PAUL-ANDRÉ MEYER

Corrections aux inégalités de Littlewood-Paley

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 162-163
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__162_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

CORRECTION AUX " INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY "

par P.A.Meyer

Marc YOR vient de me signaler que la démonstration du théorème 1 de l'exposé II est insuffisante. Le lemme de KUNITA-WATANABE (p. II.4, lemme 3) est énoncé avec un optimisme excessif : pour vérifier qu' une martingale M de carré intégrable nulle en 0 est nulle, il ne suffit pas de vérifier qu'elle est orthogonale aux martingales C^f, f parcourant un ensemble plein $\underline{\underline{H}}$ contenu dans $\underline{\underline{D}}(A)$: il faut vérifier qu'elle est orthogonale aux martingales C^{f_q} , où $f_q=U_qf$, $q>0$, $f\in\underline{\underline{H}}$.

En conséquence, je sais démontrer seulement l'équivalence des propriétés 1) et 3) du théorème 1 (et en déduire le théorème 2). Si l'on continue à dire que (P_t) possède un opérateur carré du champ lorsque ces propriétés sont satisfaites, la vérification de cette propriété ne peut plus se faire au moyen d'une algèbre pleine contenue dans $\underline{\underline{D}}(A)$.

Heureusement, cela ne touche pas l'essentiel des exposés : il est classique que les semi-groupes de convolution admettent un opérateur carré du champ (ici, l'algèbre des fonctions C^∞ bornées ainsi que toutes leurs dérivées de tous les ordres est contenue dans $\underline{\underline{D}}(A)$, pleine, et <u>stable par la résolvante</u>, de sorte que la démonstration du th.1 s'applique avec le lemme de KUNITA-WATANABE correctement recopié). D'autre part, le critère douteux pour l'existence de l'opérateur carré du champ n'a été utilisé qu'une fois, dans le corollaire au lemme 6, qui peut s'énoncer ainsi :

<u>Si deux semi-groupes</u> (P_t) <u>et</u> (Q_t) <u>admettent un opérateur carré du champ, il en est de même de leur produit</u> $P_t\otimes Q_t$.

Cela peut se démontrer directement. Il suffit d'abord de prouver que pour toute loi $P^x\otimes Q^y$, toute martingale de la forme $Z_t=E[Z|\underline{\underline{F}}_t\otimes\underline{\underline{G}}_t]$ a un processus croissant $<\ ,\ >$ absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue dt . Par un argument de convergence dans L^2 , on se ramène au cas où $Z=MN$, où M est $\underline{\underline{F}}_\infty$-mesurable, N $\underline{\underline{G}}_\infty$-mesurable. La martingale $E[Z|\underline{\underline{F}}_t\otimes\underline{\underline{G}}_t]$ est alors le produit M_tN_t des martingales (indépendantes, donc orthogonales, et sans sauts communs) $M_t=E[M|\underline{\underline{F}}_t]$ et $N_t=E[N|\underline{\underline{F}}_t]$ Alors une application de la formule d'ITO donne

$$M_t^2N_t^2 = \text{martingale} + \int_0^t(M_{s-}^2d<N,N>_s+N_{s-}^2d<M,M>_s)+\sum_0^t(M_{s-}^2\Delta N_s+N_{s-}^2\Delta M_s)$$

et par compensation

$$d< Z,Z >_s = M_{s-}^2 d\langle N,N\rangle_s + N_{s-}^2 d\langle M,M\rangle_s$$

d'où il résulte que, si $\langle M,M\rangle$ et $\langle N,N\rangle$ sont absolument continus par rapport à dt, il en est de même de $\langle Z,Z\rangle$.