SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Exposé I : les inégalités classiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 125-141

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__125_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

DEMONSTRATION PROBABILISTE DE CERTAINES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

(P.A. Meyer)

EXPOSE I : LES INEGALITES CLASSIQUES

Ce travail trouve son origine dans la lecture des deux livres de STEIN [1] et [2], et le désir d'aboutir à une démonstration des inégalités de LITTLEWOOD-PALEY classiques, à partir de la théorie des martingales. Il se trouve qu'une telle démonstration existe, et qu'elle n'est pas difficile. Elle figure dans l'exposé I.

On se pose ensuite le problème d'étendre la théorie de LITTLEWOOD-PALEY à des semi-groupes "presque" quelconques (travail entrepris par STEIN dans [2] pour des semi-groupes symétriques, mais dans une direction différente ; nous expliquerons la distinction entre les inégalités "harmoniques" et "paraboliques", et la raison pour laquelle le résultat de STEIN est plus profond). Pour cela, il faut savoir ce qui va remplacer, pour des semi-groupes quelconques, la notion de gradient : l'opérateur carré du champ de ROTH, dont la théorie est faite dans l'exposé II.

Les inégalités de LITTLEWOOD-PALEY générales sont présentées dans l'exposé III, qui est bref (les démonstrations reprennent presque mot pour mot celles de l'exposé I). Enfin, l'exposé IV contient des applications aux semi-groupes de convolution symétriques.

J'ai le sentiment que les méthodes de martingales doivent pouvoir donner des résultats beaucoup plus forts, mais aussi qu'il y faut " autre chose" que le calcul élémentaire d'espérances conditionnelles qui est la base de cet article. J'ai été incapable de retrouver la théorie de l'espace H^1 , développée dans les travaux récents de STEIN et FEFFERMAN. J'ai aussi été incapable, dans une autre direction, d'établir une conjecture sur les semi-groupes de convolution non symétriques, qui figure dans l'exposé IV, et semble exiger une méthode de " désymétrisation" qui m'échappe.

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Le but de ce paragraphe est d'introduire les fonctions de LITTLEWOOD-PALEY, et les notations des quatre exposés. On va, en effet, utiliser dans le cas classique un système de notations qui s'étendra sans modifications au cas général.

Nous désignons par E l'espace $\mathbb{R}^n$, sur lequel la mesure de Lebesgue sera notée plus souvent ξ que dx. Nous notons $\hat{E}$ le produit $\mathbb{R}^{n+1}=E\times\mathbb{R}$ (coordonnées souvent notées x,t), $\hat{E}^+$ le demi-espace $E\times\mathbb{R}_+$, et nous identifions E au "bord" $E\times\{0\}$ de $\hat{E}^+$. Nous noterons souvent ξ_a , pour $a\in\mathbb{R}_+$, la mesure $\xi\otimes\varepsilon_a$ sur $\hat{E}^+$.

Pour comprendre la terminologie employée, il est bon de se représenter $E\times\mathbb{R}_+$ ainsi

E est "transversal"

$\mathbb{R}_+$ "horizontal"

Etant donnée une bonne fonction f sur le bord (par exemple $f\in\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{C}}^\infty$ à décroissance rapide), nous pouvons prolonger f à $\hat{E}^+$ au moyen de l'intégrale de Poisson dans le demi-espace. Nous désignerons encore ce prolongement par f :

$$(1)\quad f(x,t) = \int_E Q_t(x,dy)f(y) \quad \text{où } Q_t(x,dy) = \frac{c_n\, t\, dy}{(t^2+|y-x|^2)^{(n+1)/2}}$$

Cela peut aussi s'écrire avec la transformation de Fourier : soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f : $\hat{f}(u) = \int e^{iu\cdot x}f(x)\tilde{d}x$, où $\tilde{d}x$ est la "mesure de Plancherel" $(2\pi)^{-n/2}dx$. Alors

$$(2)\qquad f(x,t) = \int_E \hat{f}(u)e^{-t|u|}e^{-ix\cdot u}\,\tilde{d}u$$

(pour voir que (2)=(1), remarquer que (2) fournit une fonction harmonique bornée, qui se réduit à f au bord).

A côté de ce prolongement harmonique, nous considérerons de temps en temps le prolongement $f^\circ(x,t)$ de f au demi-espace en une solution de l'équation de la chaleur $D_t f^\circ(x,t)=\Delta_x f^\circ(x,t)$, prolongement que nous qualifierons de parabolique . Il est donné par

$$(3)\qquad f^\circ(x,t) = \int_E P_t(x,dy)f(y) \quad , \text{ où } P_t(x,dy)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-|y-x|^2/4t}\,dy$$

On reconnaît là le semi-groupe du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$, admettant le générateur infinitésimal Δ (ce n'est pas le mouvement brownien standard des probabilistes, dont le générateur est $\frac{1}{2}\Delta$). Avec la transformation de Fourier

(4) $f^\circ(x,t) = \int_E \hat{f}(u) e^{-t|u|^2} e^{-ix.u} \, \tilde{d}u$

Quelle est la relation entre ces deux prolongements ? Les noyaux Q_t constituent le <u>semi-groupe de Cauchy</u> , qui est "subordonné" au semi-groupe du mouvement brownien, au sens de BOCHNER. Considérons en effet les mesures de probabilité μ_t sur $\mathbb{R}_+$, dont la transformée de Laplace est

(5) $\int_0^\infty e^{-ps} \mu_t(ds) = e^{-t\sqrt{p}}$

et dont l'expression explicite est connue

(6) $\mu_t(ds) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4s} s^{-3/2} \, ds$

Elles forment un semi-groupe de convolution ($\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$), et la formule (5) entraîne que $e^{-t|u|} = \int e^{-s|u|^2} \mu_t(ds)$, de sorte que

(7) $Q_t = \int_0^\infty P_s \; \mu_t(ds)$, où $Q_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} P_{t^2/4u} \, du$

(changement de variables à partir de (6)) .

Dans la théorie générale, on conservera la formule (1), (Q_t) étant défini par (7) à partir d'un semi-groupe markovien (P_t), qui sera l'objet fondamental de l'étude : ici, le semi-groupe du mouvement brownien est doué de nombreuses propriétés particulières :

i - Il admet la mesure ξ comme <u>mesure invariante</u>.

ii - Il est <u>symétrique</u> (autoadjoint) par rapport à ξ : si f et g sont boréliennes positives, $< f, P_t g >_\xi = < P_t f, g >_\xi$.

iii- C'est un semi-groupe de <u>diffusion</u> (son générateur infinitésimal est un opérateur local).

iv - C'est un semi-groupe de <u>convolution</u>.

Le semi-groupe (Q_t), lui, possède seulement les propriétés i,ii,iv, mais non iii. Nous allons établir pour (P_t) une foule d'inégalités, qui se partageront ensuite, lorsque nous passerons au cas général, entre les semi-groupes satisfaisant à ii, à iii, à iv... <u>La propriété</u> i <u>restera toujours une exigence minimale</u>.

Du point de vue des notations, signalons tout de suite que, lorsque ii ne sera pas satisfaite, nous noterons au moyen d'un * l'adjoint de (P_t), qui satisfait à $< f, P_t g >_\xi = < P_t^* f, g >$.

Revenons à la situation concrète du mouvement brownien .

LES FONCTIONS DE LITTLEWOOD-PALEY

Nous introduisons d'abord les deux fonctions de L-P que nous qualifierons d'<u>harmoniques</u> , parce qu'elles sont relatives au prolongement harmonique de f. <u>Ce sont des fonctions sur</u> E

(8¹) $G_f(x) = [\int_0^\infty t\ \mathrm{grad}^2 f(x,t)\,dt\,]^{1/2}$ (fonction complète)

(8²) $\vec{G_f}(x) = [\int_0^\infty t\ (D_t f(x,t))^2\,dt\,]^{1/2}$ (fonction horizontale)

Il y a aussi une fonction $G_f^{\uparrow}$ "harmonique transversale", qui ne fait intervenir que les dérivations en x. Nous ne nous en servirons pas.

Ensuite, la fonction <u>parabolique horizontale</u>

(8³) $\vec{\rho_f}(x) = [\int_0^\infty t\ (D_t f^\circ(x,t))^2 dt\,]^{1/2}$

Plus loin , lorsque nous ferons la théorie générale, la distinction entre fonctions harmoniques et paraboliques s'estompera : une fonction harmonique par rapport à (P_t) est parabolique par rapport à (Q_t)!

Il résulte sans peine du théorème de Plancherel et des expressions (2) et (4) que l'on a (les normes étant relatives à $L^2(\xi)$)

(9) $\|f\|_2 = 2\|\vec{G_f}\|_2 = \sqrt{2}\|G_f\|_2 = 2\|\vec{\rho_f}\|_2$

Les inégalités de LITTLEWOOD-PALEY affirment que, pour tout $p\in]1,\infty[$, on a des équivalences de normes dans $L^p(\xi)$

(10) $A_p\|f\|_p \leqq \|\vec{G_f}\|_p, \|G_f\|_p, \|\vec{\rho_f}\|_p \leqq A_p'\|f\|_p$

Les inégalités "harmoniques" sont établies par STEIN dans [1], avec bien des raffinements d'ailleurs. Ce sont elles que nous allons prouver ici par une méthode probabiliste. Nous saurons en déduire l'inégalité $\|f\|_p \leqq c\|\vec{\rho_f}\|_p$, mais non l'inégalité inverse. Les inégalités paraboliques sont établies dans [2], par STEIN, pour <u>tous</u> les semi-groupes symétriques (de sorte que leur application à (Q_t) redonne l'inégalité harmonique horizontale). La méthode de STEIN utilise un procédé d'interpolation complexe, on ne "comprend" pas ce qui se passe.

UN EXEMPLE D'APPLICATION

Avant de démontrer les inégalités classiques, montrons à quoi elles peuvent servir : l'exemple sera généralisé plus tard.

Soit $f\in\underline{\underline{S}}$. Définissons une fonction $r_j\in L^2$ par sa transformée de Fourier :

(11) $\hat{r}_j(u) = \frac{u_j}{|u|}\hat{f}(u)$ (u_j est la j-ième coordonnée de u)

en fait, $\hat{r}_j$ est intégrable, donc r_j est aussi continue et nulle à l'infini. En regardant la formule (2), et en effectuant des dérivations sous le signe somme (justifiées par le facteur de convergence $e^{-t|u|}$) on a que

$$i\frac{\partial}{\partial t} r_j(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,t)$$

donc $G_{\vec{r}_j} \leqq G_f$

donc $\|r_j\|_p \leqq c_p \|f\|_p \qquad (1<p<\infty)$

L'opérateur (11) se prolonge donc en un opérateur borné dans L^p. Comme on dit, "$u_j/|u|$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p$" . C'est le début du début de la théorie des opérateurs intégraux singuliers, mais ce n'est pas un résultat trivial - et c'est aussi un théorème important pour les probabilistes, car il donne juste ce qu'il faut pour lire les articles de STROOCK et VARADHAN sur les diffusions, du moins à coefficients indépendants du temps (cf. le séminaire de Strasbourg IV, p.262-263).

II. UN CALCUL D'ESPERANCES CONDITIONNELLES

Soit $(P_t^{\rightarrow})$ le semi-groupe du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$, de générateur D^2 , la dérivée seconde. Le semi-groupe du mouvement brownien à n+1 dimensions est le produit des semi-groupes (P_t) et $(P_t^{\rightarrow})$. On le notera

(12) si $\hat{x}=(x,u)\in\hat{E}$, $\hat{P}_t(\hat{x},.) = P_t(x,.)\otimes P_t^{\rightarrow}(u,.)$

Soit Ω l'espace des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\hat{E}$, muni de ses applications coordonnées

$$B_t = (Y_t, Z_t) \quad (Y_t \text{ à valeurs dans } E,\ Z_t \text{ dans } \mathbb{R})$$

de sa famille de tribus naturelles $(\underline{\underline{F}}_t)$, et des mesures $\mathbb{P}^{\hat{x}}$ $(\hat{x}\in\hat{E})$ faisant de (B_t) un mouvement brownien à n+1 dimensions issu de $\hat{x}$.

Nous poserons $T_a(\omega) = \inf \{ t : Z_t(\omega)=a \}$: en particulier, T_0 est l'instant de rencontre du "bord" $E\times\{0\}$ du demi-espace $\hat{E}^+$. La mesure initiale du mouvement brownien sera toujours placée sur $\hat{E}^+$, et nous noterons V l'opérateur potentiel de Green du demi-espace, i.e. l'opérateur potentiel, sur $\hat{E}^+$, du semi-groupe tué à l'instant T_0.

Par abus de notation, nous noterons parfois $\mathbb{P}^x$, ou $\mathbb{P}^u$, des probabilités pour la loi $\mathbb{P}^{x,u}$ relatives à la composante (Y_t) seule, ou à la composante (Z_t) seule. Par exemple, il est classique (ITO et McKEAN [1], p.25) que l'on a

(13) $\mathbb{E}^u[e^{-pT_0}] = e^{-u\sqrt{p}} \qquad (p>0)$

CONSTRUCTION D'UNE MARTINGALE (M_t), ET CALCUL DE $\langle M,M\rangle$

Soit f une bonne fonction sur le bord, par exemple $f\in\underline{\underline{S}}$. L'interprétation classique de la mesure harmonique, due à Paul LEVY, montre que son prolongement harmonique au demi-espace - encore noté f - est

(14¹) $$f(x,u) = \mathbb{E}^{x,u}[f(B_{T_0})]$$

Vérifions "à la main" que cela revient aux formules (1) et (7). On a $f(B_{T_0})=f(Y_{T_0},0)=f(Y_{T_0})$. Soit λ_u la loi de T_0 pour $\mathbb{P}^u$: les processus (Y_t) et (Z_t) étant indépendants

$$\mathbb{E}^{x,u}[f(B_{T_0})] = \int \mathbb{E}^x[f(Y_s)]\lambda_u(ds) = \int P_s(x,f)\lambda_u(ds)$$

D'après (5) et (13), on a $\lambda_u=\mu_u$, et la dernière intégrale vaut alors $Q_u(x,f)=f(x,u)$ d'après (7). Nous avons alors

(14²) $$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(B_{T_0})|\underline{\underline{F}}_t] &= f(B_{T_0})I_{\{T_0\leq t\}} + \mathbb{E}[f(B_{T_0})I_{\{t<T_0\}}|\underline{\underline{F}}_t] \\ &= f(B_{T_0})I_{\{T_0\leq t\}} + \mathbb{E}^{B_t}[f(B_{T_0})I_{\{t<T_0\}}] \\ &= f(B_{t\wedge T_0})\end{aligned}$$

<u>Nous désignerons par</u> (M_t) <u>la martingale</u> $f(B_{t\wedge T_0})$. Nous allons montrer que

(15) $$\langle M,M\rangle_t = \int_0^{t\wedge T_0} 2\,\mathrm{grad}^2 f(B_s)\, ds$$

Soit en effet $a>0$. Le processus $(B_{t\wedge T_a})$ est une martingale vectorielle , que nous désignons par (U_t) dans les quelques lignes qui suivent, avec des composantes notées U_t^i . La fonction f est deux fois continûment différentiable dans $E\times[a,\infty[$, avec des dérivées des deux premiers ordres D_if, D_iD_jf bornées. Appliquons alors la formule d'ITO

$$f(U_t) = f(U_0) + \sum_i \int_0^t D_i f(U_s)dU_s^i + \sum_{ij} \frac{1}{2}\int_0^t D_iD_jf(U_s)d\langle U^i,U^j\rangle_s$$

Mais d'autre part $\langle U^i,U^j\rangle_s = 2\delta^{ij}.s\wedge T_a$. Comme f est harmonique, le terme complémentaire est nul, et $f(U_t)$ est une intégrale stochastique (on retrouve ainsi le fait que (M_t) est une martingale !) dont le processus croissant associé est $\sum_{ij}\int_0^t D_if(U_s)D_jf(U_s)d\langle U^i,U^j\rangle_s$, c'est à dire $2\int_0^{t\wedge T_a} \mathrm{grad}^2 f(B_s)ds$. Après quoi on fait tendre a vers 0.

<u>Dans toute la suite nous simplifierons les notations en écrivant</u> $g(x,t)$ <u>au lieu de</u> $\mathrm{grad}^2 f(x,t)$. Nous noterons g_t l'application partielle $g(.,t)$.

CALCUL D'UN POTENTIEL DE GREEN

Plaçons nous d'abord sur la droite , et calculons le potentiel de Green d'une fonction positive $h\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, à support contenu dans $]0,+\infty[$, c'est à dire

$$V(u,h) = \mathbb{E}^u\Big[\int_0^{T_0} h\circ Z_s ds\Big] \quad (u\geqq 0)$$

C'est une fonction de u positive, nulle en 0, dont la dérivée seconde est égale à $-h$. Un bon candidat est

$$\int_0^\infty u\wedge a\; h(a)da$$

et il est classique que c'est bien l'expression correcte. Il en résulte que, si l'on passe maintenant à n+1 dimensions, le potentiel de Green d'une fonction $h(x,t)=h(t)$ ne dépendant que de la variable t est

$$V((x,u),h) = \mathbb{E}^{x,u}\Big[\int_0^{T_0} h(B_s)ds\Big] = \int_0^\infty u\wedge a\; h(a)da$$

Maintenant, soit $N>0$. Soient ξ_N la mesure $\xi\otimes\varepsilon_N$, j une fonction positive sur $\hat{E}^+$. Montrons que

(16) $$<\xi_N V, j> = \mathbb{E}^{\xi_N}\Big[\int_0^{T_0} j(B_s)ds\Big] = \int_{\hat{E}^+} N\wedge a\; j(x,a)\xi(dx)da$$

Il suffit de vérifier cette formule jorsque $j(x,a)$ est de la forme $k(x)h(a)$. Le membre de droite vaut alors $<\xi,k>\int_0^\infty N\wedge a\; h(a)da$. Celui de gauche vaut $\mathbb{E}^{\xi_N}\big[\int_0^\infty k(Y_s).h(Z_s)I_{\{s<T_0\}}ds\big] = \int_0^\infty ds\, \mathbb{E}^\xi[k(Y_s)]\mathbb{E}^N[h(Z_s)I_{\{\}}]$ d'après l'indépendance des deux composantes. Comme ξ est invariante par P_s , cela vaut simplement $<\xi,k>\mathbb{E}^N[\int_0^{T_0} h(Z_s)ds]$; d'après le calcul fait plus haut sur le mouvement brownien linéaire, c'est le résultat cherché.

Il est important pour la suite de noter que seule l'invariance de ξ a été utilisée ici.

CALCUL D'UNE ESPERANCE CONDITIONNELLE

Voici le résultat principal de ce paragraphe. Là aussi, nous voulons préparer la suite en le mettant sous une forme aussi générale que possible, c'est pourquoi nous l'écrivons avec un noyau adjoint Q_t^* : ici nous avons $Q_t^*=Q_t$, mais plus loin nous aurons ainsi la vraie formule.

LEMME FONDAMENTAL. Soit j une fonction positive sur $E\times\mathbb{R}_+$. Alors

(17) $$\mathbb{E}^{\xi_N}\Big[\int_0^{T_0} j(B_s)ds \,\big|\, Y_{T_0}\Big] = \int_0^\infty N\wedge a\; Q_a^*(Y_{T_0}, j(.,a))\,da \quad \text{p.s.}$$.

DEMONSTRATION. Soit f une fonction positive sur E, et aussi le prolongement harmonique à $\hat{E}^+$ qui lui correspond. Il s'agit de vérifier que

$$\mathbb{E}^{\xi_N}\Big[f(Y_{T_0})\int_0^{T_0} j(B_s)ds\Big] = \int_0^\infty \mathbb{E}^{\xi_N}[Q_a^*(Y_{T_0}, j_a)f(Y_{T_0})]\; N\wedge a\; da$$

Du côté droit, nous remarquons que la répartition de Y_{T_0} pour la mesure $\mathbb{P}^{\xi_N}$ est ξ . En effet, si λ_N est la loi de T_0 pour $\mathbb{P}^N$

$$\mathbb{E}^{\xi N}[k(Y_{T_0})] = \int_0^\infty \lambda_N(ds)\mathbb{E}^\xi[k\circ Y_s] = \int_0^\infty \lambda_N(ds)<\xi P_s,k> = <\xi,k>$$

du fait que λ_N a une masse égale à 1 et que ξ est invariante. Le côté droit vaut donc

$$\int_0^\infty <\xi,\ f.Q_a^* j_a> N\wedge a\ da$$

Du côté gauche, nous intervertissons les intégrations :

$$\int_0^\infty ds\, \mathbb{E}^{\xi N}[f(Y_{T_0})j(B_s)I_{\{s<T_0\}}] = \int_0^\infty ds\, \mathbb{E}^{\xi N}[\mathbb{E}[f(Y_{T_0})|\underline{\underline{F}}_s]j(B_s)I_{\{s<T_0\}}]$$

Or cette espérance conditionnelle vaut $f(B_{t\wedge T_0})$, où maintenant f est vraiment un prolongement harmonique (cf.(14²)) . Ainsi nous avons

$$\int_0^\infty ds\, \mathbb{E}^{\xi N}[f(B_s)j(B_s)I_{\{s<T_0\}}] = \mathbb{E}^{\xi N}[\int_0^{T_0} fj(B_s)ds\ ]$$
$$= \int N\wedge a <\xi,f_a j_a> da$$

d'après (16). Il reste donc seulement à voir si $f_a j_a = Q_a f.j_a$ et $f.Q_a^* j_a$ ont la même intégrale par rapport à ξ, autrement dit à revenir à la définition de l'adjoint : $<Q_a f,j_a>_\xi = <f,Q_a^* j_a>_\xi$. On voit bien pourquoi il faut écrire Q_a^* dans (17), même simplement pour l'esthétique.

Nous avons donc abouti à la formule

(18) $$\mathbb{E}^{\xi N}[<M,M>_\infty |Y_{T_0}] = \int_0^\infty 2N\wedge a\ Q_a^*(Y_{T_0},g_a)da$$
$$(g_a(x) = \operatorname{grad}^2 f(x,a)\ )$$

qui nous donnera très simplement les inégalités de L-P. Cette formule a déjà fait des apparitions en analyse. HERZ la mentionne dans [1], p.148 (journées du potentiel, Lecture Notes 404) en termes un peu sibyllins (d'autant plus que HERZ étudie le cas des boules). GUNDY m'a cité une apparition beaucoup plus ancienne de la fonction au second membre : ZYGMUND, Proc. Nat. Acad. Sci. 42, 1956. ZYGMUND en donne une interprétation frappante au moyen des sommes partielles d'une série trigonométrique (là encore, il s'agit du disque, non du demi-espace).

III. LES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

Nous allons introduire deux autres fonctions de LITTLEWOOD-PALEY, dont nous étudierons plus loin, de façon aussi approfondie que possible, les relations avec les fonctions usuelles.

(19) $$H_f(x) = \left[\ \int_0^\infty a\ Q_a^*(x,g(.,a))\ da\ \right]^{1/2}$$

(20) $$K_f(x) = \left[\ \int_0^\infty a(Q_a^*(x,\sqrt{g(.,a)}))^2 da\ \right]^{1/2}$$

- en ne gardant du gradient que la composante $D_t f(x,t)$, on obtiendrait les "fonctions horizontales" $H_f^{\rightarrow}$,$K_f^{\rightarrow}$ correspondantes. Ici, de manière explicite, H_f est la fonction introduite par ZYGMUND

(21) $$H_f(x) = c \left[\iint \frac{a}{(a^2+|y-x|^2)^{(n+1)/2}} \operatorname{grad}^2 f(y,a)\, a\,da\,dy \right]^{1/2}$$

Cette fonction est à rapprocher de l'une des fonctions introduites par STEIN dans [1]

(22) $$g_\lambda^*(x) = \left[\iint \frac{a^{\lambda n}}{(a+|y-x|)^{\lambda n}} a^{1-n} \operatorname{grad}^2 f(y,a)\, da\,dy \right]^{1/2}$$

En effet, pour $\lambda=(n+1)/n$, le rapport g_λ^*/H_f est borné supérieurement et inférieurement. Nous verrons plus loin les rapports entre la fonction K_f et d'autres fonctions de LITTLEWOOD-PALEY classiques.

Pour l'instant, nous nous bornerons à prouver que

(23) $$\tfrac{1}{2}G_f \leqq K_f \leqq H_f$$

(et les résultats analogues pour les fonctions horizontales). La relation $K_f \leqq H_f$ est simplement l'inégalité de Schwarz $(Q_a^*(\sqrt{h}))^2 \leqq Q_a^*(h)Q_a^*(1)$, avec le fait que $Q_a^*1=1$. Pour la première, nous remarquons que si f est une "bonne fonction" sur $\mathbb{R}^n$, les fonctions $D_t f(x,t)$, $D_{x_i} f(x,t)$ sont aussi des prolongements harmoniques de fonctions bornées sur $\mathbb{R}^n$ - cela se voit parfaitement sur la formule (2) - et que par conséquent [1]

(24) $$Q_s(x, \operatorname{grad}f(.,t)) = \operatorname{grad}f(x,s+t)$$

en passant aux longueurs des vecteurs

$$Q_s(x,|\operatorname{grad}f(.,t)|) \geqq |\operatorname{grad}f(x,s+t)|$$

et $K_f(x) \geqq \left[\int_0^\infty a\, g(x,2a)da \right]^{1/2} = \frac{1}{2}G_f(x)$.

Nous allons maintenant démontrer les inégalités de L-P dans l'ordre suivant : (c_p est une quantité qui varie de place en place)

1) Egalités de normes pour p=2
2) Inégalité $\|H_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$ pour $p\geqq 2$ (donc aussi $\|K_f\|_p, \|G_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$)
3) Inégalité $\|K_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$ pour $1<p\leqq 2$ (donc aussi $\|G_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$)
4) Inégalité $\|f\|_p \leqq c'_p\|G_f^{\rightarrow}\|_p$ pour tout p (donc aussi toutes les autres).

ETAPE 1 : EGALITE DE NORMES DANS L^2

Evaluons $\|G_f^{\rightarrow}\|_2^2$ à partir de la formule $D_t f(x,t) = \int -|u|\hat{f}(u)e^{-ixu}e^{-t|u|}\tilde{d}u$ de sorte que la transformée de Fourier de $D_t f(x,t)$ est $-|u|e^{-t|u|}\hat{f}(u)$. D'après Plancherel , $\int (D_t f(x,t))^2 \tilde{d}x = \int |u|^2 e^{-2t|u|}|\hat{f}(u)|^2 \tilde{d}u$. Alors

1.Ce raisonnement étant spécial au mouvement brownien, nous omettons les * .

$$\int (G_f^{\rightarrow}(x))^2 \tilde{d}x = \int t dt \int (D_t f(x,t))^2 \tilde{d}x = \int t|u|^2 e^{-2t|u|} dt \int |\hat{f}(u)|^2 \tilde{d}u$$
$$= \tfrac{1}{4}\int |\hat{f}(u)|^2 \tilde{d}u \;=\; \tfrac{1}{4}\int f^2(x)\tilde{d}x$$

On peut procéder de même pour G_f , mais là il vaut mieux faire autrement : nous écrivons que, pour la mesure initiale ξ_N

$$\|f\|_2^2 = \mathbb{E}[f^2 \circ Y_{T_0}] = \mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[M_0^2 + \langle M,M\rangle_\infty]$$
$$= \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty | Y_{T_0}]]$$
$$= \int f^2(x,N)\xi(dx) + \int \xi(dx)\int_0^\infty 2.N\wedge a.Q_a^*(x,g_a)da$$

Nous faisons tendre N vers $+\infty$. Le premier terme tend vers 0 d'après le théorème de Plancherel. Comme $\xi Q_a^* = \xi$, le second terme tend vers $\int \xi(dx)\int_0^\infty 2ag(x,a)da = 2\|G_f\|_2^2$. Ce raisonnement utilise très peu les caractères spéciaux du mouvement brownien, et s'étendra à des situations bien plus générales.

ETAPE 2 : INEGALITE $\|H_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$, $p \geqq 2$

Dans la démonstration de STEIN [1], c'est la partie délicate : STEIN démontre l'inégalité seulement pour $p \geqq 4$, et interpole entre 2 et 4. Pour nous, au contraire, c'est la partie facile.

Nous partons de l'inégalité de BURKHOLDER (élémentaire justement dans l'intervalle $[2,\infty[$

$$\|M_\infty\|_p^p \geqq c_p\|(M_0^2 + \langle M,M\rangle_\infty)^{1/2}\|_p^p \geqq c_p\|\langle M,M\rangle_\infty\|_{p/2}^{p/2}$$
$$\geqq c_p\|\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty | Y_{T_0}]\|_{p/2}^{p/2}$$

Cette dernière inégalité, parce que $p/2 \geqq 1$ (G.PISIER m'a fait remarquer qu'ici la mesure est infinie, et que la démonstration la plus usuelle de cette inégalité, dans le cas des lois de probabilité, est en défaut : la méthode qui marche bien consiste à calculer $\|\ \|_{p/2}$ comme sup sur la boule unité du $L^{q'}$ conjugué). Ici, explicitement avec la mesure $\mathbb{P}^{\xi_N}$

$$\|f\|_p^p \geqq c_p\int \xi(dx)\left(\int 2.N\wedge a\; Q_a^*(x,g(.,a))da\right)^{p/2}$$

d'où la relation cherchée lorsque $N \to \infty$

ETAPE 3 : INEGALITE $\|K_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$, $p \leqq 2$

Ici nous allons suivre exactement STEIN, par exemple [2], p.50. Nous n'utilisons pas d'inégalité de martingales, mais, assez curieusement, tout le raisonnement se transcrit en langage probabiliste.

<u>Nous pouvons nous borner au cas où</u> f <u>est positive</u>.

LEMME 1. Soit $f^{\times}(x) = \sup_t Q_t^*(x,f_t)$. Alors $\|f^{\times}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$ $(1<p<\infty)$

Ce lemme est une application de la théorie des martingales, due à ROTA [1] (cf. STEIN [2], p.106). Il n'est pas difficile.

Nous désignons maintenant par h la fonction positive $p(p-1)f^{p-2}g$ sur $\hat{E}^+$, par $I(x)$ la fonction $\int_0^\infty ah(x,a)da$ sur E, par $J(x)$ la fonction $\int_0^\infty aQ_a^*(x,h_a)da$ sur E. Nous prouvons

LEMME 2. $\|f\|_p^p \geqq \int_E I(x)\xi(dx) = \int_E J(x)\xi(dx)$

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer l'inégalité pour J, car les deux intégrales sont égales d'après la relation $\xi Q_a^*=\xi$.

Considérons la fonction deux fois différentiable $F(u)=(u+\varepsilon)^p$ sur $\mathbb{R}_+$. Appliquons lui la formule d'ITO :

$$(M_t+\varepsilon)^p=(M_0+\varepsilon)^{p-1}+\int_0^t p(M_s+\varepsilon)^{p-1}dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)(M_s+\varepsilon)^{p-2}d\langle M,M\rangle_s$$

nous prenons une espérance par rapport à une mesure $\mathbb{P}^{\hat{x}}$ $(\hat{x}\varepsilon\hat{E}^+)$, ce qui fait disparaître la première intégrale, puis faisons tendre ε vers 0. Il vient par convergence monotone, comme $p\leqq 2$

$$\mathbb{E}^\cdot[f^p(B_{t\wedge T_0})]= f^p(\cdot) +\mathbb{E}^\cdot[\int_0^{t\wedge T_0}p(p-1)f^{p-2}(B_s)g(B_s)ds]$$

nous intégrons par rapport à ξ_N , utilisons le calcul d'espérances conditionnelles, il vient

(25) $\|f\|_p^p = \int f^p(x,N)\xi(dx) + \int\xi(dx)\int_0^\infty N\wedge a.Q_a^*(x,h_a)da$

Nous obtenons l'inégalité cherchée en négligeant le premier terme, et en faisant tendre N vers $+\infty$.

REMARQUE. On a aussi (25) pour $p\geqq 2$: dans ce cas on peut tout de suite prendre $\varepsilon=0$.

Le lemme 1 signifie aussi, dans le cas particulier où nous sommes $(Q=Q^*)$ que la fonction $f^*(x) = \sup_t f(x,t)$ appartient à L^p si f y appartient. Comme $f^p(x,N)$ est dominé par f^*, nous avons l'égalité dans l'énoncé du lemme 2, pour tout $p>1$, dès que nous savons que $f(x,t)\to 0$ simplement lorsque $t\to\infty$. Cela fait disparaître, par exemple, le dernier recours au th. de Plancherel dans la démonstration d'égalité pour p=2.

Dans STEIN [1], une formule de Green est utilisée à la place de la formule d'ITO.

Passons à la démonstration de l'inégalité de L-P. Nous écrivons

$$K_f^2(x) = \int_0^\infty a(Q_a^*(x,\gamma_a))^2da \quad \text{où } \gamma(x,t)=\sqrt{g(x,t)}$$

D'autre part, $\gamma = h^{1/2}f^{1-p/2}$ à un facteur près. D'après Schwarz

$$(Q_a^*(\gamma_a))^2 \leqq cQ_a^*(h_a)Q_a^*(f_a^{2-p}) \leqq cQ_a^*(h_a)(Q_a^*(f_a))^{2-p}$$

$$\leqq cQ_a^*(h_a)(f^\times)^{2-p} \qquad \text{du fait que } 2-p\leqq 1$$

Ainsi $K_f^2 \leqq c(f^\times)^{2-p}J(x)$. Elevons à la puissance p/2, et appliquons Hölder avec les exposants conjugués 2/p et 2/2-p. Il vient

$$\|K_f\|_p^p \leqq c_p \left(\int (f^\times(x))^p \xi(dx)\right)^{(2-p)/2} \left(\int J(x)\xi(dx)\right)^{p/2} \leqq c_p \|f\|_p^p$$

la dernière inégalité provenant des lemmes 1 et 2.

ETAPE 4 : INEGALITE $\|f\|_p^p \leqq c_p \|G_f^\rightarrow\|_p^p$ **si $f \in L^2$**

Le raisonnement est ici très simple , et nous suivons STEIN. Soit q l'exposant conjugué de p. Soit H un ensemble de "bonnes fonctions" sur E, dense dans la boule unité de L^q. Nous partons de l'égalité de L-P dans L^2, que nous polarisons :

$$\int f(x)h(x)\xi(dx) = c\iint t\, D_t f(x,t)\; D_t h(x,t)\; dt\xi(dx)$$

$$\leqq c \int G_f^\rightarrow(x) G_h^\rightarrow(x)\xi(dx) \quad (\text{ inégalité de Schwarz })$$

$$\leqq c\|G_f^\rightarrow\|_p \|G_h^\rightarrow\|_q \leqq c'_q \| G_f^\rightarrow\|_p \|h\|_q$$

d'après les majorations de $\|G_h^\rightarrow\|_q$ vues précédemment. Après quoi on passe au sup sur $h \in H$.

REMARQUE. Nous avons signalé plus haut la relation entre la fonction H_f (21) et la fonction $g_\lambda^*(f)$ (22) pour $\lambda=(n+1)/n$. STEIN ne prouve la relation $\|g_\lambda^*(f)\|_p \leqq c_p \|f\|_p$ que pour $p>2/\lambda$. Si l'on admet que ce résultat est le meilleur possible, il n'existe pas de résultat <u>indépendant de la dimension</u> n meilleur que $p\geqq 2$, et il est nécessaire de passer de H_f à K_f pour $p<2$.

Noter aussi que le procédé de l'étape 4 ne marche pas dans l'autre sens : les inégalités $\|f\|_p \leqq c_p \|G_f^\rightarrow\|_p$ ne semblent pas entraîner de manière simple les inégalités inverses.

IV. SUR DEUX INEGALITES "PARABOLIQUES"

Dans [2] STEIN démontre (par une méthode assez détournée) les inégalités de LITTLEWOOD-PALEY pour la fonction parabolique horizontale $\rho_f^\rightarrow$. Comme au paragraphe précédent, l'<u>égalité</u> de L-P dans L^2 relative à $\rho_f^\rightarrow$ permet de se limiter à une seule moitié : la majoration $\|\rho_f^\rightarrow\|_p \leqq c_p \|f\|_p$. Le théorème de L-P parabolique se scinde donc en deux moitiés, dont l'une est plus forte que l'autre.

Notre première remarque va consister à prouver que

(26) $$G_f^{\to}(x) \leqq c.\rho_f^{\to}(x)$$

de sorte que la moitié faible du théorème de L-P parabolique est une conséquence des inégalités harmoniques (tandis qu'en revanche, la moitié forte des inégalités paraboliques entraîne les inégalités harmoniques relatives à $G^{\to}$). La démonstration est entièrement générale, et vaut pour tous les semi-groupes.

Pour voir cela, fixons x , posons $p(t)=P_tf(x)$, $q(t)=Q_tf(x)$, ces deux fonctions étant liées par la relation (7)

$$q(t) = a \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} p(t^2/4u)du$$

où a est une constante. Dérivons sous le signe somme

$$|q'(t)| \leqq a \int_0^{\infty} \frac{te^{-u}}{u\sqrt{u}} |p'(t^2/4u)|du$$

$$|q'(\sqrt{t})| \leqq a \int_0^{\infty} \sqrt{t/u}\; e^{-u}|p'(t/4u)|\frac{du}{u} = a\int_0^{\infty} e^{-vt}|p'(\tfrac{1}{4v})|\frac{dv}{v\sqrt{v}}$$

(en fait, on a bien une égalité de dérivation sous le signe $\int$, mais il faut vérifier que $sp'(s)$ reste borné au voisinage de l'infini, ce qui peut se voir pour une bonne fonction f, sur l'expression explicite du noyau de Poisson).

La fonction $q'(\sqrt{t})$ apparaît donc comme une transformée de Laplace, et la transformation de Laplace est un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Nous avons donc

$$\int_0^{\infty}(q'(\sqrt{t}))^2dt \leqq c \int(p'(\tfrac{1}{4v}))^2 \frac{dv}{v^3} = c'\int w(p'(w))^2dw$$

ce qui équivaut à (26).

Notre second commentaire va consister à utiliser une méthode analogue à celle du paragraphe III, mais plus simple, pour établir une inégalité de L-P parabolique - probablement nouvelle ?

DEMONSTRATION D'UNE INEGALITE PARABOLIQUE "TRANSVERSALE"

Considérons une bonne fonction f sur le bord, et un mouvement brownien (Y_t) à n dimensions, avec la mesure initiale ξ . Soit $N>0$. Il est bien connu que le processus

(27) $$M_s = \mathbb{E}[f\circ Y_N|\underline{\underline{F}}_s] = P_{N-s}(Y_s,f) = f^\circ(Y_s,N-s)$$

est une martingale pour $0\leqq s\leqq N$. Il est facile de calculer $\langle M,M\rangle_s$ au moyen de la formule du changement de variables d'ITO :

(28) $$\langle M,M\rangle_s = 2\int_0^s \mathrm{grad}_{\shortmid}^2 f^\circ(Y_t,N-t)dt \qquad (0\leqq s\leqq N)$$

où la flèche $\dagger$ indique l'absence de la dérivation D_t. D'après les inégalités de BURKHOLDER, nous avons une équivalence de norme dans L^p entre $M_N=f(Y_N)=f^\circ(Y_N,0)$ et $(M_0^2+\langle M,M\rangle_N)^{1/2}$.

Introduisons la "fonction de LITTLEWOOD-PALEY parabolique transversale"

(29) $$\rho_f^\dagger(x) = [\int_0^\infty \mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(x,t)dt\;]^{1/2}$$

et calquons la démonstration du paragraphe précédent :

MAJORATION DE $\|\rho_f^\dagger\|_p$, $p\geqq 2$. Nous partons de l'inégalité de BURKHOLDER

$$\|f\|_p^p = \mathbb{E}^\xi[\,|M_N|^p] \geqq c_p\,\mathbb{E}^\xi[\langle M,M\rangle_N^{p/2}] \geqq c_p\mathbb{E}^\xi[\,(\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_N|Y_N])^{p/2}]$$

Compte tenu de (28) , nous avons

$$\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_N|Y_N] = \int_0^N P_{N-a}(Y_N,\mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(.,N-a))da=\int_0^N P_a(Y_N,\mathrm{grad}^2_\dagger f^\circ(.,a)da$$

d'où, la loi de Y_N étant ξ

$$\|f\|_p^p \geqq c_p\|(\int_0^N P_a(.,\mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(.,a))da)^{1/2}\|_p,\text{ après quoi } N\to\infty$$

Comme les composantes du gradient sont des fonctions paraboliques, on a $P_a(x,\mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(.,a))\geqq \mathrm{grad}^2 f^\circ(x,2a))$, et on en déduit que $\|f\|_p \geqq c_p\|\rho_f^\dagger\|_p$ $(p\geqq 2)$.

REMARQUE. En fait nous avons démontré une inégalité pour la fonction correspondant à H_f dans le cas harmonique :

(30) $$H\rho_f^\dagger(x) = [\int_0^\infty P_t^*(x,\mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(.,t))dt\;]^{1/2}$$

MAJORATION DE $\|\rho_f^\dagger\|_p$, $p\leqq 2$. Le lemme 1 subsiste, avec $f^*(x)=\sup_t f^\circ(x,t)$ (f est supposée positive ici). Le lemme 2 subsiste, avec $h(x,t) = p(p-1)(f^\circ(x,t))^{p-2}\mathrm{grad}_\dagger^2 f^\circ(x,t)$, et $I(x)=\int_0^\infty h(x,a)da$: la formule du changement de variable est appliquée à la martingale $f^\circ(Y_s,N-s)+\varepsilon$ sur $[0,N]$, et avec la même fonction x^p. Le reste de la démonstration est le même.

Le théorème s'applique en fait à la fonction correspondant à K_f :

(31) $$K\rho_f^\dagger(x) = [\int_0^\infty (P_t^*(x,|\mathrm{grad}_\dagger f^\circ(.,t)|))^2dt\;]^{1/2}$$

MINORATION DE $\|\rho_f^\dagger\|_p$. On démontre l'égalité $\|f\|_2^2=2\|\rho_f^\dagger\|_2^2$ au moyen du théorème de Plancherel. puis on raisonne par dualité comme plus haut.

Je n'ai pas trouvé de comparaison simple entre $\rho_f^\dagger$ et $G_f^\dagger$.

V. LIEN AVEC L'INTEGRALE DE LUSIN

Nous allons montrer ici que la fonction K_f introduite au §3 (formule 20) domine l'intégrale d'aire de LUSIN , fonction qui a été beaucoup utilisée dans l'étude du comportement des fonctions harmoniques à la frontière . Dans une rédaction précédente, on " montrait" aussi que K_f dominait la fonction maximale non tangentielle, mais le calcul comportait une faute à la dernière ligne (je remercie E.STEIN d'avoir exprimé des doutes quant à ce résultat, ce qui m'a permis de découvrir l'erreur).

Notons $\Gamma(a)$ le cône $\{|x|\leqq at\}$ de sommet 0, $\Gamma_x(a)$ son translaté de sommet x, et posons

(32) $$S(f)(x) = \Big[\int_{\Gamma_x(a)} t^{1-n}\, \mathrm{grad}^2 f(x,t)\, dxdt \Big]^{1/2}$$

S(f) est l'intégrale de LUSIN. Notre but est de prouver que $S(f)\leqq cK_f$, où c dépend de l'ouverture du cône (et de la dimension n). Nous nous placerons au point 0, et nous utiliserons les notations

$g(x,t) = |\mathrm{grad}\ f(x,t)|$ (attention, ce n'est pas la même notation que dans les paragr. I-IV)

B_t est la boule de centre $(0,t)$, tangente au cône $\Gamma(a)$, μ_t est la mesure "moyenne sur B_t" . De même, B_t° et μ_t° sont relatives au cône $\Gamma(2a)$, $B_t^{\circ\circ}$ et $\mu_t^{\circ\circ}$ au cône $\Gamma(3a)$.

<u>Première étape</u>. Nous montrons que , au point 0

(33) $$S(f)^2 \leqq c\int_0^\infty tdt \int g^2(x,s)d\mu_t^\circ(x,s)$$

(ici et dans toute la suite, nous désignons par c une quantité qui peut dépendre de n et de a, et change de place en place). Considérons en effet le second membre : nous pouvons l'écrire

$$c\int_0^\infty tdt\ t^{-n-1}\int_{B_t^\circ} g^2(x,s)dxds$$

or $B_t^\circ \cap \Gamma$ contient un tronc de cône

$$\Gamma_t\ :\ |x|\leqq as,\ c_1 t\leqq s\leqq c_2 t$$

donc cette intégrale est minorée par

$$c\int_0^\infty g^2(x,s)t^{-n} I_{\{|x|\leqq as\ ,\ \frac{s}{c_2}\leqq t\leqq \frac{s}{c_1}\}} dxdsdt$$

et en intégrant d'abord en t

$$c\int_{|x|\leqq as} g^2(x,s)s^{1-n}dxds = cS(f)^2 \text{ au point } 0\ .$$

<u>Seconde étape</u>. Nous appliquons les inégalités de HARNACK à la fonction harmonique vectorielle grad f . La norme L^2 de cette fonction pour μ_t^o est dominée par la norme L^1 pour la mesure μ_t^{oo} sur la boule B_t^{oo}. Comment voir cela ? On se ramène au cas d'une fonction réelle positive harmonique dans B_t^{oo} . Connaître l'intégrale pour μ_t^{oo} , c'est connaître la valeur au centre. D'après HARNACK, cela permet de majorer la fonction sur B_t^o , et comme μ_t^o est de masse 1, la norme L^2 est plus petite que la norme L^∞ . Ainsi nous avons

$$(34)\qquad \int_0^\infty tdt \int g^2(x,s)d\mu_t^o(x,s) \leq c\int_0^\infty tdt \left(\int g(x,s)d\mu_t^{oo}(x,s)\right)^2$$
$$= c\int_0^\infty t^{-2n-1}\left(\int_{B_t^{oo}} g(x,s)dxds\right)^2 dt$$

<u>Troisième étape</u>. La boule B_t^{oo} est contenue dans un tronc de cône Γ_t^{oo} : $\{|x|\leq 3at \ , \ c_1t\leq s\leq c_2t\}$. Soit $j(s) = \int_{|x|\leq 3as} g(x,s)dx$. D'après Schwarz la parenthèse dans la dernière intégrale de (34) est majorée par

$$\left(\int_{\Gamma_t^{oo}} g(x,s)dxds\right)^2 = \left(\int_{c_1t}^{c_2t} j(s)ds\right)^2 \leq ct.\int_{c_1t}^{c_2t} j^2(s)ds$$

D'où pour (33) et (34) la majoration

$$c\int_0^\infty t^{-2n}dt\int_{c_1t}^{c_2t} j^2(s)ds = c\int_0^\infty j^2(s)ds\int_{s/c_2}^{s/c_1} t^{-2n}dt$$
$$= c\int s^{1-2n}j^2(s)ds$$

D'un autre côté, nous avons

$$K_f^2(0) \geq \int_0^\infty ct\left(\int_{|x|\leq 3t} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} g(x,t)dx\right)^2 dt$$
$$\geq c\int_0^\infty t.t^{-2n}\left(\int_{|x|\leq 3t} g(x,t)dx\right)^2 dt = c\int t^{1-2n}j^2(t)dt \ .$$

Et c'est fini.

REMARQUE. Soit $\varphi(t) = \sup_{(x,s)\in B_t^o} g(x,s)$. Nous venons de voir que $K_f^2(0)$ majore à un facteur près la seconde intégrale de (34)

$$(35)\qquad \int_0^\infty tdt \left(\int g(x,s)d\mu_t^{oo}(x,s)\right)^2$$

Mais connaissant la moyenne sur la grande boule B_t^{oo}, on sait majorer la valeur au centre, puis par HARNACK le sup sur une boule concentrique plus petite, donc $K_f^2(0)$ majore

$$(36)\qquad c\int_0^\infty tdt \left(\sup_{(x,s)\in B_t^o} g(x,s)\right)^2 = c\int_0^\infty tdt\ \varphi^2(t)$$

Cela précise bien la relation entre K_f et G_f .

BIBLIOGRAPHIE

E.M.STEIN. [1]. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, 1970.

[2]. Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood Paley Theory. Annals of Math. Studies 63, Princeton 1970.

[3]. Intégrales Singulières... Cours d'Orsay, 1966-67.

K.ITO et H.P.McKEAN.[1]. Diffusion processes and their sample paths. Grundlehren 125, Springer 1965.

R.M.BLUMENTHAL et R.K.GETOOR.[1]. Markov processes and potential theory. Academic Press 1968.

C.S.HERZ.[1].Généralisation de la notion des classes H_p de Hardy. Journées de Potentiel et Analyse Harmonique. Lecture Notes in M. n°404, Springer 1974.

G.C.ROTA.[1]. An Alternierende Verfahren for general positive operators. Bull. Amer. M. Soc. 68, 1962, 95-102.

P.A.MEYER.[1]. Probabilités et Potentiel. Hermann 1966.

C.FEFFERMAN et E.M.STEIN. H^p Spaces of several variables. Acta Math. 129, 1972, 137-192.