dimension). Nous vérifions d'abord que le côté droit de (21.1) a un sens. Le processus $F'\circ X_s$ étant continu à droite et pourvu de limites à gauche, $(F'\circ X_{s-})$ est prévisible localement borné (arrêter à $S=\inf\{t : |F'\circ X_s|\geq n\}$). De même, $F''\circ X_{s-}$. Les deux intégrales au second membre ne posent donc pas de problème. Pour tout $\omega\in\Omega$, la trajectoire $X_\cdot(\omega)$ reste sur $[0,t]$ dans un intervalle compact $[-C(t,\omega),+C(t,\omega)]$, sur lequel la dérivée seconde de F reste bornée en valeur absolue par une constante $K(t,\omega)$. Nous avons alors si $s\leq t$

$$|F\circ X_s(\omega)-F\circ X_{s-}(\omega)-F'\circ X_{s-}(\omega)\Delta X_s(\omega)|\leq \frac{1}{2}K(t,\omega)\Delta X^2_s(\omega)$$

Dans la décomposition $X=X_0+M+A$ $(M\in\underline{\underline{L}}_0, A\in\underline{\underline{V}}_0)$, nous savons que $\Sigma_{s\leq t}\Delta M^2_s<\infty$ p.s., que $\Sigma_{s\leq t}\Delta A^2_s<\infty$ p.s.. Il en résulte que la série au second membre de (21.1) est p.s. absolument convergente.

Supposons maintenant qu'il existe un temps d'arrêt T possédant les propriétés suivantes : soit $X=X_0+M+A$, $M\in\underline{\underline{L}}_0$, $A\in\underline{\underline{V}}_0$, alors

T réduit fortement M, en particulier M est bornée sur $[[0,T[[$

$\int_{]0,T[}|dA_s|$ est bornée, X_0 est bornée sur $\{T>0\}$

M,A sont arrêtés à l'instant T .

Désignons alors par K une constante dominant $|X|$ sur $[[0,T[[$, par Y le processus

$$Y_t = X_t - \Delta X_T I_{\{t\geqq T\}} \quad \text{(en particulier } Y_t=0 \text{ sur } \{T=0\} \text{)}$$

et par G une fonction deux fois dérivable, à dérivées premières et secondes <u>bornées</u>, coincidant avec F sur l'intervalle $[-K,+K]$. Le processus Y s'écrit de la manière suivante (T réduisant fortement M, on peut poser $M=U+V$, $U\in\underline{\underline{M}}_0$, $V\in\underline{\underline{W}}_0$, U et V arrêtés à l'instant T)

$$Y_t = X_0 I_{\{T>0\}} + U_t + (V_t - \Delta V_T I_{\{t\geqq T\}} + A_t - \Delta A_T I_{\{t\geqq T\}} - \Delta U_T I_{\{t\geqq T\}})$$

qui montre que Y est une semimartingale au sens restreint (III.1) : U_t est de carré intégrable, et la dernière parenthèse est un processus à variation intégrable . Nous appliquons alors la formule du changement de variables du chap.III à Y et à G . Puis, comme F et G coincident sur l'intervalle $[-K,+K]$, où Y prend ses valeurs, nous remplaçons G par F. Ainsi, écrivant $Y=Y_0+M+B$, où $B_t=A_t-\Delta X_T I_{\{t\geqq T>0\}}$

$$F\circ Y_t = F\circ Y_0 + \int_0^t F'\circ Y_{s-}dM_s + \int_0^t F'\circ Y_{s-}dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''\circ Y_{s-}d\langle M^c,M^c\rangle_s + \Sigma_{s\leqq t}\cdots$$

Les processus X et Y coïncident sur l'intervalle $[[0,T[[$, donc X_- et Y_- sont égaux sur $[[0,T]]$ (pourvu que T soit >0). Comme M est arrêtée à l'instant T et nulle en 0, on a pour tout processus prévisible H

$$H\cdot M = H'\cdot M \text{ , où } H'_t = H_t I_{\{0<t\leqq T\}}$$

et par conséquent $\int_0^t F'\circ Y_{s-}dM_s = \int_0^t F'\circ X_{s-}dM_s$ pour tout t

De même, mais plus simplement, on a $\int_0^t F''\circ Y_{s-}d\langle M^c,M^c\rangle_s = \int_0^t F''\circ X_{s-}d\langle M^c,M^c\rangle_s$. D'autre part, B et A coincident sur l'intervalle $[[0,T[[$, et les propriétés de l'intervalle de Stieltjes ordinaire entraînent que

$$\int_0^t F'\circ Y_{s-}dB_s = \int_0^t F'\circ X_{s-}dA_s \text{ pour } t<T \text{ .}$$

Par conséquent, nous obtenons que $\overline{\underline{\text{pour } t<T}}$

$$F\circ X_t = F\circ X_0 + \int_0^t F'\circ X_{s-}dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''\circ X_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s + \Sigma_{0<s\leqq t}\cdots$$

Seulement, nous avons vérifié au n°III.6 que les deux membres de (21.1) ont les mêmes sauts : **ils sont** donc égaux, non seulement sur $[[0,T[[$, mais sur $[[0,T]]$ (sur $\{T=0\}$ tout est évident). Comme ils sont tous deux arrêtés à l'instant T, l'identité (21.1) est établie sur toute la droite, pour les semimartingales du type particulier considéré. Il faut bien remarquer que toutes les difficultés ont été résolues au chap.III : on n'a fait ici que de petits déplacements de processus croissants du côté des martingales à celui des processus VF, dans les décompositions.

Il reste à ramener le cas général au cas particulier qui vient d'être traité ici. Pour cela, nous choisissons des temps d'arrêt $R_n\uparrow+\infty$, réduisant fortement M. Nous posons aussi

$S_n = \inf \{ t : \int_0^t |dA_s| \geqq n \}$

$U_n = 0$ si $|X_0|>n$, $+\infty$ sinon

$T_n=R_n \wedge S_n \wedge U_n$

Les temps d'arrêt T_n croissent vers $+\infty$, et la semimartingale X^{T_n} satisfait aux hypothèses de la première partie de la démonstration. La formule du changement de variables est donc vraie pour X^{T_n}. Cela revient à dire qu'elle est vraie pour X si $t \leqq T_n$, d'où le théorème lorsque $n \to +\infty$.

Le corollaire suivant peut se démontrer directement (mais ce n'est pas très facile).

22 COROLLAIRE. Pour toute martingale locale M, le processus $M_t^2-[M,M]_t = 2\int_0^t M_{s-}dM_s$ est une martingale locale nulle en 0.

On a aussi la formule générale d'intégration par parties

23 COROLLAIRE. Pour tout couple X,Y de semimartingales , le produit XY est une semimartingale, et l'on a

(23.1) $d(XY)_t = X_{t-}dY_t + Y_{t-}dX_t + d[X,Y]_t$

ou plus explicitement

$$X_tY_t = \int_{]0,t]} X_{s-}dY_s + \int_{]0,t]} Y_{s-}dX_s + [X,Y]_t$$

et, si X est un processus à variation finie

(23.2) $d(XY)_t = X_{t-}dY_t + Y_t dX_t$. Voir aussi le n°38 .

(En effet, si X est à VF $<X^c,Y^c>=0$, $[X,Y]_t=\Sigma_{s\leqq t}\Delta X_s \Delta Y_s$, et $d[X,Y]_t= \Delta Y_t.dX_t$, de sorte que $Y_{t-}dX_t+d[X,Y]_t=Y_tdX_t$).

L'EXPONENTIELLE D'UNE SEMIMARTINGALE

Nous illustrons l'emploi du changement de variables en résolvant, dans l'ensemble des semimartingales, l'"équation différentielle" $\frac{dZ}{Z_-} = X$. La théorie est due à C. DOLEANS-DADE, avec ici quelques allègements dus à Chantha YOEURP. Voir aussi le n°36 ci-dessous.

24 Nous commençons par rappeler quelques résultats élémentaires sur les fonctions à variation bornée sur $\mathbb{R}$. Dans les quelques formules qui suivent, a(t), b(t)... sont des fonctions à variation bornée, continues à droite, pouvant présenter un saut en 0 : on convient que a(0-)=0, a(t)= 0 pour t<0, de sorte que la masse en 0 est a(0). On a la formule (23.2) d'intégration par parties

(24.1) $a(t)b(t)=\int_{[0,t]}a(s-)db(s) + \int_{[0,t]}b(s)da(s)$

et la formule du changement de variables (l'hypothèse que F est deux fois différentiable est ici trop forte, du moins pour la seconde formule

(24.2) $F(a(t))=F(0)+\int_{[0,t]}F'(a(s-))da(s)+$
$$+\Sigma_{0\leqq s\leqq t}F(a(s))-F(a(s-))-F'(a(s-))\Delta a(s)$$
$$=\int_0^t F'(a(s))da^c(s)+\Sigma_{0\leqq s\leqq t}F(a(s))-F(a(s-))$$

où a^c est la partie continue de la fonction à variation bornée a. Comme application de (24.1) ou (24.2), nous notons que si a est une fonction croissante

(24.3) $$d(a(t))^n \geqq na(t)^{n-1}da(t)$$

et nous en déduisons le lemme suivant

LEMME. Soit a(t) une fonction à variation bornée. Il existe au plus une solution de l'équation

(24.4) $$z(t)-z(0-)=\int_{[0,t]}z(s-)da(s)$$

localement bornée sur $[0,\infty[$.

DEMONSTRATION. Considérant la différence de deux solutions, nous nous ramenons à prouver que 0 est la seule solution de (24.4) telle que $z(0-)=0$. Sous cette condition, la masse de a en 0 n'intervient pas, et nous pouvons supposer que $a(0-)=0$. Soit $b(t)=\int_0^t|da(s)|$, et soit $K=\sup_{s\leqq t}|z(s)|$. Nous avons successivement si $0\leqq r\leqq t$

$$|z(r)|=|\int_0^r z(s-)da(s)|\leqq\int_0^r|z(s-)|db(s)\leqq Kb(r)$$
$$|z(r)|\leqq\int_0^r|z(s-)|db(s)\leqq K\int_0^r b(r-)db(r)\leqq K\frac{b^2(r)}{2}$$
$$|z(r)|\leqq\int_0^r|z(s-)|db(s)\leqq\frac{K}{2}\int_0^r b^2(r-)db(r)\leqq K\frac{b^3(r)}{3!}$$

etc (on utilise à chaque fois (24.3)). Pour finir, comme $b^n(t)/n!$ tend vers 0, on a que z est nulle.

Ces lemmes étant établis, nous prouvons :

25 THEOREME. Soit X une semimartingale. Il existe une semimartingale Z et une seule telle que

(25.1) $$Z_t=Z_{0-}+\int_{[0,t]}Z_{s-}dX_s \quad \text{pour } t\geqq 0 \qquad (X_{0-}=0 \text{ par convention})$$

Elle est donnée par la formule

(25.2) $$Z_t=Z_{0-}\exp(X_t-\tfrac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t)\prod_{0\leqq s\leqq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\quad(t\geqq 0)$$

où le produit infini est p.s. absolument convergent.

NOTATION. On écrit $Z=Z_{0-}\mathcal{E}(X)$. Le cas le plus familier est celui où $X_0=0$, $Z_{0-}=Z_0$; l'équation s'écrit alors $Z_t=Z_0+\int_0^t Z_{s-}dX_s$.

DEMONSTRATION. 1)Nous allons d'abord prouver que le processus (Z_t) défini par (25.2) existe, est une semimartingale, et satisfait à (25.1). A cet effet, nous commençons par l'existence, qui se ramène évidemment à celle du produit infini. Nous prendrons $Z_{0-}=1$ pour simplifier.

LEMME. <u>Le produit infini est p.s. absolument convergent, et le processus</u>

(25.3) $$V_t = \prod_{s\leq t} (1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \qquad (V_{0-}=1)$$

<u>est à variation finie, purement discontinu</u>.

DEMONSTRATION. Le produit d'un nombre fini de fonctions à variation finie purement discontinues est encore du même type (formule d'intégration par parties). Nous écartons alors les sauts tels que $|\Delta X_s| \geq 1/2$, qui sont en nombre fini sur tout intervalle fini, et nous sommes ramenés à démontrer le même résultat pour

$$V'_t = \prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s I_{\{|\Delta X_s|<1/2\}})e^{-\Delta X_s I_{\{\ \}}}$$

Mais nous avons alors $\log V'_t = \Sigma_{s\leq t} (\log(1+\Delta X_s I_{\{\}})-\Delta X_s I_{\{\}})$, série absolument convergente puisque $\Sigma_{s\leq t} \Delta X_s^2$ converge, et $\log V'_t$ est un processus à variation finie purement discontinu. Il en est alors de même, d'après (24.2), de $V'_t= e^{\log V'_t}$.

2) Posons $K_t=X_t-\frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t$, et soit $F(x,y)=e^x y$; on a $Z_t=F(K_t,V_t)$, de sorte que Z est une semimartingale. Appliquons la formule du changement de variables

$$Z_t-Z_{0-} = \underbrace{\int_{[0}^{t]} Z_{s-}dK_s}_{I_1} + \underbrace{\int_{[0}^{t]} e^{K_{s-}}\, dV_s}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c,K^c\rangle_s}_{I_3}$$
$$+ \underbrace{\Sigma_{0\leq s\leq t} (Z_s-Z_{s-}-Z_{s-}\Delta K_s -e^{K_{s-}}\Delta V_s)}_{I_4}{}^{(*)}$$

Dans I_1 , nous remplaçons dK_s par $dX_s - \frac{1}{2}d\langle X^c,X^c\rangle_s$, et dans I_3 nous remplaçons K^c par X^c. Il y a une simplification et il reste simplement

$$\int_{[0}^{t]} Z_{s-}dX_s \quad .$$

Dans I_2 , nous utilisons le lemme, pour dire que V étant à V.F. purement discontinu, I_2 vaut $\Sigma_{0\leq s\leq t} e^{K_{s-}}\Delta V_s$.

Dans I_4 , nous remarquons que $Z_s=Z_{s-}(1+\Delta X_s)$, $Z_{s-}\Delta K_s = Z_{s-}\Delta X_s$, et il y a simplification avec I_2.

(*) La formule est légèrement différente de la formule usuelle en raison du $Z(0-)$ au premier membre.

3) Pour établir l'unicité, nous désignons par $\bar{Z}_t$ une solution de (25.1) telle que $\bar{Z}_{0-}=1$, nous posons $\bar{V}_t = e^{-K_t}\bar{Z}_t$, de sorte que (avec la même fonction F que ci-dessus) $\bar{V}_t = F(-K_t,\bar{Z}_t)$, et nous appliquons la formule du changement de variables. Nous avons $\bar{V}_{0-}=1$ et

$$\begin{aligned}\bar{V}_t-\bar{V}_{0-} &= \int_{[0}^{t]} -\bar{V}_{s-}dK_s + \int_{[0}^{t]} e^{-K_{s-}}d\bar{Z}_s + \frac{1}{2}\int_0^t \bar{V}_s d\langle K^c,K^c\rangle_s \\ &\quad -\int_0^t e^{-K_s}d\langle K^c,\bar{Z}^c\rangle + \Sigma_0^t(\bar{V}_s-\bar{V}_{s-}+\bar{V}_{s-}\Delta K_s-e^{-K_{s-}}\Delta\bar{Z}_s) \\ &= I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\end{aligned}$$

Maintenant, nous écrivons que $d\bar{Z}_s = \bar{Z}_{s-}dX_s$, $dK_s=dX_s-\frac{1}{2}d\langle X^c,X^c\rangle_s$, $K^c=X^c$. Aussi $d\langle K^c,\bar{Z}^c\rangle_s = d\langle X^c,\bar{Z}^c\rangle_s = \bar{Z}_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s$. La somme I_1+I_2 s'écrit $\int -\bar{V}_{s-}dK_s + \int e^{-K_{s-}}\bar{Z}_{s-}dX_s = \int -\bar{V}_{s-}dX_s + \frac{1}{2}\int \bar{V}_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s + \int \bar{V}_{s-}dX_s$. Deux termes disparaissent, et $I_1+I_2+I_3 = 2I_3$. D'autre part, $I_4 = -\int e^{-K_s}\bar{Z}_{s-}d\langle X^c,X^c\rangle_s = -\int \bar{V}_s d\langle X^c,X^c\rangle_s = -2I_3$. Reste donc seulement I_5 . Nous avons $\Delta\bar{Z}_s = \bar{Z}_{s-}\Delta X_s$, $\Delta K_s = \Delta X_s$, donc il reste seulement

$$\bar{V}_t-\bar{V}_{0-} = \Sigma_{0\leqq s\leqq t}\, \Delta\bar{V}_s$$

série absolument convergente (ce qui exprime que $\bar{V}$ est un processus à V.F. purement discontinu). Nous avons $\bar{V}_s = e^{-K_s}\bar{Z}_s$, donc $\bar{V}_s = e^{-K_{s-}}.e^{-\Delta X_s}\bar{Z}_{s-}(1+\Delta X_s) = \bar{V}_{s-}e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s)$, enfin $\Delta\bar{V}_s = \bar{V}_{s-}((1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}-1)$. Introduisons le processus à V.F. purement discontinu

$$A_t = \Sigma_{0\leqq s\leqq t}(e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s)-1)$$

(la série étant absolument convergente p.s.), nous avons alors que

$$\bar{V}_t-\bar{V}_{0-} = \int_{[0}^{t]} \bar{V}_{s-}dA_s \qquad \bar{V}_{0-} =1$$

d'après le lemme 24 cela caractérise uniquement $\bar{V}$, et donc $\bar{Z}=\bar{V}e^K$ est aussi unique.

La propriété fondamentale d'une exponentielle est évidemment sa multiplicativité : celle-ci n'a pas toujours lieu, mais[1]

26 THEOREME. Si X et Y sont des semimartingales et $[X,Y]=0$, alors $\mathcal{E}(X+Y)=\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$.

En effet, $[X,Y]=0$ veut dire que X et Y n'ont pas de sauts communs, et que $\langle X^c,Y^c\rangle=0$, i.e. $\langle (X+Y)^c,(X+Y)^c\rangle = \langle X^c,X^c\rangle+\langle Y^c+Y^c\rangle$.

1. YOR vient de découvrir la jolie formule $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)=\mathcal{E}(X+Y+[X,Y])$.

L'essentiel du chapitre est dit. Il reste à présent diverses questions à traiter, dont les liens sont assez lâches. Nous allons d'abord énoncer un théorème assez simple et frappant sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles. Puis définir une sous-classe importante de la classe des semimartingales, celle des <u>semimartingales spéciales</u>, dont nous donnerons diverses applications. Ensuite, nous définirons une autre exponentielle, qui apparaît en liaison avec les problèmes de décomposition multiplicative des surmartingales positives. Enfin, nous donnerons en appendice divers résultats qui sont tous plus ou moins liés à la théorie - jusqu'à présent peu développée - des intégrales stochastiques multiples.

Il n'est pas recommandé de lire cela à la suite. Il pourrait être raisonnable, par exemple, de lire la définition des semimartingales spéciales (31-32) et de passer au chapitre V.

CARACTERE LOCAL DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Dans le cas discret, tout processus (X_n) est à VF, et l'intégrale stochastique d'un processus prévisible (H_n) (H_0 $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, H_n $\underline{\underline{F}}_{n-1}$-mesurable pour $n\geq 1$) est le processus

$$(H\cdot X)_n = H_0X_0+H_1(X_1-X_0)+\ldots+H_n(X_n-X_{n-1})$$

Si l'on connaît les trajectoires $X_{\bullet}(\omega)$, $H_{\bullet}(\omega)$, on sait donc calculer la trajectoire $(H\cdot X)_{\bullet}(\omega)$. Il n'est pas évident que l'on puisse démontrer une propriété analogue dans le cas continu. Il en est pourtant ainsi :

27 THEOREME. <u>Soient</u> X <u>et</u> $\overline{X}$ <u>deux semimartingales</u>, H <u>et</u> $\overline{H}$ <u>deux processus prévisibles localement bornés</u>, I <u>et</u> $\overline{I}$ <u>les processus</u> $H\cdot X$ <u>et</u> $\overline{H}\cdot\overline{X}$. <u>Alors</u>

(27.1) <u>Sur l'ensemble</u> $C=\{\omega : H_{\bullet}(\omega)=\overline{H}_{\bullet}(\omega),\ X_{\bullet}(\omega)=\overline{X}_{\bullet}(\omega)\}$ <u>on a p.s.</u> $I_{\bullet}(\omega)=\overline{I}_{\bullet}(\omega)$.

DEMONSTRATION. Il suffit de traiter séparément les cas où $X=\overline{X}$, et où $H=\overline{H}$.

1) Supposons $H=\overline{H}$, et montrons que $H\cdot X$ et $H\cdot\overline{X}$ sont indistinguables sur l'ensemble $C=\{X_{\bullet}=\overline{X}_{\bullet}\}$. On peut se borner au cas où $H_0=0$.

Nous pouvons d'abord restreindre l'espace à $\{X_0=\overline{X}_0\}$, puis nous ramener au cas où $X_0=\overline{X}_0=0$. Nous décomposons $X=M+A$, $\overline{X}= \overline{M} + \overline{A}$ ($M,\overline{M}\in\underline{\underline{L}}_0$, $A,\overline{A}\in\underline{\underline{V}}_0$, et il s'agit de savoir si $H\cdot(M-\overline{M})=H\cdot(\overline{A}-A)$ sur l'ensemble $C = \{M-\overline{M}=\overline{A}-A\}$. Notons N la martingale locale $M-\overline{M}$, B le processus à VF $\overline{A}-A$, de sorte que $C=\{N_{\bullet}=B_{\bullet}\}$. Soit T un temps d'arrêt réduisant fortement N; il nous suffit de démontrer que $H\cdot N^T=H\cdot B^T$ sur C. Quitte à diminuer T, on peut supposer aussi que H - qui est localement borné par hypothèse- est borné sur $[[0,T]]$. Comme on a $I_{]]T,\infty[[}\cdot N^T = I_{]]T,\infty[[}\cdot B^T = 0$, on peut remplacer H par $HI_{[[0,T]]}$, et on peut donc supposer H borné partout. D'autre part, N^T peut s'écrire U+V ($U\in\underline{\underline{M}}_0, V\in\underline{\underline{W}}_0$), et il suffit de montrer que $H\cdot U = H\cdot(B-V)$ sur C. On utilise pour cela un raisonnement par classes monotones à partir des processus prévisibles élémentaires, pour lesquels la propriété est évidente.

2) Supposons $X=\bar{X}$, et montrons que $H\cdot X$ et $\bar{H}\cdot X$ sont indistinguables sur l'ensemble $C=\{H_\cdot=\bar{H}_\cdot\}$.

La propriété est évidente pour les éléments de $\underline{\underline{V}}$. On se ramène donc au cas où X est une martingale locale, que l'on peut supposer nulle en 0. Soit T un temps d'arrêt réduisant fortement X : il suffit de montrer que $H\cdot X^T=\bar{H}\cdot X^T$ sur C . Décomposant X^T en U+V ($U\in\underline{\underline{M}}_0$, $V\in\underline{\underline{W}}_0$) on se ramène à l'égalité $H\cdot U=\bar{H}\cdot U$. On peut aussi supposer H et $\bar{H}$ bornés comme ci-dessus. Finalement, posant $K=H-\bar{H}$, on est ramené à prouver que

<u>si</u> $U\in\underline{\underline{M}}_0$, <u>si</u> K <u>est prévisible borné</u>, $L=K\cdot U$ <u>est nulle sur</u> $\{\omega : K_\cdot(\omega)=0\}$

ou encore, si l'on se rappelle que $\langle L,L\rangle=K^2\cdot\langle U,U\rangle$, que $L\in\underline{\underline{M}}_0$ <u>est nulle sur l'ensemble</u> $J=\{\langle L,L\rangle_\infty=0\}$.

Soit $T_n = \inf\{t : \langle L,L\rangle_t \geqq \frac{1}{n}\}$. Ces temps d'arrêt décroissent vers $T_\infty = \inf\{t : \langle L,L\rangle_t>0\}$, ils sont >0 partout, égaux à $+\infty$ sur J . D'autre part, T_n est prévisible en tant que début d'un ensemble prévisible fermé à droite (N9, p.9). Par conséquent on a ($L_s^2-\langle L,L\rangle_s$ étant une martingale uniformément intégrable nulle en 0)

$$E[L^2_{T_n-}] = E[\langle L,L\rangle_{T_n-}] \leqq 1/n$$

puis pour tout t

$$(L_t^2-\langle L,L\rangle_t)I_{\{t<T_n\}} = E[(L^2_{T_n-}-\langle L,L\rangle_{T_n-})|\underline{\underline{F}}_t]I_{\{t<T_n\}}$$

d'où $$E[L_t^2 I_{\{t<T_n\}}] \leqq \frac{2}{n}$$

et finalement $E[L_t^2 I_{\{t<T_\infty\}}]=0$, donc L_t est nulle sur $[[0,T_\infty[[$ - en particulier, $L_\cdot$ est nulle sur J.

28 Voici un raffinement du théorème 27, partie 1. Soient X et $\bar{X}$ deux semimartingales, H un processus prévisible localement borné, T un temps d'arrêt, et C l'ensemble

$$\{\omega : X_t(\omega) = \bar{X}_t(\omega) \text{ pour } 0\leqq t<T(\omega)\}$$

alors on a p.s. sur C $(H\cdot X)_t(\omega) = (H\cdot\bar{X})_t(\omega)$ pour tout $t<T(\omega)$. Si l'on avait mis $0\leqq t\leqq T(\omega)$ dans la définition de C, le résultat se réduirait à 27 appliqué à X^T et $\bar{X}^T$, mais ici il faut faire plus attention.

Soit $Y=XI_{[[0,T[[}$, $\bar{Y}=\bar{X}I_{[[0,T[[}$; nous pouvons alors écrire $X^T=Y+V$, $\bar{X}^T=\bar{Y}+\bar{V}$, où V et $\bar{V}$ sont nuls avant T, constants après T, et sont à VF. D'après 27, nous avons $H\cdot Y_{\bullet}=H\cdot\bar{Y}_{\bullet}$ sur C. D'autre part, $H\cdot V$ et $H\cdot\bar{V}$ sont des intégrales de Stieltjes, donc nulles sur $[[0,T[[$ où V et $\bar{V}$ sont nuls. Par différence on voit que $(H\cdot X^T)_t(\omega),(H\cdot\bar{X}^T)_t(\omega)$ sont égales pour $\omega\in C$, $t<T(\omega)$, et on conclut en remarquant que $H\cdot X^T=(H\cdot X)^T$, $H\cdot\bar{X}^T=(H\cdot\bar{X})^T$.

On a un raffinement analogue pour la partie 2. Soient X une semimartingale, H et $\bar{H}$ deux processus prévisibles localement bornés, T un temps d'arrêt, et C l'ensemble

$$\{\ \omega\ :\ H_t(\omega)=\bar{H}_t(\omega)\ \text{pour}\ 0\leqq t<T(\omega)\ \}$$

alors on a p.s. sur C $(H\cdot X)_t(\omega)=(\bar{H}\cdot X)_t(\omega)$ pour tout $t<T(\omega)$. Ici encore, on peut se ramener par arrêt au cas où H et $\bar{H}$ sont bornés, supposer que $H_0=0$. Puis se ramener au cas où X est une martingale locale, puis par arrêt à un t.d'a. réduisant fortement X, au cas où $X=U\in\underline{\underline{M}}_0$. Finalement, en posant $K=H-\bar{H}$, $L=K\cdot U$ comme dans la démonstration de 27, à montrer que <u>si</u> $\langle L,L\rangle_t(\omega)=0$ <u>pour</u> $t<T(\omega)$, <u>alors</u> $L_t(\omega)=0$ <u>pour</u> $t<T(\omega)$ $(L\in\underline{\underline{M}}_0)$. Or nous avons vu dans la démonstration de 27 que L est nulle sur $[[0,T_\infty[[$, et la relation $\langle L,L\rangle_t(\omega)=0$ pour $t<T(\omega)$ entraîne $T(\omega)\leqq T_\infty(\omega)$.

29 Les raisonnements précédents entraînent une autre conséquence intéressante. Soit X une semimartingale, et soit H un processus prévisible localement borné. Soit C l'ensemble des ω tels que $X_{\bullet}(\omega)$ soit une fonction à variation finie - comme la variation peut se calculer avec des subdivisions finies appartenant aux rationnels, C est mesurable. Alors

<u>Pour presque tout</u> $\omega\in C$, <u>la trajectoire</u> $(H\cdot X)_{\bullet}(\omega)$ <u>est donnée par l'intégrale de Stieltjes</u> $\int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega)$.

Cela "localise" le théorème 18, c). Pour voir cela, on se ramène aussitôt par décomposition de X au cas où X est une martingale locale nulle en 0 ; par arrêt, au cas où $H_0=0$, où H est borné ; par arrêt à un t.d'a. réduisant fortement X, au cas où X est de carré intégrable. Et alors, il ne reste plus qu'à utiliser un argument de classe monotone à partir du cas des processus prévisibles élémentaires, pour lesquels le résultat est évident - le passage à la limite reposant sur l'inégalité de DOOB.

SEMIMARTINGALES SPECIALES

30 Notre point de départ va être la remarque suivante, qui sera exploitée systématiquement au chapitre V.

Soit M une martingale locale nulle en 0, et soit T un temps d'arrêt réduisant fortement M. Alors (8) M^T peut s'écrire U+V, où U appartient à $\underline{\underline{M}}$, et V est à variation intégrable. Nous avons d'après l'inégalité KW2 étendue aux martingales locales (10)

$$([M,M]_T)^{1/2} = [M^T,M^T]_\infty^{1/2} \leqq [U,U]_\infty^{1/2} + [V,V]_\infty^{1/2}$$

Comme U est de carré intégrable, $[U,U]_\infty^{1/2}$ appartient à L^2 , donc à L^1. D'autre part, V est à variation intégrable, donc dépourvue de partie continue (II.15, III.2,...), donc $[V,V]_\infty^{1/2} = (\Sigma_s \Delta V_s^2)^{1/2} \leqq \Sigma_s |\Delta V_s| \in L^1$. Nous avons **prouvé**

(30.1) . Pour toute martingale locale M , le processus croissant $[M,M]_t^{1/2}$ est localement intégrable .

31 DEFINITION. Une semimartingale X est dite spéciale s'il existe une décomposition

(31.1) $$X_t = X_0+M_t+A_t \quad (M\in\underline{\underline{L}}_0 \ , \ A\in\underline{\underline{V}}_0 \ )$$

pour laquelle le processus A est à variation localement intégrable.

32 THEOREME. Les conditions suivantes sont équivalentes

a) X est spéciale.

b) Pour toute décomposition (31.1), A est à variation localement intégrable.

c) Il existe une décomposition (31.1) pour laquelle A est prévisible.

d) Le processus croissant $(\Sigma_{0<s\leqq t} \Delta X_s^2)^{1/2}$ est localement intégrable.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, la décomposition c) est unique : on l'appellera la décomposition canonique de la semimartingale spéciale X.

DEMONSTRATION. Nous procéderons suivant l'ordre c)=>a)=>d)=>b)=>c).

$\boxed{\text{c)=>a)}}$. C'est le n°12, a) : tout processus à variation finie prévisible est localement intégrable.

$\boxed{\text{a)=>d)}}$. On écrit que si $X=X_0+M+A$, $(\Sigma\Delta X_s^2)^{1/2} \leqq (\Sigma\Delta M_s^2)^{1/2} + (\Sigma\Delta A_s^2)^{1/2} \leqq [M,M]^{1/2} + \Sigma|\Delta A_s| \leqq [M,M]^{1/2} + \int|dA_s|$ est localement intégrable si A est localement intégrable((30.1)), donc si X est spéciale.

$\boxed{\text{d)=>b)}}$ .On a de même $(\Sigma\Delta A_s^2)^{1/2} \leqq (\Sigma\Delta X_s^2)^{1/2} + [M,M]^{1/2}$, donc si d) est satisfaite, le premier membre est un processus croissant localement intégrable. Soit $R_n = \inf\{t : \int_0^t |dA_s| \geqq n \}$; soient des $S_n \uparrow +\infty$ tels que

$E[(\Sigma_{s\leq S_n}\Delta A_s^2)^{1/2}]<\infty$. Alors si $T_n=R_n\wedge S_n$ on a $E[|\Delta A_{T_n}|]<\infty$, donc $E[\int_0^{T_n}|dA_s|] \leq n+E[|\Delta A_{T_n}|] < \infty$.

$\boxed{b)\Rightarrow c)}$. Soit $X=X_0+M+A$, où A est localement intégrable, et soit $\tilde{A}$ la compensatrice prévisible de A. Alors $X=X_0+(M+A-\tilde{A})+\tilde{A}$, la parenthèse est une martingale locale, et $\tilde{A}$ est prévisible.

Prouvons l'unicité de la décomposition canonique : soit $X=X_0+M+A=X_0+\bar{M}+\bar{A}$, où A et $\bar{A}$ sont prévisibles. Alors $A-\bar{A} = \bar{M}-M$. Posons $N=\bar{M}-M$, et appliquons le lemme 13 : une martingale locale à VF prévisible, nulle en 0, est nulle. D'où aussitôt la conclusion.

Nous allons utiliser d'abord la notion de semimartingale spéciale pour donner des semimartingales une définition équivalente, mais plus facile à vérifier. Voir aussi la note p.68.

33 THEOREME. Soit X un processus. Supposons qu'il existe des temps d'arrêt T_n tels que $\sup_n T_n = +\infty$, et que pour chaque n le processus arrêté X^{T_n} soit une semimartingale. Alors X est une semimartingale.

DEMONSTRATION. a) Supposons que X^S et X^T soient des semimartingales. Alors $X^{S\vee T}= X^S+I_{]\!]S\wedge T,T]\!]}\cdot X^T$ est une semimartingale (la notation des intégrales stochastiques recouvre ici quelque chose de bien trivial !)

b) Cela permet de se ramener au cas où la suite T_n tend vers $+\infty$ en croissant. Nous remarquons alors que le processus X a des trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche. Par conséquent, le processus

$$V_t = \Sigma_{0<s\leq t,|\Delta X_s|\geq 1} \Delta X_s$$

est à variation finie sur tout intervalle fini. Nous posons $Y=X-V$. Il nous suffit de montrer que Y est une semimartingale. Quitte à remplacer Y par $Y-X_0$, nous pouvons supposer que $Y_0=0$.

Pour tout n, le processus Y^{T_n} est une semimartingale à sauts bornés, donc spéciale (32,d) , donc admet une décomposition unique en

$$Y^{T_n} = M^n + A^n$$

où M^n est une martingale locale, nulle en 0, et A^n un processus à variation localement intégrable nul en 0, et prévisible. Mais alors l'unicité entraîne que les A^n se recollent bien en un processus prévisible A à variation loc. int. , les M^n se recollent en une martingale locale (4,e)) M, et alors $X=X_0+V+A+M$ est bien une semimartingale.

34 Le théorème précédent va nous servir à vérifier un résultat très intéressant, dû à N.KAZAMAKI : <u>la notion de semimartingale est préservée par les changements de temps</u>.

Nous appellerons <u>changement de temps</u> une famille $(R_t)_{t\geq 0}$ de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, telle que pour tout $\omega\in\Omega$ la fonction $R_\bullet(\omega)$ soit croissante et continue à droite. Nous supposerons de plus ici que chaque R_t est <u>fini</u> (hypothèse que l'on ne fait pas toujours, en théorie des processus de Markov, par exemple). La famille de tribus $\overline{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{F}}_{R_t}$ satisfait alors aux conditions habituelles ([D], III.T34, p.54). Si (X_t) est un processus adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$ et continu à droite, le processus transformé $\overline{X}_t=X_{R_t}$ est encore continu à droite, et adapté à la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ ([D], III.T20, p.50). Le changement de temps transforme donc les processus optionnels en processus optionnels, mais on ne peut rien dire en général sur les processus prévisibles. En particulier, si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ et si X est le processus $I_{[[T,\infty[[}$, on a $\overline{X} = I_{[[\overline{T},\infty[[}$, où $\overline{T}=\inf\{u : R_u\geq T\}$; $\overline{T}$ est donc un temps d'arrêt de $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

Il est clair que si (A_t) est un processus croissant, $(\overline{A}_t)=(A_{R_t})$ en est un aussi. Tout processus à VF étant différence de deux processus croissants, le résultat énoncé au début est équivalent au suivant : <u>pour toute martingale locale</u> M, <u>le processus transformé</u> $(\overline{M}_t)=(M_{R_t})$ <u>est une semimartingale</u>. D'après le théorème d'arrêt de DOOB, si M est une martingale uniformément intégrable, $\overline{M}$ est une martingale uniformément intégrable : on s'attend donc plutôt à ce que $\overline{M}$ soit une martingale locale, mais ce n'est pas toujours vrai(1).

Soit (T_n) une suite de t.d'a. réduisant M. Le processus $M^n_t=M_{t\wedge T_n}$ est une martingale uniformément intégrable, et le processus $\overline{M}^n_t$ obtenu par changement de temps à partir de M^n est donc une martingale de la famille $(\overline{F}_t)$. Seulement, les processus $\overline{M}^n$ ne sont pas nécessairement des processus arrêtés du processus $\overline{M}$ transformé de M, si le changement de temps "saute" par dessus la valeur T_n. On peut tout de même dire ceci : <u>introduisons les temps d'arr</u>êt $\overline{T}_n=\inf\{u : R_u\geq T_n\}$; les R_u étant finis, on

1. Les raisons en apparaîtront bien dans le cas discret. On montre facilement qu'un processus (X_n) adapté à $(\underline{\underline{F}}_n)$ est une martingale locale si et seulement si $|X_n|.P$ est σ-finie sur $\underline{\underline{F}}_{n-1}$ pour tout $n\geq 1$, et $E[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}]=X_{n-1}$. Il est facile avec ce critère de fabriquer un exemple où $|X_n|\cdot P$ n'est σ-finie sur $\underline{\underline{F}}_{n-2}$ pour aucun n. Mais alors le processus X_{2n} n'est pas une martingale locale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{2n})$, de sorte que le changement de temps $n\mapsto 2n$, vraiment le plus anodin, ne préserve pas les martingales locales.

a $\lim_n \overline{T}_n=+\infty$. D'autre part, la relation $t<\overline{T}_n$ entraîne $R_t<T_n$, donc $\overline{M}^n_t = M^n_{R_t} = M_{R_t \wedge T_n} = M_{R_t} = \overline{M}_t = \overline{M}_{t\wedge \overline{T}_n}$. Ainsi le processus transformé $\overline{M}$ possède la propriété suivante :

(34.1) <u>Il existe des t.d'a.</u> $\overline{T}_n \uparrow +\infty$ <u>et des martingales uniformément intégrables</u> $\overline{M}^n$ <u>tels que</u> $\overline{M}=\overline{M}^n$ <u>sur l'intervalle ouvert</u> $[[0,\overline{T}_n[[$.(*)

Compte tenu de 33, $\overline{M}$ est alors une semimartingale : en effet, sur l'intervalle fermé $[[0,\overline{T}_n]]$ $\overline{M}$ coincide avec un processus de la forme $\overline{M}^n+U^n$, où $U^n_t = (\overline{M}_{\overline{T}_n}-\overline{M}^n_{\overline{T}_n})I_{\{t\geq \overline{T}_n\}}$ est un processus à VF. Cela démontre ce que nous voulions.

KAZAMAKI a étudié dans [17] les processus satisfaisant à (34.1), sous le nom de "weak martingales" . Il a montré aussi que les changements de temps <u>continus</u> préservent les martingales locales et les processus prévisibles, donc les semimartingales spéciales.

35 Nous allons maintenant résoudre une autre "équation différentielle stochastique" ressemblant à celle du n°25. Soit X une <u>semimartingale spéciale</u>, que nous supposerons <u>nulle en</u> 0 pour simplifier, et dont nous désignerons par $X=M+A$ la décomposition canonique. Soient T_n des temps d'arrêt croissant vers $+\infty$, réduisant fortement la martingale locale M, et tels que $E[\int_0^{T_n}|dA_s|]<\infty$ pour tout n . Il est immédiat que le processus arrêté X^{T_n} est alors dominé par une v.a. intégrable, il admet donc une <u>projection prévisible</u>. Ces projections prévisibles se "recollent" bien en un processus prévisible, que nous appellerons la <u>projection prévisible de la semimartingale spéciale</u> X, et que nous noterons $\dot{X}$. Le calcul en est immédiat : on sait que la projection prévisible d'une martingale uniformément intégrable (M_t) telle que $M_0=0$ est égale à (M_{t-}), et cela passe aux martingales locales. Donc

(35.1) $$\dot{X}_t = M_{t-}+A_t = X_{t-}+\Delta A_t$$

Noter que c'est un processus localement borné, et nous pouvons nous proposer de résoudre l'équation différentielle stochastique $dZ_t=\dot{Z}_t dX_t$ dans l'ensemble des semimartingales spéciales. Le théorème suivant est dû à Ch.YOEURP (avec une démonstration simplifiée par K.A. YEN). J'en donne une démonstration complète, bien que le travail de YOEURP doive sans doute paraître dans le même volume du séminaire que ce cours.

(*). Cet argument permet d'améliorer 33 : si X coïncide sur chaque intervalle <u>ouvert</u> $[[0,T[[$ avec une semimartingale, X est une semimart[ale].

36 THEOREME. Soit $X=M+A$ la décomposition canonique d'une semimartingale spéciale nulle en 0. On suppose que le processus $1-\Delta A_t$ ne s'annule jamais. Il existe alors une semimartingale spéciale Z et une seule telle que

(36.1) $$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s dX_s$$

On la note $Z=\mathcal{E}^{\bullet}(X)$. Elle est égale à l'exponentielle ordinaire $\mathcal{E}(Y)$, où Y est la semimartingale spéciale nulle en 0

(36.2) $$Y_t = \int_0^t \frac{dX_s}{1-\Delta A_s}$$

intégrale stochastique qui a un sens, car le processus $1/1-\Delta A_t$ est prévisible et localement borné.

(On donnera au n°37 une expression explicite de $\mathcal{E}^{\bullet}(X)$).

DEMONSTRATION. Prouvons d'abord que $1/1-\Delta A_t$ est localement borné. Soit $H_n = \{ t : |1-\Delta A_t| \leqq 1/n+1 \}$; c'est un ensemble prévisible dont les coupes n'ont aucun point d'accumulation dans $\mathbb{R}_+$, car $(t,\omega)\in H_n \Rightarrow |\Delta A_t(\omega)| \geqq 1/2$. Les H_n décroissent, leur intersection est vide puisque $1-\Delta A_t$ ne s'annule jamais, leurs débuts T_n tendent donc vers $+\infty$. D'autre part, d'après la note N9 p.9, les T_n sont des temps d'arrêt prévisibles. En considérant des temps d'arrêt S_{nm} annonçant T_n, on voit que $1/1-\Delta A_t$ est localement borné, et cela entraîne la possibilité de définir Y (qui est évidemment spéciale).

Soit Z une solution - spéciale par hypothèse - de (36.1). Z admet la décomposition canonique (on rappelle que si Z est spéciale, $\dot{Z}$ est localement borné)

$$Z_t = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s dM_s + \int_0^t \dot{Z}_s dA_s = 1 + N_t + B_t$$

Alors ((35.1)) $\dot{Z}_t = Z_{t-} + \Delta B_t = Z_{t-} + \dot{Z}_t \Delta A_t$, donc $\dot{Z}_t = Z_{t-} / 1-\Delta A_t$, et (36.1) s'écrit

$$Z_t = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dX_s = 1 + \int_0^t Z_{s-} dY_s$$

d'où l'unique possibilité $Z=\mathcal{E}(Y)$.

Inversement, $Z=\mathcal{E}(Y)$ satisfait elle à (36.1) ? Comme Y est spéciale, $Z=1+Z_{-}\cdot Y$ est spéciale, et Z admet la décomposition canonique

$$Z_t = 1 + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dM_s + \int_0^t \frac{Z_{s-}}{1-\Delta A_s} dA_s = 1 + \overline{N}_t + \overline{B}_t \, .$$

Alors $\dot{Z}_t = Z_{t-} + \Delta\overline{B}_t$ ((35.1)) $= Z_{t-} + Z_{t-}\Delta A_t/1-\Delta A_t = Z_{t-}/1-\Delta A_t$, de sorte que

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dY_s = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s(1-\Delta A_s) dY_s = 1 + \int_0^t \dot{Z}_s dX_s$$

et Z satisfait à (36.1).

37 THEOREME. <u>Avec les notations du n°36, on a</u>

(37.1) $$Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t) \prod_{s\leq t} \frac{1+\Delta M_s}{1-\Delta A_s} e^{-\Delta X_s}$$

<u>où le produit infini est absolument convergent</u> (<u>ainsi</u> $\mathcal{E}^{\bullet}(X)=\mathcal{E}(M)/\mathcal{E}(-A)$)

DEMONSTRATION. Posons $H=\mathcal{E}(M)$, $K=\mathcal{E}(-A)$, $L=1/K$, $Z=HL$; il nous faut vérifier que $dZ=\dot{Z}dX$: cela entraînera que $Z=\mathcal{E}^{\bullet}(X)$, et compte tenu de l'expression explicite de l'exponentielle $\mathcal{E}$, le lecteur en déduira (37.1) sans aucune peine.

Nous commençons par remarquer que K et L sont des processus à VF, et que la relation KL=1, avec la formule usuelle d'intégration par parties (24.1), nous donne

$$0=d(KL) = K_-dL + LdK$$

mais par définition de l'exponentielle $\mathcal{E}$, $dK=-K_-dA$: nous en déduisons que L est solution de l'équation différentielle $dL/L = dA$, avec la condition initiale $L_0=1$.

Ensuite, nous utilisons le fait que L est un processus à VF <u>prévisible</u> (vérification facile sur la relation $K=\mathcal{E}(-A)$). Alors, la formule d'intégration par parties donnée ci-dessous au n°38 nous donne

$$dZ = H_-dL + LdH \quad \text{ou} \quad Z_t = 1 + \int_0^t L_s dH_s + \int_0^t H_{s-}dL_s$$

ce qui nous donne la décomposition canonique de Z. Rappelons que $\dot{Z}$ est la projection prévisible de Z=HL ; comme la projection prévisible de H est H_- , et L est prévisible localement borné, on a $\dot{Z}=H_-L$. Alors

$$\frac{dZ}{\dot{Z}} = \frac{dZ}{H_-L} = \frac{dL}{L} + \frac{dH}{H_-} = dA + dM = dX$$

la relation cherchée.

Voici la formule d'intégration par parties[1] dont nous avons eu besoin, sous une forme un peu plus générale. Ci dessus, X=L, Y=H

38 THEOREME. <u>Soient</u> X <u>un processus à VF prévisible</u>, Y <u>une semimartingale</u>. <u>Alors</u>

(38.1) $$d(XY) = XdY + Y_-dX$$

(lorsque X est à VF non prévisible, XdY n'a pas de sens, et on doit se contenter de (23.2) : $d(XY)=X_-dY+YdX$).

DEMONSTRATION. Nous décomposons $Y = Y_0+N+B$, où N appartient à $\underline{\underline{L}}_0$, B à $\underline{\underline{V}}_0$. La vérification pour Y_0 et B étant triviale ((24.1)), nous pouvons nous borner à regarder N. Par arrêt à un temps d'arrêt T qui réduit fortement N , nous pouvons supposer que N=U+V, où U est de carré intégrable, V à variation intégrable. L'intégrale stochastique par rapport à V étant une intégrale de Stieltjes, on retombe à nouveau sur la formule d'intégration par parties usuelle, et il suffit de regarder U.

1. Due à C. YOEURP.

Nous avons vu au n°I.3 que le processus croissant $J_t=\int_0^t |dX_s|$ est prévisible. D'après N9, p.9, le temps d'arrêt $T_n = \inf\{t: J_t \geq n\}$ est prévisible. Quitte à remplacer le processus VF (X_t) par $(X_{t\wedge T_{nm}})$, où la suite (T_{nm}) annonce T_n, on peut se ramener au cas où le processus VF (X_t) est tel que $\int_0^\infty |dX_s|$ soit une variable aléatoire bornée. Nous décomposons ensuite X comme au n°I.4, formule (4.1)

$$X_t = X_t^c + \Sigma_n \lambda_n I_{\{t\geq\tau_n\}} = X_t^c + \Sigma_n X_t^n$$

où X^c est à VF continu, où les λ_n sont des constantes telles que $\Sigma_n|\lambda_n| <\infty$, et les τ_n des temps d'arrêt prévisibles tels que $\tau_0=0$. L'intégrale stochastique $X\cdot U$ se décompose alors en $X^c\cdot U + \Sigma_n X^n\cdot U$, série convergente dans $\underline{\underline{M}}$, et il suffit de démontrer la formule pour X^c et les X^n. Pour X^c, elle se réduit à (23.2). Posons $X^n/\lambda_n = W = I_{\{t\geq S\}}$, où $S=\tau_n$ est prévisible. La formule à établir est

$$d(WU) = WdU + U_-dW$$

Comme nous avons aussi $d(WU)= W_-dU+U_-dW+d[W,U]$, tout revient à montrer que l'intégrale stochastique $(W-W_-)\cdot U$ est égale à $[W,U]$. Or

$$[W,U]_t = \Delta U_S I_{\{t\geq S\}} \quad ;$$

d'autre part, soit (S_k) une suite annonçant S ; $W-W_-$ est l'indicatrice du graphe $[[S]]$, donc la limite de $I_{[[0,S]]} - I_{[[0,S_k]]}$, donc

$$I_{[[S]]}\cdot U = \lim_k U^S-U^{S_k} = (U_S-U_{S-})I_{[\![S,\infty[\![} .$$

Le théorème est établi.

DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE DES SURMARTINGALES POSITIVES

Il est tout naturel de se demander si toute surmartingale positive X peut être représentée comme un <u>produit</u> d'une <u>martingale</u> positive et d'un processus <u>décroissant</u> positif. La solution de ce problème, dans le cas où la famille de tribus est quasi-continue à gauche, est due à ITO-WATANABE [11], et C.DOLEANS a montré comment, dans ce cas, la décomposition multiplicative peut se rattacher à l'exponentielle $\mathcal{E}$. Le cas général a été traité dans [18], mais cet article est si obscur que même son auteur ne peut le relire, et l'a cru faux. Nous allons nous borner ici au cas plus simple où (la famille de tribus étant quelconque), X <u>ne s'annule jamais</u> . Nous suivons une démonstration de YOEURP, et nous renvoyons au travail de YOEURP[1] pour le cas général où X peut s'annuler.

1. Dans ce volume.

39 THEOREME. <u>Soit</u> X <u>une surmartingale positive qui ne s'annule jamais</u>. <u>Alors</u> X <u>admet une décomposition unique de la forme</u> $X_t=X_0L_tD_t$, <u>où</u> L <u>est une martingale locale positive telle que</u> $L_0=1$, D <u>un processus décroissant prévisible positif tel que</u> $D_0=1$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons évidemment supposer que $X_0=1$.

Nous avons vu au n° 4bis que X admet une décomposition unique de la forme $X=M-A$, où M est une martingale locale, A un processus croissant prévisible nul en 0. X est donc une semimartingale spéciale (32), et nous pouvons considérer sa projection prévisible $\dot{X} = M_- - A$[1]. L'essentiel de la démonstration est contenu dans le lemme suivant, dû à YOEURP :

LEMME. <u>Le processus prévisible</u> $1/\dot{X}$ <u>est localement borné</u>.

Nous remarquons d'abord que, la surmartingale positive X étant nulle à partir du temps d'arrêt $\inf\{t : X_{t-}=0\}$ (voir la première édition de [P], VI.T15), le processus X_- ne s'annule jamais ; le processus $1/X_-$ est alors fini et continu à gauche, donc localement borné. Nous écrivons alors $1/\dot{X} = (1/X_-)/(\dot{X}/X_-)$, ce qui nous ramène à montrer que le processus $\dot{X}/X_-$ est localement borné inférieurement. Comme $X=M-A$, la seconde formule (35.1) montre que $\dot{X}/X_- = 1-\Delta A/X_-$. Posons $C_t = \Sigma_{s\leq t}\, \Delta A_s/X_{s-}$; C est un processus croissant prévisible, à valeurs finies puisque $1/X_-$ est localement borné, donc l'ensemble $\{ s : \Delta C_s \geq 1-1/n\}$ n'a aucun point d'accumulation à distance finie ; comme il est prévisible, son début T_n est prévisible (N9, p.9). Prenant une suite T_{nm} annonçant T_n, on voit que $1-\Delta A_t/X_{t-} \geq 1/n$ pour $t\leq T_{nm}$, le résultat désiré.

Nous pouvons alors définir la semimartingale spéciale nulle en 0

$$Y_t = \int_0^t \frac{dX_s}{\dot{X}_s} \tag{39.1}$$

dont la décomposition canonique est

$$Y_t = N_t+B_t = \int_0^t \frac{dM_s}{\dot{X}_s} - \int_0^t \frac{dA_s}{\dot{X}_s} \tag{39.2}$$

Nous avons $\Delta B_t \leq 0$ pour tout t, donc $1-\Delta B_t$ ne s'annule jamais , et nous pouvons appliquer 36 et 37 : X étant solution de $X_t=1+\int_0^t \dot{X}_s dY_s$, on a $X=\mathcal{E}^{\bullet}(Y)= \mathcal{E}(N)/\mathcal{E}(-B)$. D'autre part, $\mathcal{E}(N)=L$ est une martingale locale. Calculons $D=1/\mathcal{E}(-B)$ en nous rappelant que, en tout temps prévisible T, $\Delta A_T=X_{T-}-E[X_T|\underline{F}_{T-}] \leq X_{T-}$, et $\Delta B_T = -\Delta A_T/E[X_T|\underline{F}_{T-}] = -\Delta A_T/\dot{X}_T$

$$D_t = e^{-B_t}\prod_{0<s\leq t}\frac{1}{1-\Delta B_s}e^{-\Delta B_s} = e^{-B_t^c}\prod_{0<s\leq t}(1-\Delta B_s)^{-1}$$

$$\overset{(2)}{=}\exp\left(-\int_0^t \frac{dA_s^c}{X_s}\right)\prod_{0<s\leq t}\left(1-\frac{\Delta A_s}{X_{s-}}\right) = \exp(\ )\prod\frac{X_{s-}}{\dot{X}_s}$$

1. Evidemment positive. 2. $\Delta A_s=X_{s-}-\dot{X}_s$, donc $(1+\frac{\Delta A_s}{\dot{X}_s})^{-1}=1-\frac{\Delta A_s}{X_{s-}}$

C'est la première expression de la dernière ligne (où A^c est la partie continue du processus croissant A, et où l'on a écrit X_s au lieu de $\mathring{X}_s$, l'intégrale étant la même) qui montre que D est un processus décroissant prévisible. Cela prouve l'existence de la décomposition multiplicative.

Quant à l'unicité, supposons que X=LD , L martingale locale égale à 1 en O, D processus décroissant prévisible égal à 1 en O. Alors $\mathring{X}=L_-D$ par projection prévisible. Puis $dY = dX/\mathring{X} = (DdL+L_-dD)/L_-D$ d'après la formule d'intégration par parties du n°38, et finalement

$$(39.3)\qquad dY = \frac{dX}{\mathring{X}} = \frac{dL}{L_-} + \frac{dD}{D}$$

Comme la décomposition canonique de Y , Y=N+B , est unique, nous avons

$$(39.4)\qquad \frac{dL}{L_-} = dN \text{ , donc } Y=\mathcal{E}(N) \quad , \quad \frac{dD}{D} = dB \text{ , donc } D=1/\mathcal{E}(-B)$$

Le lecteur écrira les expressions explicites de N et D pour son propre usage : elles sont utiles.

DEVELOPPEMENT DE L'EXPONENTIELLE

40 Nous allons démontrer ici une formule de KAILATH-SEGALL [19], liée aux calculs faits sur le mouvement brownien au n°III.16.

Soit X une semimartingale. Nous convenons comme d'habitude que $X_{0-}=0$ et nous définissons par récurrence les semimartingales

$$(40.1)\qquad P_t^0 = 1 \text{ , } P_t^1 = X_t \text{ .....} \qquad P_t^n = \int_{[0,t]} P_{s-}^{n-1}dX_s \qquad (P_{0-}^n=0)$$

En abrégé, $dP^n=P_-^{n-1}dX$. Lorsque X est une fonction certaine continue, P^n est égale à $X^n/n!$; les P^n sont donc des "puissances symboliques", de là la lettre P. Elles sont liées à la formule exponentielle par la propriété suivante : posons

$$(40.2)\qquad E^\lambda = (1+\lambda X_0)\mathcal{E}(\lambda X), \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre complexe}$$

et par récurrence

$$(40.3)\qquad F_t^{\lambda,0} = E_t^\lambda \quad , \; F_t^{\lambda,n} = \int_{[0,t]} F_{s-}^{\lambda,n-1}dX_s \qquad (F_{0-}^{\lambda,n} = 0)$$

Si l'on fait la convention que $E_{0-}^\lambda=1$, E^λ satisfait à l'égalité

$$(40.4)\qquad E_t^\lambda = 1 + \lambda\int_{[0,t]} E_{s-}^\lambda dX_s$$

et on a alors , par une récurrence facile

$$(40.5)\qquad E^\lambda = 1 + \lambda P^1 + \lambda^2P^2...+\lambda^nP^n + \lambda^nF^{\lambda,n}$$

de sorte que les P^n sont les coefficients de Taylor de E^λ à l'origine. On suppose d'habitude que $X_0=0$ (alors $E^\lambda=\mathcal{E}(\lambda X)$), et que X est une martingale locale (alors les P^n sont aussi des martingales locales).

Introduisons d'autre part les crochets d'ordre n, de la manière suivante :

(40.6) $C^1_t = X_t$, $C^2_t=[X,X]_t=\langle X^c,X^c\rangle_t+\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X^2_s$, $C^n_t = \Sigma_{s\leq t}\ \Delta X^n_s$ $(n>2)$[1]

Notre but est de démontrer la formule de récurrence de KAILATH-SEGALL :

41 THEOREME. <u>On a</u>

(41.1) $$P^n = \frac{1}{n}[P^{n-1}C^1-P^{n-2}C^2+P^{n-3}C^3+\ldots+(-1)^{n+1}P^0C^n].$$

DEMONSTRATION. **Par récurrence :** supposons (41.1) vraie au rang n, passons au rang n+1. Multiplions par n les deux membres de (41.1), prenons une limite à gauche, et intégrons par rapport à dX :

$$\begin{aligned} nP^n_-dX &= P^{n-1}_-C^1_-dX - P^{n-2}_-C^2_-dX + P^{n-3}_-C^3_-dX - \ldots \\ &= C^1_-dP^n - C^2_-dP^{n-1} + C^3_-dP^{n-2} \end{aligned}$$

d'après la définition des P^i. Ajoutons $P^n_-dX = P^n_-dC^1$, il vient

$$\begin{aligned} (n+1)dP^{n+1} &= (P^n_-dC^1+C^1_-dP^n) - C^2_-dP^{n-1} + C^3_-dP^{n-2}\ldots \\ &= d(P^nC^1) - d[P^n,C^1] - C^2_-dP^{n-1} + C^3_-dP^{n-2}\ldots \end{aligned}$$

Or $P^n = P^{n-1}_-.X$, $C^1 = X$, donc $[P^n,C^1] = P^{n-1}_-.[X,X] = P^{n-1}_-.C^2$ d'après la définition de C^2. Ainsi $d[P^n,C^1] = P^{n-1}_-dC^2$ et

$$\begin{aligned} (n+1)dP^{n+1} &= d(P^nC^1) - (P^{n-1}_-dC^2+C^2_-dP^{n-1}) + C^3_-dP^{n-2}\ldots \\ &= d(P^nC^1) - d(P^{n-1}C^2) + d[P^{n-1},C^2] + C^3_-dP^{n-2} \end{aligned}$$

C^2 est un processus à variation bornée, donc le crochet se réduit à $\Sigma\ \Delta P^{n-1}_s \Delta C^2_s = \Sigma\ (P^{n-2}_{s-}\Delta X_s)(\Delta X^2_s)$ et finalement $d[P^{n-1},C^2]=P^{n-2}_-dC^3$, et le télescopage continue.

Nous renvoyons à [19] pour le cas des semimartingales vectorielles.

42 <u>Exemples</u>

a) <u>Martingales locales continues</u>. Si X est une martingale locale continue **nulle en 0, posons** $A_t=\langle X,X\rangle_t$, **et écrivons (41.1), qui se réduit à**

(42.1) $$P^n = \frac{1}{n}[XP^{n-1}-AP^{n-2}] \qquad (P^1=X,\ P^2=\tfrac{1}{2}(X^2-A))$$

Rappelons la formule de récurrence des polynômes d'Hermite

(42.2) $$H_n(x) = \frac{1}{n}(xH_{n-1}(x)-H_{n-2}(x)) \qquad (H_1=x\ ,\ H_2=\tfrac{1}{2}(x^2-1))$$

Alors il est clair que

(42.3) $$P^n = A^{n/2}H_n(X/\sqrt{A})$$

car le second membre satisfait à la formule (42.1), et a les bonnes valeurs au départ. **On rapprochera cela de III.16.**

b) <u>Processus ponctuels</u>. Soit (N_t) un processus croissant, **admettant des sauts** égaux à 1, constant entre ces sauts, **nul en** 0. N est alors localement intégrable, et admet donc un compensateur prévisible A_t. Nous <u>supposerons ici A continu</u>, ce qui revient à dire que les sauts de

1. **La sommation exclut s=0 pour n=2, et l'inclut pour n>2.**

N sont totalement inaccessibles. Soit X la martingale locale N-A : elle est purement discontinue, donc $[X,X]_t=\Sigma_{s\leq t}\Delta X_s^2 = \Sigma_{s\leq t}\Delta N_s^2 = N_t$. De même, tous les crochets d'ordre supérieur C_t^n sont égaux à N_t pour $n\geq 2$, et la formule (41.1) prend la forme

$$(42.4)\qquad P^n = \frac{1}{n}\,[P^{n-1}(N-A)-P^{n-2}N+P^{n-3}N\ldots + (-1)^{n+1}P_0^0N]$$

$$= \frac{1}{n}\,[P^{n-1}X - P^{n-2}(X+A)+ P^{n-3}(X+A)+..+(-1)^{n+1}P^0(X+A)]$$

Il existe des polynômes de degré n (appelés polynômes de CHARLIER par KAILATH-SEGALL), $C_n(x,y)$, satisfaisant à la relation de récurrence

$$C_n = \frac{1}{n}[\, xC_{n-1}-(x+y)(C_{n-2}-C_{n-3}+C_{n-4}\ldots+(-1)^nC_0] \;,\; C_0=1$$

et on voit que dans ce cas $P_t^n = C_n(X_t,A_t)$. Par exemple, $C_2(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-x-y)$, et $P_t^2= \frac{1}{2}(X_t^2-X_t-A_t)=\frac{1}{2}(X_t^2-[X,X]_t)$ comme d'habitude.

c) <u>Relations d'orthogonalité</u>. Supposons que X soit une martingale telle que $\langle X,X\rangle_t=t$, nulle en 0 , et que X_t admette des moments de tous les ordres pour tout $t<\infty$. Nous verrons au chapitre V qu'alors $[X,X]_t$ admet aussi des moments de tous les ordres. Il est alors facile de démontrer le même résultat pour tous les C_n , et pour tous les P^n grâce à (41.1). La relation $P^n=P_-^{n-1}\cdot X$ nous donne alors

$$E[P_t^iP_t^j] = E[\int_0^t P_s^{i-1}P_s^{j-1}d\langle X,X\rangle_s\ ] = \int_0^t E[P_s^{i-1}P_s^{j-1}]ds$$

d'où l'on déduit aussitôt que $E[P_t^iP_t^j] = 0$ si $i\neq j$, $E[(P_t^i)^2]= t^i/i!$. Nous reviendrons dans l'appendice sur les martingales telles que $\langle X,X\rangle_t=t$.

Correction à la p.53. Le raisonnement est trop rapide : pour montrer qu'une martingale locale M appartenant à $\underline{\underline{L}}_0\cap\underline{\underline{V}}_0$ est sans partie continue, on regarde T qui la réduit fortement, et tel aussi que la variation de M^T soit intégrable (12.c)). On écrit $M^T=U+V$ ($U\in\underline{\underline{M}}_0$, V à variation intégrable) et <u>alors</u> $U\in\underline{\underline{M}}_0\cap\underline{\underline{W}}$ est sans partie continue d'après II.15, et M elle même est sans partie continue d'après 9.

Complément à la p.53. Il faut noter que l'inégalité de KUNITA-WATANABE s'applique au crochet de semimartingales [X,Y]. La démonstration de II.21 exige seulement que le crochet soit une fonction bilinéaire et positive.

APPENDICE AU CHAPITRE IV
NOTIONS SUR LES INTEGRALES MULTIPLES

Les physiciens emploient de temps en temps, de manière plus ou moins formelle , des intégrales multiples du type

$$\int f(t_1,\ldots,t_n)dX_{t_1}\ldots dX_{t_n}$$

où f dépend parfois de ω, et X est un processus plus ou moins concret. De telles intégrales, lorsque f est une fonction certaine et X est le mouvement brownien, sont presque aussi anciennes que les intégrales stochastiques "simples", puisqu'elles remontent à WIENER. La théorie générale n'en est pas faite. Elle est liée à celle des processus à temps n-dimensionnel, qui commence tout juste à se préciser un peu, avec les travaux de CAIROLI et WALSH, WONG et ZAKAI... Je voudrais ici donner quelques principes pour la construction des intégrales multiples.

Tout d'abord, il est clair qu'on ne restreint pas la généralité en considérant uniquement des intégrales prises sur le domaine $0\leqq t_1, 0\leqq t_2, \ldots 0\leqq t_n$. Dans la suite, les t_i <u>seront toujours supposés positifs</u>.

La première idée, pour définir l'intégrale multiple, consiste à la considérer comme une intégrale itérée. Seulement, même lorsque f au départ est une fonction certaine, la première intégration partielle suffit à faire apparaître une fonction de $t_1,\ldots,t_{n-1}$, <u>et ω</u>. Comme on ne sait intégrer par rapport à dX que des fonctions aléatoires <u>prévisibles</u>, il se pose un problème d'adaptation. Celui-ci (c'est l'idée d'ITO dans sa définition des intégrales stochastiques multiples browniennes) est facile à résoudre si l'on se borne à intégrer sur l'ensemble $0\leqq t_1<t_2\ldots<t_n$, et sur les ensembles qui s'en déduisent par permutation des t_i . Mais on laisse ainsi échapper des ensembles " diagonaux" de dimension $<n$. Faut il négliger ces ensembles "dégénérés" ? Nous allons voir que la formule (41.1) donne des indications intéressantes sur cette question.

L'appendice est divisé en trois parties. D'abord, nous interprétons la formule (41.1) en termes d'intégrales multiples. Puis, nous en déduisons quelques principes de définition d'intégrales multiples très générales, mais sans aller loin dans la théorie. Enfin, nous poussons un peu plus loin la théorie de l'intégrale multiple <u>étendue à l'ensemble</u> $0<t_1\ldots<t_n$, lorsque X est une martingale telle que $\langle X,X\rangle_t=t$ (intégrales multiples d'ITO).

Cet appendice est certainement destiné à se démoder très rapidement. Du moins, je l'espère !

INTERPRETATION DE LA RELATION (41.1)

43 **Nous supposons ici que la semimartingale X de la formule (41.1) est un processus à variation finie (en fait, tout ce qui suit se ramène au cas où X est une fonction certaine, à variation bornée). Nous nous éviterons aussi de regarder ce qui se passe en 0 en supposant que $X_0=0$. Nous pouvons écrire**

(43.1) $P^1_t = \int_0^t dX_u \;,\; P^2_t=\int_0^t dX_{u_2}\int_0^{u_2-}dX_{u_1} \;,\; \ldots \; P^n_t = \int_0^t dX_{u_n}\ldots\int_0^{u_2-} dX_{u_1}$

Ces intégrales itérées peuvent s'interpréter comme des intégrales multiples. Ecrivons (41.1) pour n=2 :

(43.2) $\qquad 2P^2_t = P^1_tC^1_t - C^2_t$

Regardons le premier terme du côté droit : $P^1=C^1=X$, donc c'est l'intégrale de la mesure $dX_{u_1}dX_{u_2}$ sur l'ensemble $\{0<u_1\leqq t,\ 0<u_2\leqq t\}$, que nous coupons en trois morceaux (en sous-entendant la positivité des u_i)

$\{ u_1<u_2\leqq t \}$, $\{ u_2<u_1\leqq t \}$, $\{ u_2=u_1\leqq t \}$

Les intégrales sur les deux premiers morceaux se calculent comme intégrales itérées, et valent toutes deux $2P^2_t$, c'est à dire le côté gauche de (43.2). La troisième intégrale est donc " en trop" , il faut la retrancher. D'après le théorème de Fubini, elle vaut $\Sigma_{s\leqq t}\ \Delta X^2_s$, qui est bien égale à C^2_t.

Passons au cas où n=3. La formule s'écrit

$$3P^3_t = P^2_tX_t - P^1_tC^1_t + C^3_t$$

considérons le premier terme du côté droit : il correspond à une intégration par rapport à la mesure $dX_{u_1}dX_{u_2}dX_{u_3}$ sur le domaine $\{u_1<u_2\leqq t,\ u_3\leqq t\}$ (positivité toujours sous-entendue) ; domaine qui se coupe en 5 :

$\{u_3<u_1<u_2\}$, $\{u_1<u_3<u_2\}$, $\{u_1<u_2<u_3\}$

$\{u_3=u_1<u_2\}$, $\{u_1<u_2=u_3\}$

les trois intégrales de la première ligne sont égales , et se calculent comme des intégrales itérées : leur somme vaut $3P^3_t$, c'est à dire le côté gauche. Les deux autres sont "en trop".

Le second terme du côté droit correspond à une intégration sur $\{u_1\leqq t\ ,\ u_2=u_3\leqq t\}$, domaine qui se coupe en trois

$\{u_1<u_2=u_3\}$, $\{u_2=u_3<u_1\}$, $\{u_1=u_2=u_3\}$

Les deux premières intégrales , affectées du coefficient -1, se télescopent avec les deux intégrales "en trop" précédentes. Quant à C^3_t =

$\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X_s^3$, c'est justement d'après le théorème de Fubini l'intégrale de $dX_{u_1}dX_{u_2}dX_{u_3}$ sur la diagonale $\{u_1=u_2=u_3\}$, d'où la disparition de la dernière intégrale.

Ainsi, lorsque X est un processus à variation finie, la formule de KAILATH-SEGALL (41.1) peut se démontrer par des arguments combinatoires, à partir de la théorie de l'intégrale multiple. Nous allons maintenant procéder en sens inverse : la validité de la formule (41.1) donne des indications sur la manière de définir l'intégrale multiple par rapport à une semimartingale, de telle sorte que les arguments combinatoires mentionnés ci-dessus s'appliquent.

PROBLEMES LIES A LA DEFINITION DE L'INTEGRALE MULTIPLE

44 La première remarque que l'on peut faire est celle ci : dans le cas de l'intégrale multiple ordinaire, nous savons ce qu'est une mesure sur $\mathbb{R}_+^n$. Ici, l'analogue serait une théorie de l'intégrale multiple du type $\int f(u_1,\ldots,u_n)dX_{u_1,\ldots,u_n}$ - étendue, comme on l'a dit au début, à l'ensemble $0\leq u_1,\ldots,0\leq u_n$ - par rapport à une " semimartingale à temps n-dimensionnel" . Mais pour l'instant on n'a qu'une idée imprécise de ce que doivent être de tels processus, et on se bornera à considérer des intégrales multiples par rapport à des " mesures produit"

$$(44.1)\qquad \int f(u_1,\ldots,u_n)dX^1_{u_1}\ldots dX^n_{u_n}$$

où les X^i sont des semimartingales réelles, et f une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+^n$ - donc une fonction certaine . On peut évidemment supposer les X^i nulles en 0.

Nous commencerons par illustrer les difficultés dans le cas de l'intégrale double. On peut alors partager l'intégrale en trois

$$\int_{u_1<u_2} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}dX^2_{u_2} + \int_{u_2<u_1} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}dX^2_{u_2} + \int_{\{u_2=u_1\}} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}dX^2_{u_2}$$

Les deux premiers morceaux ne diffèrent que par l'échange de u_1 et u_2. Nous étudierons plus loin dans l'appendice des intégrales de ce type - par rapport à des martingales particulières - et nous nous bornerons ici au principe de définition. L'idée naturelle consiste à les considérer comme des intégrales itérées. Le premier morceau par exemple s'écrira

$$(44.2)\qquad \int_0^\infty dX^2_{u_2}\int_0^{u_2-} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}$$

à prendre au sens suivant : pour u_2 fixé, on peut définir un processus

$$F_+(u_2,t,\omega) = \int_0^t f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}(\omega)$$

qui est - sous réserve de conditions d'intégrabilité convenables sur f - une semimartingale, pourvue de limites à gauche

$$\int_0^{t-} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}(\omega) = F_+(u_2,t-,\omega) \text{ , notées } F_-(u_2,t,\omega)$$

Seulement, F_+ n'est pas vraiment un processus, mais une classe de processus indistinguables, pour chaque u_2. Le problème consiste à choisir pour chaque u_2 une version de ce processus, de telle sorte que

$$(v,(t,\omega)) \longmapsto F_-(v,t,\omega)$$

soit mesurable par rapport à la tribu produit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{P}$ (la tribu prévisible). Alors le processus

$$F(v,\omega) = \int_0^{v-} f(u_1,v)dX^1_{u_1}(\omega) \quad = F_-(v,v,\omega)$$

sera prévisible, et l'on pourra - sous des conditions d'intégrabilité à préciser - définir

$$\int_0^\infty dX^2_{u_2} \int_0^{u_2-} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1} = \int_0^\infty F(v,.)dX^2_v(.)$$

à condition toutefois de savoir montrer que cette intégrale stochastique ne dépend pas du choix accompli précédemment. Il reste donc beaucoup de points techniques obscurs[1]. Cependant, l'étude du choix de bonnes versions a été commencée par Catherine DOLEANS dans [20].

Maintenant, le dernier morceau : si l'on veut que la formule (41.1) puisse s'interpréter comme un résultat sur les intégrales multiples, <u>il faut</u> poser

$$(44.3) \qquad \int_{\{u_1=u_2\}} f(u_1,u_2)dX^1_{u_1}dX^2_{u_2} = \int_0^\infty f(v,v)d[X^1,X^2]_v$$

Sauf erreur de ma part, WIENER et ITO ont négligé ce terme dans leur définition de l'intégrale stochastique double par rapport au mouvement brownien. (NB : M.ZAKAI m'a dit que la méthode de WIENER en tient compte).

Passons aux intégrales d'ordre supérieur. Une intégrale triple

$$\int f(u_1,u_2,u_3)dX^1_{u_1}dX^2_{u_2}dX^3_{u_3}$$

se décompose en

- six intégrales du type $\int_{\{u_1<u_2<u_3\}}$, à interpréter comme des intégrales itérées.
- trois intégrales du type $\int_{\{u_1=u_2<u_3\}}$, à interpréter comme intégrales

1. Cependant, si $f(u_1,u_2)$ est une somme de produits $a(u_1)b(u_2)$, il n'y a aucune difficulté de mesurabilité, et l'on peut souvent procéder par complétion à partir de ce cas. C'est ainsi qu'on fera plus loin.

itérées $\int dX^3_{u_3} \int_0^{u_3-} f(v,v,u_3)\, d[X^1,X^2]_v$.

- trois intégrales du type $\int_{\{u_1<u_2=u_3\}}$, à interpréter comme $\int d[X^2,X^3]_v \int_0^{v-} f(u_1,v,v)dX^1_{u_1}$.
- une intégrale $\int_{\{u_1=u_2=u_3\}}$, à interpréter comme $\Sigma_v f(v,v,v)\Delta X^1_v \Delta X^2_v \Delta X^3_v$.

Pour $n>3$, on voit apparaître des dégénérescences plus compliquées, que la formule (41.1) ne semble pas éclairer, par exemple pour $n=4$ $\int_{\{u_1=u_2<u_3=u_4\}}$. Il me semble clair que l'intégrale correspondante est $\int_{\{v<w\}} f(v,v,w,w)d[X^1,X^2]_v d[X^3,X^4]_w$, la règle générale étant la suivante : une dégénérescence simple $\{u_i=u_j\}$ fait apparaître le crochet d'ordre 2 $[X^i,X^j]$, qui comporte en plus de $\Sigma_v\ \Delta X^i \Delta X^j$ la contribution $\langle X^{ic},X^{jc}\rangle$ des martingales continues. Une dégénérescence d'ordre plus élevé $\{u_i=u_j\ldots=u_\ell\}$ fait apparaître $\Sigma_v\ \Delta X^i_v \Delta X^j_v \ldots \Delta X^\ell_v$, sans contribution des martingales continues.

On n'a jamais éprouvé le besoin, jusqu'à maintenant, de considérer des intégrales multiples aussi générales, et il n'est pas utile de pousser plus loin ces remarques. Il vaut sans doute mieux étudier plus en détail un cas particulier, qui comprend les intégrales multiples par rapport au mouvement brownien. On va restreindre à la fois les processus par rapport auxquels on intègre, et l'ensemble d'intégration, mais en revanche on va intégrer des fonctions $f(u_1,\ldots,u_n,\omega)$ *aléatoires*, et non plus certaines. La classe de fonctions aléatoires qu'on va savoir intégrer semble intéressante du point de vue de la théorie générale des processus.

I.S. MULTIPLES PAR RAPPORT A CERTAINES MARTINGALES

45 NOTATIONS. C_n *désigne le cône* $\{0<u_1<u_2\ldots<u_n\}$ *dans* $\mathbb{R}^n$; $C_n(t)$ *et* $C_n(t-)$ *sont les ensembles* $C_n\cap\{u_n\leq t\}$, $C_n\cap\{u_n<t\}$ *respectivement*. μ_n *est la restriction à* C_n *de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$.

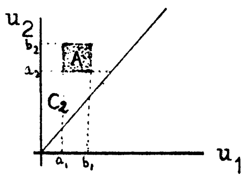
(M_t) *est une martingale nulle en* 0, *localement de carré intégrable, telle que* $\langle M,M\rangle_t = t$.

Il semble que la théorie s'étende sans peine au cas où $\langle M,M\rangle_t=F(t)$ (fonction certaine) ou bien où $d\langle M,M\rangle$ est une mesure aléatoire majorée par dt. Mais nous ne cherchons pas la généralité.

Pour éviter une accumulation de difficultés, nous allons intégrer d'abord des fonctions *certaines* sur C_n . Nous désignons par $\underline{\underline{H}}$ le sous-espace de $L^2(C_n,\mu_n)$ consitué par les combinaisons linéaires finies d'indicatrices de rectangles *contenus dans* C_n, semi-ouverts du type (46.1) ci-dessous ; $\underline{\underline{H}}$ est évidemment dense dans L^2.

46 Soit A un rectangle contenu dans C_n, de la forme

(46.1) $$A=]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]\ldots\times]a_n,b_n] \quad (a_1\leqq b_1\leqq a_2\leqq b_2\ldots\leqq a_n\leqq b_n)$$



Il y a évidemment une seule manière raisonnable de définir l'intégrale multiple $S_A=\int_A dM_{u_1}\ldots dM_{u_n}$; c'est de poser

(46.2) $$S_A = (M_{b_1}-M_{a_1})(M_{b_2}-M_{a_2})\ldots(M_{b_n}-M_{a_n})$$

L'application $A\mapsto S_A$ se prolonge évidemment, par linéarité, en une application $f\mapsto S_f$ sur $\underline{\underline{H}}$. Soit $\bar{A}=]\bar{a}_1,\bar{b}_1]\times..\times]\bar{a}_n,\bar{b}_n]$ un second rectangle du même type. Nous allons prouver le résultat suivant, en soulignant qu'*on ne postule pas l'existence de moments d'ordre* >2 .

LEMME. *On a*

(46.3) $$E[S_A^2] = E[(M_{b_1}-M_{a_1})^2\ldots(M_{b_n}-M_{a_n})^2] = \int_A \mu_n$$

de sorte que S_A *appartient à* L^2, *et alors*

(46.4) $$E[S_A S_{\bar{A}}] = \int_{A\cap\bar{A}} \mu_n \,.$$

DEMONSTRATION. Pour établir la première formule, on écrit

$$E[\{k_1\wedge(M_{b_1}-M_{a_1})^2\}\ldots\{k_{n-1}\wedge(M_{b_{n-1}}-M_{a_{n-1}})^2\}(M_{b_n}-M_{a_n})^2] =$$

$$=(b_n-a_n)E[\{k_1\wedge(\quad)^2\}\ldots\{k_{n-1}\wedge(\quad)^2\}]$$

après quoi on fait tendre k_{n-1} vers $+\infty$, et on recommence jusqu'à obtenir $E[S_A^2] = (b_n-a_n)\ldots(b_1-a_1)$, c'est à dire (46.3). Pour établir (46.4), on coupe les rectangles en petits morceaux pour se ramener à la situation suivante : pour tout i , les intervalles $]a_i,b_i]$ et $]\bar{a}_i,\bar{b}_i]$ sont, ou bien égaux, ou bien disjoints. S'ils sont égaux pour tout i, la formule se réduit à (46.3). Sinon, soit j le plus grand des i tels qu'ils soient disjoints, et supposons pour fixer les idées que $a_j\leqq b_j\leqq \bar{a}_j\leqq\bar{b}_j$. Soit $t\in[b_j,\bar{a}_j]$. La fonction $S_A S_{\bar{A}}$ est alors le produit des deux fonctions f et g suivantes

$$f = \prod_{k\leqq j}(M_{b_k}-M_{a_k})(M_{\bar{b}_k}-M_{\bar{a}_k}) \cdot (M_{b_j}-M_{a_j})$$

$$g = (M_{\overline{b}_j} - M_{\overline{a}_j}) . \prod_{k>j} (M_{b_k} - M_{a_k})^2$$

Nous vérifions d'abord, par troncation comme plus haut, que $E[|g|] = = \prod_{k>j} (b_k - a_k).E[|M_{\overline{b}_j} - M_{\overline{a}_j}|] < +\infty$, ce qui entraîne l'existence de $E[g|\underline{\underline{F}}_t]$, puis que $E[g|\underline{\underline{F}}_t] = E[g|\underline{\underline{F}}_{\overline{a}_j}|\underline{\underline{F}}_t] = \prod_{k>j}(b_k - a_k).E[M_{\overline{b}_j} - M_{\overline{a}_j}|\underline{\underline{F}}_{\overline{a}_j}|\underline{\underline{F}}_t] = 0$. Nous en déduisons alors, comme f est finie et $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, que $E[gfI_{\{|f|\leq m\}}] = E[E[g|\underline{\underline{F}}_t].fI_{\{|f|\leq m\}}] = 0$. Lorsque $m \to +\infty$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue avec domination par $|S_A S_{\overline{A}}|$ intégrable, et il vient que $E[S_A S_{\overline{A}}]=0$, c'est à dire (46.4) puisque A et $\overline{A}$ sont disjoints.

47 Ce qui vient d'être prouvé revient à dire que l'application $f \mapsto S_f$ est une isométrie de $\underline{\underline{H}} \subset L^2(C_n, \mu_n)$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $\underline{\underline{H}}$ est dense, nous pouvons définir pour $f \in L^2(C_n, \mu_n)$ l'intégrale stochastique multiple

(47.1) $$S_f = \int_{C_n} f(u_1, \ldots, u_n) dM_{u_1} \ldots dM_{u_n} \quad .$$

Il y a plus : posons

(47.2) $$M_t^f = \int_{C_n(t)} f(u_1, \ldots, u_n) dM_{u_1} \ldots dM_{u_n}$$

($C_n(t) = C_n \cap \{u_n \leq t\}$ a été défini au n°45). Un passage à la limite facile à partir du cas de $\underline{\underline{H}}$ montre que, si f est nulle sur $C_n(t)$, $E[S_f|\underline{\underline{F}}_t]=0$. On en déduit que

$$E[S_f - M_t^f|\underline{\underline{F}}_t] = E[\int_{C_n \setminus C_n(t)} f \;|\underline{\underline{F}}_t] = 0$$

de sorte que M^f est une martingale de carré intégrable. Nous prouvons maintenant un résultat classique, dû à WIENER dans le cas du mouvement brownien

48 THEOREME. <u>Soient</u> $f \in L^2(C_n)$, $g \in L^2(C_m)$, $m \neq n$. <u>Alors</u> S_f <u>et</u> S_g <u>sont orthogonales</u> .

(Les martingales M^f et M^g sont <u>faiblement</u> orthogonales).

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer que si A est un rectangle $\prod_{i\leq n}]a_i, b_i]$, $\overline{A}$ un rectangle $\prod_{i\leq m}]\overline{a}_i, \overline{b}_i]$, alors $E[S_A S_{\overline{A}}]=0$. En coupant les rectangles en petits bouts, on peut supposer que les intervalles $]a_i, b_i]$ et $]\overline{a}_j, \overline{b}_j]$ sont, ou égaux, ou disjoints . Le produit $S_A S_{\overline{A}}$ s'écrit alors sous la forme $\prod (M_{d_i} - M_{c_i})^{\alpha_i}$, où les c_i, d_i sont tels que $c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \ldots$, où les exposants α_i sont égaux à 1 ou 2 suivant que le facteur figure dans S_A ou $S_{\overline{A}}$ seulement, ou dans les deux. Comme $m \neq n$, l'un au moins des α_i est égal à 1, et on voit alors comme dans la démonstration de 46 que $E[S_A S_{\bar{A}}]=0$.

PROCESSUS PREVISIBLES SUR C_n

Nous voudrions maintenant arriver à calculer les intégrales multiples comme des intégrales itérées. Pour cela, il faut savoir intégrer des fonctions $f(u_1,\dots,u_n,\omega)$, prévisibles en un sens convenable.

48 DEFINITION. <u>La tribu</u> prévisible $\mathcal{P}_n$ <u>sur</u> $C_n \times \Omega$ <u>est engendrée par les ensembles</u> (<u>dits</u> prévisibles élémentaires) <u>de la forme</u> $A \times B$, <u>où</u> A <u>est un rectangle</u> $]a_1,b_1]\times\dots\times]a_n,b_n]$ $(a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \dots \leqq a_n \leqq b_n)$ <u>contenu dans</u> C_n, <u>et où</u> B <u>appartient à</u> $\underline{\underline{F}}_{a_1}$.

Il n'y a ici, contrairement à la définition usuelle à une dimension, aucune spécification concernant 0 : en effet, les coordonnées des points de C_n sont strictement positives ($C_1=]0,\infty[$).

Comme d'habitude, une fonction $f(t_1,\dots,t_n,\omega)$ est dite <u>prévisible</u> si elle est $\mathcal{P}_n$-mesurable. Nous désignerons par $\underline{\underline{H}}'$ l'espace des combinaisons linéaires d'indicatrices d'ensembles prévisibles élémentaires. Il est ~~facile~~ impossible de vérifier que les réunions finies d'ensembles prévisibles élémentaires disjoints forment une algèbre de Boole qui engendre $\mathcal{P}_n$: $\underline{\underline{H}}'$ est donc dense dans $L^2(\mathcal{P}_n,\bar{\mu}_n)$, où $\bar{\mu}_n$ est la mesure $\mu_n \otimes P$.

voir p.86

Reprenons les notations de l'énoncé, et posons $f=I_{A\times B}$, puis

$$S_f = I_B.(M_{b_1}-M_{a_1})\dots(M_{b_n}-M_{a_n}) \quad (48.1)$$

L'application $f \mapsto S_f$ se prolonge à $\underline{\underline{H}}'$ par linéarité, et on vérifie exactement comme au n°46 que c'est alors une isométrie de $\underline{\underline{H}}' \subset L^2(\mathcal{P}_n,\bar{\mu}_n)$ dans $L^2(\Omega)$, que l'on peut alors prolonger. En langage clair, si f est une fonction prévisible de carré intégrable par rapport à $\bar{\mu}_n$

$$E[S_f^2]=E[(\int f(t_1,\dots,t_n,\omega)dM_{t_1}\dots dM_{t_n})^2] = E[\int_{C_n} f^2(t_1,\dots,t_n,\omega)dt_1\dots dt_n] \quad (48.2)$$

et de plus si f est nulle sur $C_n(t)\times\Omega$

$$E[\int f dM_{t_1}\dots dM_{t_n} | \underline{\underline{F}}_t] = 0 \quad (48.3)$$

d'où la possibilité de définir les martingales M_t^f comme pour les fonctions certaines. Nous désignerons respectivement par

$$\int_{C_n(t)} f dM_{t_1}\dots dM_{t_n} \quad \text{et} \quad \int_{C_n(t-)} f dM_{t_1}\dots dM_{t_n} \quad (48.4)$$

la version continue à droite de M^f, et le processus de ses limites à gauche. Le théorème 48 (orthogonalité des intégrales stochastiques d'ordres différents) s'étend sans modification.

Nous allons maintenant illustrer sur un exemple le calcul d'intégrales multiples comme intégrales itérées. L'exemple n'étant pleinement significatif qu'à partir de la dimension 4, les notations seront un peu lourdes. C_2 désignera l'ensemble $\{(t_1,t_2) : 0<t_1<t_2\}$, $\overline{C}_2$ l'ensemble $\{(t_3,t_4) : 0<t_3<t_4\}$. Il faut remarquer que l'ordre des intégrations joue ici un rôle : nous intégrons d'abord par rapport à (t_1,t_2) (les plus petites variables) , (t_3,t_4) étant fixées. Est ce qu'on pourrait donner un sens à l'intégrale de manière à fixer (t_2,t_4) et intégrer en (t_1,t_3), par exemple ? J'avoue ne pas avoir regardé.

49 THEOREME. <u>Soit</u> $f(t_1,t_2,t_3,t_4,\omega)$ <u>une fonction prévisible sur</u> $C_4\times\Omega$, <u>telle que</u>

$$E[\int f^2(u_1,u_2,u_3,u_4,.)du_1du_2du_3du_4] < \infty .$$

a) <u>Pour tout</u> (t_3,t_4), <u>la fonction</u> $f(.,.,t_3,t_4,.)$ <u>est prévisible sur</u> $C_2\times\Omega$. <u>L'ensemble</u> N <u>des</u> (t_3,t_4) <u>tels que</u>

$$E[\int f^2(u_1,u_2,t_3,t_4,.)du_1du_2] < \infty$$

<u>est borélien dans</u> $\overline{C}_2$, <u>et négligeable pour la mesure</u> dt_3dt_4 .

b) <u>Il existe des fonctions</u> $g(t_3,t_4,\omega)$, $\overline{f}(t_3,t_4,\omega)$, <u>respectivement mesurable sur</u> $\overline{C}_2\times\Omega$, <u>prévisible sur</u> $\overline{C}_2\times\Omega$, <u>telles que pour presque tout</u> $(t_3,t_4)\notin N$ <u>on ait</u>

$$(49.1)\qquad g(t_3,t_4,\omega) = \int_{C_2} f(u_1,u_2,t_3,t_4,\omega)dM_{u_1}(\omega)dM_{u_2}(\omega) \text{ p.s.}$$

$$(49.2)\qquad \overline{f}(t_3,t_4,.)=E[g(t_3,t_4,.)|\underline{\underline{F}}_{t_3-}] = \int_{C_2(t_3-)} f(u_1,u_2,t_3,t_4,.)dM_{u_1}dM_{u_2} \text{ p.s.}$$

c) <u>On a alors</u> $E[\int_{\overline{C}_2} \overline{f}(t_3,t_4,.)dt_3dt_4] < \infty$, <u>et</u>

$$(49.3)\qquad \int_{C_4} fdM_{u_1}dM_{u_2}dM_{u_3}dM_{u_4} = \int_{\overline{C}_2} \overline{f}dM_{u_3}dM_{u_4} .$$

DEMONSTRATION. La première assertion de a) se démontre par classes monotones à partir des fonctions prévisibles élémentaires, et la seconde résulte aussitôt du théorème de Fubini.

Pour établir b), traitons le cas où f est une fonction prévisible élémentaire : f s'écrit $I_A(t_1,t_2).I_{\overline{A}}(t_3,t_4)I_B(\omega)$, où $A=]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]$, $\overline{A} =]a_3,b_3]\times]a_4,b_4]$, avec $a_1\leqq b_1\leqq a_2\ldots\leqq b_4$ et $B\in\underline{\underline{F}}_{a_1}$. Nous avons alors

$$\int_{C_4} fdM_{u_1}dM_{u_2}dM_{u_3}dM_{u_4} = I_B(M_{b_1}-M_{a_1})\ldots(M_{b_4}-M_{a_4})$$

$$g(t_3,t_4,\omega) =[(M_{b_1}-M_{a_1})(M_{b_2}-M_{a_2})I_B]I_{\overline{A}}(t_3,t_4)$$

Notons U le crochet : nous avons $E[U|\underline{\underline{F}}_t]=U$ pour $t\geqq a_3$, donc $E[U|\underline{\underline{F}}_{t-}]=U$ (version continue à gauche de la martingale) pour $t>a_3$, donc

$$\overline{f}(t_3,t_4,\omega)= E[U|\underline{\underline{F}}_{t-}]I_{\overline{A}}(t_3,t_4)|_{t=t_3} = UI_{\overline{A}}(t_3,t_4) =g(t_3,t_4,\omega)$$

car $I_{\overline{A}}(t_3,t_4)\neq 0 \Rightarrow t_3>a_3$. Comme U est $\underline{\underline{F}}_{a_3}$-mesurable, cette fonction est prévisible élémentaire sur $\overline{C}_2$. Enfin, on vérifie aussitôt que

$$\int_{\overline{C}_2} \overline{f}dM_{u_3}dM_{u_4} = U(M_{b_3}-M_{a_3})(M_{b_4}-M_{a_4})$$

et cela est égal à l'intégrale quadruple calculée plus haut. Le cas élémentaire est donc vérifié.

Soit ensuite f prévisible ; supposons qu'il existe des f_n prévisibles, des $g_n,\overline{f}_n$ associés aux f_n et satisfaisant à (49.1), (49.2) et (49.3), et que f_n converge vers f dans $L^2(\rho_n,\overline{\mu}_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que

(49.4) $\Sigma_n \ (E[\int_{C_4} (f_n-f_{n+1})^2 du_1du_2du_3du_4 \ ])^{1/2} < +\infty$

Posons alors

$g(t_3,t_4,\omega) = \lim_n g_n(t_3,t_4,\omega)$ si cette limite existe, 0 sinon,

$\overline{f}(t_3,t_4,\omega) = \lim_n \overline{f}_n(t_3,t_4,\omega)$ '''''''''''''''''''''''''''''''

et montrons que ces fonctions satisfont à (49.1), (49.2) et (49.3). Il est clair d'abord qu'elles possèdent les propriétés de mesurabilité requises. Ensuite, soit N' la réunion de N et de l'ensemble des (t_3,t_4) tels que $\Sigma_n(E[\int_{C_2} (f_n(u_1,u_2,t_3,t_4,.)-f_{n+1}(u_1,u_2,t_3,t_4,.))^2du_1du_2])^{1/2}= \infty$; N' est négligeable d'après (49.4) et le théorème de Fubini, et pour $(t_3,t_4)\notin N'$ on a

$$\Sigma_n \ \|g_n(t_3,t_4,.)-g_{n+1}(t_3,t_4,.)\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$$

et le même résultat avec $\overline{f}_n$ au lieu de g_n pour presque tout (t_3,t_4), car on a pour presque tout (t_3,t_4)

$$\overline{f}_n(t_3,t_4,.) = E[g_n(t_3,t_4,.)|\underline{\underline{F}}_{t_3-}] \quad \text{pour tout } n$$

et l'espérance conditionnelle diminue la norme L^2. Alors, pour presque tout (t_3,t_4), $g_n(t_3,t_4,.)$ et $\overline{f}_n(t_3,t_4,.)$ convergent vers $g(t_3,t_4,.)$ et $\overline{f}(t_3,t_4,.)$ respectivement, p.s. et dans L^2 , et (49.1), (49.2) et (49.3) passent alors à la limite sans aucune peine.

Par un argument de convergence à partir des fonctions prévisibles élémentaires, on établit alors aisément qu'il existe pour toute f prévisible, des fonctions $g,\overline{f}$ satisfaisant à 49.1,2,3.

Mais en fait l'énoncé, sous une forme un peu cachée, dit un peu plus que cela : il dit (c) : on a alors) que (49.3) est satisfaite dès que (49.1) et (49.2) le sont pour presque tout (t_3,t_4). A cet effet, considérons un second couple $(g',\bar{f}')$ satisfaisant à (49.1) et (49.2). On a alors pour presque tout (t_3,t_4) $g(t_3,t_4,.)=g'(t_3,t_4,.)$ p.s., donc $\bar{f}(t_3,t_4,.)=\bar{f}'(t_3,t_4,.)$ p.s.. On a alors $E[\int(\bar{f}-\bar{f}')^2du_3du_4]=0$, donc $E[(\int_{C_2}(\bar{f}-\bar{f}')dM_{u_3}dM_{u_4})^2]=0$, et finalement la relation (49.3) établie pour $\bar{f}$ est également vraie pour $\bar{f}'$.

REMARQUE. D'habitude, on construit la fonction prévisible $\bar{f}$ de la manière suivante : on construit d'abord une version $g(t_3,t_4,\omega)$ de $\int f dM_{u_1}dM_{u_2}$, mesurable en (t_3,t_4,ω). Puis une version càdlàg de la martingale $g(t,t_3,t_4,.)=E[g(t_3,t_4,.)|\underline{\underline{F}}_t]$, mesurable en (t,t_3,t_4,ω) . Puis le processus $g\_(t,t_3,t_4,.) = g(t-,t_3,t_4,.)$, et enfin on prend $\bar{f}(t_3,t_4,\omega) = g\_(t_3,t_3,t_4,\omega)$. Nous n'insisterons pas là dessus.

50 EXEMPLE. Il résulte aussitôt de la formule de récurrence (40.1) que les "puissances symboliques" P^n sont des intégrales multiples

(50.1) $$P_t^n = \int_{C_n(t)} dM_{u_1}\dots dM_{u_n}$$

Dans le cas où (M_t) est le mouvement brownien, on peut montrer (c'est un résultat ancien, dû à WIENER) que les espaces orthogonaux d'intégrales stochastiques de fonctions <u>certaines</u>

$$\underline{\underline{H}}_n = \{ \int_{C_n} f(u_1,\dots,u_n)dM_{u_1}\dots dM_{u_n} \ , \ f\in L^2(C_n,\mu_n) \}$$

engendrent tout $L^2(\Omega)$. Une démonstration[1] de ce fait (un peu sommaire) figure dans le séminaire V, p.280-281 : elle repose sur la formule (50.1), et la formule (42.3) suivant laquelle $P_t^n=t^{n/2}H_n(M_t/\sqrt{t})$, de sorte qu'on sait exprimer tout polynôme en M_t comme combinaison linéaire d'intégrales stochastiques multiples. Nous renvoyons le lecteur au séminaire V (LN volume 191) pour plus de détails.

---

1. La définition des i.s. dans cet exposé n'est pas correcte (p.279, ligne 7 du bas, le processus considéré n'est pas continu).

CORRECTION A LA PAGE 83. Le complémentaire d'un ensemble prévisible élémentaire n'est pas une réunion <u>finie</u> d'ensembles prévisibles élémentaires disjoints, mais une réunion dénombrable de tels ensembles, et les conséquences sont les mêmes.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(P.A. Meyer)

CHAPITRE V . LES ESPACES $\underline{\underline{H}}^1$ ET $\underline{\underline{BMO}}$

Nous revenons ici à la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux martingales locales, abordée au chapitre IV, mais avec un esprit très différent. Nous n'avions défini alors que l'intégrale stochastique de processus prévisibles localement bornés (mais, en revanche, nous intégrions par rapport à une semimartingale quelconque). Ici, nous allons considérer une martingale locale M, et dire exactement pour quels processus prévisibles H - non localement bornés - on peut définir de manière raisonnable l'intégrale stochastique H•M. Nous allons aussi définir un espace de martingales uniformément intégrables qui contient à la fois l'espace $\underline{\underline{M}}$ des martingales de carré intégrable, l'espace $\underline{\underline{W}}$ des martingales à variation intégrable, et qui est admirablement adapté à la théorie de l'intégrale stochastique des processus prévisibles, et même optionnels. Cet espace est l'espace $\underline{\underline{H}}^1$, son dual est l'espace $\underline{\underline{BMO}}$ (les lettres signifient "bounded mean oscillation", mais cette terminologie est empruntée à l'analyse, et ne suggère rien en théorie des martingales, aussi parle t'on des espaces " achun" et " béhèmeau" sans s' arrêter au sens des initiales). L'inégalité qui permet de les mettre en dualité est une forme de l'inégalité de KUNITA-WATANABE (II.21), mais plus profonde que celle-ci, que l'on appelle l'inégalité de FEFFERMAN. On peut même dire que c'est la plus importante de toute la théorie, si l'on considère son caractère élémentaire, et le fait que GARSIA a su en déduire les inégalités difficiles de BURKHOLDER, DAVIS, GUNDY, etc.

De l'histoire de cette théorie, je ne dirai que ce que je sais : $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ ont été inventés pour les besoins de l'analyse : le H de $\underline{\underline{H}}^1$ signifie sans doute HARDY , le cas de la dimension 1(*) a été étudié par HARDY, LITTLEWOOD..., le cas général surtout par STEIN ; $\underline{\underline{BMO}}$ semble avoir été introduit par JOHN et NIREMBERG (en dimension 1), la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ découverte par FEFFERMAN, l'étude approfondie de la dualité à plusieurs dimensions étant due à FEFFERMAN et STEIN. Quant à l'analogie avec les martingales, elle s'est développée au long d'une série d'articles, souvent non publiés, circulant entre BURKHOLDER, GARSIA, GUNDY, HERZ, STEIN... dont je ne connais qu'une petite partie.

(*) En analyse, $\underline{\underline{H}}^1$, $\underline{\underline{BMO}}$ sont des espaces de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, ou sur la sphère.

I. L'INEGALITE DE FEFFERMAN

L'ESPACE $\underline{\underline{BMO}}$

1 Soit M une martingale de carré intégrable. Nous rappelons la formule II.(19.2), qui donne le potentiel gauche du processus croissant [M,M]. Pour tout temps d'arrêt T

(1.1) $E[[M,M]_\infty|\underline{\underline{F}}_T]-[M,M]_{T-} = E[M^2_\infty|\underline{\underline{F}}_T]-M^2_T+\Delta M^2_T = E[(M_\infty-M_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T]$

DEFINITION. <u>Soit</u> M <u>une martingale locale</u>. <u>On dit que</u> M <u>appartient à</u> $\underline{\underline{BMO}}$ <u>si</u> M <u>est de carré intégrable, et s'il existe une constante</u> c <u>telle que l'on ait, pour tout temps d'arrêt</u> T

(1.2) $$E[(M_\infty-M_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] \leq c^2 \quad \underline{p.s.}$$

<u>La plus petite constante possédant cette propriété est appelée la norme</u> $\underline{\underline{BMO}}$ <u>de</u> M , <u>et notée</u> $\|M\|_{BMO}$. <u>S'il n'existe pas de telle constante, ou si</u> M <u>n'est pas de carré intégrable, on convient que</u> $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} = +\infty$.

2 REMARQUES. a) c^2 majore $E[M^2_\infty|\underline{\underline{F}}_0]$ (rappelons la convention $M_{0-}=0$), donc $\|M\|_2 \leq \|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$. En particulier $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}=0 \Rightarrow M=0$.

La possibilité de remplacer T par T_A , $A\in\underline{\underline{F}}_T$ (N7, p.8) montre que (1.2) équivaut à

(2.1) $$E[(M_\infty-M_{T-})^2] \leq c^2P\{T<\infty\} \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T$$

donc

(2.2) $$\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} = \sup_T \frac{E[(M_\infty-M_{T-})^2]}{P\{T<\infty\}}$$

ce qui montre que $\|\ \|_{\underline{\underline{BMO}}}$ est une semi-norme, puisque c'est un sup de semi-normes quadratiques. Nous verrons plus tard que $\underline{\underline{BMO}}$ est complet.

Noter l'interprétation de (2.1) : sur $\Omega'=\{T<\infty\}$ considérons les tribus induites $\underline{\underline{F}}'_t$, la loi induite renormalisée $P'=\frac{1}{P(\Omega')}P|_{\Omega'}$, et la martingale $M'_t=M_{T+t}-M_{T-}|_{\Omega'}$. Alors (2.1) signifie que la norme de M' dans L^2 est bornée par c, quel que soit le temps d'arrêt T. Etant donnée la fréquence de telles opérations de translation en théorie des martingales, on voit le caractère parfaitement naturel de la norme $\underline{\underline{BMO}}$.

b) Compte tenu du théorème de section (N11, p.9) des ensembles optionnels, on voit que (1.2) exprime en fait que le <u>processus</u> $E[[M,M]_\infty|\underline{\underline{F}}_t]-[M,M]_{t-}=E[M^2_\infty|\underline{\underline{F}}_t]-M^2_t+\Delta M^2_t$, projection optionnelle du processus $(M_\infty-M_{t-})^2$, est majoré par c^2 aux ensembles évanescents près.

c) M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ si et seulement si les <u>sauts</u> de M (y compris le saut M_0 en 0) sont <u>uniformément bornés</u> , et si le processus

(2.3) $$E[[M,M]_\infty|\underline{\underline{F}}_t] - [M,M]_t = E[\langle M,M\rangle_\infty|\underline{\underline{F}}_t] - \langle M,M\rangle_t = E[M^2_\infty|\underline{\underline{F}}_t] - M^2_t$$

qui est continu à droite, est uniformément borné. Par exemple, le mouvement brownien arrêté à N fini appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, puisqu'il est continu, et que le crochet <,> associé est égal à $N\wedge t$.

d) Si H est une variable aléatoire intégrable, on dit assez souvent que H appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ (ou, dans le langage oral[1] " est $\underline{\underline{BMO}}$ ") si la martingale $H_t=E[H|\underline{\underline{F}}_t]$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, et on définit $\|H\|_{\underline{\underline{BMO}}}$ comme la norme de cette martingale. Cet usage est illustré dans l'énoncé 4 .

EXEMPLES DE MARTINGALES APPARTENANT A $\underline{\underline{BMO}}$

Le premier exemple est évident .

3 THEOREME. Si (M_t) est une martingale bornée, on a $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq \sqrt{5}\|M_\infty\|_{L^\infty}$ (2)

DEMONSTRATION. Si c majore M_∞ on a

$$E[M_\infty^2|\underline{\underline{F}}_t] - M_t^2 + \Delta M_t^2 \leq c^2+(2c)^2 = 5c^2 .$$

On en déduit aussitôt des exemples de martingales qui appartiennent à $\underline{\underline{BMO}}$ sans être bornées : soit H un processus prévisible majoré par 1 en module, et soit $N=H\cdot M$; alors $[N,N]_\infty-[N,N]_{T-} \leq [M,M]_\infty-[M,M]_{T-}$, et on a aussi $\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq c\sqrt{5}$.

Le second exemple est particulièrement important . C'est sous cette forme que l'on rencontre le plus souvent $\underline{\underline{BMO}}$.

4 THEOREME. a) Soit (A_t) un processus croissant (adapté) dont le potentiel gauche est majoré par une constante c. Alors $\|A_\infty\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq c\sqrt{3}$.

b) Soit (A_t) un processus croissant prévisible, nul en 0, dont le potentiel (X_t) est majoré par une constante c. Alors $\|A_\infty\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 2c\sqrt{3}$.

DEMONSTRATION. Le cas prévisible se ramène au cas adapté : soit (Y_t) le potentiel gauche du processus croissant prévisible (A_t) : (Y_t) est projection bien-mesurable de $(A_\infty-A_{t-})$, (X_t) projection bien-mesurable de $(A_\infty-A_t)$, donc $Y_t=X_t+\Delta A_t$. Le saut ΔA_T en T prévisible est égal à $-E[\Delta X_T|\underline{\underline{F}}_T]$ (I.17), donc $\Delta A_T\leq c$ (comme X_T et X_{T-} sont tous deux compris entre 0 et c, leur différence est au plus c), et comme (A_t) est prévisible on a identiquement $\Delta A_t\leq c$, donc $Y_t\leq 2c$, et b).

Prouvons donc a). Soit M_t la martingale $E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_t] = X_t+A_{t-}$. Nous avons $M_\infty-M_{T-} = (A_\infty-A_{T-})-X_{T-}$ pour tout temps d'arrêt T, et aussi

$$E[(M_\infty-M_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] = E[(A_\infty-A_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T]+X_{T-}^2-2X_{T-}E[A_\infty-A_{T-}|\underline{\underline{F}}_T]$$
$$\leq E[(A_\infty-A_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] + X_{T-}^2 \leq E[\ ] + c^2$$

D'autre part, on a pour toute fonction croissante a(t) (a(0-)=0)

$$a(\infty)^2 = \int_{[0,\infty[} [(a(\infty)-a(s))+(a(\infty)-a(s-))]da(s)$$
$$\leq 2\int_{[0,\infty[} (a(\infty)-a(s-))da(s) \qquad (\text{cf. IV.24 }).$$

1. On ne dit pas qu'une variable aléatoire est"béhèmelle".
2. $E[(M_\infty-M_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] < (2c)^2$, on peut donc prendre 2 au lieu de $\sqrt{5}$

$$(A_\infty - A_{T-})^2 \leqq 2 \int_{[T,\infty[} (A_\infty - A_{s-})dA_s$$

Nous prenons une espérance, en remarquant que la projection optionnelle du processus $(A_\infty - A_{s-})$ est (X_s), et que la mesure dA_s commute à la projection optionnelle (I.3). Ainsi

$$E[(A_\infty - A_{T-})^2] \leqq 2E[\int_{[T,\infty[} X_s dA_s] \leqq 2cE[A_\infty - A_{T-}] = 2cE[X_T]$$
$$\leqq 2c^2 P\{T<\infty\}$$

Remplaçant T par T_B (N7, p.8) où B parcourt $\underline{\underline{F}}_T$, il vient que $E[(A_\infty - A_{T-})^2 | \underline{\underline{F}}_T] \leqq 2c^2$, l'inégalité désirée.

5 REMARQUES. a) Le théorème 4 s'étend aux processus croissants présentant un saut à l'infini. La méthode consiste à utiliser une bijection croissante φ de $[0,1]$ sur $[0,\infty]$, à poser $A'_t = A_{\varphi(t)}$ pour $t \leqq 1$, $A'_t = A_\infty$ pour $t>1$, à définir les $\underline{\underline{F}}'_t$ de manière analogue, et à appliquer le th.4.

b) En réalité , on a pour le cas prévisible la même constante , sans nécessité de doublement : il suffit de suivre la même méthode que pour le cas optionnel, en remarquant que la projection prévisible du processus $(A_\infty - A_{s-})$ est alors le processus (X_{s-}). Pour plus de détails, voir la démonstration du th. IV.8.

c) En se reportant à la démonstration du théorème IV.8, on verra la propriété suivante : si M est une martingale locale nulle en 0, si T est un temps d'arrêt qui réduit fortement M, alors M^T peut s'écrire U+V, où V est à variation intégrable, et U appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

Le troisième exemple (emprunté à GARSIA, et qui servira plus loin dans la démonstration de l'inégalité de DAVIS) montre comment on peut construire des martingales de $\underline{\underline{BMO}}$ au moyen d'intégrales stochastiques. Noter qu'il contient le premier exemple (B=1).

6 THEOREME. Soient H une martingale locale, B un processus croissant (adapté ; on ne suppose pas $B_{0-}=0$). Si le processus $(|H_t B_t|)$ est borné par 1 , la martingale locale $L=B_- \cdot H$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, avec $\|L\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq \sqrt{6}$

DEMONSTRATION. Quitte à arrêter H à un temps d'arrêt S qui réduit à la fois les martingales locales H et $M=H^2-[H,H]$, nous supposerons qu'elles sont toutes deux uniformément intégrables. Après quoi, il restera à faire tendre S vers l'infini, passage à la limite simple que nous laisserons au lecteur.

Nous allons montrer, d'une part que les sauts ΔL_t sont uniformément bornés, et d'autre part que le potentiel $E[[L,L]_\infty - [L,L]_t | \underline{\underline{F}}_t]$ est borné, et nous appliquerons alors la remarque 2 c).

Tout d'abord les sauts : nous avons $|\Delta L_t| = |B_{t-}(H_t-H_{t-})| \leqq |B_{t-}H_{t-}|+|B_{t-}H_t| \leqq |B_{t-}H_{t-}|+|B_tH_t| \leqq 2$.

Passons au potentiel. Nous avons $[L,L] = B_-^2\cdot[H,H]$, donc

$$[L,L]_\infty-[L,L]_t = \int_t^\infty B_{s-}^2 d[H,H]_s = \int_t^\infty ([H,H]_\infty-[H,H]_s)dB_s^2 + \\ + ([H,H]_\infty-[H,H]_t)B_t^2$$

Noter que $[H,H]_\infty$ est finie, car la martingale $H_t^2-[H,H]_t=M_t$ est uniformément intégrable ; on a aussi $[H,H]_\infty-[H,H]_s = H_\infty^2 - H_s^2 -(M_\infty-M_s)$, donc $E[[H,H]_\infty-[H,H]_T|\underline{\underline{F}}_T] = E[H_\infty^2|\underline{\underline{F}}_T]-H_T^2$ pour tout temps d'arrêt T - ceci n'est pas absolument évident, car H n'est pas supposée de carré intégrable ! Alors, comme dB_s^2 commute à la projection optionnelle

$$E[\int_t^\infty([H,H]_\infty-[H,H]_s)dB_s^2|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[\int_t^\infty H_\infty^2 dB_s^2|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[H_\infty^2 B_\omega^2 |\underline{\underline{F}}_t] \leqq 1$$

$$E[([H,H]_\infty-[H,H]_t)B_t^2|\underline{\underline{F}}_t] = B_t^2(E[H_\infty^2 |\underline{\underline{F}}_t]-H_t^2) \leqq E[H_\infty^2 B_\infty^2 |\underline{\underline{F}}_t] \leqq 1$$

Cela achève la démonstration (2^2+1+1=6). GARSIA dans le cas discret indique 5 au lieu de 6, mais j'ai perdu mon exemplaire de son livre et je ne sais pas comment il fait. De toute façon, ce n'est pas grave !

REMARQUE. On utilise plus souvent le corollaire suivant : soit U un processus prévisible, tel qu'il existe un processus croissant (B_t) tel que $|U| \leqq B_-$ et $|H\Xi| \leqq 1$. Alors l'intégrale stochastique U•H appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, etc. Voir la remarque suivant l'exemple du n°3.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de $\underline{\underline{BMO}}$ - en particulier, nous montrerons que les éléments de $\underline{\underline{BMO}}$ sont bornés, non seulement dans L^2, mais dans tous les L^p (n°V.27).

L'ESPACE $\underline{\underline{H}}^1$

7 DEFINITION. Soit M une martingale locale. On pose $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} = E[\sqrt{[M,M]_\infty}]$, et on dit que M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ si $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} < \infty$.

8 REMARQUES. a) $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ est une seminorme : l'homogénéité est évidente, et la sous-additivité se ramène à $[M+N,M+N]^{1/2} \leqq [M,M]^{1/2}+[N,N]^{1/2}$, soit encore à $[M,N] \leqq [M,M]^{1/2}[N,N]^{1/2}$ (inégalités KW). La relation $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ =0 entraîne que M n'a pas de sauts (y compris le saut M_0 en 0), elle est donc continue, donc localement de carré intégrable, et on vérifie alors aussitôt que M=0.

Nous verrons plus loin que M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ si et seulement si $M^* = \sup_t|M_t|$ appartient à L^1, et que la norme $\underline{\underline{H}}^1$ est équivalente à $\|M^*\|_{L^1}$; il en résultera aussitôt que $\underline{\underline{H}}^1$ est complet.

b) Nous avons $E[\sqrt{[M,M]_\infty}] \leqq (E[[M,M]_\infty])^{1/2}$, donc $\underline{\underline{M}} \subset \underline{\underline{H}}^1$, avec une norme plus forte. De même, si M est une martingale locale à VI, nous avons $[M,M]_\infty = \Sigma_s \Delta M_s^2 \leq (\Sigma_s |\Delta M_s|)^2$, donc $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq \|M\|_{\underline{\underline{V}}}$, et $\underline{\underline{W}} \subset \underline{\underline{H}}^1$ avec une norme plus forte.

L'INEGALITE DE FEFFERMAN[1]

9 Sous sa forme usuelle, c'est le résultat suivant : soient M et N deux martingales locales. Alors

(9.1) $$E[\int_{[0,\infty[} |d[M,N]_s|] \leq c\, \|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

où c est une constante dont la valeur importe peu ($c=\sqrt{2}$ convient). Cette inégalité ressemble aux inégalités de KUNITA-WATANABE du chapitre II, n°22, mais elle n'existe que sous forme intégrale, alors que les inégalités KW s'obtenaient en appliquant l'inégalité de HÖLDER aux inégalités du n°21, vraies pour presque toute trajectoire.

Nous allons montrer en fait une inégalité plus générale, dont nous aurons besoin par la suite. (9.1) correspond au cas où U=1 .

THEOREME. <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux martingales locales</u>, U <u>un processus optionnel</u>. <u>Alors</u>

(9.2) $$E[\int_{[0,\infty[} |U_s||d[M,N]_s|] \leq cE[(\int_{[0,\infty[} U_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}]\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \quad (c=\sqrt{2})$$

DEMONSTRATION. Posons $C_t=\int_0^t U_s^2 d[M,M]_s$, et introduisons les deux processus optionnels positifs H et K définis par

$$H_t^2 = U_t^2/\sqrt{C_t} + \sqrt{C_{t-}} \qquad , \quad K_t^2 = \sqrt{C_t}$$

Nous avons les propriétés

- $H_t^2 d[M,M]_t = dC_t/\sqrt{C_t}+\sqrt{C_{t-}} = d\sqrt{C_t}$ (intégration par parties)
- $H_t^2 K_t^2 \geq \frac{1}{2} U_t^2$ presque partout pour la mesure $d[M,M]_t$, donc aussi pour la mesure $|d[M,N]_t|$, absolument continue par rapport à $d[M,M]_t$.

Appliquons l'inégalité de KUNITA-WATANABE :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} E[\int |U_s||d[M,N]_s|] \leq E[\int H_s K_s |d[M,N]_s|] \leq \sqrt{E_1}\,\sqrt{E_2}$$

$$\text{où } E_1 = E[\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M,M]_s] \ ,\ E_2 = E[\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N,N]_s]$$

Calculons d'abord E_1 : comme $H_s^2 d[M,M]_s = d\sqrt{C_t}$, c'est $E[\sqrt{C_\infty} - \sqrt{C_{0-}}\ ]$ et

$$E_1 = E[(\int_{[0,\infty[} U_s^2 d[M,M]_s\ )^{1/2}] \quad \text{par définition de } C_t$$

Pour calculer E_2 , intégrons par parties : (K_t^2) est un processus croissant, donc

$$\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N,N]_s = \int_{[0,\infty[} ([N,N]_\infty - [N,N]_{s-}) dK_s^2$$

Intégrons : la mesure dK_s^2 commute avec la projection optionnelle, et la projection optionnelle du processus $([N,N]_\infty - [N,N]_{s-})$ est majorée

1. Première extension au cas continu : GETOOR-SHARPE [25].

par $\|N\|^2_{\underline{\underline{BMO}}}$ par définition de $\underline{\underline{BMO}}$ (2,b)). Donc

$$E_2 \leqq \|N\|^2_{\underline{\underline{BMO}}} .E[\int_0^\infty dK_s^2] = \|N\|^2_{\underline{\underline{BMO}}} E[\sqrt{C_\infty}] = \|N\|^2_{\underline{\underline{BMO}}}.E_1$$

. Ainsi $\sqrt{E_1}\sqrt{E_2} \leqq E_1 \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$, et c'est tout juste (9.2).

APPLICATION A LA DUALITE ENTRE $\underline{\underline{H}}^1$ ET $\underline{\underline{BMO}}$

Nous allons déduire de l'inégalité de FEFFERMAN trois types de conséquences :

- le " théorème de FEFFERMAN" sur la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ (pour les martingales, démontré indépendamment par HERZ, GARSIA, FEFFERMAN-STEIN).
- La possibilité de définir les intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, pour des processus prévisibles ou optionnels non localement bornés (§ II de ce chapitre).
- D'après GARSIA, les principales inégalités de la théorie des martingales (§ III de ce chapitre).

10 Nous commençons par la partie facile du théorème de dualité. Si M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, N à $\underline{\underline{BMO}}$, la variable aléatoire $\int_{[0,\infty[} |d[M,N]_s|$ est intégrable, donc p.s. finie, donc $\int_{[0,\infty[} d[M,N]_s$ existe et est intégrable. Nous pouvons donc définir sur $\underline{\underline{H}}^1\times\underline{\underline{BMO}}$ la forme bilinéaire

$$(10.1) \qquad C(M,N) = E[\int_{[0,\infty[} d[M,N]_s] = E[[M,N]_\infty]$$

Lorsque M est de carré intégrable, cela vaut $E[M_\infty N_\infty]$. Lorsque M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, M est uniformément intégrable (nous verrons cela plus loin), mais on n'a pas nécessairement $E[[M,N]_\infty]=E[M_\infty N_\infty]$, le produit au second membre pouvant n'être pas intégrable.

L'inégalité de FEFFERMAN affirme que la forme linéaire C(.,N) est continue pour la topologie de $\underline{\underline{H}}^1$. Si l'on a C(.,N)=0 , comme $\underline{\underline{BMO}}\subset\underline{\underline{M}}\subset\underline{\underline{H}}^1$ on a C(N,N)=0, donc N=0. Ainsi, $\underline{\underline{BMO}}$ se plonge dans le dual de $\underline{\underline{H}}^1$. Et nous avons la partie plus délicate :

11 THEOREME. <u>Toute forme linéaire continue</u> φ <u>sur</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>est de la forme</u> C(.,N), <u>où</u> N <u>appartient à</u> $\underline{\underline{BMO}}$.

DEMONSTRATION. Nous supposerons que $\|\varphi\|=1$. Comme $\underline{\underline{M}}\subset\underline{\underline{H}}^1$ avec une norme plus grande, φ induit sur $\underline{\underline{M}}$ une forme linéaire de norme ≤ 1, et il existe donc une martingale de carré intégrable N telle que

$$(11.1) \qquad \text{pour } M\in\underline{\underline{M}} \text{ , } \varphi(M) = E[M_\infty N_\infty]$$

Nous allons montrer que N appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. Bornons d'abord les sauts de N . Soit T un temps d'arrêt, soit prévisible, soit totalement inaccessible[1], et soit U une variable aléatoire bornée , $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, telle que $\|U\|_{L^1} \leqq 1$. Soit M la martingale compensée du processus $UI_{\{t\geq T\}}$.

1. Nous supposons T partout > 0 , laissant au lecteur l'étude en 0.

M est à VI , avec $\|M\|_V \leq 2\|U\|_{L^1} \leq 2$, donc (8,b)) $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq 2$. D'autre part, comme U est bornée, M est de carré intégrable (II.9), donc $\varphi(M)=E[M_\infty N_\infty]$, et toujours d'après II.9 cela vaut $E[\Delta M_T \Delta N_T]$. Ainsi dans le cas totalement inaccessible $\Delta M_T = U$, et

$|E[U\Delta N_T]| = |\varphi(M)| \leq 2$, et en passant au sup sur U $\|\Delta N_T\|_{L^\infty} \leq 2$.

Dans le cas prévisible, $\Delta M_T=U-E[U|\underline{\underline{F}}_{T-}]$, mais ΔN_T est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{T-}$, et on a encore $E[\Delta M_T \Delta N_T]=E[U\Delta N_T]$, avec la même conclusion.

Nous montrons ensuite que $E[[N,N]_\infty-[N,N]_T|\underline{\underline{F}}_T] \leq 1$ pour tout temps d'arrêt T. Posons $Z=[N,N]_\infty-[N,N]_T$; comme d'habitude, il suffit de montrer que $E[Z] \leq P\{T<\infty\}$ pour tout T, et d'appliquer ce résultat aux T_A $(A\in\underline{\underline{F}}_T)$. Or soit M la martingale $N-N^T$; comme N^T est l'intégrale stochastique $I_{[[0,T]]}\cdot N$, M est l'intégrale stochastique $D\cdot N$, où $D=I_{]]T,\infty[[}$. Donc $[M,N]=D\cdot[N,N]$, tandis que $[M,M]=D^2\cdot[N,N]$, et comme $D^2=D$ on a $[M,M]_\infty=[M,N]_\infty=Z$, et $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}=E[\sqrt{Z}]$. Or Z est nulle sur $\{T=\infty\}$, donc $E[\sqrt{Z}]\leq (E[Z])^{1/2}(P\{T<\infty\})^{1/2}$.

Nous avons alors d'une part

$E[M_\infty N_\infty] = E[[M,N]_\infty] = E[Z]$

et d'autre part

$|E[M_\infty N_\infty]| = |\varphi(M)| \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} = E[\sqrt{Z}] \leq E[Z]^{1/2} (P\{T<\infty\})^{1/2}$

d'où finalement l'inégalité $E[Z] \leq P\{T<\infty\}$, le résultat cherché. En mettant tout ensemble, il vient que

(11.2) $\|\varphi\| \leq 1 \Rightarrow \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq \sqrt{5}$

La démonstration n'est pas tout à fait finie : les formes linéaires φ et $C(.,N)$ coïncident sur $\underline{\underline{M}}$, mais coïncident elles sur $\underline{\underline{H}}^1$? Cela résulte aussitôt du lemme suivant

12 THEOREME. $\underline{\underline{M}}$ <u>est dense dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

DEMONSTRATION. Soit M une martingale locale qui appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, et soit T_n une suite de temps d'arrêt réduisant fortement M, qui tend en croissant vers $+\infty$. On vérifie aussitôt sur la définition de $\underline{\underline{H}}^1$ que les martingales arrêtées M^{T_n} convergent vers M dans $\underline{\underline{H}}^1$. D'autre part, M^T (omettons l'indice n !) s'écrit U+V, où U appartient à $\underline{\underline{M}}$, et V est la compensée de $M_T I_{\{t\geq T\}}$; M_T est intégrable, approchons la dans L^1 par des variables aléatoires $\underline{\underline{F}}_T$-mesurables bornées m_k , et notons V^k la compensée de $m_k I_{\{t\geq T\}}$; la martingale V^k appartient à $\underline{\underline{M}}$ (V.4*),et converge vers V en norme $\|\ \|_V$, plus forte que la norme $\underline{\underline{H}}^1$. En définitive, M est bien approchée dans $\underline{\underline{H}}^1$ par des éléments de $\underline{\underline{M}}$.

(*) Même à $\underline{\underline{BMO}}$ ..

13 COROLLAIRE. <u>Les martingales bornées sont denses dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$.

En effet, elles sont denses dans $\underline{\underline{M}}$, pour une norme plus forte que celle de $\underline{\underline{H}}^1$.

14 COROLLAIRE. <u>Toute martingale locale</u> $M\in\underline{\underline{H}}^1$ <u>est uniformément intégrable</u>, <u>et on a</u> $\|M_\infty\|_{L^1} \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ (on verra bien mieux plus loin).

DEMONSTRATION. Supposons d'abord $M\in\underline{\underline{M}}$, et soit N une martingale bornée. L'inégalité de FEFFERMAN nous donne, compte tenu du fait que $E[[M,N]_\infty] = E[M_\infty N_\infty]$ et du n°3 (la constante c varie de place en place)

$$|E[M_\infty N_\infty]| \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|N_\infty\|_{L^\infty}$$

Donc $\|M_\infty\|_{L^1} \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, et le complété de $\underline{\underline{M}}$ pour la norme $\underline{\underline{H}}^1$ - c'est à dire $\underline{\underline{H}}^1$ lui-même - est contenu dans le complété de $\underline{\underline{M}}$ pour la norme $M \mapsto \|M_\infty\|_{L^1}$, c'est à dire l'espace des martingales uniformément intégrables (remarquer que la relation $M_t = E[M_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$ passe bien à la limite dans cette complétion !).

II. INTEGRALES STOCHASTIQUES DANS $\underline{\underline{H}}^1$

Ce paragraphe ne se suffit pas entièrement à lui même : nous allons admettre, en effet, que $\underline{\underline{H}}^1$ <u>est complet</u> , ce qui résultera plus loin de l'inégalité de DAVIS (c'est à dire, indirectement, de l'inégalité de FEFFERMAN). L'inégalité (9.2) interviendra aussi, directement, dans la construction de l'intégrale stochastique pour les processus optionnels.

15 Posons d'abord le problème. Etant donnés un processus prévisible H, une martingale locale M, nous désirons définir une intégrale stochastique H•M possédant des propriétés raisonnables. Nous exigerons d'abord que H•M <u>soit une martingale locale</u> , que $(H\cdot M)_0 = H_0 M_0$ - ce qui nous ramène au cas où $M_0=0$. Ensuite, nous exigeons que

(15.1) $$[H\cdot M, H\cdot M] = H^2\cdot[M,M]$$

et cela impose tout de suite une limitation au processus prévisible H. En effet, soit T un temps d'arrêt réduisant fortement la martingale locale $L=H\cdot M$ - nulle en 0 puisque $M_0=0$. L^T s'écrit U+V, $U\in\underline{\underline{M}}_0 \subset \underline{\underline{H}}^1$, $V\in\underline{\underline{W}}_0 \subset \underline{\underline{H}}^1$, donc $L^T\in\underline{\underline{H}}^1$, et $E[\sqrt{[L,L]_T}] < \infty$. Autrement dit

On ne peut se poser raisonnablement le problème de la construction de l'intégrale stochastique H•M , dans la classe des martingales locales, que pour des processus H tels que le processus croissant $(\int_{0+}^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ soit localement intégrable.

Sous cette condition, on peut effectivement construire une intégrale stochastique parfaitement satisfaisante. Nous supposons que $M_0=0$ dans l'énoncé suivant, laissant au lecteur le soin d'ajouter le terme H_0M_0 à l'intégrale stochastique si cette condition n'est pas satisfaite.

16 THEOREME. Soit M une martingale locale nulle en 0, et soit H un processus prévisible tel que le processus croissant

(16.1) $\qquad (\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$

soit localement intégrable. Alors

a) Pour toute martingale locale N, le processus croissant $\int_0^t |H_s||d[M,N]_s|$ est à valeurs finies pour $t<\infty$.

b) Il existe une martingale locale $L=H\cdot M$ telle que l'on ait, pour toute martingale locale N

(16.2) $\qquad [L,N] = H\cdot[M,N]$

et cette relation, écrite seulement pour les martingales bornées N, caractérise uniquement L.

c) Les processus ΔL_t et $H_t\Delta M_t$ sont indistinguables, et on a $(H\cdot M)^c=H\cdot M^c$.

DEMONSTRATION. Nous commençons par l'unicité, que nous déduirons du lemme suivant, qui reservira.

16a LEMME. Soit J une martingale locale nulle en 0. Si $[J,N]$ est une martingale locale pour toute martingale bornée N, on a $J=0$.

En effet, si T réduit cette martingale locale on a $E[[J,N]_T]=E[[J,N]_0]=0$. On applique alors le théorème IV.19, b).

Pour en déduire l'unicité, on considère deux martingales locales L et $\bar{L}$ satisfaisant à (16.2), et on pose $J=L-\bar{L}$; alors $[J,N]=0$ pour toute martingale bornée N, et on applique le lemme.

Pour établir l'existence, nous allons supposer d'abord que $(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ est intégrable. Soit (H_t^n) le processus obtenu en tronquant (H_t) à n ; comme H^n est borné, nous pouvons définir la martingale locale $H^n\cdot M = L_n$. On remarque que $H^n\cdot M \in \underline{\underline{H}}^1$ et que

$$\| H^n\cdot M - H^k\cdot M \|_{\underline{\underline{H}}^1} = E[(\int (H_s^n-H_s^k)^2 d[M,M]_s)^{1/2}]$$

qui tend vers 0 lorsque n et k tendent vers l'infini, par convergence dominée. Les $H^n\cdot M$ forment donc une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^1$. Comme nous avons admis que $\underline{\underline{H}}^1$ est complet, nous pouvons affirmer que $H^n\cdot M = L_n$ converge dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers une martingale locale L.

Prouvons que $[L,L] = H^2\cdot[M,M]$. Cela résulte aussitôt du fait que $[L_n,L_n] = H_n^2\cdot[M,M]$, du fait que $H_n^2 \uparrow H^2$, et du lemme suivant :

16b LEMME. Si $L_n \to L$ dans $\underline{\underline{H}}^1$, $\sqrt{[L_n,L_n]_T} \to \sqrt{[L,L]_T}$ dans L^1 pour tout T.

DEMONSTRATION. Cela résulte de l'inégalité triangulaire

$$|\sqrt{[L,L]_T} - \sqrt{[L_n,L_n]_T}| \leq \sqrt{[L-L_n,L-L_n]_T} \leq \sqrt{[L-L_n,L-L_n]_\infty}$$

qui se ramène à l'inégalité de KUNITA-WATANABE.

Ensuite, vérifions la propriété a) de l'énoncé, et (16.2). a) résulte de l'inégalité de KUNITA-WATANABE

$$\int_0^t |H_s||d[M,N]_s| \leqq (\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}([N,N]_t)^{1/2}$$

et entraîne à son tour, par convergence dominée, que $\int_0^t H_s^n d[M,N]_s$ tend vers $\int_0^t H_s d[M,N]_s$ pour tout t. Dans la relation (16.2) $[L_n,N]=H^n\cdot[M,N]$ écrite à l'instant t, il y a donc convergence p.s. du second membre vers $H\cdot[M,N]$. Du côté gauche, nous avons

$$\begin{aligned} |[L-L_n,N]_t| &\leqq ([L-L_n,L-L_n]_t)^{1/2}([N,N]_t)^{1/2} \\ &= (\int_0^t (H_s-H_s^n)^2 d[M,M]_s)^{1/2}([N,N]_t)^{1/2} \end{aligned}$$

qui tend aussi vers 0 par convergence dominée.

Vérifions c). Comme L_n converge vers L dans $\underline{\underline{H}}^1$, donc dans l'espace des martingales uniformément intégrables, 14 entraîne que, pour une suite extraite, L_n converge p.s. uniformément vers L [nous verrons plus loin que le sup de L_n-L converge en fait vers 0 dans L^1], donc la relation $\Delta(H^n\cdot M)=H^n\Delta M$ passe bien à la limite. Il est clair que si M est continue, $H\cdot M$ est continue. Si M est purement discontinue, il en est de même de $H^n\cdot M$, et L_nN est une martingale locale pour toute N continue bornée. Comme L_n est une martingale uniformément intégrable, donc appartient à la classe (D), et N est bornée, L_nN appartient à la classe (D), donc L_nN est une vraie martingale. En tout instant t, elle converge dans L^1 vers LN, qui est donc une martingale, et il en résulte que L est purement discontinue. D'où la relation $H\cdot M^c=(H\cdot M)^c$.

Il nous reste à nous affranchir de l'hypothèse auxiliaire d'intégrabilité. C'est tout simple : nous choisissons des $T_n \uparrow +\infty$ tels que $E[(\int_0^{T_n} H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}] < \infty$, et nous appliquons le résultat précédent aux processus $HI_{[[0,T_n]]}$. D'après l'unicité les intégrales stochastiques ainsi construites se recollent bien... le lecteur regardera les détails.

INTEGRALES STOCHASTIQUES DE PROCESSUS OPTIONNELS

17 Nous nous proposons ici, étant donnés une martingale locale M nulle en 0, et un processus optionnel H satisfaisant à la propriété

(17.1) <u>le processus croissant</u> $(\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ <u>est localement intégrable</u> ,

de définir une intégrale stochastique $H\cdot M$ qui généralise celle du n° II.32. Rappelons que celle-ci était définie pour $M\in\underline{\underline{M}}$, et H optionnel tel que $E[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s]<\infty$, par la propriété

(17.2) $\quad E[[H\cdot M,N]_\infty]=E[\int_0^\infty H_s d[M,N]_s]$ pour tout $N\in\underline{\underline{M}}$.

Nous adoptons une présentation de M. PRATELLI, en démontrant d'abord le lemme

18 LEMME. Si M appartient à $\underline{\underline{M}}$, si $E[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s] < \infty$, on a

(18.1) $\quad \|H\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq cE[(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}]$

DEMONSTRATION. Nous appliquons au second membre de (17.2) l'inégalité de FEFFERMAN (la constante c change de place en place)

$$|E[\int H_s d[M,N]_s]| \leq E[\int |H_s||d[M,N]_s|] \leq cE[(\int H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}].\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

Après quoi on fait parcourir à N la boule unité de $\underline{\underline{BMO}} \subset \underline{\underline{M}}$. D'après le théorème de dualité, $\sup_N E[[H\cdot M,N]_\infty] \geq c\|H\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, et le lemme est établi.

19 THEOREME. Soit M une martingale locale nulle en 0,(*) et soit H un processus optionnel tel que le processus croissant

(19.1) $\quad (\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$

soit localement intégrable. Il existe alors une martingale locale H•M= L et une seule telle que, pour toute martingale N bornée (ou seulement localement bornée) le processus

(19.2) $\quad [L,N]_t - \int_0^t H_s d[M,N]_s$

soit une martingale locale nulle en 0. On a

(19.3) $\quad (H\cdot M)^T = H\cdot M^T$ pour tout temps d'arrêt T

(19.4) $\quad \|H\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq cE[(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}]$

DEMONSTRATION. Nous commençons par une remarque sur l'énoncé : on peut y remplacer les martingales bornées N par les martingales de $\underline{\underline{BMO}}$, mais le gain de généralité n'est qu'apparent : en effet, toute martingale de $\underline{\underline{BMO}}$ est à sauts bornés, donc localement bornée. Cela vaut la peine d'être dit d'une autre manière : les martingales localement bornées et localement dans $\underline{\underline{BMO}}$ sont les mêmes. L'unicité résulte de 16a .

1) Nous commençons par le cas où M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, et où H est borné par une constante h. D'après 18, l'application $M\mapsto H\cdot M$ définie sur $\underline{\underline{M}}$ satisfait à

(19.5) $\quad \|H\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq cE[h([M,M]_\infty)^{1/2}] = ch\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$

Comme $\underline{\underline{M}}$ est dense dans $\underline{\underline{H}}^1$, elle se prolonge de manière unique en une application continue de $\underline{\underline{H}}^1$ dans $\underline{\underline{H}}^1$.

(*)Cette condition ne figure dans l'énoncé que par paresse.

Soit $M\in\underline{\underline{H}}^1$, et soit (M^n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{M}}$ qui converge vers M dans $\underline{\underline{H}}^1$. Posons $L^n=H\cdot M^n$. Nous avons si N est bornée

$$|\int_0^\infty H_s d[M,N]_s - \int_0^\infty H_s d[M^n,N]_s| \leq \int_0^\infty |H_s||d[M-M^n,N]_s|$$

dont l'espérance est majorée par

$$(19.6) \qquad cE[(\int H_s^2 d[M-M^n,M-M^n]_s)^{1/2}]\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq ch\|M-M^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

qui tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. D'autre part

$$E[|[L-L^n,N]_\infty|] \leq c\|L-L^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

qui tend aussi vers 0. Ainsi, dans la relation (17.2)

$$E[[L^n,N]_\infty] = E[\int_0^\infty H_s d[M^n,N]_s]$$

nous avons convergence L^1 des deux côtés, et nous obtenons

$$E[[L,N]_\infty] = E[\int_0^\infty H_s d[M,N]_s]$$

Comme au chapitre II , en remplacant N par N^T , nous voyons que $[L,N]_t - \int_0^t H_s d[M,N]_s$ est une martingale uniformément intégrable, nulle en 0. Et la démonstration du lemme 18 nous donne (19.4). Quant à (19.3), cela résulte de la même propriété dans $\underline{\underline{M}}$, par passage à la limite.

2) Maintenant, nous passons au cas où M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, et H est un processus optionnel <u>tel que</u> $(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ <u>soit intégrable</u>. Nous désignons par H^n le processus optionnel borné obtenu en tronquant H à n, et par L^n l'intégrale stochastique $H^n\cdot M$. D'après (19.4), les L^n forment une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^1$, qui converge donc vers une martingale $H\cdot M=L$. Nous avons comme ci-dessus que

$$E[|[L-L^n,N]_\infty|] \to 0 \qquad (\text{ N bornée })$$

et d'autre part

$$E[|\int H_s d[M,N]_s - \int H_s^n d[M,N]_s|] \leq E[\int |H_s-H_s^n||d[M,N]_s|]$$

tend vers 0 par convergence dominée. D'où à nouveau par passage à la limite $E[[L,N]_\infty] = E[\int H_s d[M,N]_s]$, d'où (19.2) - la martingale étant en fait uniformément intégrable - et à nouveau l'inégalité (19.4) comme dans la démonstration de 18, par l'inégalité de FEFFERMAN. (19.3) est évidente.

3) Finalement, si M est une martingale locale, si H satisfait seulement à la condition d'intégrabilité locale, on considère des temps d'arrêt T réduisant fortement M (donc $M^T\in\underline{\underline{H}}^1$) et tels que $E[(\int_0^T H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}]<\infty$. On sait alors définir $H\cdot M^T$ d'après 2), et on vérifie que ces intégrales stochastiques se recollent bien . Nous laissons les détails au lecteur.

20 REMARQUE. Nous avons vu dans la démonstration le fait suivant, qui mérite peut être d'être souligné : si $M\in\underline{\underline{H}}^1$, si $E[(\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}]<\infty$, et si $N\in\underline{\underline{BMO}}$, on a $H\cdot M\in\underline{\underline{H}}^1$ et

(20.1) $$E[[H\cdot M,N]_\infty] = E[\int_0^\infty H_s d[M,N]_s]$$

la martingale (19.2) étant uniformément intégrable.

De plus, on peut montrer par convergence dans $\underline{\underline{H}}^1$, les faits suivants

- Si M est continue, H•M est continue. Si M est une somme compensée de sauts, (20.1) appliquée avec N continue bornée montre que H•M est une somme compensée de sauts.
- Si T est un temps totalement inaccessible, $\Delta(H\cdot M)_T = H_T\Delta M_T$.
- Si T est un temps prévisible, $\Delta(H\cdot M)_T = H_T\Delta M_T - E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}]$.–

UN EXEMPLE D'INTEGRALE OPTIONNELLE

Nous allons tenir notre promesse du n°II.37 en calculant l'intégrale stochastique $\int_0^t M_s dM_s$. Comme nous savons calculer $\int_0^t M_{s-}dM_s$, tout revient à regarder $\int_0^t \Delta M_s dM_s$. Nous montrons, d'après M.PRATELLI et C.YOEURP :

21 THEOREME. <u>Si</u> (et seulement si) <u>la martingale locale</u> M <u>nulle en 0 est localement de carré intégrable, le processus croissant</u>

(21.1) $$(\int_0^t \Delta M_s^2 d[M,M]_s)^{1/2} = (\sum_{s\leq t} \Delta M_s^4)^{1/2}$$

<u>est localement intégrable</u>, <u>et l'on a alors</u>

(21.2) $$\int_0^t \Delta M_s dM_s = [M,M]_t - \langle M,M\rangle_t$$

DEMONSTRATION. Nous ne chercherons pas à prouver la parenthèse, qui ne présente pas d'intérêt. L'intégrabilité locale de (21.1) résulte de l' inégalité $(\Sigma\,\Delta M_s^4)^{1/2} \leq \Sigma\,\Delta M_s^2$. Pour démontrer (21.2), nous pouvons supposer que M est de carré intégrable, et alors $\Delta M\cdot M$ appartient à $\underline{\underline{H}}^1$. Comme l'égalité (21.2) est triviale lorsque M est continue, nous pouvons supposer que c'est une somme compensée de sauts. Les deux membres de (21.2) sont alors des sommes compensées de sauts, nulles en 0, il suffit de vérifier qu'elles ont les mêmes sauts. On regarde en T prévisible partout >0, en T totalement inaccessible, d'après 20 ci-dessus. Les détails sont laissés au lecteur.

22 Nous conclurons ce paragraphe sur la remarque suivante (qui n'a rien à voir avec l'intégrale stochastique) : si M est une martingale locale, M est localement dans $\underline{\underline{H}}^1$, donc le processus $\int_0 |d[M,N]_s|$ est localement

intégrable, d'après l'inégalité de FEFFERMAN, pour toute martingale locale N localement bornée (= localement dans BMO , cf. 19). Cela permet de définir le crochet oblique $\langle M,N\rangle$, compensateur de $[M,N]$. Voir à ce sujet le travail de YOEURP.

III. INEGALITES

Notre but dans ce paragraphe est assez modeste. Nous voulons démontrer d'après GARSIA (étendu au cas continu par CHOU) que l'inégalité de FEFFERMAN entraîne l'inégalité de DAVIS, avec comme corollaire le fait (utilisé au paragraphe précédent) que $\underline{\underline{H}}^1$ est complet. Puis établir les inégalités de BURKHOLDER classiques, afin de pouvoir dire quand une intégrale stochastique est bornée dans L^p - là encore, nous suivrons GARSIA et CHOU. Nous n'essaierons pas d'entrer dans la théorie moderne des inégalités de martingales, pour laquelle on consultera le livre de GARSIA, et les articles cités dans la bibliographie.

UN LEMME SUR LES PROCESSUS CROISSANTS

GARSIA donne de ce lemme ([21],[24]) une démonstration sans temps d'arrêt, que l'on trouvera en temps continu dans CHOU [26]. Nous préférons rétablir les temps d'arrêt, et ajouter une variante due à STROOCK, qui paraît intéressante ([27]).

23 THEOREME. Soient (A_t) un processus croissant (pouvant présenter un saut à l'infini) et Y une v.a. positive intégrable. On suppose soit que

(23.1) $$E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_T] - A_{T-} \leq E[Y|\underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s. pour tout t.d'a. } T ,$$

soit que A est prévisible nul en 0, et que

(23.2) $$E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_T] - A_T \leq E[Y|\underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s.}$$

On a alors pour tout $\lambda>0$

(23.3) $$\int_{\{A_\infty\geq\lambda\}}(A_\infty-\lambda)P \leq \int_{\{A_\infty\geq\lambda\}}YP$$

Soit φ une fonction croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}_+$, et soit $\Phi(\lambda)=\int_0^\lambda \varphi(t)dt$. On a alors

(23.4) $$E[\Phi(A_\infty)] \leq E[\varphi(A_\infty)Y]$$

DEMONSTRATION. La forme (23.4) est celle de GARSIA. Elle contient (23.3) lorsque $\varphi=I_{[\lambda,\infty[}$, $\Phi(t)=(t-\lambda)^+$. Inversement, (23.3) entraîne (23.4) en intégrant par rapport à la mesure $d\varphi$.

Plaçons nous dans le cas (23.1) et désignons par T le t.d'a. $\inf\{t : A_t \geqq \lambda\}$: nous avons $A_{T-} \leqq \lambda$, et $\{A_\infty \geqq \lambda\} = \{T<\infty\} \cup \{T=\infty,\ A_\infty \geqq \lambda\}$ (ne pas oublier le saut à l'infini !) appartient à $\underline{\underline{F}}_T$. Donc

$$\int_{\{A_\infty \geqq \lambda\}} (A_\infty - \lambda)P \leqq \int_{\{\ \}} (A_\infty - A_{T-})P \leqq \int_{\{\ \}} YP$$

c'est à dire (23.3). Dans le cas (23.2), on peut affirmer que T est prévisible, soit par la note N9, p.9, soit parce que $I_{[[T,\infty[[} = \{(t,\omega) : A_t(\omega) \geqq \lambda\}$ et que A est prévisible. Utilisant une suite qui annonce T, on vérifie que $E[A_\infty - A_{T-} | \underline{\underline{F}}_{T-}] \leqq E[Y|\underline{\underline{F}}_{T-}]$, et on a $\{A_\infty \geqq \lambda\} \in \underline{\underline{F}}_{T-}$. D'où la même chaîne d'inégalités que ci-dessus.

Maintenant, nous citons un résultat purement analytique, qui a été démontré indépendamment par NEVEU [28], et par GARSIA (voir par exemple la démonstration de GARSIA présentée par CHOU dans le Sém.IX, p.206-212 , et celle de NEVEU p.205 de [28]).

Nous dirons que la fonction convexe croissante Φ est à croissance modérée si $\Phi(2t) \leqq c\Phi(t)$.

24 THEOREME. Soient U et V deux v.a. positives telles que

(24.1) $$\int_{\{U \geqq \lambda\}} (U-\lambda)P \leqq \int_{\{U \geqq \lambda\}} VP$$

On a alors

(24.2) $$\| U \|_{L^p} \leqq p \| V \|_{L^p} \quad \text{pour } 1 \leqq p < \infty$$

(24.3) $$E[\Phi(U)] \leqq CE[\Phi(V)]$$

si Φ est à croissance modérée, C dépendant uniquement de la constante c précédant l'énoncé. Enfin, si V est majorée par une constante $\gamma<1$

(24.4) $$E[e^U] \leqq \frac{1}{1-\gamma}$$

25 Voici des exemples d'application du lemme de GARSIA.

a) (B_t) est un processus croissant non adapté, (A_t) sa projection duale optionnelle ($E[B_\infty - B_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] = E[A_\infty - A_{T-}|\underline{\underline{F}}_T]$; on prend $Y=B_\infty$. De même pour la projection duale prévisible (A prévisible, $E[B_\infty - B_T|\underline{\underline{F}}_T] = E[A_\infty - A_T|\underline{\underline{F}}_T]$).

L'inégalité (24.3) est alors due à BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY.

b) (X_t) est une surmartingale de la classe (D), positive, et A le processus croissant prévisible qui l'engendre ; on prend $Y=X^* = \sup_t X_t$.

c) Nous déduirons plus loin de ce lemme l'inégalité de DAVIS pour les martingales, et les inégalités de BURKHOLDER.

UNE VARIANTE DU LEMME 23

Cette variante est due à STROOCK [27], et je la trouve jolie.

26 THEOREME. <u>Soit</u> $(X_t)_{t\leqq+\infty}$ <u>un processus adapté à trajectoires càdlàg, et soit</u> Y <u>une v.a. positive intégrable. Supposons que l'on ait (avec la convention</u> $X_{0-}=0$)

(26.1) $\qquad E[|X_\infty - X_{T-}|\,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[Y|\underline{\underline{F}}_T]$ <u>p.s. pour tout t.d'a.</u> T.

<u>Soit</u> $X^* = \sup_t |X_t|$. <u>On a alors pour tout</u> $\lambda>0$

(26.2) $\qquad \lambda P\{X^* \geqq 2\lambda\} \leqq 2 \int_{\{X^*\geqq\lambda\}} YP$

DEMONSTRATION. Soient $S=\inf\{t : |X_t|\geqq\lambda\}$, $T=\inf\{t : |X_t|\geqq 2\lambda\}$. On a $|X_{S-}|\leqq\lambda$ et

$$P\{X^*\geqq 2\lambda\} = P\{|X_T|\geqq 2\lambda\} \leqq P\{|X_S|\geqq\lambda,\ |X_T-X_{S-}|\geqq\lambda\}$$
$$\leqq \frac{1}{\lambda}\int_{\{|X_S|\geqq\lambda\}} |X_T-X_{S-}|P$$

Comme $\{|X_S|\geqq\lambda\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_S$ et $\underline{\underline{F}}_T$, nous majorons $|X_T-X_{S-}|$ par $|X_\infty-X_{S-}| + |X_\infty-X_T|$, et nous écrivons

$$\int_{\{\ \}} |X_\infty-X_{S-}|P \leqq \int_{\{\ \}} YP$$

pour l'autre terme, nous avons $X_T = \lim_n X_{(T+\frac{1}{n})-}$, et nous appliquons le lemme de Fatou.

27 Cette inégalité n'est pas aussi puissante que (23.3), mais elle permet (par le raisonnement qui conduit à l'inégalité de DOOB classique) de montrer que $\|X^*\|_p \leqq c\|Y\|_p$ pour $1<p<\infty$.

D'autre part, la démonstration peut donner un peu plus. STROOCK remarque que l'on a en fait

(27.1) $\qquad \mu P\{X^*\geqq \lambda+\mu\} \leqq 2\int_{\{X^*\geqq\lambda\}} YP$

(la démonstration ci-dessus correspond à $\mu=\lambda$). Supposons que Y soit bornée par une constante r. Alors une récurrence immédiate donne, en prenant μ constante égale à $4r$

(27.2) $\qquad P\{X^*\geqq 4rn\} \leqq 2^{-n+1}$

d'où il résulte que $E[\exp(\lambda X^*)]<\infty$ pour $\lambda>0$ assez petit. Par exemple, tout cela s'applique au cas où X est une martingale $\underline{\underline{BMO}}$[1] (pour la dernière inégalité, due à JOHN-NIREMBERG, il est possible d'avoir des résultats plus précis au moyen des formules exponentielles, mais nous n'insisterons pas).

1. L'espace des martingales X telles que $E[|X_\infty-X_{T-}|\,|\underline{\underline{F}}_T]$ soit borné uniformément en T contient évidemment $\underline{\underline{BMO}}$, et en fait coïncide avec lui

L'INEGALITE DE DAVIS : PREMIERE MOITIE

28 Nous commençons par renforcer l'inégalité de FEFFERMAN de la manière suivante : soient M et N deux martingales locales, T un temps d'arrêt. Soit $\Omega'=\{T<\infty\}$, muni de la loi $P'=\frac{1}{P(\Omega')}P|_{\Omega'}$, de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}_{T+t}$, et des deux martingales locales $M'_t=M_{T+t}-M_{T-}$, $N'_t=N_{T+t}-N_{T-}$. On vérifie sans peine que

$$[M',M']_t = [M,M]_{T+t} - [M,M]_{T-} \text{ , et de même pour } N'.$$

On en tire

$$\|M'\|_{\underline{\underline{H}}^1} = E[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}]/P\{T<\infty\}$$
$$\|N'\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

L'inégalité de FEFFERMAN nous donne alors

$$E[\int_{[T,\infty[}|d[M,N]_s|]\leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}]\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

qui, si l'on remplace T par T_A ($A\in\underline{\underline{F}}_T$), nous donne la forme conditionnelle

(28.1) $$E[\int_{[T,\infty[}|d[M,N]_s||\underline{\underline{F}}_T] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}|\underline{\underline{F}}_T]\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

Nous posons maintenant

(28.2) $$M^*_t(\omega) = \sup_{s\leq t}|M_s(\omega)| \quad , \quad M^*=M^*_\infty$$

Voici la première moitié de l'inégalité de DAVIS [29], avec sa forme conditionnelle due à GARSIA :

29 THEOREME. <u>On a</u>

(29.1) $$E[M^*] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty}] = c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$$

<u>et, pour tout temps d'arrêt</u> T

(29.2) $$E[M^*_\infty-M^*_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}|\underline{\underline{F}}_T] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty}|\underline{\underline{F}}_T]$$

DEMONSTRATION. Soit S une v.a. <u>quelconque</u> à valeurs positives, non nécessairement un temps d'arrêt, et soit B_t le processus à VI non adapté $\mathrm{sgn}(M_S)I_{\{t\geq S\}}$. Soit (A_t) la projection duale optionnelle de (B_t). On a pour tout temps d'arrêt T $E[\int_{[T,\infty[}|dA_s||\underline{\underline{F}}_T] \leq E[\int_{[T,\infty[}|dB_s||\underline{\underline{F}}_T] \leq 1$. Donc, d'après 4a), la martingale $N=E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ avec une norme majorée par une constante c indépendante de S ($c=2\sqrt{2}$ par ex.).

Supposons d'abord que M soit de carré intégrable. Nous avons alors

$$\begin{aligned} E[|M_S|] = E[\int M_s dB_s] &= E[\int M_s dA_s] \text{ (déf. de la proj. optionnelle)} \\ &= E[M_\infty A_\infty] \text{ (parce que A est adapté)} \\ &= E[M_\infty N_\infty]=E[\int d[M,N]_s] \text{ (mart. de carré intégr.)} \\ &\leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \end{aligned}$$

la constante c variant, comme d'habitude, de place en place. Nous appliquons cela en prenant pour S

$$S(\omega) = \inf\{ t : |M_t(\omega)|\geq M^*(\omega)-\varepsilon\}$$

de sorte que $|M_S| \geq M^* - \varepsilon$ p.s., et il vient que $E[M^*] \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, du moins lorsque M est de carré intégrable. Pour passer au cas général, nous considérons $M \in \underline{\underline{H}}^1$, des $M^n \in \underline{\underline{M}}$ qui convergent vers M dans $\underline{\underline{H}}^1$ (n°12). D'après 14 et l'inégalité de DOOB, quitte à extraire une suite, on peut supposer que les trajectoires $M^n_\bullet(\omega)$ convergent p.s. uniformément vers $M_\bullet(\omega)$, donc M^{n*} converge p.s. vers M^*. On applique alors le lemme de Fatou et on a (29.1).

Pour en déduire (29.2), on pose $\Omega' = \{T < \infty\}$, avec les tribus $\underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}_{T+t}|_{\Omega'}$, la loi $P' = \frac{1}{P(\Omega')} P|_{\Omega'}$, la martingale $M'_t = M_{T+t} - M_{T-}$, de sorte que $[M',M']_t = [M,M]_{T+t} - [M,M]_{T-}$. Alors $E'[M'^*] \leq c\|M'\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ d'après (29.1). Mais d'autre part $M^* \leq M^*_{T-} + M'^*$, donc

$$E[M^*_\infty - M^*_{T-}] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty - [M,M]_{T-}}\,]$$

et en remplaçant T par T_A ($A \in \underline{\underline{F}}_T$) on a l'inégalité (29.2).

En appliquant à (29.2) le lemme de GARSIA 23, et les inégalités analytiques 24, on obtient la première moitié des inégalités de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY [30].

30 THEOREME. Si Φ est une fonction convexe à croissance modérée, on a

(30.1) $$E[\Phi(M^*)] \leq cE[\Phi(\sqrt{[M,M]_\infty})] .$$

L'INEGALITE DE DAVIS : SECONDE MOITIE

31 THEOREME. On a

(31.1) $$E[\sqrt{[M,M]_\infty}\,] \leq cE[M^*]$$

et, pour tout temps d'arrêt T

(31.2) $$E[\sqrt{[M,M]_\infty - [M,M]_{T-}}\;|\underline{\underline{F}}_T] \leq cE[M^*|\underline{\underline{F}}_T]$$

DEMONSTRATION. Nous ne dirons rien sur (31.2), qui se déduit de (31.1) par un conditionnement analogue à celui du n°29, mais plus simple.

Pour établir (31.1), quitte à désintégrer P relativement à la v.a. M_0, nous pouvons supposer que M_0 est une constante a, et quitte à remplacer M par M+ε (ε→0) si a=0, nous pouvons supposer a≠0. Alors nous avons $M^* \geq |a|$, donc $1/M^*$ est bornée. Nous écrivons

(31.3) $$E[[M,M]_\infty^{1/2}\,] \leq (E[M^*])^{1/2}\;(E[\frac{[M,M]_\infty}{M^*}])^{1/2}$$

Appliquons maintenant le n°4 à la martingale $H_t = E[\frac{1}{M^*}|\underline{\underline{F}}_t]$, au processus croissant $B_t = M^*_t$: la martingale locale $B_- \cdot H$ a une norme $\underline{\underline{BMO}}$ majorée par une constante c ($\sqrt{6}$?), et il en est de même de $M_- \cdot H$ puisque $|M_-| \leq B_-$. Posons $L = M_- \cdot H$. Nous avons d'après l'inégalité de FEFFERMAN

(31.4) $E[\int|d[M,L]_s|] \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|L\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$

Mais $[M,L] = [M,M_-\cdot H] = M_-\cdot[M,H] = [M_-\cdot M,H]$. Notons K la martingale locale $2M_-\cdot M = M^2-[M,M]$, et <u>supposons pour commencer que</u> M <u>et</u> K <u>appartiennent toutes deux à</u> $\underline{\underline{H}}^1$. La formule précédente entraîne que, pour tout temps d'arrêt S

(31.5) $|E[[K,H]_S]| = |2E[[M,L]_S]| \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$

Si S réduit la martingale locale $KH - [K,H]$, cela s'écrit simplement $|E[K_SH_S]| \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$. Or H est bornée, K dans $\underline{\underline{H}}^1$; faisant tendre S vers l'infini il vient

$$|E[K_\infty H_\infty]| = |E[\frac{M_\infty^2-[M,M]_\infty}{M^*}]| \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$$

Nous remarquons maintenant que $M_\infty^2/M^* \leq M^*$, donc

(31.6) $E[\frac{[M,M]_\infty}{M^*}] \leq E[M^*] + c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$

Posons, pour alléger les notations , $A=\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, $B=E[M^*]$; (31.3) s'écrit, compte tenu de (31.6)

$$A \leq \sqrt{B}\sqrt{B+cA}$$

d'où nous pouvons tirer , <u>sous l'hypothèse soulignée plus haut</u> (qui implique en particulier que $A<\infty$!) que $A=\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ est bornée dès que $B=E[M^*] \leq 1$. Pour passer au cas général, nous prenons M telle que $E[M^*]\leq 1$, et nous appliquons le résultat précédent à M^T , où T réduit fortement les deux martingales locales M et $K=2M_-\cdot M$, après quoi nous faisons tendre T vers l'infini.

En appliquant à (31.2) le lemme de GARSIA 23, et les inégalités analytiques 24, on obtient la seconde moitié des inégalités de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY

32 THEOREME. <u>Si</u> Φ <u>est une fonction convexe à croissance modérée, on a</u>

(32.1) $E[\Phi(\sqrt{[M,M]_\infty})] \leq cE[\Phi(M^*)]$

D'autre part, nous avons une autre caractérisation de $\underline{\underline{H}}^1$:

33 THEOREME. <u>Les normes</u> $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ <u>et</u> $\|M^*\|_{L^1}$ <u>sont équivalentes</u>. <u>En particulier</u>, $\underline{\underline{H}}^1$ <u>est complet</u>.

LES ESPACES $\underline{\underline{H}}^p$, $p>1$

Nous allons dire un mot de ces espaces, qui sont assez banaux - bien moins intéressants que $\underline{\underline{H}}^1$ (en fait, la mode en analyse et en théorie des martingales semble se tourner vers les espaces $\underline{\underline{H}}^p$, $p<1$, qui ne sont pas des espaces de Banach).

34 DEFINITION. Si M est une martingale locale, on pose $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}=\|\sqrt{[M,M]_\infty}\|_{L^p}$, et on désigne par $\underline{\underline{H}}^p$ l'ensemble des M tels que $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}<\infty$.

Le lecteur vérifiera que $\|\ \|_{\underline{\underline{H}}^p}$ est bien une norme pour $1\leq p\leq\infty$.

$\underline{\underline{H}}^\infty$ n'est guère intéressant. $\underline{\underline{H}}^1$ a déjà été vu, quant à $\underline{\underline{H}}^p$ pour $1<p<\infty$, son sort est réglé par les inégalités de BURKHOLDER et de DOOB :

35 THEOREME. Les normes $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$ et $\|M^*\|_{L^p}$ sont équivalentes pour $1<p<\infty$.

$\underline{\underline{H}}^p$ est identique à l'espace des martingales bornées dans L^p, avec une norme équivalente à la norme $M\mapsto\|M_\infty\|_{L^p}$.

Soit q l'exposant conjugué de p. L'inégalité qui correspond à l'inégalité de FEFFERMAN - mais qui est bien moins profonde - est l'inégalité II.22, que nous recopions :

36 THEOREME. Si M et N sont deux martingales locales

(36.1) $$E[\int|d[M,N]|_s] \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}\|N\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

37 COROLLAIRE. Si M appartient à $\underline{\underline{H}}^p$, N à $\underline{\underline{H}}^q$, la martingale locale $K=MN-[M,N]$ appartient à $\underline{\underline{H}}^1$.

En effet, K^* est dominé par $M^*N^*+\int_0^\infty|d[M,N]_s|\in L^1$.

Le dual de $\underline{\underline{H}}^p$ est évidemment $\underline{\underline{H}}^q$, la forme bilinéaire qui les met en dualité étant $(M,N)\mapsto E[M_\infty N_\infty]=E[[M,N]_\infty]$.

Nous conclurons ce chapitre sur une remarque de M.PRATELLI, qui a un intérêt évident : elle permet de reconnaître quand une intégrale stochastique optionnelle est bornée dans L^p.

38 THEOREME. Soit M une martingale locale, et soit H un processus optionnel tel que $E[(\int H_s^2 d[M,M]_s)^{p/2}]<\infty$. Alors $H\cdot M$ appartient à $\underline{\underline{H}}^p$.

DEMONSTRATION. On écrit l'inégalité de KUNITA-WATANABE

$$E[\int|H_s||d[M,N]_s|] \leq (E[(\int H_s^2 d[M,M]_s)^{p/2}])^{1/p}\|N\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

Prenons N bornée, posons $L=H\cdot M$, et désignons par K le premier facteur du second membre. Par définition de l'intégrale stochastique optionnelle, $[L,N]-H\cdot[M,N]$ est une martingale locale, donc aussi $LN-H\cdot[M,N]$.

Si T réduit celle-ci, nous avons

$$|E[L_T N_T]| \leqq K\|N\|_{\underline{\underline{H}}^q} \leqq cK\|N_\infty\|_{L^q}$$

Faisant parcourir à N_∞ un ensemble dense dans la boule unité de $L^q(\underline{\underline{F}}_T)$ nous voyons que $\|L_T\|_{L^p} \leqq cK$, après quoi nous faisons tendre T vers l'infini.

39 REMARQUE. Nous avons vu le même résultat pour p=1 au n°20.
Il est tout naturel de se poser alors la même question pour $\underline{\underline{BMO}}$: si M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, et si H est un processus optionnel borné par 1, a t'on $\|H\cdot M\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$? C'est évident si H est prévisible.

Tout d'abord, on a $M\in\underline{\underline{M}}$, donc le calcul des sauts de H·M qui figure au n°II.34 nous donne, si l'on pose H·M=L

$$\begin{aligned}\Delta L_T &= H_T\Delta M_T \text{ si T est totalement inaccessible}\\ &= H_T\Delta M_T - E[H_T\Delta M_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \text{ si T est prévisible partout >0}\end{aligned}$$

montre que H·M est à sauts bornés.

D'autre part, la relation (35.2) du th. II.35 se conditionne en

$$\begin{aligned}E[(L_\infty - L_T)^2|\underline{\underline{F}}_T] &\leqq E[\int_{]T,\infty[} H_s^2 d[M,M]_s|\underline{\underline{F}}_T]\\ &\leqq E[[M,M]_\infty - [M,M]_T|\underline{\underline{F}}_T]\end{aligned}$$

d'où en définitive, si $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leqq 1$, l'inégalité $\|L\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leqq \sqrt{5}$.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

UN COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

(P.A. Meyer)

CHAPITRE VI . COMPLEMENTS AUX CHAPITRES I-V

Ce chapitre contient une série de résultats en désordre, liés aux sujets traités pendant l'année 1974/75.

I. L'EXISTENCE DE [M,M] ET L'INTEGRALE DE STRATONOVITCH

L'intégrale de STRATONOVITCH est une intégrale stochastique définie pour certaines classes de processus à trajectoires continues, et qui a l'avantage d'obéir à la formule du changement de variables ordinaire, celle du calcul différentiel, et non à la formule d'ITO. Pour présenter cela, nous commençons par quelques remarques sur les semimartingales continues.

1 Soit X une semimartingale continue, nulle en 0 . D'après IV.32 d), X est une semimartingale spéciale ; soit $X=M+A$ sa décomposition canonique. Il existe des temps d'arrêt T tels que $\int_0^T |dA_s| \in L^1$, et que X soit bornée sur $[\![0,T]\!]$. Posons $X^T=\overline{X}$, $M^T=\overline{M}$, $A^T=\overline{A}$; la martingale $\overline{M}$ est uniformément intégrable et l'on a pour tout temps d'arrêt S $\Delta\overline{X}_S=0$.

Si S est totalement inaccessible, comme $\overline{A}$ est prévisible, on a $\Delta\overline{A}_S=0$, donc $\Delta\overline{M}_S=0$ aussi.

Si S est prévisible, on a $E[\Delta\overline{M}_S|\underline{\underline{F}}_{S-}]=0$, donc $E[\Delta\overline{A}_S|\underline{\underline{F}}_{S-}]=0$. Comme $\overline{A}$ est prévisible, cela entraîne $\Delta\overline{A}_S=0$, puis $\Delta\overline{M}_S=0$.

Ainsi, $\overline{M}$ et $\overline{A}$ sont continus. et en faisant tendre T vers l'infini on voit que M et A sont continus. Ainsi, nous avons établi

<u>Toute semimartingale continue nulle en 0 admet une décomposition en une martingale locale continue et un processus VF continu.</u>

(L'extension aux processus non nuls en 0 est bien claire ! $X=X_0+M+A$).

2 Soient H et X deux semimartingales continues. Définissons l'intégrale de STRATONOVITCH $\mathop{S}_0^t H_u dX_u$ par

$$(2.1)\qquad \mathop{S}_0^t H_u dX_u = \int_0^t H_u dX_u + \frac{1}{2}\langle H^c,X^c\rangle_t$$

où H^c,X^c sont, comme d'habitude, les parties <u>martingales continues</u> de H et X. Alors que l'intégrale stochastique ordinaire est limite en probabilité de sommes $\Sigma_i H_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ sur des subdivisions de $[0,t]$, l'intégrale de STRATONOVITCH est limite de sommes de la forme $\Sigma_i H_{s_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$, avec $s_i = \frac{1}{2}(t_i+t_{i+1})$, ainsi que d'intégrales de la forme $\int_0^t H_s^n dX_s^n$, intégrales de Stieltjes relatives aux lignes polygonales obtenues par interpolation linéaire de H et X entre les instants t_i^n de la n-ième subdivision dyadique. Surtout, l'intégrale de STRATONOVITCH possède une formule de changement de variables intéressante. Considérons une fonction f <u>de classe</u> $\underline{\underline{C}}^3$ <u>sur</u> $\mathbb{R}$ (l'extension au cas vectoriel est possible). Le processus $f'(X_t)$ est une semimartingale continue pour t>0, que nous noterons H_t . Décomposant X en X_0+M+A, avec $M=X^c$, nous avons d'après la formule d'ITO

$$H_t = H_0 + \int_0^t f''(X_s)dM_s + [\int_0^t f''(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'''(X_s)d\langle M,M\rangle_s]$$

d'où la partie martingale continue H^c, égale à la première intégrale stochastique, et aussi

$$\langle H^c,M\rangle_t = \int_0^t f''(X_s)d\langle M,M\rangle_s$$

Par conséquent, d'après la formule d'ITO

$$(2.2)\quad \overset{t}{\underset{0}{S}} f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle M,M\rangle_s = f(X_t)-f(X_0)$$

et l'on voit que l'intégrale de STRATONOVITCH obéit à la formule du changement de variables ordinaire, non à celle d'ITO. L'ennui, c'est que nous avons dû supposer f de classe $\underline{\underline{C}}^3$ pour que $f'(X_s)$ soit une semimartingale. Notre but maintenant va être de donner un sens à l'intégrale $\overset{t}{\underset{0}{S}} H_s dX_s$ pour une classe de processus H plus large que celle des semimartingales, et contenant les processus obtenus par l'opération de fonctions de classe $\underline{\underline{C}}^1$ sur les semimartingales : cela donnera un sens à la partie gauche de (2.2) pour une fonction f de classe $\underline{\underline{C}}^2$, et nous étendrons alors la validité de (2.2).

Auparavant, nous allons poser le problème de manière plus générale, en sortant du cas continu : nous n'avons défini le processus croissant [X,X] que pour des semimartingales ; peut on le définir pour des classes plus larges de processus ? Cela nous amène aux théorèmes d'approximation de Catherine DOLEANS-DADE, et à diverses questions intéressantes.

APPROXIMATION DE [X,X] AU MOYEN DE SUBDIVISIONS

3 THEOREME. <u>Soit</u> X=M+A <u>une semimartingale</u>, <u>telle que la martingale</u> M <u>appartienne à</u> $\underline{\underline{M}}$, <u>que le processus</u> A <u>soit à</u> <u>V.I.</u>, <u>nul en</u> 0, <u>et tel que</u> $\int_0^\infty |dA_s| \in L^2$. <u>Les variables aléatoires</u>

(3.1) $$S_\tau(X) = X_0^2 + \Sigma_i \, (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

<u>associées aux différentes subdivisions finies de l'intervalle</u> $[0,t]$ $\tau=(0=t_0<t_1\ldots<t_{n+1}=t\leqq+\infty)$ <u>sont uniformément intégrables, et convergent vers</u> $[X,X]_t$ <u>dans</u> L^1 <u>lorsque le pas</u>[1] <u>de la subdivision tend vers</u> 0.

DEMONSTRATION. a) <u>Intégrabilité uniforme</u>. Nous écrivons que $S_\tau(X) \leqq 2(S_\tau(M)+S_\tau(A))$. Il n'y a aucun problème pour $S_\tau(A)$, majorée par $(\int_{0-}^{\infty} |dA_s|)^2 \in L^1$. Regardons $S_\tau(M)$. Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon>0$, les $S_\tau(M)$ sont majorées par des v.a. de la forme H+K, où K est contenu dans la boule de rayon ε de L^1, H restant borné dans L^2. L'intégrabilité uniforme des $S_\tau(M)$ en résultera.

Pour cela, nous désignons par U_t la martingale $E[M_\infty I_{\{|M_\infty|\leq\lambda\}}|\underline{\underline{F}}_t]$, et posons V=M-U. Nous avons $S_\tau(M) \leqq 2(S_\tau(U)+S_\tau(V))$. Nous avons

$$2E[S_\tau(V)] = 2E[V_\infty^2] = 2\int_{\{|M_\infty|>\lambda\}} M_\infty^2 P$$

qui est $\leqq \varepsilon$ si λ est choisi assez grand. Ce choix étant fait, évaluons $E[(S_\tau(U))^2]$: c'est (en convenant que $U_0^2 = (U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^2$ pour i=-1)

$$E[\,\Sigma_i(U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^4 + 2\Sigma_i(U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^2\Sigma_{j>i}(U_{t_{j+1}}-U_{t_j})^2].$$

Dans le premier Σ_i , puisque U est majorée en valeur absolue par λ, nous majorons $(\;)^4$ par $(2\lambda)^2(\;)^2$. Dans le second Σ_i, nous remplaçons Σ_j par $(U_t-U_{t_{i+1}})^2$, qui a la même espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}_{t_{i+1}}$, puis nous majorons cela à nouveau par $(2\lambda)^2$. Reste donc

$$E[(S_\tau(U))^2] \leqq (4\lambda^2+8\lambda^2)E[\Sigma_i(U_{t_{i+1}}-U_{t_i})^2] = 12\lambda^2E[U_\infty^2] \leqq 12\lambda^4$$

qui est bien borné indépendamment de τ.

Noter qu'on aurait pu remplacer les subdivisions par des t_i, par des subdivisions déterminées par des temps d'arrêt T_i.

b) <u>Convergence dans</u> L^1. Nous coupons M en deux : d'une part N, formée de la partie continue et des n premiers termes de la somme compensée des sauts, et d'autre part Q, reste de la somme compensée des sauts. Ainsi

$$X = M+A = N+Q+A \quad \text{, et nous posons } Y= N+A$$

Nous allons montrer que $[X,X]_t-[Y,Y]_t$ et $S_\tau(X)-S_\tau(Y)$ sont petits dans L^1 si n est grand (uniformément en τ), puis que $S_\tau(Y)-[Y,Y]_t$ est <u>petit dans</u> L^1 si le pas de τ est assez petit.

1. Si $t=+\infty$, le pas de la subdivision doit être défini raisonnablement.

Pour le premier terme, nous écrivons $X=Y+Q$, donc $[X,X]=[Y,Y]+[2Y+Q,Q]$, donc[1] $E[|[X,X]_t-[Y,Y]_t|] = E[|[2Y+Q,Q]_t|] \leq (E[[2Y+Q,2Y+Q]_t])^{1/2}(E[[Q,Q]_t])^{1/2}$. Le dernier terme vaut $\|Q\|$, petit pour n grand. Dans l'autre , nous écrivons $2Y+Q=2X-Q$, et nous majorons $[2X-Q,2X-Q]$ par $2([2X,2X]+[Q,Q])$. Le premier terme reste donc borné, et $E[|[\,]-[\,]|]\to 0$.

Pour $|S_\tau(X)-S_\tau(Y)|$, le raisonnement est exactement le même, avec de moins bonnes notations : après tout, $S_\tau(X)$ n'est rien d'autre que le crochet $[,]$ de X considérée sur l'ensemble de temps discret τ !

Maintenant, regardons $Y = N+A$: nous avons le droit de faire passer les n sauts compensés du côté du processus VI, autrement dit, de supposer que N est <u>continue</u>. Nous écrivons alors (toujours avec la même convention relative à 0) :

$$S_\tau(Y) = S_\tau(N) + S_\tau(A) + 2\Sigma_i(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$$

$S_\tau(A)$ converge <u>p.s.</u> vers $\Sigma_{s\leq t}\, \Delta A_s^2 = \Sigma_{s\leq t}\, \Delta Y_s^2$: il s'agit ici d'un résultat sur les fonctions à variation bornée, que nous laissons au lecteur. Le dernier terme est majoré en valeur absolue par $\sup_i |N_{t_{i+1}}-N_{t_i}|.\int_0^t|dA_s|$: il tend vers 0 <u>p.s.</u> (donc en Prob.) d'après la continuité uniforme des trajectoires de N sur $[0,t]$. Reste donc à montrer que $S_\tau(N)$ converge en probabilité vers $[N,N]_t$ - car, compte tenu de l'intégrabilité uniforme établie en a), la convergence en probabilité équivaut à la convergence L^1.

<u>Commençons par le cas où</u> N <u>est bornée par une constante</u> λ . Nous avons alors, en utilisant le fait que $N_t^2-[N,N]_t$ est une martingale

$$E[(S_\tau(N)-[N,N]_t)^2] = E[(S_\tau(N)-\Sigma_i\, [N,N]_{t_i}^{t_{i+1}})^2]$$

$$= E[\,\Sigma_i\,((N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2-[N,N]_{t_i}^{t_{i+1}})^2\,]$$

que nous développons : $E[\Sigma_i\,(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^4]$ est majoré par $E[\,\sup_i\,(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2.\,\Sigma_i(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2]$. Le $\sup_i$ tend p.s. vers 0 en restant borné par $4\lambda^2$, tandis que le Σ_i <u>reste borné dans</u> L^2, comme on l'a vu dans la démonstration de a). On applique alors l'inégalité de Schwarz.

De même, nous majorons $\Sigma_i([N,N]_{t_i}^{t_{i+1}})^2$ par $\sup_i\, [N,N]_{t_i}^{t_{i+1}}\, .\, [N,N]_t$. $[N,N]_t$ appartient à L^2 d'après la formule

$$E[[N,N]_\infty^2\,] = 2E[\int([N,N]_\infty-[N,N]_t)d[N,N]_t] = 2E[\int(N_\infty-N_t)^2d[N,N]_t]$$

$$\leq 8\lambda^2E[[N,N]_\infty\,]$$

1. L'inégalité de KUNITA-WATANABE s'applique aux semimartingales !

tandis que le $\sup_i$ tend vers 0 d'après la continuité uniforme des trajectoires de $[N,N]$, en restant dominé par $[N,N]_\infty \in L^2$. Après quoi on applique l'inégalité de Schwarz.

Enfin, le terme mixte se majore par $\sup_i (N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2.[N,N]_t$, et se traite de même.

Pour nous affranchir de la condition sur N, introduisons le temps d'arrêt

$$T = \inf \{ s : |N_s| \geqq \lambda \}$$

et choisissons λ assez grand pour que $P\{T<t\}<\varepsilon$; sur l'ensemble $\{T=t\}$ nous avons $S_\tau(N)=S_\tau(N^T)$, $[N,N]_t=[N^T,N^T]_t$, donc

$$P\{|S_\tau(N)-[N,N]_t|>\varepsilon\} \leqq P\{T<t\} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{T=t\}}(S_\tau(N)-[N,N]_t)^2 P$$

est $<\varepsilon$ dès que le pas de la subdivision est assez petit.

4 THEOREME[1]. Soit X une semimartingale. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on peut affirmer que $S_\tau(X)$ converge vers $[X,X]_t$ en probabilité lorsque le pas de la subdivision τ de $[0,t]$ tend vers 0 , pour $0<t<\infty$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer que $X_0=0$.

$$R = \inf \{ s : |\Delta X_s| \geqq \lambda \}$$

et choisissons λ assez grand pour que $P\{R<t\}<\varepsilon$. Soit Y la semimartingale $X_s I_{\{s<R\}}+X_{R-}I_{\{s\geq R\}}$; on a $[X,X]_t=[Y,Y]_t$, $S_\tau(X)=S_\tau(Y)$ sur un ensemble de probabilité voisine de 1, donc il suffit de prouver le théorème pour Y. Soit Y=M+A la décomposition canonique de la semimartingale spéciale Y, et soit $V_s=\int_0^s |dA_u|$; choisissons μ assez grand pour que $P\{S\leqq t\}<\varepsilon$, où

$$S = \inf \{ s : V_s \geqq \mu \}$$

est un temps d'arrêt prévisible (N9, p.9). Soit (S_n) une suite annonçant S, et soit n assez grand pour que $P\{S_n \leqq t\}<\varepsilon$. Choisissons ν assez grand pour que $P\{T\leqq t\}\leqq\varepsilon$, où

$$T=S_n \wedge \inf \{s : |M_s| \geqq \nu\}$$

Le processus A^T a une variation totale bornée par μ. Donc ses sauts sont aussi bornés par μ, et comme les sauts de Y sont bornés par λ, les sauts de M^T sont bornés par $\lambda+\mu$. Comme M est bornée par ν sur $[\![0,T[\![$, M^T est bornée par $\lambda+\mu+\nu$. Donc le théorème 3 s'applique à $Z=Y^T=M^T+A^T$, et on conclut en remarquant que $[X,X]_t=[Z,Z]_t$, $S_\tau(X)=S_\tau(Z)$ sauf sur un ensemble de probabilité au plus 2ε.

Maintenant, pour quels processus X peut on établir un résultat analogue au théorème 3 ? au théorème 4 ? Le point important est ici le fait que ces classes sont beaucoup plus riches que celle des semimartingales : d'une manière imprécise, elles sont stables par les

1.Un résultat très proche vient d'être démontré par D.LEPINGLE.

opérations $\underline{\underline{C}}^1$, alors que la classe des semimartingales est stable par les opérations $\underline{\underline{C}}^2$. Précisément :

5 THEOREME. <u>Soient</u> $X=(X^1,\ldots,X^d)$ <u>une semimartingale à valeurs dans</u> $\mathbb{R}^d$, f <u>une fonction de classe</u> $\underline{\underline{C}}^1$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^d$, Y <u>le processus réel</u>

$$(5.1)\qquad f\circ X = f(X^1,\ldots,X^d)\ .$$

<u>Alors, avec les notations du th.3, pour tout</u> t <u>fini</u> $S_\tau(Y)$ <u>converge en probabilité vers la v.a.</u>

$$(5.2)\qquad [Y,Y]_t = \Sigma_{ij}\int_0^t D_if(X_s)D_jf(X_s)d\langle X^{ic},X^{jc}\rangle_s + \Sigma_{s\leq t}\,\Delta Y_s^2$$

<u>Si les</u> X^i <u>satisfont aux hypothèses du théorème</u> 3, <u>et si les dérivées de</u> f <u>sont bornées sur</u> $\mathbb{R}^d$, <u>la convergence a lieu dans</u> L^1.

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer que $X_0=0$. Ensuite, par un argument presque identique à celui du théorème 4, nous pouvons nous ramener au cas où X est une semimartingale vectorielle <u>bornée</u>, dont les composantes satisfont aux hypothèses du th.3. Comme X est bornée, nous pouvons nous ramener au cas où $f\in\underline{\underline{C}}^1$ est à support compact. Nous pouvons alors trouver des régularisées $f_n\in\underline{\underline{C}}^2$, dont les dérivées du premier ordre convergent vers les dérivées correspondantes de f, uniformément sur $\mathbb{R}^d$, en restant bornées sur tout $\mathbb{R}^d$. Les f_n sont donc lipschitziennes de rapport K indépendant de n, tandis que les $f_{nm}=f_n-f_m$ sont lipschitziennes de rapport ε_{nm} tendant vers 0 lorsque n,m tendent vers $+\infty$.

Pour simplifier les notations, nous supposerons que d=1.

Nous avons d'abord

$$(5.3)\qquad S_\tau(f_n\circ X) \leq K^2 S_\tau(X)$$

D'après le th.3, les v.a. $S_\tau(f_n\circ X)$ sont toutes uniformément intégrables, et la convergence en probabilité équivaut à la convergence dans L^1.

Nous avons ensuite, comme $f_n=f_m+f_{nm}$

$$(5.4)\qquad |S_\tau(f_n\circ X)-S_\tau(f_m\circ X)| \leq S_\tau(f_{nm}\circ X)+ 2\sqrt{S_\tau(f_m\circ X)}\sqrt{S_\tau(f_{nm}\circ X)}$$
$$\leq (\varepsilon_{nm}^2+2K\varepsilon_{nm})S_\tau(X)$$

d'où il résulte que, pour n et m assez grands, l'espérance du premier membre est petite indépendamment de τ . De même, comme $f_n\circ X$ et $f_m\circ X$ sont des semimartingales, leurs crochets [,] existent, et sont la limite en probabilité des $S_\tau(f_n\circ X)$, $S_\tau(f_m\circ X)$ relatives à des subdivisions de [0,t]. On peut donc passer à la limite sur (5.4). Plus généralement, sur un intervalle [s,t], s<t

$$|[f_n\circ X,f_n\circ X]_s^t-[f_m\circ X,f_m\circ X]_s^t| \leq (\varepsilon_{nm}^2+2K\varepsilon_{nm})[X,X]_s^t$$

d'où en coupant [0,t] en petits bouts et en sommant

(5.5) $\int_0^t |d[f_n\circ X,f_n\circ X]_s - d[f_m\circ X,f_m\circ X]_s| \leqq (\varepsilon_{nm}^2+2K\varepsilon_{nm})[X,X]_t$

d'où une suite de Cauchy en norme variation. Comme f_n est de classe $\underline{\underline{C}}^2$, la formule d'ITO nous dit que la partie martingale continue de $f_n\circ X$ est $\int_0^t f_n'\circ X_s dX_s^c$, d'où

$$[f_n\circ X,f_n\circ X]_t = \int_0^t (f_n'\circ X_s)^2 d\langle X^c,X^c\rangle_s + \Sigma_{s\leqq t}\ \Delta(f_n\circ X)_s^2$$

et la convergence en norme variation permet d'identifier la limite comme la v.a. (5.1). Maintenant, le reste est facile :

$$E[|S_\tau(f\circ X)-[Y,Y]_t|] \leqq E[|S_\tau(f\circ X)-S_\tau(f_n\circ X)|]+E[|[Y,Y]_t-[f_n\circ X,f_n\circ X]_t|]$$
$$+E[|S_\tau(f_n\circ X)-[f_n\circ X,f_n\circ X]_t|]$$

On choisit d'abord n grand , pour rendre la somme des deux premiers termes au second membre petite, indépendamment de τ ((5.4) et (5.5)), après quoi on prend le pas de τ assez petit pour rendre petit le dernier terme.

La dernière phrase de l'énoncé provient de l'intégrabilité uniforme des $S_\tau(f\circ X)$ si f est lipschitzienne (même argument que pour (5.3)).

6 REMARQUE. L'ensemble des processus Y du type considéré en 5 est un espace vectoriel (il n'en aurait pas été de même si l'on s'était borné à la dimension d=1). On peut donc "polariser" le théorème 5 pour définir [Y,Y'] pour tout couple de processus représentables sous la forme (5.1).

La principale conséquence du th.5 est le fait que le processus (5.2) ne dépend que du processus Y lui-même, non de la représentation $f\circ X$ choisie.

7 Nous pouvons maintenant définir en toute généralité l'intégrale de STRATONOVITCH. Soit $\mathfrak{S}$ l'espace des processus Y admettant une représentation de la forme (5.1). Si H appartient à $\mathfrak{S}$, si X est une semimartingale, posons

(7.1) $$\mathop{S}_0^t H_{u-}dX_u = \int_0^t H_{u-}dX_u + \tfrac{1}{2}[H,X^c]_t$$

Si f est une fonction de classe $\underline{\underline{C}}^2$(nous restons en dimension d=1 pour simplifier), nous avons

(7.2) $$f(X_t)-f(X_0) = \mathop{S}_0^t f'(X_{s-})dX_s + \Sigma_{s\leqq t}\ (f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s)$$

c'est à dire la même formule que lorsque X est un processus à VF. En effet, si nous remplaçons l'intégrale de STRATONOVITCH $\mathop{S}_0^t f'(X_{s-})dX_s$

par sa valeur (7.1), puis $[f'\circ X,X^c]_t$ par sa valeur tirée de (5.2), soit $\int_0^t f''(X_s)d\langle X^c,X^c\rangle_s$, nous retombons simplement sur la formule d'ITO. Ce n'est évidemment qu'une petite astuce de notation, le résultat d'ordre mathématique étant le théorème 5.

$\int_0^t H_{u-}dX_u$ ne s'interprète plus comme limite de sommes de la forme $\Sigma_i H_{s_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$, avec $s_i=\frac{1}{2}(t_i+t_{i+1})$: ce résultat n'est vrai (et assez facile) que pour des semimartingales continues ; je le laisserai de côté. En revanche, ce que l'on peut toujours démontrer, c'est que, bien sûr

$$\Sigma_i H_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) \text{ converge en P. vers } \int_0^t H_{u-}dX_u$$

et d'après le théorème 5

$$\Sigma_i(H_{t_{i+1}}-H_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) \text{ converge vers } [H,X]_t$$

(pour simplifier, on prend $X_0=0$). Alors

$$\Sigma_i H_{t_{i+1}}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) \text{ converge en P. vers } \int_0^t H_{u-}dX_u + [H,X]_t \tag{7.3}$$

C'est dans un cours de KUNITA (diffusions et contrôle, Paris, 1973/74) que j'ai vu mentionnée l'intégrale de STRATONOVITCH, dans le cas des martingales (ou semimartingales) continues. On y trouvera des détails supplémentaires, par exemple le résultat d'approximation omis ci-dessus.

Il me semble qu'il y a beaucoup à dire sur la théorie de la "variation quadratique" [M,M] pour des processus M qui ne sont pas des semimartingales - théorie liée à celle de l'énergie. Le sujet a été abordé par BROSAMLER, mais on sait peu de choses en général.

II. FONCTIONS CONVEXES ET SEMIMARTINGALES

Lorsque X est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, f une fonction $\underline{\underline{C}}^2$ sur $\mathbb{R}^d$, la formule d'ITO nous dit que $f\circ X$ est une semimartingale. Y a t'il d'autres fonctions que les fonctions $\underline{\underline{C}}^2$ qui opèrent sur la classe des semimartingales ? En voici un exemple, raisonnablement proche de la classe $\underline{\underline{C}}^2$.

8 THEOREME. Soient X une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, f une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$. Alors $f\circ X$ est une semimartingale.

DEMONSTRATION. Nous allons traiter uniquement le cas réel, mais le lecteur se convaincra aisément que seules les notations se compliquent en dimension $d>1$.

Nous commençons par traiter le cas où $X=M+A$, où M est une martingale (non nécessairement nulle en 0) bornée par une constante C, et A un processus VI nul en 0, tel que $\int_0^\infty |dA_s| \leqq C$. Alors X prend ses valeurs dans l'intervalle $[-2C,+2C]$, et le processus $f\circ X$ est borné. Soit K une constante de Lipschitz de f sur l'intervalle $[-2C,+2C]$ (si $d>1$, voir le n° 16). Nous prouvons :

<u>Le processus</u> $(f\circ X_t + K\int_0^t |dA_u|) = Y_t$ <u>est une sousmartingale</u>.

Ainsi, $f\circ X$ est la différence de deux sousmartingales, c'est une semimartingale.

Pour prouver cela, nous écrivons si $s<t$

$$E[Y_t-Y_s|\underline{\underline{F}}_s] = E[f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)+K\int_s^t|dA_u|\,|\underline{\underline{F}}_s] + E[f(M_t+A_s)|\underline{\underline{F}}_s] - f(M_s+A_s)$$

Comme M_t, A_t, A_s appartiennent à l'intervalle $[-C,C]$, nous avons

$$|f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)| \leqq K|A_t-A_s| \leqq K\int_s^t |dA_u|$$

de sorte que la première espérance conditionnelle est positive. Quant à la différence $E[f(M_t+A_s)|\underline{\underline{F}}_s]-f(M_s+A_s)$, elle est positive d'après l'inégalité de Jensen, M étant une martingale.

Maintenant, nous étendons le résultat en supposant que <u>les sauts de</u> X <u>sont bornés par une constante</u> λ (y compris le saut X_0 en 0). Alors X est spéciale, et admet une décomposition $X=N+B$, où le processus VF B est prévisible, nul en 0.

$$S = \inf \{ t : \int_0^t |dB_s| \geqq \mu \}$$

qui est prévisible (N9, p.9), et soit S_n une suite annonçant S ; soit

$$T = S_n \wedge \inf \{t : |N_t| \geqq \nu \}$$

Le processus $B^T=A$ a une variation totale bornée par μ , donc son saut en T est borné par μ, et comme le saut de X en T est borné par λ, celui de N est borné par $\lambda+\mu$. Comme N est bornée par ν sur $]\!]0,T[\![$, N^T est bornée par $\lambda+\mu+\nu$, et finalement le résultat précédent s'applique à X^T avec $C=\lambda+\mu+\nu$. D'autre part, si μ,ν,n sont pris assez grands, T est arbitrairement grand, et il en résulte que $f\circ X$ est une semimartingale.

Enfin, passons au cas général : soit $R_n = \inf\{t : |\Delta X_t|>n\}$; X coïncide sur $[\![0,R_n[\![$ avec une semimartingale à sauts bornés, donc $f\circ X$ coïncide sur $[\![0,R_n[\![$ avec une semimartingale. En ajoutant un processus sautant seulement en R_n , on a la même chose sur $[\![0,R_n]\!]$, et on conclut par le th.IV.33.

9 La conséquence la plus importante est évidemment le fait que, si X est une semimartingale, $|X|$ en est une aussi . Par conséquent

<u>si</u> X <u>et</u> Y <u>sont des semimartingales</u>, $X\wedge Y$ <u>et</u> $X\vee Y$ <u>en sont aussi</u>.

D'autre part, on peut améliorer un peu le théorème 5, grâce à ce résultat - mais la classe de fonctions que l'on obtient ainsi ne s'explicite bien qu'en dimension 1 .

10 THEOREME. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale réelle</u>, <u>et soit</u> f <u>une fonction sur</u> $\mathbb{R}$, <u>primitive d'une fonction càdlàg</u> $\varphi=D_+f$. <u>Soit</u> $Y=f\circ X$. <u>Alors</u>, <u>avec les notations du th.3</u>, <u>pour tout</u> t <u>fini</u> $S_\tau(Y)$ <u>converge en probabilité vers</u>

$$(10.1) \qquad \int_0^t \varphi^2\circ X_s d\langle X^c,X^c\rangle_s + \Sigma_{s\leq t}\ \Delta Y_s^2 \ .$$

DEMONSTRATION. Nous allons procéder comme dans la démonstration du théorème 5. Nous nous ramenons au cas où X est bornée. Nous pouvons alors supposer que f est une fonction à support compact. La fonction càdlàg φ est donc nulle hors d'un intervalle [-C,+C], et d'intégrale nulle puisque c'est une dérivée. Nous approchons uniformément φ par des fonctions étagées continues à droite φ_n , à support dans [-C,+C] et d'intégrale nulle. Les φ_n ont alors des primitives à support compact f_n qui convergent uniformément vers f, et les f_n sont linéaires par morceaux, donc différences de fonctions convexes. Les processus $f_n\circ X$ sont alors des semimartingales, et le raisonnement du théorème 5 nous dit exactement ceci : <u>si le th.10 est vrai pour chaque</u> f_n , <u>il est vrai aussi pour</u> f.

Nous allons démontrer qu'il est vrai pour toute fonction f_n, par une méthode qui aboutit à redémontrer le théorème 8, de manière moins élémentaire, mais qui par ailleurs fournit des informations intéressantes, malheureusement, en dimension d=1 seulement [1].

11 Nous continuons à supposer, pour simplifier, que X est une surmartingale bornée, à valeurs dans [-C,+C] - nous pouvons même, au départ, supposer que X=M+A, où M est une martingale bornée, A un processus VF nul en 0, prévisible, à variation totale bornée (cf. la démonstration du théorème 8).

---

(1) Je sais peu de choses sur les propriétés de différentiabilité des fonctions convexes de plusieurs variables, et cela me gêne dans les n^{os} qui suivent.

Nous allons établir une formule du changement de variables pour une fonction convexe f sur $\mathbb{R}$. Malheureusement, il n'y a pas une cohérence parfaite entre les calculs ci-dessous et les notations de l'énoncé 10 : φ désignait la dérivée à droite de f, tandis que f' est maintenant la dérivée à gauche de f. Ce n'est pas grave !

Soit $f_n(t) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+s)j(ns)ds$, où j est une fonction positive $\underline{\underline{C}}^{\infty}$, à support compact contenu dans l'intervalle $]-\infty,0]$, d'intégrale 1. Alors f_n est convexe de classe $\underline{\underline{C}}^2$, et lorsque $n\to\infty$ f'_n tend en croissant vers f'. Ecrivons la formule du changement de variables pour f_n

$$(11.1)\quad f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_{0+}^t f'_n\circ X_{s-}dX_s + A^n_t$$

$$A^n_t = \Sigma_{0<s\leqq t}(f_n\circ X_s - f_n\circ X_{s-} - f'_n\circ X_{s-}\Delta X_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''_n\circ X_s d\langle X^c,X^c\rangle_s$$

Nous remarquons que (A^n_t) est un processus croissant, en raison de la convexité de f, et nous faisons tendre n vers l'infini. En vertu des hypothèses faites sur X, $f_n(X_t), f_n(X_0)$, $\int_0^t f'_n\circ X_{s-}dX_s$ convergent dans L^2 vers $f(X_t)$, $f(X_0)$, $\int_0^t f'(X_{s-})dX_s$, donc A^n_t converge dans L^2 vers une v.a. A_t. Comme (A^n_s) était un processus croissant, (A_s) peut aussi se régulariser en un processus croissant continu à droite. Ainsi

$$(11.2)\qquad f(X_t) = f(X_0) + \int_{0+}^t f'\circ X_{s-}dX_s + A_t$$

Maintenant, comparons les sauts des deux membres. En 0, l'intégrale stochastique s'annule, $f(X_t)-f(X_0)$ aussi, donc $A_0=0$. En t, le saut de $f(X_t)$ est $f(X_t)-f(X_{t-})$, le saut de l'intégrale stochastique est $f'(X_{t-})\Delta X_t$, donc le saut de A est $f(X_t)-f(X_{t-})-f'(X_{t-})\Delta X_t$ et nous avons la formule du changement de variables pour fonctions convexes

$$(11.3)\qquad f(X_t)=f(X_0) + \int_{0+}^t f'(X_{s-})dX_s + \Sigma_{0<s\leqq t}(f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s) + C^f_t$$

où C^f est un processus croissant continu. Nous allons continuer à discuter cette formule, mais auparavant, achevons la démonstration de 10.

Tout d'abord, (11.3) redémontre l'essentiel du th.8, à savoir que $f\circ X$ est une semimartingale lorsque f est une fonction convexe, ou une différence de fonctions convexes. Mais de plus, il nous donne la partie martingale continue de $f\circ X = Y$ dans ce cas : c'est $\int_0^t f'(X_{s-})d\langle X^c,X^c\rangle_s$. Alors $[Y,Y]_t = \int_0^t (f'(X_{s-}))^2 d\langle X^c,X^c\rangle_s + \Sigma_s \Delta Y_s^2$, et comme $\langle X^c,X^c\rangle$ est continue, cela équivaut à (10.1). Le théorème 10 étant vrai pour les f_n, différences de fonctions convexes, il est vrai pour f.

12 Revenons à la formule (11.3). Nous commençons par remarquer qu'elle s'étend - par un argument d'arrêt déjà employé à plusieurs reprises - à une semimartingale X <u>quelconque</u>. Notre but va être d'étendre à X la formule de TANAKA relative au mouvement brownien :

$$B_t^+ = B_0^+ + \int_0^t I_{\{B_s>0\}} dB_s + \frac{1}{2}L_t^0$$

où L_t^0 est le <u>temps local</u> en 0 - il est bien connu que le temps local ne croît que sur l'ensemble des zéros de (B_t).

A cet effet, nous écrivons (11.3) pour les fonctions $f(t)=t^+$, $f(t)=t^-$, en notant C^+ et C^- les processus croissants correspondants. Par exemple, si $f(t)=t^+$, $f'(t)=I_{]0,\infty[}$

- si $X_{s-}>0$, $f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s = X_s^+-X_{s-}-(X_s-X_{s-})=X_s^+-X_s=X_s^-$,
- si $X_{s-}\leqq 0$, $f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s = X_s^+$

(il est difficile de prononcer mentalement la différence entre X_s^- et X_{s-} !). Nous pouvons donc écrire

$$(12.1)\quad X_t^+=X_0^+ + \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}>0\}} dX_s + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}>0\}} X_s^- + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}} X_s^+ + C_t^+$$

De même pour $f(t)=t^-$, $f'(t)=-I_{]-\infty,0]}$

$$(12.2)\quad X_t^-=X_0^- - \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}\leqq 0\}} dX_s + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}>0\}} X_s^- + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}} X_s^+ + C_t^-$$

D'où en prenant une différence

$$C_t^+-C_t^- = 0$$

et il est naturel de poser

$$(12.3)\qquad C_t^+=C_t^- = \frac{1}{2}L_t^0$$

où L^0 est le processus croissant correspondant à $f(t)=|t|$.

Nous développons maintenant les conséquences assez étonnantes de la formule (12.1). Tout d'abord, regardons la somme

$$(12.4)\qquad \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}>0\}} X_s^- + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}} X_s^+$$

<u>Elle est p.s. finie</u>. Cela exprime que les sauts qui enjambent 0 enjambent "de peu" 0 . Ensuite, remplaçons X par -X dans la formule (12.1)

$$X_t^-=X_0^- - \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}<0\}} dX_s + \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}<0\}} X_s^+ + \Sigma I_{\{X_{s-}\geqq 0\}} X_s^- + \tilde{C}_t^+$$

($\tilde{C}^+$ est a priori distinct de C^-), et prenons une différence avec (12.2). Il vient une expression de $\int I_{\{X_{s-}=0\}} dX_s$:

$$(12.4)\qquad \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}=0\}} dX_s = \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}=0\}} \Delta X_s + C_t^- - \tilde{C}_t^+$$

le second membre étant un processus à variation finie (i.e., la série est absolument convergente). Le côté droit n'a pas de partie martingale continue, donc il en est de même du côté gauche, autrement dit

(12.5) $$\int_0^t I_{\{X_{s-}=0\}} d\langle X^c,X^c\rangle_s = 0$$

Par exemple, si $(X_t)=(B_t)$, le mouvement brownien, on retrouve le fait que l'ensemble des zéros de (B_t) est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Mais on démontre mieux : soit (Y_t) n'importe quelle martingale orthogonale au mouvement brownien, ou même n'importe quelle semimartingale dont la partie continue est orthogonale à (B_t). Alors l'ensemble $\{ t : B_t=Y_t\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. En effet, appliquons (12.5) avec $X=B-Y$, et remarquons que $\langle X^c,X^c\rangle_t = \langle B,B\rangle_t + \langle Y^c,Y^c\rangle_t$!

Maintenant, nous montrons que C^+ ressemble vraiment à un temps local, c'est à dire que dC^+ est une mesure aléatoire portée par l'ensemble $\{s : X_{s-}=X_s=0\}$.

Considérons deux rationnels u et v, u<v, et soit H_{uv} l'ensemble des ω tels que $[u,v]$ soit contenu dans $\{ s : X_{s-}(\omega)\leqq 0 \}$; d'après le caractère local de l'intégrale stochastique (n^{os}IV. 27-29), on a $\int_{u+}^v I_{\{X_{s-}>0\}}dX_s = 0$ p.s. sur H_{uv} . Dans la formule (12.1) relative à l'intervalle $[u,v]$, on a aussi $\Sigma_{u<s\leqq v} I_{\{X_{s-}>0\}}X_s^- =0$, $X_u^+=0$, $\Sigma_{u<s\leqq v} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X_s^+ = X_v^+$ sur H_{uv} , d'où finalement $C_v^+-C_u^+ = 0$ sur H_{uv}.

Comme l'intérieur de l'ensemble $\{X_{s-}\leqq 0\}$ est la réunion des intervalles $[u,v]$ à extrémités rationnelles qu'il contient, nous voyons que

dC_t^+ ne charge pas l'intérieur de $\{X_{s-}\leqq 0\}$

En particulier, il ne charge pas l'intérieur de $\{X_{s-}<0\}$, qui est un ensemble ouvert à gauche, et ne diffère de son intérieur que par un ensemble dénombrable (que dC^+ ne charge pas non plus). Ainsi

dC^+ ne charge pas $\{X_{s-}<0\}$

De la même manière, soit K_{uv} l'ensemble des ω tels que $[u,v]$ soit contenu dans $\{ s : X_{s-}(\omega)>0\}$. Sur K_{uv} on a p.s. $\int_{u+}^v I_{\{X_{s-}>0\}}dX_s = X_v-X_u$, on a $X_u^+ = X_u$, $\Sigma_{u<s\leqq v} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X_s^+ =0$, $\Sigma_{u<s\leqq v} I_{\{X_{s-}>0\}}X_s^- = X_v^-$, d'où à nouveau $C_v^+-C_u^+ = 0$ p.s.. Ainsi

dC^+ ne charge pas l'intérieur de $\{X_{s-}>0\}$ (et donc ne charge pas $\{X_{s-}>0\}$, qui en diffère par un ensemble dénombrable) .

Pour finir, dC^+ est porté(e) par $\{X_{s-}=0\}$ - et même, par cet ensemble privé de son intérieur. Comme dC^+ ne charge pas les ensembles dénombrables, on peut remplacer cet ensemble par $\{X_{s-}=X_s=0\}$ si l'on veut.

13 Nous avons défini L_t^0 , le " temps local en 0" , qui intervient dans la formule du changement de variables relative à $f(t)=|t|$. Il est clair que l'on peut définir de même le "temps local en a" , relatif à $f(t)=|t-a|$. Il est moins clair que l'on peut choisir des versions de ces "temps locaux" qui dépendent mesurablement du triplet (a,t,ω) : cela résultera du théorème de C.DOLEANS-DADE sur les intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre, qu'on verra plus loin (je l'espère). Un tel choix étant fait, on peut en principe calculer tous les processus croissants C_t^f de la formule (11.3). Soit en effet la mesure positive $\mu = \frac{1}{2}f''$ (dérivée seconde de f au sens des distributions) . Je dis qu'on a alors

(13.1) $$C_t^f = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \, \mu(da) \ .$$

Pourquoi cette intégrale a t'elle un sens ? Parce qu'en réalité, pour t et ω fixés, on a $L_t^a(\omega)=0$ pour a assez grand, le temps local ne commençant à croître qu'à partir du premier instant où $X_s(\omega)=a$, et la trajectoire étant bornée sur $[0,t]$.

Le principe de la démonstration est tout à fait simple. En vertu du caractère local de l'intégrale stochastique, on a le résultat suivant : si l'on a deux semimartingales X et $\tilde{X}$, sur l'ensemble des ω tels que $X_.(\omega)=\tilde{X}_.(\omega)$ sur $[0,t]$, tous les temps locaux $L_.^a(\omega)$ et $\tilde{L}_.^a(\omega)$ sont égaux sur $[0,t]$ (nous omettons les détails). On peut alors se ramener au cas où X est bornée, à valeurs dans un intervalle compact J. On peut alors écrire <u>dans J</u>

$$f(t) = \alpha+\beta t + \int_J |t-x|\mu(dx) \quad = \alpha+\beta t + g(t)$$

et on a simultanément

$$\int L_t^a \, \mu(da) = \int_J L_t^a \, \mu(da) \quad \text{puisque } L^a=0 \text{ pour } a\notin J$$

et d'autre part $C^f=C^g$, car $f\circ X$ et $g\circ X$ ne diffèrent que d'un processus de la forme $\alpha+\beta X$, pour lequel aucun terme continu à variation bornée n'est nécessaire. On est donc ramené au cas où μ est à support compact, la fonction convexe étant de la forme $f(t)=\int|t-x|\mu(dx)$ - c'est alors simplement le théorème de Fubini.

14 La formule (13.1) a une conséquence importante : lorsque $f(t)=t^2$, on a $C^f = \langle X^c,X^c \rangle$, d'où la formule

(14.1) $$\langle X^c,X^c \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \, da \qquad \text{p.s. sur } \Omega$$

il s'agit ici d'une identité entre mesures : donc si $h(s,\omega)$ est une fonction positive, mesurable du couple, on a

(14.2) $\int_0^{\infty} h(s,\omega)d\langle X^c,X^c\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^{\infty} h(s,\omega)dL_s^a(\omega)$

en particulier, prenons $h(s,\omega)= I_{[0,t]}(s)j(X_s(\omega))$, où j est mesurable positive sur $\mathbb{R}$. Il vient

$$\int_0^t j(X_s(\omega))d\langle X^c,X^c\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_0^t j(X_s(\omega))dL_s^a(\omega)$$

et comme $dL^a_{\cdot}(\omega)$ est portée par l'ensemble $\{ s : X_s(\omega)=a \}$, on a simplement

(14.3) $\int_0^t j(X_s(\omega))d\langle X^c,X^c\rangle_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a(\omega)j(a)da$

ce qui s'énonce ainsi : <u>pour presque tout</u> ω, <u>l'image de la mesure</u> $d\langle X^c,X^c\rangle_s(\omega)$ <u>sur</u> $[0,t]$ <u>par l'application</u> $s\mapsto X_s(\omega)$ <u>est une mesure sur</u> $\mathbb{R}$ <u>absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue</u>, <u>dont la densité est</u> $L_t^a(\omega)$.

Cette interprétation du temps local comme densité d'occupation est bien connue dans le cas du mouvement brownien, où $\langle X^c,X^c\rangle_t=t$. Mais si l'on prend $X_t=B_t-a(t)$, par exemple, où $a(t)$ est une fonction à variation bornée et B_t est un mouvement brownien, on a <u>encore</u> $\langle X^c,X^c\rangle_t=t$, d'où le même résultat. Si $a(t)=\int_0^t h(s)ds$, où $\int_0^t h^2(s)ds<\infty$, alors la loi de (X_t) est absolument continue par rapport à celle de (B_t), avec une densité calculable explicitement (nous verrons cela plus tard, j'espère) : il n'y a donc pas lieu de s'étonner , puisque les " p.s. sur Ω " sont les mêmes pour les deux mesures. Mais si $a(t)$ n'est pas de cette forme, <u>il y a lieu</u> de s'étonner !

15 Revenons aux formules (12.1) et (12.2), que nous écrirons

(15.1) $X_t^+ = X_0^+ + \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}>0\}}dX_s + G_t$

$X_t^- = X_0^- - \int_{0+}^t I_{\{X_{s-}\leqq 0\}}dX_s + G_t$

où G est le processus croissant $\Sigma_{0<s\leqq t}(I_{\{X_{s-}>0\}}X_s^- + I_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X_s^+)+C_t^+$. Supposons que X s'écrive X_0+M+A, où M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ et $M_0=0$, où A est à variation intégrable, prévisible, avec $A_0=0$. Alors les premiers membres sont intégrables, les intégrales stochastiques aussi, et donc G_t aussi : G_t admet donc un <u>compensateur prévisible</u>, que nous noterons $\frac{1}{2}\Lambda_t^0$, et nous introduirons de manière analogue le processus croissant prévisible Λ_t^a pour tout $a\in\mathbb{R}$. Ainsi, nous pouvons écrire

(15.2) $|X_t-a| = |X_0-a| + \int_{0+}^t \mathrm{sgn}(X_{s-}-a)dX_s + \Lambda_t^a$ + martingale

Avec les hypothèses ci-dessus, on a $E[\Lambda_t^a] < \infty$. Il faut noter que Λ_t^a n'est pas défini de manière absolument intrinsèque : on a pris de manière assez arbitraire que sgn(0)=-1 (continuité à gauche) ; si l'on avait convenu par exemple de prendre pour f' la demi-somme des dérivées à droite et à gauche de f, les formules du changement de variables précédentes seraient restées vraies (à condition de modifier simultanément la définition dans l'intégrale stochastique et dans les sauts !), on aurait eu sgn(0)=0 , et l'intégrale stochastique aurait été modifiée d'un multiple de $\int_{0+}^t I_{\{X_{s-}=a\}} dX_s$; le terme $\int_{0+}^t I_{\{\ \}} dM_s$ est une martingale, et n'aurait rien changé, mais Λ_t^a aurait été modifié d'un multiple de $\int_0^t I_{\{X_{s-}=a\}} dA_s$.

Admettons qu'il existe des versions de Λ_t^a dépendant mesurablement de (t,a,ω), et supposons que M soit une martingale de carré intégrable, que A ait une variation totale de carré intégrable, et que $X_0 \in L^2$.
Si $H \in \underline{F}_0$, on a

$$\int_H |X_t-a|P = \int_H |X_0-a|P + \int_H P \int_{0+}^t \mathrm{sgn}(X_{s-}-a)dX_s + \int_H \Lambda_t^a P$$

intégrons en a, d'abord de -C à C en nous appuyant sur les formules

$$\int_{-C}^C |t-a|da = t^2 \text{ pour } |t|\leqq C \ , \quad 2C|t|-C^2 \text{ pour } |t|\geqq C$$

$$\int_{-C}^C \mathrm{sgn}(t-a)da = 2t \text{ pour } |t|\leqq C \ , \quad 2C\mathrm{sgn}(t) \text{ pour } |t|\geqq C$$

puis faisons tendre C vers $+\infty$. Il vient

$$\int_H X_t^2 P = \int_H \left(X_0^2 + \int_{0+}^t 2X_{s-}dX_s + \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a da \right)P$$

ou encore, avec un peu plus d'effort (décalage en $s \in \mathbb{R}_+$)

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_{0+}^t X_{s-}dX_s + \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a da + \text{martingale}$$

que nous comparons à

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_{0+}^t X_{s-}dX_s + \int_{0+}^t d[X,X]_s$$

pour déduire que, si $\langle X,X\rangle$ désigne la compensatrice prévisible de $[X,X]$, on a

(15.3) $$\langle X,X\rangle_t = X_0^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_t^a da$$

Ce qui est amusant dans cette formule, c'est que <u>toute</u> semimartingale spéciale admet des arrêtées satisfaisant aux hypothèses initiales du n°15, et que l'on peut donc définir par recollement des processus prévisibles Λ_t^a , tandis que $\langle X,X\rangle$ n'a de sens que pour des semimartingales spéciales "localement de carré intégrable".

Lorsque X ne possède pas de partie martingale continue, la formule (14.1) montre que les temps locaux L_t^a ne servent à rien, et il est tentant de les remplacer par les Λ_t^a . On est donc amené à se demander si Λ_t^a – à supposer qu'il soit continu, c'est à dire que les sauts de X soient totalement inaccessibles – est porté par l'ensemble $\{s:X_s=a\}$. S'il en est ainsi, $<X,X>$ sera également continu, et on pourra interpréter Λ_t^a comme densité de la mesure image de $d<X,X>$ sur $[0,t]$ par la trajectoire, à la manière du n°14.

Il est impossible de donner une réponse générale à cette question – après tout, en théorie des processus de Markov, il faut bien supposer que les points ne sont pas polaires, et on ne possède pas de critère général pour cela . En voici cependant l'interprétation probabiliste. Pour tout $r\geqq 0$, posons

$$T_r = \inf \{ s\geqq r : X_s=a \}$$

Le processus croissant G^a (formule (15.1)) ne charge pas l'intervalle ouvert $]\!]r,T_r[\![$. Si l'on sait affirmer qu'il ne charge pas l'intervalle $]\!]r,T_r]\!]$, qui est prévisible, on saura aussi que sa projection duale prévisible $\frac{1}{2}\Lambda^a$ ne charge pas $]\!]r,T_r]\!]$, et en faisant parcourir à r l'ensemble des rationnels, que Λ^a (supposé continu) est porté par l'ensemble $\{ s : X_s=a \}$. Maintenant, G^a charge l'intervalle $]\!]r, T_r]\!]$ si et seulement si, par exemple, $X_r(\omega)<a$ et la trajectoire $X_.(\omega)$ pénètre par un saut dans la demi-droite ouverte $]a,\infty[$. Pour beaucoup de processus à accroissements indépendants, on sait qu'un tel comportement est impossible. Voir par ex. dans le séminaire V l'exposé de BRETAGNOLLE sur les travaux de KESTEN.

16 Il est très vraisemblable que la formule (11.3) admet une bonne extension aux dimensions d>1, mais je ne sais pas le prouver. Je vais me borner à des résultats fragmentaires.

Peut être est il utile de prouver ici le résultat, nécessaire au th.8 en dimension d, suivant lequel une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$ est lipschitzienne sur tout compact. Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^d$, et soit un nombre $m < \inf_{x\in B} f(x)$. D'après le th. de Hahn-Banach, f est égale sur B à l'enveloppe supérieure des fonctions affines h telles que $m\leqq h\leqq f$ sur B . Ces fonctions affines forment un compact dans l'espace (localement compact) de toutes les fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$, leurs pentes sont bornées, elles admettent donc une même constante de Lipschitz K, et leur sup est aussi lipschitzien de rapport K.

Dans des cas concrets, il est assez facile d'étendre en dimension d>1 la méthode et le résultat du n°11. Par exemple, soit $\varphi(t)$ une fonction convexe symétrique de classe $\underline{\underline{C}}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(t)=t$ pour $|t|\geq 1$. En approchant la fonction $f(x)=|x|$ par $f_n(x)=\varphi(n|x|)/n$, on aboutit à une formule du changement de variables pour le module d'une semimartingale vectorielle. Je ne peux pas en dire plus...

III. SUR CERTAINES PROPRIETES D'INTEGRABILITE UNIFORME

Voici l'origine du problème que l'on va traiter ici.

Considérons la forme la plus classique de l'inégalité de DOOB : X désignant une martingale, soit U_a^b le nombre des montées (upcrossings) de X au dessus de $]a,b[$ jusqu'à l'instant t. Il est bien connu que $(b-a)E[U_a^b]$ est une quantité bornée. Nous nous étions posé il y a six ans au moins, DELLACHERIE et moi, le problème de rechercher la limite de $\varepsilon U_a^{a+\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon\to 0$ (dans le cas où X est le mouvement brownien, cette limite existe p.s., et est liée au temps local de a). L'idée naturelle consistant à utiliser la topologie faible de L^1, nous nous étions demandé si les v.a. $(b-a)U_a^b$ sont uniformément intégrables. Et le résultat de ce paragraphe est une réponse affirmative à cette question, sous des conditions très larges. Mais le problème ne constitue qu'un prétexte pour l'étude de l'intégrabilité uniforme de certaines parties de l'espace $\underline{\underline{H}}^1$.

17 Reprenons la démonstration classique de l'inégalité de DOOB. Posons

$$T_1 = \inf\{ s : X_s \leq a \} \wedge t$$
$$T_2 = \inf\{s>T_1 : X_s\geq b\} \wedge t$$
$$T_3 = \inf\{s>T_2 : X_s\leq a\} \wedge t$$

et ainsi de suite. Considérons la variable aléatoire

$$H_a^b = (X_{T_2}-X_{T_1}) + (X_{T_4}-X_{T_3}) +\dots \qquad (\text{ termes pairs })$$

Pour chaque ω, cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, dont les premiers correspondent aux montées de $X_{\cdot}(\omega)$ par dessus l'intervalle $]a,b[$, tandis que le dernier vaut $(X_t-X_L)I_A$, où L est le dernier des $T_{2k-1} < t$, et A est l'événement " la trajectoire ne remonte plus au dessus de b entre L et t ". On a donc $(b-a)U_a^b + (X_t-X_L)I_A \leq H_a^b$, donc comme $X_L\leq a$

$$(b-a)U_a^b \leq H_a^b + (X_L-X_t)I_A \leq \begin{cases} H_a^b + (a-X_t)^+ \\ H_a^b + 2X_t^* \end{cases}$$

(Dans tout ce paragraphe, on emploiera la notation X_t^* pour noter $\sup_{s\leqq t} |X_s|$, et X^* pour X_∞^*). La première majoration est traditionnelle (inégalité de DOOB), la seconde plus brutale élimine complètement le rôle de a et b dans le problème d'intégrabilité uniforme, dès que X_t^* est intégrable, et le ramène à un problème sur les intégrales stochastiques. En effet, on peut écrire

$$H_a^b = \int_0^t J_s dX_s \ , \text{ où } J=I_{]T_1,T_2]}+I_{]T_3,T_4]}+\dots \text{ est prévisible, compris entre 0 et 1 .}$$

On est donc amené à se poser le problème suivant, beaucoup plus intéressant que le problème initial ; t y est supposé <u>fini</u> :

(18.1) <u>Pour quelles semimartingales</u> X <u>peut on affirmer que toutes les intégrales stochastiques</u> $\int_0^t J_s dX_s$, <u>où</u> J <u>est prévisible et</u> $|J|\leqq 1$, <u>forment un ensemble uniformément intégrable</u> ?

La réponse est tout à fait simple :

18 THEOREME. X <u>possède la propriété</u> (18.1) <u>si et seulement si la semimartingale arrêtée</u> X^t <u>s'écrit</u> X^t=M+A, <u>où</u> M <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>et</u> A <u>est un processus à variation intégrable</u>.

<u>De plus, on obtient la même classe de processus en remplaçant dans</u> (18.1) " <u>uniformément intégrable</u>" <u>par</u> " <u>borné dans</u> L^1" .

DEMONSTRATION. Quitte à remplacer X par X^t, nous pouvons remplacer $\int_0^t$ par $\int_0^\infty$. D'autre part, en prenant $J_s=0$ pour s>0, on voit que X_0 doit être intégrable, et on se ramène au cas où $X_0=0$.

La propriété (18.1), ou sa forme affaiblie, entraîne que X est <u>spéciale</u>. Nous utilisons le critère IV.32, d) . Soit le temps d'arrêt

$$T = \inf\{ s : |X_s|\geqq n\} \wedge \inf\{ s : \Sigma_{r\leqq s} \Delta X_r^2 \geqq n \}$$

Prenant $J=I_{[0,T]}$, nous avons que $X_T \in L^1$, donc $\Delta X_T \in L^1$, donc $(\Sigma_{r\leqq T} \Delta X_r^2)^{1/2} \in L^1$, et X est spéciale.

Ecrivons alors X=M+A, où M est une martingale locale nulle en 0 et A un processus VF prévisible nul en 0. Soit (D_s) une densité prévisible de la mesure dA_s par rapport à $|dA_s|$, prenant les valeurs +1 et -1. Soit $J=I_{[0,S]}D$, où S réduit fortement la martingale M. Alors $\int_0^\infty J_s dX_s = \int_0^\infty J_s dM_s^S + \int_0^S |dA_s|$. En intégrant, et en notant que le premier terme au second membre a une espérance nulle, tandis que le premier membre est borné dans L^1 , on voit (lorsque $S\uparrow\infty$) que A <u>est à variation intégrable</u>. Mais alors, il est clair que les v.a. $\int_0^\infty J_s dA_s$

sont uniformément intégrables, et par conséquent il en est de même des $\int_0^\infty J_s dM_s$. Prenant $J=I_{[0,R]}$, où R est un temps d'arrêt, on voit que la martingale locale M appartient à la classe (D), donc est une vraie martingale uniformément intégrable.

Reste à voir qu'elle appartient à $\underline{\underline{H}}^1$. A cet effet, désignons par τ une subdivision finie (t_i) de $[0,\infty]$, et désignons par $(\varepsilon_k(w))$ une suite de v.a. indépendantes, définies sur un espace auxiliaire $(W,\underline{\underline{G}},\mu)$, prenant les valeurs ± 1 avec probabilité 1/2 (fonctions de RADEMACHER). D'après la propriété (18.1), il existe une constante K telle que l'on ait, pour tout w

$$\int_\Omega |\varepsilon_0(w)(M_{t_1}(\omega)-M_{t_0}(\omega))+..+\varepsilon_{n-1}(w)(M_\infty(\omega)-M_{t_{n-1}}(\omega)|P(d\omega)\leqq K$$

Intégrons en w, ce qui revient à intégrer sur $W\times\Omega$ par rapport à $\mu\otimes P$, et intervertissons :

$$(18.2)\int P(d\omega)\int\mu(dw)|\varepsilon_0(w)(\ \ )+\ \varepsilon_{n-1}(w)(\ \ )|\ \leqq K$$

Maintenant, il existe un lemme classique, le lemme de KHINTCHINE, qui dit ceci : quels que soient les nombres a_i

$$\int\mu(dw)|a_0\varepsilon_0(w)+...+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}(w)|\sim(\Sigma_{0\leqq i<n}\ a_n^2\ )^{1/2}$$

en ce sens que le rapport des deux membres est borné inférieurement et supérieurement par deux constantes >0, <u>indépendantes de n</u>. Appliquant ce résultat à (18.2), nous voyons que (notation S_τ : n°3)

$$E[\sqrt{S_\tau(M)}]\leqq cK \quad \text{où c est une constante}$$

et maintenant nous appliquons le n°4, et le lemme de Fatou, pour en déduire que $E[\sqrt{[M,M]_\infty}]\leqq cK$, de sorte que M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$.

La réciproque est sans doute plus intéressante. Si X=M+A, où M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ et A est à variation intégrable, les v.a. $\int_0^\infty J_s dA_s$ ($|J|\leqq 1$) sont toutes majorées par $\int_0^\infty |dA_s|\in L^1$. Il nous suffit donc de montrer que toutes les v.a. $\int_0^\infty J_s dM_s$ sont uniformément intégrables. Nous allons montrer mieux : les v.a. $(J\cdot M)^*$ sont uniformément intégrables. Nous en donnerons une démonstration rapide par un théorème marteau-pilon, et le principe d'une démonstration élémentaire.

Rappelons le lemme de LA VALLEE POUSSIN (Probabilités et Potentiels, 1e éd. n° II.22 , 2e éd. , même numéro). Une famille de v.a. positives Z_i est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction Φ sur $\mathbb{R}_+$, convexe, croissante, telle que $\Phi(0)=0$, que $\lim_{t\to\infty}\Phi'(t)=+\infty$, et que $\sup_i E[\Phi(Z_i)]<\infty$. Quitte à remplacer Φ

par $\int_0^t \Phi'(s)\wedge s\,ds$, nous pouvons supposer que Φ est à croissance modérée. Appliquons ce résultat à l'ensemble constitué par la seule variable intégrable $\sqrt{[M,M]_\infty}$, et posons $J\cdot M=N$. Comme nous avons $[N,N]\leq [M,M]$, nous avons aussi $E[\Phi(\sqrt{[N,N]_\infty})] \leq E[\Phi(\sqrt{[M,M]_\infty})]$. Par conséquent, d'après l'inégalité de BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY (IV.30)

$$E[\Phi(N^*)] \leq cE[\Phi(\sqrt{[M,M]_\infty})] \quad \text{indépendamment de } J$$

et les v.a. N^* sont uniformément intégrables.

Pour éviter l'emploi du lemme de L-V.P., on peut procéder ainsi. On part de IV.29.2 (inégalité de DAVIS, moitié facile)

$$E[N^*_\infty - N^*_{T-}|\underline{\underline{F}}_{T-}] \leq cE[\sqrt{[N,N]_\infty-[N,N]_{T-}}|\underline{\underline{F}}_T] \leq cE[\sqrt{[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}}|\underline{\underline{F}}_T]$$

Prenant $T = \inf \{ s : N^*_s>\lambda\}$ ($= \inf \{ s : |N_s|>\lambda\}$!), on a $N^*_{T-}\leq\lambda$ et par conséquent , comme $\{T<\infty \} = \{N^*_\infty >\lambda \}$

$$\int_{\{N^*_\infty >\lambda\}}(N^*_\infty -\lambda)P \leq \int_{\{N^*_\infty >\lambda\}} c\sqrt{[M,M]_\infty}\, P$$

Sur $\{N^*_\infty >2\lambda\}$ on a $N^*_\infty -\lambda \geq N^*_\infty /2$, donc

$$\int_{\{N^*_\infty >2\lambda\}} N^*_\infty P \leq 2c\int_{\{N^*_\infty >\lambda\}} \sqrt{[\;]}P$$

D'autre part , $E[N^*_\infty]\leq cE[\sqrt{[\;]}]$, donc $P\{N^*_\infty>\lambda\}$ tend vers 0 lorsque $\lambda\to\infty$ uniformément en N (ou J), et l'intégrabilité uniforme en découle.

19 Nous revenons maintenant au problème posé au début du paragraphe. Il résulte immédiatement de la discussion du n°15 que <u>si</u> X <u>satisfait aux conditions du th.18, toutes les v.a.</u> $(b-a)U^b_a$ <u>sont uniformément intégrables</u> (majorer le reste R^b_a par $2X^*\varepsilon L^1$).

Soit maintenant X une semimartingale quelconque, que nous écrivons $X=X_0+M+A$ (M est une martingale locale nulle en 0, A est à VF nul en 0). Il existe des temps d'arrêt T_n tendant vers $+\infty$ tels que

- X_0 soit intégrable sur $\{T_n>0\}$
- T_n réduise fortement M (donc M^{T_n} appartienne à $\underline{\underline{H}}^1$)
- $\int_0^{T_n-}|dA_s|$ soit intégrable

Désignons par U^{ab}_t (il faut bien laisser de la place pour t !) le nombre de montées de X sur]a,b[, jusqu'à l'instant t compris : ce sont des processus croissants continus à droite, nuls en 0, et le résultat précédent nous dit que

<u>pour tout</u> n, <u>les v.a.</u> $(b-a)U^{ab}_{T_n-}$ <u>sont uniformément intégrables</u>

(appliquer le théorème à la semimartingale $Y_t=X_0 I_{\{T>0\}}+M_t^T + A_t I_{\{t<T\}} + A_{T-} I_{\{t\geqq T\}}$). Comme on a $U^{ab}_{T_n} \leqq U^{ab}_{T_n-} + 1$, on a le même résultat sur les intervalles $[0,T_n]$ fermés, à condition que b-a reste borné.

20 Nous apportons maintenant un complément au théorème 18.

THEOREME. Soit X une semimartingale. Supposons que pour tout processus prévisible J tel que $|J|\leqq 1$ la v.a. $\int_0^t J_s dX_s$ soit intégrable. Alors l'ensemble de toutes ces v.a. est borné dans L^1 (et alors, d'après 18, X satisfait à (18.1), et l'ensemble de toutes ces v.a. est uniformément intégrable).

21 COROLLAIRE. Soit M une martingale uniformément intégrable, mais n'appartenant pas à $\underline{\underline{H}}^1$. Il existe alors un processus prévisible J tel que $|J|\leqq 1$, et que $(J.M)_\infty \notin L^1$.

En effet, si M est uniformément intégrable, on peut appliquer le résultat précédent à la (semi)martingale X définie par

$$X_s = M_{s/1-s} \text{ si } 0\leqq s<1 \quad , \quad X_s=M_\infty \text{ si } s\geqq 1$$

de manière à se ramener à un intervalle de temps fini (bien entendu, il faut effectuer ce changement de temps sur les tribus aussi). On construit alors un processus prévisible $\bar{J}$ par rapport à la nouvelle famille de tribus tel que $(\bar{J}\cdot X)_1 \notin L^1$, et on pose $J_t= \bar{J}_{t/1+t}$. Alors on a $(J\cdot M)_\infty = (\bar{J}\cdot X)_1$, car $\bar{J}\cdot X$ et X sont continues au point 1.

DEMONSTRATION DU TH.20. La condition de l'énoncé entraîne que X_0 $(=(I_{\{0\}}\cdot X)_t$) est intégrable. On peut donc se ramener au cas où $X_0=0$. Puis, en arrêtant X à t, nous pouvons nous ramener au cas où toutes les intégrales stochastiques $\int_0^\infty J_s dX_s$ existent et sont intégrables. Comme dans la démonstration de 18 (début), nous voyons que X est spéciale, et considérons sa décomposition canonique X=M+A (M martingale locale nulle en 0, A prévisible à VF nul en 0).

Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt, tendant vers $+\infty$, telle que les v.a. $\int_0^{T_n} |dA_s|$ soient intégrables et que les T_n réduisent fortement M. Soit $\underline{\underline{P}}$ l'espace de Banach des processus prévisibles, muni de la norme de la convergence uniforme. Si des $J^k \in \underline{\underline{P}}$ convergent dans $\underline{\underline{P}}$ vers J, les intégrales stochastiques $\int_0^\infty J^k_s dX_s$ convergent en probabilité vers $\int_0^\infty J_s dX_s$. Pour le voir, on remarque que $\int_0^\infty = \int_0^t$, que l'ensemble $\{T_n<t\}$ a une probabilité petite pour n grand, et que sur $\{T_n\geq t\}$ les intégrales stochastiques coïncident avec les intégrales par rapport à X^{T_n}, pour lesquelles on a convergence dans L^1. Il en résulte que la fonction réelle positive F sur $\underline{\underline{P}}$

$$F(J) = E[\ |\int_0^{\infty} J_s dX_s|\ ]$$

est semi-continue inférieurement sur $\underline{\underline{P}}$ (lemme de Fatou). Notre hypothèse sur X signifie que cette fonction est <u>finie</u> sur $\underline{\underline{P}}$. D'après le théorème de Baire, l'un des fermés $\{ J : F(J)\leq n \}$ a un point intérieur, ce qui signifie que l'application linéaire $J\mapsto\int_0^{\infty} J_s dX_s$ de $\underline{\underline{P}}$ dans L^1 admet un point de continuité. Elle est alors bornée, et le théorème est établi.

IV. SUR LE THEOREME DE GIRSANOV[1]

22 Nous conservons toutes les notations précédentes, et considérons une seconde loi de probabilité Q , <u>équivalente</u> à P . La famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfait alors aux conditions habituelles par rapport à Q aussi bien qu'à P, les ensembles évanescents, les tribus optionnelle et prévisible sont les mêmes pour Q et pour P. Soit M la martingale/P

(22.1) $$M_t = E_P[M_{\infty}|\underline{\underline{F}}_t]$$

où M_{∞} est une densité de Q par rapport à P sur $\underline{\underline{F}}_{\infty}$. Alors, pour tout temps d'arrêt T, M_T est une densité de Q par rapport à P sur $\underline{\underline{F}}_T$. La martingale M est positive, uniformément intégrable. Il est bien connu qu'une martingale positive (ou même une surmartingale positive) M garde la valeur 0 à partir de l'instant inf $\{ t : M_t=0$ ou $M_{t-}=0 \}$ (cf. probabilités et potentiels, VI.T15). Comme Q et P sont équivalentes, M_{∞} est P-p.s. strictement positive, donc pour P-presque tout ω la fonction $M_{\cdot}(\omega)$ est bornée inférieurement sur $[0,\infty]$ par un nombre >0 (elle est aussi bornée supérieurement par un nombre fini, mais c'est plus banal). Nous dirons que M est la <u>martingale fondamentale</u>.

Un processus càdlàg X est une martingale/Q si et seulement si le processus XM est une martingale/P. Il en résulte aussitôt que X est une martingale locale/Q si et seulement si XM est une martingale locale/P. Cela va nous permettre de démontrer sans peine le théorème suivant, cas particulier d'un résultat qui semble avoir été établi indépendamment par divers auteurs (sous des hypothèses variables

1. Ce paragraphe résulte de discussions avec C.DELLACHERIE et C,YOEURP.

d'"équivalence locale" de mesures : je pense que le résultat le plus complet est dû à JACOD).

23 THEOREME. X <u>est une semimartingale</u>/Q <u>si et seulement si</u> X <u>est une semimartingale</u>/P.

DEMONSTRATION. Il suffit évidemment de montrer que toute martingale locale/Q X est une semimartingale/P. Or XM est une martingale locale/P , que nous noterons Y. Autrement dit, il suffit de montrer que si Y est une martingale locale/P, $\frac{Y}{M}$ est une semimartingale/P. Ou encore, que $1/M$ est une semimartingale/P. Il n'est pas <u>tout à fait</u> évident que la formule du changement de variables puisse s'appliquer à la fonction $F(t)=1/t$, qui n'est pas de classe $\underline{\underline{C}}^2$ sur la droite, mais on peut l'établir par l'argument de localisation de IV.21 (qui nous a permis de supprimer l'hypothèse que les dérivées de F étaient bornées sur $\mathbb{R}$). Un autre argument simple est le suivant. Soit

$$T_n = \inf \{ t : M_t \leqq 1/n \}$$

et soit $N_t^n = M_t I_{\{t<T_n\}} + M_{T_n-} I_{\{t \geqq T_n\}}$. Alors N^n est une semimartingale/P bornée inférieurement, et il est immédiat que $1/N^n$ est une semimartingale/P. Comme les T_n tendent vers $+\infty$, on peut appliquer le théorème IV.33 : $1/M$ coïncide sur l'intervalle ouvert $[[0,T_n[[$ avec la semimartingale $1/N^n$, elle coïncide donc sur l'intervalle <u>fermé</u> $[[0,T_n]]$ avec une semimartingale, et c'est une semimartingale/P.

24 Soit X une martingale locale/P . Pouvons nous faire apparaître <u>explicitement</u> X comme une semimartingale/Q , c'est à dire déterminer un processus à VF A tel que X-A soit une martingale locale/Q , ou M(X-A) une martingale locale/P ? Une telle décomposition fait l'objet du théorème de GIRSANOV, établi en toute généralité dans le travail de YOEURP, auquel nous renverrons. En voici un énoncé. Introduisons la martingale locale/P

$$L_t = \int_0^t \frac{dM_s}{M_{s-}} \qquad \text{de sorte que } M = M_0 \mathcal{E}(L). \tag{24.1}$$

Alors, <u>si le crochet oblique</u> $\langle X,L\rangle$ <u>existe</u>, $X-\langle X,L\rangle$ est une martingale locale/Q, $M(X-\langle X,L\rangle)$ une martingale locale/P. Mais que peut on dire si le crochet oblique n'existe pas ?

THEOREME. <u>Soit</u> X <u>une martingale locale</u>/P. <u>Alors</u> X-B <u>est une martingale locale</u>/Q, <u>où</u>

$$B_t = \int_0^t \frac{d[X,M]_s}{M_s} = \int_0^t \frac{M_{s-}}{M_s} d[X,L]_s \tag{24.2}$$

X <u>est une semimartingale spéciale</u>/Q, <u>i.e. il existe</u> A <u>prévisible tel que</u> X-A <u>soit une martingale locale</u>/Q, <u>si et seulement si</u> $\langle X,L\rangle$ <u>existe</u>, <u>et alors</u> $A=\langle X,L\rangle$ <u>à un processus constant près</u>.

DEMONSTRATION. Il s'agit de trouver B tel que M(X-B) soit une martingale locale/P . Dans la formule d'intégration par parties suivante, les différentielles soulignées d'un $\underline{\underline{\quad}}$ sont celles de martingales locales/P

$$\underline{\underline{d(M(X-B))_s}} = \underline{\underline{(X-B)_{s-}dM_s}} + \underline{\underline{M_{s-}dX_s}} - M_{s-}dB_s + d[M,X-B]_s$$

Nous décomposons le dernier terme en deux : $d[M,X]_s - d[M,B]_s$, et nous remarquons - comme B est un processus VF - que $d[M,B]_s$ se réduit à $\Delta M_s \Delta B_s \varepsilon_s$, ou encore à $\Delta M_s dB_s$, qui se regroupe avec le terme en $M_{s-}dB_s$. Finalement, la propriété qui caractérise B est

(24.3) $\quad d[M,X]_s - M_s dB_s = \underline{\underline{dY_s}}$ où Y est une martingale locale/P

Le plus simple est de prendre Y=0, ce qui donne pour B la valeur (24.2). Supposons maintenant que B soit prévisible. Alors YOEURP a montré (cela revient à la formule d'intégration par parties IV.38) que [M,B] est une martingale locale, de sorte que l'on peut souligner d'un $\underline{\underline{\quad}}$ d[M,B] dans la formule de départ, et qu'il reste simplement

(24.3) $\quad d[M,X]_s - M_{s-}dB_s = \underline{\underline{dY_s}}$

ce qui exprime 1) que [M,X] admet une compensatrice prévisible, donc que $\langle M,X\rangle$ existe, 2) d'après l'unicité, que $M_{s-}dB_s = d\langle M,X\rangle_s$ sauf en 0 - on n'a pas l'unicité complète, car on n'impose pas à Y_0 une valeur déterminée. Ces deux conditions équivalent à l'existence de $\langle L,X\rangle$, et au fait que $B=\langle L,X\rangle$ à la valeur en 0 près.

25 Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus sur la variation quadratique des semimartingales (n°4). Soit X une semimartingale (inutile de préciser si la mesure est P ou Q : cela revient au même). Puisque - avec les notations de 4 - $S_\tau(X)$ converge en probabilité à la fois pour P et Q lorsque le pas de la subdivision τ tend vers 0, la limite $[X,X]_t$ est la même pour P et Q. Mais d'autre part, les parties martingale continue/P (notée X^c) et martingale continue/Q (notée $\tilde{X}^c$) ne sont pas les mêmes, en général, pour P et Q, et nous avons

$$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t}\,\Delta X_s^2 = \langle \tilde{X}^c,\tilde{X}^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t}\,\Delta X_s^2$$

d'où une première conséquence : $\langle X^c,X^c\rangle = \langle \tilde{X}^c,\tilde{X}^c\rangle$. <u>En particulier, si</u> $X^c=0$, <u>nous avons aussi</u> $\tilde{X}^c=0$.

Maintenant, écrivons $X=X^c+Y$, où Y est sans partie martingale continue/P. Nous avons aussi $X=(X^c-\langle L,X^c\rangle)+(Y+\langle L,X^c\rangle)$. Le premier terme est une martingale continue/Q, le second une semimartingale sans partie martingale continue/Q. Autrement dit, nous avons prouvé :

<u>La partie martingale continue</u> $\tilde{X}^c$ <u>de la semimartingale</u> X <u>pour la loi</u> Q <u>est égale à</u> $X^c-\langle L,X^c\rangle$.

Nous allons maintenant établir un théorème simple et utile, cas particulier de résultats beaucoup plus généraux de Cath. DOLEANS-DADE, que j'espère que l'on verra plus loin.

26 THEOREME. <u>Soit</u> H <u>un processus prévisible localement borné, et soit</u> X <u>une semimartingale</u> (inutile de préciser si /P ou /Q). <u>Alors les intégrales stochastiques</u> $H_{\dot{P}}X$ <u>et</u> $H_{\dot{Q}}X$ <u>prises au sens de</u> P <u>et</u> Q <u>sont égales</u>.

DEMONSTRATION. Il suffit de traiter le cas où X est une martingale locale/P. Soit $Y=H_{\dot{P}}X$. Alors $Y-\frac{1}{M}\cdot[Y,M]$ est une martingale locale/Q d'après 24 : notons la $\tilde{Y}$. Comme $Y=H_{\dot{P}}X$, nous avons $[Y,M]=H\cdot[X,M]$, et nous avons pour toute semimartingale/P , notée U :

$$[\tilde{Y},U]_t=[Y-\frac{H}{M}\cdot[X,M],U]_t=[Y,U]_t-\Sigma_{s\leq t}\frac{H_s}{M_s}\Delta X_s\Delta M_s\Delta U_s$$

$$=(H\cdot[X-\frac{1}{M}\cdot[X,M],U])_t=(H\cdot[\tilde{X},U])_t \quad (\text{car } [Y,U]=H\cdot[X,U]),$$

en désignant par $\tilde{X}$ la martingale locale/Q $X-\frac{1}{M}\cdot[X,M]$. Prenant pour U une martingale locale/Q , nous obtenons la relation caractérisant l'intégrale stochastique $H_{\dot{Q}}\tilde{X}$: ainsi $H_{\dot{Q}}\tilde{X}=\tilde{Y}$, puis comme $X=\tilde{X}+\frac{1}{M}\cdot[X,M]$

$$H_{\dot{Q}}X=H_{\dot{Q}}\tilde{X}+\frac{H}{M}\cdot[X,M]=\tilde{Y}+\frac{H}{M}\cdot[X,M]=H_{\dot{P}}X \quad .$$

V. REPRESENTATIONS DES FONCTIONS BMO

Notre but dans ce paragraphe est l'extension au cas continu d'un magnifique théorème de GARSIA concernant BMO en temps discret : il s'agit de montrer que le "modèle" d'élément de BMO donné au n°V.2 est en fait l'élément de BMO le plus général (ce n'est pas tout à fait exact, car il y a deux modèles légèrement différents : voir l'énoncé précis). Mais nous faisons de nombreuses digressions autour de cette idée. La méthode utilisée est celle de GARSIA.

Nous commençons par un résultat d'analyse fonctionnelle, plutôt amusant (le lecteur regardera le cas particulier où Ω est réduit à un point !). Nous considérons un espace <u>mesurable</u> $(\Omega,\underline{F})$, et désignons par $\mathcal{K}$ l'espace des processus <u>mesurables</u> (X_t), <u>bornés</u>, dont toutes les trajectoires $X_{\bullet}(\omega)$ sont càdlàg. sur $[0,\infty]$: un processus $X\in\mathcal{K}$ est donc une fonction sur $[0,\infty[\times\Omega$, mais la limite à gauche $X_{\infty-}$ existe à l'infini, et nous conviendrons toujours que $X_{0-}=X_{\infty}=0$. Nous posons $X^*(\omega)=\sup_t|X_t(\omega)|$.

27 THEOREME. Soit H une forme linéaire sur $\mathcal{K}$ possédant la propriété suivante

(27.1) Si des $X^n\in\mathcal{K}^+$ convergent vers 0 en restant uniformément bornés, et si $X^{n*}\to 0$ sur Ω, alors $H(X^n)\to 0$.

Alors il existe deux mesures bornées α et β sur $[0,\infty]\times\Omega$ telles que

(27.2) $$H(X) = \int X_s(\omega)\alpha(ds,d\omega) + \int X_{s-}(\omega)\beta(ds,d\omega)$$

Il y a unicité si l'on impose à β de ne pas charger $\{0\}\times\Omega$, à α de ne pas charger $\{\infty\}\times\Omega$, et à β d'être portée par une réunion dénombrable de graphes de v.a. positives.

DEMONSTRATION. Par un raisonnement familier, nous allons montrer d'abord que H est différence de deux formes linéaires positives.

Posons pour tout $X\in\mathcal{K}^+$ $H^+(X) = \sup_{0\leqq Y\leqq X} H(Y)$. Cette quantité est finie, car sinon il existerait des Y^n positifs tels que $Y^n\leqq X$, $H(Y^n)\geqq n$, et les $X^n=Y^n/n$ contrediraient (27.1). On a évidemment $H^+(tX)= tH^+(X)$ $(t\geqq 0)$, et d'autre part $H^+(X+X')=H^+(X)+H^+(Y')$ (raisonnement familier : tout $Z\in\mathcal{K}^+$ majoré par $X+X'$ peut s'écrire $Y+Y'$, où $0\leqq Y\leqq X$, $0\leqq Y'\leqq X'$) . Enfin, H^+ satisfait à (27.1) : sinon, il existerait des $X^n\in\mathcal{K}^+$ tels que $X^{n*}\to 0$ P-p.s., et que $H^+(X^n)$ reste $\geqq\varepsilon$, et l'on pourrait trouver des Y^n tels que $0\leqq Y^n\leqq X^n$ et $H(Y^n)$ reste $\geqq\varepsilon/2$, ce qui contredirait (27.1). H^+ se prolonge alors à $\mathcal{K}=\mathcal{K}^+-\mathcal{K}^+$ en une forme linéaire positive, on a que $H^+-H=H^-$ est une forme linéaire positive qui satisfait à (27.1). On pose $|H|=H^++H^-$, et on rappelle que (par un raisonnement classique)

$$|H|(X) = \sup_{|Y|\leqq X} H(Y) \quad \text{si } X\in\mathcal{K}^+$$

Considérons l'ensemble W formé des éléments de $[0,\infty]\times\Omega\times\{+,-\}$ qui sont, ou de la forme $(t,\omega,+)$ avec $0\leqq t<\infty$, ou de la forme $(t,\omega,-)$ avec $0<t\leqq\infty$. Si C est une partie de $[0,\infty]\times\Omega$, nous notons C_+ la partie de W formée des $(t,\omega,+)$ tels que $0\leqq t<\infty$, $(t,\omega)\in C$, et C_- l'ensemble des $(t,\omega,-)$ tels que $0<t\leqq\infty$, $(t,\omega)\in C$. De même, si c est une fonction

sur $[0,\infty]\times\Omega$, c_+ est définie sur W par $c_+(t,\omega,-)=0$, $c_+(t,\omega,+)= c(t,\omega)$, et c_- par $c_-(t,\omega,+)=0$, $c_-(t,\omega,-)=c(t,\omega)$ - c'est le prolongement aux fonctions de la notion précédente pour les ensembles. Enfin, si X est un processus appartenant à $\mathcal{K}$, nous lui associons la fonction $\overline{X}$ sur W définie par

$$\overline{X}(t,\omega,+)= X_t(\omega) \quad , \quad \overline{X}(t,\omega,-) = X_{t-}(\omega)$$

(cela explique pourquoi nous avons des notations en + et - !). Nous désignons par $\overline{\mathcal{K}}$ l'ensemble des $\overline{X}$, $X\in\mathcal{K}$, et par $\underline{\underline{W}}$ la tribu engendrée sur W par $\overline{\mathcal{K}}$. Il est clair que $\overline{\mathcal{K}}$ est un espace vectoriel, stable pour les opérations $\wedge$ et $\vee$, contenant les constantes, et que $X\mapsto\overline{X}$ est une bijection de $\mathcal{K}$ sur $\overline{\mathcal{K}}$. Nous pouvons donc définir une forme linéaire $\overline{H}$ sur $\overline{\mathcal{K}}$ par la relation $\overline{H}(\overline{X})=H(X)$. Nous démontrons :

27a LEMME. <u>Il existe une mesure bornée</u> (<u>signée</u>) ν <u>unique sur</u> $(W,\underline{\underline{W}})$ <u>telle que</u> $H(X)=\nu(\overline{X})$ <u>pour tout</u> $X\in\mathcal{K}$. <u>La mesure associée à la forme linéaire</u> $|H|$ <u>est alors égale à</u> $|\nu|$.

Pour prouver l'existence, nous pouvons supposer H positive (nous en déduirons l'existence pour H quelconque par différence, et l'unicité est une conséquence familière du théorème des classes monotones : deux mesures bornées égales sur $\overline{\mathcal{K}}$ réticulé sont égales sur la tribu engendrée). Tout revient à prouver que si H est positive et satisfait à (27.1), alors $\overline{H}$ satisfait à la condition de DANIELL : si des $\overline{X}^n\in\overline{\mathcal{K}}$ tendent vers 0 en décroissant, alors $\overline{H}(\overline{X}^n)\to 0$. Introduisant les X^n correspondants, et utilisant (27.1), il nous suffit de montrer que $X^{n*}\to 0$. Or soit $\omega\in\Omega$ et $K_n(\omega)=\{t\in[0,\infty] : X^n_t(\omega)\geqq\varepsilon \text{ ou } X^n_{t-}(\omega)\geqq\varepsilon\}$; les $K_n(\omega)$ sont des <u>compacts</u> qui décroissent, et la condition $\lim_n \overline{X}^n =0$ entraîne que l'intersection des $K_n(\omega)$ est vide, donc $K_n(\omega)=\emptyset$ pour n assez grand, quel que soit ε, et cela signifie que $X^{n*}(\omega)\to 0$.

La dernière phrase de l'énoncé se lit ainsi : si ν est une mesure sur la tribu $\underline{\underline{W}}$ engendrée par $\overline{\mathcal{K}}$ réticulé, alors pour toute $f\in\overline{\mathcal{K}}^+$ on a $|\nu|(f) = \sup_{g\in\overline{\mathcal{K}}\,,\,|g|\leqq f} \nu(g)$. Ce résultat devrait figurer dans tous les bons traités d'intégration, mais il ne figure même pas dans les mauvais.

Notre problème consiste maintenant à ramener ν sur $[0,\infty]\times\Omega$. A cet effet, nous faisons les remarques suivantes.

a) Soit S une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable positive, et soit $[S]$ son graphe. Alors $[S]_+$ et $[S]_-$ appartiennent à $\underline{\underline{W}}$. En effet, soit X l'indicatrice de $[S,S+\varepsilon[$; X appartient à $\mathcal{K}$, $\overline{X}$ est l'indicatrice de $[S,S+\varepsilon[_+ \cup\,]S,S+\varepsilon]_-$, qui appartient donc à $\underline{\underline{W}}$, après quoi on passe à l'intersection sur $\varepsilon=1/n$ et il vient que $[S]_+ \in \underline{\underline{W}}$. On traite l'autre cas en regardant $[(S-\varepsilon)^+, S[$.

b) Si C est une partie mesurable de $[0,\infty]\times\Omega$, alors $C_+ \cup C_- \in \underline{\underline{W}}$. Pour voir cela, il est plus simple de montrer que si c est mesurable, alors $c_+ + c_-$ est $\overline{\mathcal{K}}$-mesurable. En effet, il suffit de vérifier cela pour des fonctions c qui engendrent la tribu $\underline{\underline{B}}([0,\infty])\times\underline{\underline{F}}$, et nous choisissons les processus mesurables X _à trajectoires continues_ . Alors $X_+ + X_- = \overline{X}$, et c'est évident.

27b LEMME. _Il existe trois mesures_ $\mu_+, \mu_-, \hat{\mu}$ _sur_ $[0,\infty]\times\Omega$, _possédant les propriétés suivantes_

1) μ_+ _est portée par_ $[0,\infty[\times\Omega$, _et par une réunion dénombrable de graphes. Pour tout graphe_ $[S]$ _on a_ $\mu_+([S])=\nu([S]_+)$.

2) μ_- _est portée par_ $]0,\infty]\times\Omega$, _et par une réunion dénombrable de graphes. Pour tout graphe_ $[S]$ _on a_ $\mu_-([S])= \nu([S]_-)$.

3) $\hat{\mu}$ _ne charge aucun graphe_.

4) _Pour tout_ $X\in\mathcal{K}$, _on a_

$$(27.3) \qquad H(X) = \int X_t(\omega)\mu_+(dt,d\omega) + \int X_t(\omega)\hat{\mu}(dt,d\omega)+ \int X_{t-}(\omega)\mu_-(dt,d\omega)$$

De plus, ces mesures sont uniques, et les trois mesures associées à la forme linéaire $|H|$ _sont_ $|\mu_+|, |\mu_-|, |\hat{\mu}|$.

Construisons par exemple μ_+ . Considérons une **suite** (S_n) de v.a. telle que la mesure de $G_+ = \bigcup_n [S_n]_+$ pour la mesure $|\nu|$ soit _maximale_. Quitte à remplacer S_n par $+\infty$ sur $\bigcup_{i<n}\{S_i=S_n\}$, on peut supposer que les graphes $[S_n]$ sont disjoints dans $[0,\infty[\times\Omega$. Nous posons $\nu_+ = I_{G_+}\cdot\nu$.

Puisque ν_+ est portée par $G_+ \subset ([0,\infty]\times\Omega)_+$, ce dernier ensemble est ν_+-mesurable et porte ν_+ . Pour tout C mesurable dans $[0,\infty]\times\Omega$, C_+ est l'intersection de $C_+ \cup C_-$ avec un ensemble portant ν_+ , et nous pouvons définir une mesure μ_+ en posant

$$\mu_+(C) = \nu_+(C_+ \cup C_-) = \nu_+(C_+) \quad .$$

On vérifie aussitôt que μ_+ est portée par la réunion des $[S_n]$ et satisfait à 1), en raison du caractère maximal de G_+ . La construction de μ_- et ν_- est exactement semblable. Nous posons enfin

$$\hat{\nu} = \nu-\nu_+-\nu_- \quad , \quad \hat{\mu}(C) = \hat{\nu}(C_+ \cup C_-) \ .$$

Vérifions (27.3). Le seul point délicat est celui des notations.

Notons u la fonction $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$, v la fonction $(t,\omega)\mapsto X_{t-}(\omega)$. Alors $\bar{X}=u_++v_-$ et nous avons

$$H(X) = \nu(\bar{X}) = (\nu_++\hat{\nu}+\nu_-)(u_++v_-)$$

Nous développons : $\nu_+(u_++v_-)=\nu_+(u_+)=\mu_+(u\ )$. De même, $\nu_-(u_++v_-) = \mu_-(v)$. Enfin , u et v ne diffèrent que sur une réunion dénombrable de graphes, et $\hat{\nu}$ <u>ne charge aucun graphe</u> $[S]_-$, donc $\hat{\nu}(v_-)=\hat{\nu}(u_-)$ et l'on a $\hat{\nu}(u_++v_-)=\hat{\nu}(u_++u_-)=\hat{\mu}(u)$. Ainsi $H(X)=\mu_+(u)+\hat{\mu}(u)+\mu_-(v)$, et c'est (27.3). Il ne reste plus qu'à poser $\alpha=\mu_++\hat{\mu}$, $\beta=\mu_-$ pour avoir (27.2).

<u>Remarque</u>. Seule la phrase soulignée ci-dessus a servi : il importe peu que $\hat{\nu}$ charge des graphes $[S]_+$. La décomposition au moyen de μ_+ n'a donc servi à rien, il suffit d'isoler μ_- .

Achevons la démonstration du lemme, et donc du théorème. Nous laisserons de côté l'unicité. Quant à la dernière phrase, il suffit de remarquer que la décomposition de H en deux formes H^+ et H^- correspond à celle de ν en les mesures étrangères ν^+ et ν^-, et que les couples de mesures (μ_+^+,μ_+^-) , (μ_-^+,μ_-^-) , $(\hat{\mu}^+,\hat{\mu}^-)$ sont des couples de mesures positives étrangères, fournissant ainsi les décompositions canoniques de $\mu_+,\mu_-,\hat{\mu}$.

REMARQUE. Cette démonstration est en substance celle par laquelle Catherine Doléans établit l'existence de la décomposition des surmartingales. Voir le n°30.

L'application à $\underline{\underline{BMO}}$ repose sur le corollaire suivant, dans lequel $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est à nouveau muni d'une loi de probabilité P.

28 THEOREME. <u>Supposons que la forme linéaire</u> H <u>du n°27 satisfasse à la condition</u>

(28.1) $$|H(X)| \leq cE[X^*] \quad \underline{\text{si}}\ X\in\mathcal{K}$$

<u>Elle admet alors la représentation</u>

(28.2) $$H(X) = \int_{[0,\infty[} X_t dA_t + \int_{]0,\infty]} X_{t-}dB_t$$

<u>où</u> A <u>et</u> B <u>sont deux processus à variation intégrables non adaptés</u>, A <u>non nécessairement nul en</u> 0, B <u>nul en</u> 0 <u>et pouvant sauter à l'infini</u>, <u>purement discontinu</u>, A <u>et</u> B <u>étant de plus tels que</u>

(28.3) $$\int_{[0,\infty]} |dA_s|+|dB_s| \leq c \quad P\text{-}\underline{\text{p.s.}}$$

DEMONSTRATION. Commençons par le cas où H est positive. Alors (28.1) entraîne (27.1), et H admet la représentation (27.2). De plus, si U est un élément P-négligeable de $\underline{\underline{F}}$, $X_t(\omega)=I_U(\omega)$ définit un processus càdlàg. tel que $X^*=0$ P-p.s., donc $H(X)=0$, et l'on voit que α et β ne chargent pas les ensembles évanescents, d'où la représentation (28.2) d'après le chap.I, n°2. Enfin, si $X_t(\omega)=U(\omega)$ est un processus càdlàg. constant en t, on a $X^*=|U|$, et la relation (28.1) s'écrit $E[(A_\infty+B_\infty)U] \leqq cE[U]$ si $U\geqq 0$ est bornée, d'où (28.3).

Si H n'est pas positive, nous écrivons que pour $X\in\mathcal{K}^+$

$$|H|(X) = \sup_Y H(Y) \quad \text{Y parcourant l'ensemble des éléments de } \mathcal{K} \text{ majorés par X en valeur absolue}$$

Alors $|H|(X) \leqq c.\sup_Y E[Y^*] = cE[X^*]$. Il en résulte à nouveau que $|\alpha|$ et $|\beta|$ ne chargent pas les ensembles P-évanescents, d'où les représentations (28.2) pour H et $|H|$, les processus associés à $|H|$ étant $\int_0^t |dA_s|$ et $\int_0^t |dB_s|$. Il ne reste plus qu'à appliquer le cas précédent, à la forme linéaire positive $|H|$.

Voici le théorème de GARSIA, étendu au cas continu :

29 THEOREME. <u>Soit</u> M <u>une martingale telle que</u> $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leqq 1$. <u>Il existe alors un processus à variation intégrable adapté</u> (J_t), <u>tel que</u>

(29.1) $$E[\int_{[T,\infty[} |dJ_s| \,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c \text{ pour tout t.d'a. } T .$$

<u>et un processus à variation intégrable prévisible</u> (K_t), <u>nul en</u> 0, <u>pouvant sauter à l'infini, tel que</u>

(29.2) $$E[\int_{]T,\infty]} |dK_s| \,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c ,$$

<u>tels que l'on ait</u>

(29.3) $$M_\infty = J_\infty + K_\infty$$

DEMONSTRATION. Définissons une forme linéaire H sur l'espace des martingales bornées en posant

$$H(X) = E[X_\infty M_\infty] \quad \text{si X est une martingale bornée}$$

Comme M a une norme $\underline{\underline{BMO}} \leq 1$, que $\underline{\underline{BMO}}$ est le dual de $\underline{\underline{H}}^1$, et que $\underline{\underline{H}}^1$ peut être défini par la norme $E[X^*]$ (V.33), on a $|H(X)| \leqq cE[X^*]$.

Grâce au théorème de HAHN-BANACH, nous savons que H est prolongeable à $\mathcal{K}$ suivant une forme linéaire satisfaisant à la même inégalité, que nous noterons encore H, et qui admet une représentation donnée par le théorème 28. Alors, avec les notations de ce théorème, nous avons pour toute martingale X bornée

$$E[X_\infty M_\infty] = E[\int_{[0,\infty[} X_s dA_s + \int_{]0,\infty]} X_{s-} dB_s]$$

Soient respectivement J la projection duale optionnelle de A, K la projection duale prévisible de B. Comme les variations totales de A et de B sont bornées par c , nous avons (29.1) et (29.2). D'autre part, la formule précédente s'écrit

$$E[X_\infty M_\infty] = E[\int_{[0,\infty[} X_s dJ_s + \int_{]0,\infty]} X_{s-} dK_s] = E[X_\infty J_\infty + X_\infty K_\infty]$$

d'où (29.3), X_∞ étant une v.a. bornée arbitraire.

REMARQUE. Dans le cas discret, X_{n-} est la valeur de X à l'instant n-1, de sorte qu'on peut faire entrer le second terme dans le premier, à l'exception de l'intégrale portant sur $\{\infty\}$. Ainsi, on peut réduire B à son " saut à l'infini", et la condition (29.2) exprime simplement que ce saut est borné. Ainsi, dans le cas discret, K_∞ peut être pris simplement égal à une v.a. bornée. On obtient alors la forme indiquée par GARSIA dans [21], th.II.4.1, p.48 (1).

Nous nous engageons maintenant dans des digressions au sujet du théorème 27, après quoi nous reviendrons au problème de représentation de $\underline{\underline{BMO}}$.

APPLICATION A LA DECOMPOSITION DES SURMARTINGALES

Nous allons regarder de près la méthode qui nous a conduit aux théorèmes 27 et 28, et l'utiliser à d'autres fins que la représentation de $\underline{\underline{BMO}}$: elle permet en effet de démontrer rapidement des théorèmes de décomposition des surmartingales.

30 Nous fixons d'abord nos notations. Nous désignons par X une <u>surmartingale forte optionnelle</u>, positive et appartenant à la classe (D). Autrement dit, X est un processus optionnel positif, satisfaisant à l'inégalité des surmartingales pour les temps d'arrêt

si $S \leqq T$, $X_S \geqq E[X_T | \underline{\underline{F}}_S]$ p.s. (avec la convention $X_\infty = 0$)

et telle que toutes les v.a. X_S, où S parcourt l'ensemble des temps d'arrêt, soient <u>uniformément intégrables</u>. Soulignons que ces hypothèses n'impliquent aucune espèce de propriété de continuité de X, ni que X soit un potentiel au sens usuel de ce terme.

---

(1) J'en profite pour remercier R.CAIROLI, grâce à qui j'ai maintenant un exemplaire de [21] (cf. p.91).

Une variante de cette définition est celle des <u>surmartingales fortes prévisibles</u> , processus prévisibles positifs $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, satisfaisant à $X_S \geq E[X_T|\underline{\underline{F}}_{S-}]$ (avec la convention $X_\infty=0$) si S et T sont deux temps d'arrêt prévisibles tels que $S\leq T$. Ces processus sont assez peu utilisés, et c'est malheureusement à eux que s'applique directement la méthode du théorème 27. Pour traiter les surmartingales fortes optionnelles, il faut travailler sur les processus <u>càglàd.</u>, non càdlàg. Cela va nous obliger à de nouvelles notations.

Nous désignons par $\mathcal{K}_0$ l'espace des processus <u>càdlàg. prévisibles élémentaires</u> , i.e. l'espace vectoriel engendré par les processus $I_{[S,T[}$ sur $[0,\infty[\times\Omega$, où S et T sont deux temps prévisibles tels que $S\leq T$ - je devrais écrire $[\![S,T[\![$, mais c'est trop compliqué. De même , $\mathcal{L}_0$ sera l'espace vectoriel engendré par les processus <u>càglàd. prévisibles élémentaires</u> sur $[0,\infty]\times\Omega$, c'est à dire par les $I_{\{0\}\times A}$ $(A\in\underline{\underline{F}}_0)$ et les $I_{]S,T]}$, où S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S\leq T$ (noter, pour la mémoire, que $\mathcal{K}$ est l'initiale de $\mathcal{K}$àdlàg et $\mathcal{L}$ celle de $\mathcal{L}$àdcàg !) Un élément U de $\mathcal{L}_0$ s'écrit de manière unique

$$(30.1)\quad U = a_0 I_{\{0\}\times A} + \Sigma_{j=1}^n a_j I_{]S_j,T_j]}$$

où n est fini, $a_0,\ldots,a_n$ sont des constantes, A appartient à $\underline{\underline{F}}_0$, les S_i,T_i sont des temps d'arrêt tels que $S_1\leq T_1\leq S_2\ldots\leq S_n\leq T_n$, avec $0<S_1$, $S_i<T_i$ sur $\{S_i<\infty\}$. Nous définissons alors une forme linéaire H sur $\mathcal{L}_0$ en posant

$$(30.2)\qquad H(U) = a_0\int_A X_0 P + \Sigma_j\, a_j E[X_{S_j}-X_{T_j}]$$

H est manifestement positive. Nous voulons démontrer d'abord

30a LEMME. <u>Il existe deux mesures positives</u> α <u>et</u> β <u>sur</u> $[0,\infty]\times\Omega$, <u>ne chargeant pas les ensembles évanescents</u>, <u>telles que pour</u> $U\in\mathcal{L}_0$

$$(30.3)\qquad H(U) = \int_{[0,\infty[\times\Omega} U_{t+}(\omega)\alpha(dt,d\omega)+\int_{]0,\infty]\times\Omega} U_t(\omega)\beta(dt,d\omega)$$

Il y a pour cela deux méthodes : l'une est celle de C.DOLEANS-DADE, l'autre passe par les espaces d'ORLICZ, et elles sont toutes deux assez intéressantes.

31 PREMIERE METHODE. Nous reprenons la démonstration de 27, en munissant $[0,\infty]\times\Omega$ de la tribu <u>prévisible</u> $\underline{\underline{P}}$. Nous dédoublons l'espace comme au n°27, et munissons W de la tribu $\underline{\underline{W}}$ engendrée par les fonctions $\bar{U}$, où

$U\in\mathcal{L}_0$ et

$$\overline{U}(t,\omega,+) = U_{t+}(\omega) \quad , \overline{U}(t,\omega,-)= U_t(\omega).$$

Nous vérifions comme aux pages 136 et 137 que

a) Si S est un temps d'arrêt , $[S]_+$ appartient à $\underline{\underline{W}}$ ($U=I_{]S,S+\varepsilon]}$ appartient à $\mathcal{L}_0$, donc $[S,S+\varepsilon[_+ \cup]S,S+\varepsilon]_-$ appartient à $\underline{\underline{W}}$, et on passe à l' intersection en ε), et si S est un temps d'arrêt prévisible, $[S]_-$ appartient à $\underline{\underline{W}}$ (si S_n est une suite annonçant S, $U=I_{]S_n,S]}$ appartient à $\mathcal{L}_0$ et on raisonne comme ci-dessus).

b) Si C est un ensemble prévisible, $C_+ \cup C_-$ appartient à $\underline{\underline{W}}$. Il suffit de le vérifier pour des générateurs de la tribu prévisible. Pour ceux de la forme $C=\{0\}\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}_0$) on a $C_+\cup C_- = [S]_+$, où S est le temps d'arrêt qui vaut 0 sur A, $+\infty$ sur A^c, et b) résulte de a). Pour ceux de la forme $C=]0,S]$, on a $C_+\cup C_- =]0,S]_+\cup]0,S]_- = ([0,S[_+\cup]0,S]_-)\cup[S]_+\setminus[0]_+$, et on applique à nouveau a).

Nous construisons ensuite une mesure ν sur W représentant H : $H(U)= \nu(\overline{U})$ pour $U\in\mathcal{L}_0$, à la manière du lemme 27a, p.136 . Comme tout est positif, il suffit de vérifier la condition (27.1) sous la forme

<u>si des processus</u> $U^n\in\mathcal{L}_0$ <u>tendent en décroissant vers</u> 0, <u>de telle sorte que</u> $U^{n*}\to 0$, <u>alors</u> $H(U^n)\to 0$,

qui suffit à entraîner la condition de DANIELL sur W. Pour voir cela, nous pouvons supposer tous les U^n bornés par 1. Posons $S_n = \inf \{ t : U^n_t > \varepsilon \}$: le fait que les U^{n*} tendent vers 0 signifie que pour tout ε les S_n croissent vers $+\infty$, et que <u>pour tout</u> ω $S_n(\omega)=+\infty$ <u>pour</u> n <u>grand</u>

Nous avons d'autre part $U^n\leqq\varepsilon$ sur $[0,S_n]$ par continuité à gauche, donc

$$H(U^n) \leqq \varepsilon H(1) + H(I_{]S_n,\infty]}) = \varepsilon H(1)+E[X_{S_n}]$$

Et maintenant $E[X_{S_n}]\to 0$ par l'intégrabilité uniforme des X_{S_n} . Le reste de la démonstration se poursuit comme au n°27. La mesure μ_- se définit sur la tribu prévisible, mais il y a une nuance intéressante :

la tribu optionnelle est engendrée par la tribu prévisible et les graphes [S] de temps d'arrêt. Ayant formé $\nu'=\nu-\nu_-$, qui ne charge aucun graphe $[S]_-$, où S est prévisible, nous remarquons que toute réunion dénombrable de graphes $[S_n]_-$, où les S_n sont des t.d'a. <u>quelconques</u> , est intérieurement ν'-négligeable. Nous pouvons alors étendre ν' en une mes. $\overline{\nu}'$ pour laquelle les graphes $[S]_-$ sont négligeables. Mais alors, $C_+\cup C_-$ est $\overline{\nu}'$-mesurable pour C <u>optionnel</u> , et les mesures μ_+, $\hat{\mu}$ se trouvent définies sur la tribu optionnelle. Ainsi :

il existe deux mesures positives bornées α (sur la tribu optionnelle, ne chargeant pas $\{\infty\}\times\Omega$) β (sur la tribu prévisible, portée par une réunion dénombrable de graphes prévisibles, ne chargeant pas $\{0\}\times\Omega$) telles que pour $U\in\mathcal{L}_0$

$$H(U) = \int_{[0,\infty[\times\Omega} U_{t+}(\omega)\alpha(dt,d\omega) + \int_{]0,\infty]\times\Omega} U_t(\omega)\beta(dt,d\omega)$$

et il y a d'ailleurs unicité. Ces mesures ne chargeant pas les ensembles évanescents, nous pouvons les étendre à la tribu $\underline{\underline{B}}([0,\infty])\times\underline{\underline{F}}$ en deux mesures - encore notées α et β - dont la première est compatible avec la projection optionnelle, la seconde compatible avec la projection prévisible. Notant A et B les deux processus croissants continus à droite correspondants, le premier optionnel, le second prévisible, nous avons pour $U\in\mathcal{L}_0$

$$(31.1)\quad H(U) = E\left[\int_{[0,\infty[} U_{t+}(\omega)dA_t(\omega) + \int_{]0,\infty]} U_t(\omega)dB_t(\omega)\right]$$

soit, en prenant $U=I_{]T,\infty]}$

$$(31.2)\qquad E[X_T] = E[(A_\infty+B_\infty)-A_{T-}-B_T]$$

puis, en remplaçant T par T_H , $H\in\underline{\underline{F}}_T$

$$(31.3)\qquad X_T = E[A_\infty+B_\infty|\underline{\underline{F}}_T] - A_{T-}-B_T$$

ou

$$(31.4)\qquad X_t = M_t - A_{t-} - B_t$$

| M martingale c.à.d. unif. intégrable
| A processus croissant c.à.d. adapté
| B processus croissant c.à.d. prévisible purement discontinu

C'est la décomposition de MERTENS. Exactement de la même manière, mais un peu plus aisément, on obtient la décomposition des surmartingales fortes prévisibles

$$(31.5)\qquad X_t = M_{t-} - A_t - B_{t-}$$

| M martingale c.à.d. unif. intégrable
| A processus croissant c.à.d. prévis.
| B processus croissant c.à.d. prévis. purement discontinu

Personne n'a encore rencontré ces surmartingales là !

32 SECONDE METHODE. Elle consiste à éviter les raisonnements "analogues" à ceux du th.27, mais plus ou moins délicats, en se ramenant directement à 27 par une application du théorème de HAHN-BANACH. Nous utiliserons les résultats sur les espaces d'ORLICZ présentés dans NEVEU, <u>martingales à temps discret</u>, p.193-200.

Nous utilisons le lemme de la VALLEE-POUSSIN (Probabilités et potentiel, chap.II, n°22 : toutes les variables aléatoires X_T , où T est un temps d'arrêt arbitraire, étant uniformément intégrables, il existe une fonction de YOUNG Φ sur $\mathbb{R}_+$ (fonction convexe, croissante, telle que $\Phi(0)=0$ et $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)/t = +\infty$) telle que

$$(32.1) \qquad \sup_T E[\Phi\circ X_T] \leq 1 .$$

Rappelons que, pour toute v.a. f , $\|f\|_\Phi = \inf\{ a : E[\Phi(\frac{|f|}{a})]\leq 1\} \leq +\infty$ est la norme dans l'espace d'ORLICZ L^Φ. Ainsi, (32.1) s'écrit aussi $\sup_T \|X_T\|_\Phi \leq 1$. Nous désignons par Ψ la fonction convexe conjuguée de Φ, et rappelons l'inégalité $E[|fg|] \leq 2\|f\|_\Phi \|g\|_\Psi$. D'autre part, nous désignons par a(t) une fonction de YOUNG sur $\mathbb{R}_+$, telle que

$$(32.2) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{a(t)} < +\infty$$

par exemple, $a(t)=t^{1+\varepsilon}$, et nous posons $\Gamma=\Psi\circ a$, qui est encore une fonction de YOUNG. Quitte à remplacer $\Phi(t)$ par un multiple de $\Phi(t)+t$ satisfaisant encore à (32.1), nous pouvons supposer Φ (et donc Ψ) strictement croissante, ce qui simplifie la démonstration du lemme suivant (les notations sont celles de 31).

32a LEMME. H <u>est bornée sur l'ensemble des</u> $U\in\mathcal{L}_0$ <u>tels que</u> $\|U\|_\Gamma \leq 1$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons nous borner aux U positifs. Pour tout $t>0$, nous désignons par S_t le temps d'arrêt

$$(32.3) \qquad S_t = \inf \{ s : U_s>t \}$$

de sorte que (la continuité à gauche de U à l'infini est utilisée ici)

$$(32.4) \qquad \{S_t<\infty \} = \{ U^*>t \}$$

Regardons la forme (30.1) de U : l'ensemble $\{(s,\omega) : U_s(\omega)>t\}$ est réunion de certains des ensembles $\{0\}\times A$, $]S_j,T_j]$, et il en résulte que son indicatrice appartient à $\mathcal{L}_0$. Il est alors immédiat de vérifier que

$$(32.5) \qquad H(U) = \int_0^\infty H(I_{\{U>t\}})dt \leq \int_0^\infty dt \int X_{S_t} P$$

Nous reviendrons sur cette formule dans une autre digression. Pour l'instant, nous coupons l'intégrale en $\int_0^1 dt\int X_{S_t} P$, que nous majorons par $E[X_0]$, et $\int_1^\infty$. Dans ce second terme , nous écrivons

$$E[X_{S_t}] = E[X_{S_t} I_{\{U^*>t\}}] \leq 2\|X_{S_t}\|_\Phi \|I_{\{U^*>t\}}\|_\Psi$$

En définitive, compte tenu de (32.1), il nous suffit de montrer que $\int_1^{\infty} \| I_{\{U^*>t\}} \|_{\Psi} \, dt$ est borné. Or la définition de $\| \ \|_{\Psi}$ rappelée plus haut montre que

$$(32.6) \qquad \| I_{\{U^*>t\}} \|_{\Psi} = \frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{P\{U^*>t\}}\right)}$$

où Ψ^{-1} est la fonction réciproque de Ψ, strictement croissante. Par hypothèse, nous avons $E[\Gamma \circ U^*] \leq 1$, donc $P\{U^*>t\} \leqq \frac{1}{\Gamma(t)}$, d'où successivement : $1/P\{\ \} \geqq \Gamma(t)$, $\Psi^{-1}(1/P\{\ \}) \geqq \Psi^{-1}(\Gamma(t)) = a(t)$, et enfin

$$(32.7) \qquad \| I_{\{U^*>t\}} \| \leqq \frac{1}{a(t)}$$

et l'hypothèse (32.2) est juste ce qu'il nous faut. Le lemme 32a est prouvé.

Maintenant, la fin de la démonstration est très simple par la seconde méthode. Désignant par $\mathcal{L}$ l'espace de tous les processus càglàd. (non adaptés), nous prolongeons la forme linéaire H sur $\mathcal{L}_0$, bornée pour la norme $U \mapsto \| U^* \|_{\Gamma}$, en une forme linéaire sur $\mathcal{L}$ de même norme - encore notée H . Il est <u>immédiat</u> que cette forme satisfait à (27.1), d'où l'existence de deux mesures α_0 et β_0 telles que sur $\mathcal{L}$

$$(32.8) \quad H(U) = \int_{[0,\infty[\times\Omega} U_{s+}(\omega)\alpha_0(ds,d\omega) + \int_{]0,\infty]\times\Omega} U_s(\omega)\beta_0(ds,d\omega)$$

c'est à dire, le lemme 30a. Pour aboutir à (31.1), qui est notre but, nous prenons les projections optionnelle α de α_0 , prévisible β de β_0 , et les processus croissants associés.

33 Mais la seconde méthode donne aussi des inégalités intéressantes. Introduisons le processus décroissant <u>non adapté</u>

$$(33.1) \qquad D_t = (A^o_\infty + B^o_\infty) - A^o_{t-} - B^o_t$$

- qui n'est d'ailleurs continu, ni à droite, ni à gauche - où A^o_t et B^o_t sont les processus croissants non adaptés associés aux mesures α_0 et β_0. Ce processus décroissant admet X comme projection optionnelle. D'autre part, en prenant pour U dans (32.8) un processus constamment égal à une v.a. positive u, nous obtenons que

$$E[D_0 u] \leqq c \|u\|_{\Gamma} \text{ , où c est la norme de la forme linéaire H}$$

et cela entraîne que D_0 est dans l'espace d'ORLICZ associé à la fonction de YOUNG conjuguée de Γ, qui est "à peine moins bonne" que Φ. On peut avoir des résultats plus plaisants en raisonnant directement sur X, au lieu du "module d'intégrabilité" Φ .

Soit Y une v.a. intégrable, telle que le processus X soit majoré par la martingale continue à droite $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ - il existe toujours de telles v.a., par exemple la v.a. $A^o_\infty + B^o_\infty$, ou $A_\infty + B_\infty$, construite précédemment. Reprenons maintenant la formule (32.5), en l'écrivant

(33.2) $$H(U) \leqq E[\int_0^\infty X_{S_t} dt]$$

Nous avons $S_t = \inf\{ s : U_s > t \} = \inf\{ s : U^*_s > t \}$, où U^*_s s'obtient en rendant continu à droite le processus $\sup_{r<s} U_r$. Alors il est bien connu que l'on a aussi

(33.3) $$H(U) \leqq E[\int_0^\infty X_{S_t} dt] = E[\int_0^\infty X_s dU^*_s] \leqq E[\int_0^\infty Y_s dU^*_s]$$
$$= E[\int_0^\infty Y dU^*_s] = E[YU^*]$$

Maintenant, l'application $U \mapsto E[YU^*]$ est une norme sur $\mathcal{L}$, et la forme linéaire H sur $\mathcal{L}_0$ a une norme au plus égale à 1. Elle se prolonge donc en une forme linéaire sur $\mathcal{L}$ de norme au plus égale à 1, qui satisfait à (27.1), d'où deux mesures - nous les noterons encore α_0 et β_0 , pour ne pas encore avoir de nouvelles notations - et nous introduirons les processus croissants non adaptés correspondants A^o et B^o, et le processus décroissant (D_t) de (33.1). L'inégalité (33.3) appliquée à un processus U constamment égal à u nous donne

(33.4) $$E[u(A^o_\infty + B^o_\infty)] \leqq E[Yu]$$

et cela entraîne $A^o_\infty + B^o_\infty \leqq Y$ p.s.. Nous avons démontré le théorème suivant, conjecturé par GARSIA, démontré dans le séminaire VIII, p. 310, par une méthode entièrement différente[1]:

34 THEOREME. Soit X une surmartingale forte optionnelle, majorée par une martingale continue à droite $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$. Alors X est projection optionnelle d'un processus décroissant non adapté (D_t) majoré par Y.

Par exemple, si X^* est intégrable, on peut prendre $Y=X^*$.

---

1. L'emploi d'une formule exponentielle un peu mystérieuse (explicite). Seul le cas des surmartingales continues à droite est traité dans le séminaire VIII. Voir dans ce volume p.503-504.

35 Ce théorème, et le théorème de représentation de $\underline{\underline{BMO}}$ que nous avons vu, permettent d'envisager la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ d'une manière un peu différente. Nous savons que si M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, N à $\underline{\underline{BMO}}$, le produit $M_\infty N_\infty$ n'est pas nécessairement intégrable, et il s'agit de donner un sens au symbole "$E[M_\infty N_\infty]$" . La méthode employée plus haut consistait à l'interpréter comme $E[[M,N]_\infty]$ (V.10). Ici, on procède ainsi : on écrit N_∞ comme $A_\infty+B_\infty$, où A est un processus à VI optionnel (sans saut à l'infini) et B un processus croissant prévisible (nul en 0, pouvant sauter à l'infini). Si M est une martingale bornée, on a

$$(35.1)\qquad E[M_\infty N_\infty] = E[M_\infty(A_\infty+B_\infty)]=E[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s + \int_{]0,\infty]} M_{s-}dB_s]$$

Soit maintenant un processus à VI non adapté A° (ne sautant pas à l'infini) admettant A comme projection duale optionnelle, et soit B° non adapté (nul en 0) admettant B comme projection duale prévisible. Nous avons alors aussi

$$(35.2)\qquad E[M_\infty N_\infty] = E[\int_{[0,\infty[} M_s dA^\circ_s + \int_{]0,\infty]} M_{s-}dB^\circ_s]$$

Mais cette expression peut avoir un sens sans que le premier membre en ait un. Par exemple, si $E[M^*(\int_{[0,\infty]}|dA^\circ_s|+|dB^\circ_s|)] < \infty$. On peut affirmer l'existence de deux tels processus A° et B°, si la surmartingale forte

$$(35.3)\qquad X_t = E[\int_{[T,\infty[}|dA_s|+\int_{]T,\infty]}|dB_s|\,|\underline{\underline{F}}_T]$$

est majorée par une martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$, où $E[M^*Y]<\infty$ - car alors on peut trouver A° et B° tels que la somme de leurs variations totales soit $\leq Y$. C'est précisément ce qui arrive lorsque M appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ ($M^*\in L^1$) et N à $\underline{\underline{BMO}}$ (Y=Cte), et un passage à la limite sur (35.2) à partir du cas où M est de carré intégrable - ou même bornée- montre que l'on obtient ainsi la bonne forme bilinéaire sur $\underline{\underline{H}}^1\times\underline{\underline{BMO}}$.

UNE REMARQUE SUR LES THEOREMES 18-20

36 Nous allons conclure ce paragraphe en indiquant comment les théorèmes 18 et 20 conduisent "presque" à une seconde représentation des éléments de $\underline{\underline{BMO}}$. Bien que les essais dans cette direction aient été infructueux, ils ne me semblent pas dépourvus d'intérêt.

Nous désignons par $\underline{\underline{P}}$ l'espace des processus prévisibles bornés J, avec la norme $\beta(J) = \text{sup ess } J^*$ (nous voulons éviter la notation $\| \|_\infty$, car nous aurons aussi des v.a. L_∞ un peu partout). De même, si L est une martingale bornée, $\beta(L)$ sera sup ess L^* ($= \|L_\infty\|_\infty$! Illustration de ce que nous voulons éviter). **Soit** $M\in\underline{\underline{H}}^1$; alors nous avons pour toute martingale $N=J\cdot M$ où $\beta(J)\leq 1$, $[N,N]_\infty \leq [M,M]_\infty$, donc $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, et finalement , la norme $\underline{\underline{H}}^1$ étant plus forte que la norme L^1,

(36.1) $$\sup_{\beta(J)\leq 1} \|(J\cdot M)_\infty\|_1 \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$$

ou encore

(36.2) $$\sup_{\substack{\beta(J)\leq 1\\ \beta(L)\leq 1}} |E[(J\cdot M)_\infty L_\infty]| \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$$

Mais inversement, le côté gauche de (36.2) ou (36.1) est une norme <u>équivalente</u> à la norme $\underline{\underline{H}}^1$. Pour le voir, il suffit de reprendre le raisonnement de 18, en regardant seulement les J de la forme $I_{[\![0]\!]} + \Sigma_i\, \varepsilon_i(w) I_{]\!]t_i,t_{i+1}]\!]}$ relatifs aux subdivisions dyadiques de la droite, avec des ε_i aléatoires, et en appliquant le lemme de KHINTCHINE .

Soit maintenant K l'ensemble des martingales de la forme $J\cdot L$, J parcourant la boule unité $\{J : \beta(J)\leq 1\}$, et de même L la boule unité $\{L : \beta(L)\leq 1\}$. On a pour toute martingale $M\in\underline{\underline{H}}^1$

(36.3) $$\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c \sup_{\substack{\beta(J)\leq 1\\ \beta(L)\leq 1}} E[(J\cdot M)_\infty L_\infty] = c \sup_{\dots} E[M_\infty (J\cdot L)_\infty] = c \sup_{N\in K} E[M_\infty N_\infty]$$

Les | | ont été enlevées à dessein ! Soit alors B une martingale telle que $\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 1$. Pour toute martingale $M\in\underline{\underline{M}}$ nous avons, en désignant par (,) le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $\underline{\underline{M}}$

$$|(B,M)| = |E[B_\infty M_\infty]| \leq c\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c \sup_{N\in K} (M,N)$$

ici la constante c varie de place en place. Cela signifie qu'un demi-espace de $\underline{\underline{M}}$ qui contient K (il est de la forme $\{ U\in\underline{\underline{M}} : (U,M)\leq 1 \}$, avec $\sup_{N\in K} (N,M) \leq 1$ contient la martingale B/c . Autrement dit

Tout élément de $\underline{\underline{BMO}}$ de norme $\leq 1/c$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de K dans $\underline{\underline{M}}$.

On voit donc qu'en un certain sens les intégrales stochastiques de processus bornés par rapport à des martingales bornées sont bien des modèles d'éléments de $\underline{\underline{BMO}}$ suffisamment généraux. Mais K n'est pas un ensemble compact dans $\underline{\underline{M}}$ (semble t'il), et on ne peut déduire du résultat précédent une représentation des éléments de $\underline{\underline{BMO}}$ au moyen d' une mesure sur K.

FIN DU COURS POUR L'ANNEE 1974-1975

Au cours d'un voyage à Paris (Janvier 1976), j'ai appris que des résultats voisins de ceux des n^{os} 27-29 (représentation de $\underline{\underline{BMO}}$) avaient été exposés l'an dernier par C. HERZ dans un cours de 3e cycle sur $\underline{\underline{BMO}}$, et d'autre part que des résultats de convergence de sommes de carrés vers la variation quadratique pour les semimartingales avaient été obtenus par M. LENGLART.

ESPACES DE PROCESSUS

MARTINGALES

$\underline{\underline{M}}$, martingales de carré intégrable

$\underline{\underline{M}}_0$, martingales .. nulles en 0

$\underline{\underline{M}}_{loc}$, martingales localement de carré intégrable

$\underline{\underline{L}}$, martingales locales

$\underline{\underline{L}}_0$, ... nulles en 0

PROCESSUS A VARIATION FINIE

$\underline{\underline{V}}$, processus à variation finie

$\underline{\underline{V}}_0$, processus ... nuls en 0

$\underline{\underline{A}}$, processus à variation intégrable

$\underline{\underline{A}}_0$, processus... nuls en 0

$\underline{\underline{A}}_{loc}$, processus à variation loc. intégrable

$\underline{\underline{W}}$, martingales à variation intégrable

$\underline{\underline{W}}_{loc}$, martingales locales à variation loc. intégrable

INDEX

On n'a fait aucun effort pour classer les termes de cet index : ils y figurent par ordre d'entrée en scène. Le chap.VI n'y figure pas.

INDEX (suite)

INDEX (suite)

BIBLIOGRAPHIE.

Les articles sont numérotés dans l'ordre où ils sont cités pour la première fois.

[1]. Catherine DOLEANS-DADE et P.A.MEYER. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Pr. IV, Lecture Notes n°124, 1970.

[2], aussi noté [D]. C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der M. 67, Springer 1972.

[3]. J.L.DOOB. Stochastic processes. Wiley 1953.

[4]. K.ITO. Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo. 20, 1944.

[5]. K.ITO. Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan, 3, 1951.

[6]. K.ITO. Complex multiple Wiener Integral. Jap.J.M. 22, 1952.

[7]. H.P.McKEAN. Stochastic Integrals. Academic Press 1969.

[8]. H. KUNITA et S.WATANABE. On square integrable martingales. Nagoya Math.J. 30, 1967.

[9]. A. CORNEA et G. LICEA.

[10]. P.A.MEYER. Intégrales stochastiques I,II,III,IV. Séminaires de Pr.I, Lecture Notes n°39, 1967.

[11]. K.ITO et S.WATANABE. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. Fourier 15, 1965.

[12]. Catherine DOLEANS-DADE. Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. Z. fur W. 16,1970.

[13], aussi noté [P]. C.DELLACHERIE et P.A.MEYER. Probabilités et Potentiels, 2e édition, chapitres I-IV. Hermann 1975.

[14]. M. RAO. On decomposition theorems of Meyer. Math. Scand. 24, 1969.

[15]. C.DELLACHERIE. Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson. Séminaire de Pr. VIII, Lect. Notes 381, 1974.

[16]. C.DELLACHERIE. Correction à "intégrales stochastiques par rapport." Séminaire de Prob. IX, Lect. Notes 465, 1975.

[17]. **N.KAZAMAKI. Changes of time, stochastic integrals and weak martingales. Z fur W-theorie,** 22, 1972, p.25-32.

[18]. **P.A.MEYER. Multiplicative decompositions of positive supermartingales. Dans : Markoff processes and potential theory, edited by J. Chover, Wiley 1967.**

[19]. **A.SEGALL et T. KAILATH. Orthogonal functionals of independent increments processes. To appear, IEEE Trans. on IT.**

[20]. **Cath. DOLEANS-DADE. Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. Bull. Inst. Stat. Univ. Paris., 16, 1967, p.23-34**

BIBLIOGRAPHIE (suite)

[21]. A.GARSIA. Martingale Inequalities. Seminar Notes on Recent Progress. Benjamin 1973.

[22]. C.S. HERZ. Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 193, 1974, p.199-215.

[23]. D.L.BURKHOLDER. Distribution function inequalities for martingales. Annals of Prob. 1, 1973, p.19-42.

[24]. A.GARSIA. On a convex function inequality for martingales. Ann. of Prob. 1, 1973, p.171-174.

[25]. R.K. GETOOR et M.J.SHARPE. Conformal martingales. Invent. Math. 16, 1972, p.271-308.

[26]. C.S. CHOU. Les méthodes de Garsia en théorie des martingales. Extension au cas continu. Sém. Prob. Strasbg.IX, Lect.N. vol. 465.

[27]. D.W.STROOCK. Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis. Comm.Pure Appld.M. 26, 1973.

[28]. J.NEVEU. Martingales à temps discret. Masson, Paris, 1972.

[29]. B.DAVIS. On the integrability of the martingale square function. Israel J. M. 8, 1970, 187-190.

[30]. D.BURKHOLDER, B.DAVIS et R.GUNDY. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. 6th Berkeley Symp. 2, 1972, p.223-240.