SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR
PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur la théorie de la prédiction

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 104-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__104_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

SUR LA THEORIE DE LA PREDICTION, ET LE PROBLEME DE DECOMPOSITION DES TRIBUS $\mathcal{F}^o_{t+}$

par Marc Yor et P.A. Meyer

L'origine de ce travail en commun est un article de M. Yor, établissant une relation entre la théorie de la prédiction de Knight (présentée par P.A.Meyer dans l'exposé précédent de ce volume) et le problème suivant posé par K.L.Chung : étant donné un processus (X_t) réel à trajectoires càdlàg., désignons par $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ sa famille de tribus naturelle, par S un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, par $(\underline{\underline{G}}^o_t)$ la famille de tribus naturelle du processus (X_{S+t}). A t'on dans ces conditions

$$(*)\qquad \underline{\underline{F}}^o_{(S+t)+} = \underline{\underline{F}}^o_{S-} \vee \underline{\underline{G}}^o_{t+} \quad \text{aux ensembles de mesure nulle près,}$$

comme dans le cas des processus de Markov ? La théorie de la prédiction fournissait un moyen naturel de démontrer cela, et l'article de Yor le démontrait en effet, modulo une erreur énorme de Meyer, signalée au bas de la p.6 de l'exposé précédent. Ceci étant, nous avons regroupé dans un premier paragraphe les résultats positifs du travail de Yor, qui apportent des compléments substantiels à la théorie de la prédiction, et dans un second paragraphe un exemple (trouvé avec l'aide de C. Dellacherie) d'un processus réel (X_t) à trajectoires càdlàg., dont la loi de probabilité est assez bizarre pour que l'on n'ait pas (*) avec S=1 : $\underline{\underline{F}}^o_{1+}$ n'est pas engendrée par $\underline{\underline{F}}^o_1$ et par la tribu des germes en 0 du processus $(X_{t+1})_{t\geq 0}$, aux ensembles de mesure nulle près ! Autrement dit, il faut se méfier des idées toutes faites sur les tribus de germes.

I. COMPLEMENTS A LA THEORIE DE LA PREDICTION

Au lieu de travailler sur l'espace canonique Ω de l'exposé précédent, nous allons travailler sur l'espace de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$ - où E est un espace polonais - continues à droite et pourvues de limites à gauche, absorbées en ∂. Si ω appartient à Ω, nous poserons $X_t(\omega)=\omega(t)$, et nous poserons comme d'habitude

(1) $\underline{\underline{F}}^o = \underline{\underline{F}}^o_\infty = \sigma(X_s,\ s\in\mathbb{R}_+)$, $\underline{\underline{F}}^o_t = \sigma(X_s,\ s\leq t)$

Il est bien connu que l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ est lusinien ([4], IV.19, p.146), donc que Ω admet une topologie compacte métrisable dont $\underline{\underline{F}}^o$ est la tribu borélienne ([4], III.80, p.248). D'autre part, Ω admet les opérateurs de translation et de raccordement

(2) $\qquad X_s(\theta_t\omega) = X_{s+t}(\omega)$

(3) $\qquad X_s(\omega/t/w) = X_s(\omega)$ si $s<t$, $X_{s-t}(w)$ si $s\geq t$.

La théorie de la prédiction développée dans l'exposé précédent s'applique dans la présente situation, et nous en conservons toutes les notations : K^μ_t , Z^μ_t , M, etc. Afin de compléter la théorie de Knight, nous avons (comme dans l'exposé précédent, référence [7] de la bibliographie) isolé entre astériques *...* certaines considérations permettant de passer au cas de l'espace des fonctions lipschitziennes.

LEMMES DE MESURABILITE

LEMME 1. <u>Il existe une algèbre $\underline{\underline{U}}$ de fonctions $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables bornées, contenant les constantes, fermée et séparable pour la cv. uniforme, engendrant la tribu $\underline{\underline{F}}^o$, et telle que pour tout $g\in\underline{\underline{U}}$ l'application $t\mapsto g\circ\theta_t$ soit continue pour la convergence uniforme</u>.

DEMONSTRATION. Il suffit de trouver un <u>ensemble</u> $\underline{\underline{V}}$ de fonctions mesurables bornées, séparable pour la convergence uniforme, engendrant $\underline{\underline{F}}^o$, et tel que toute $g\in\underline{\underline{V}}$ possède la propriété précédente. Car alors on prendra pour $\underline{\underline{U}}$ la fermeture uniforme de l'algèbre sur les rationnels engendrée par $\underline{\underline{V}}$ et 1. On construit $\underline{\underline{V}}$ ainsi : on prend une suite (f_n) de fonctions continues bornées sur E, engendrant $\underline{\underline{B}}(E)$, et pour $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble de toutes les fonctions sur Ω de la forme

$$g = \int_0^\infty e^{-pu} f_n\circ X_u\, du \qquad (p>0) \ .$$

Avec les combinaisons linéaires de telles fonctions, on peut en effet approcher les $\int_0^\infty f_n\circ X_u \varphi(u)du$, où φ est continue à support compact, puis les $f_n\circ X_u$ elles mêmes (au sens de la convergence simple sur Ω), et $\underline{\underline{V}}$ engendre donc $\underline{\underline{F}}^o$. $\underline{\underline{V}}$ est évidemment séparable, et tout élément de $\underline{\underline{V}}$ possède la dernière propriété de l'énoncé.

Dans le cas lipschitzien, il suffit de prendre $\underline{\underline{U}}=\underline{\underline{C}}(\Omega)$.

On rappelle que $\underline{\underline{P}}$ désigne la tribu prévisible. Nous désignons par $\underline{\underline{H}}$ la tribu homogène sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, formée des ensembles $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurables A dont l'indicatrice est une fonction homogène $(I_A(s+t,\omega)=I_A(s,\theta_t\omega))$.

LEMME 2. $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ = \underline{\underline{P}}\vee\underline{\underline{H}}$[1].

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$. Nous remarquons que, quelle que soit la fonction $C((t,\omega),w)$, $\underline{\underline{P}}\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, la fonction $(t,\omega)\longmapsto C(t,\omega,\theta_t\omega)$ est $\underline{\underline{P}}\vee\underline{\underline{H}}$-mesurable, comme on le vérifie aussitôt par classes monotones à partir du cas où $C(t,\omega,w)=a(t,\omega)b(w)$ (a $\underline{\underline{P}}$-mesurable, b $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable). Prenant

$$C(t,\omega,w)=\int_0^t e^{-pu}f\circ X_u(\omega)du + e^{-pt}\int_0^\infty e^{-pu}f\circ X_u(w)du$$

on a $C(t,\omega,\theta_t\omega) = \int_0^\infty e^{-pu}f\circ X_u(\omega)du$, et l'argument du lemme 1 montre qu'alors, pour toute fonction $b(\omega)$ $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, $(t,\omega)\longmapsto b(\omega)$ est $\underline{\underline{P}}\vee\underline{\underline{H}}$-mesurable. De même, si a est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurable, $(t,\omega)\longmapsto a(t)$ est prévisible, donc $(t,\omega)\longmapsto a(t)b(\omega)$ est $\underline{\underline{P}}\vee\underline{\underline{H}}$-mesurable, et ces fonctions engendrent $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$.

*Dans le cas où Ω est l'espace des applications $t\longmapsto L_t(\omega)$, nulles en 0, croissantes, lipschitziennes de rapport 1 - espace qui faisait l'objet de la théorie de Knight - il faut prendre

$$C(t,\omega,w) = \int_0^t e^{-pu}dL_u(\omega) + e^{-pt}\int_0^\infty e^{-pu}dL_u(w)$$ *

Voici une première conséquence de ce lemme :

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $\mu\in\mathcal{M}$, <u>et soit</u> (H_t) <u>un processus réel</u>, <u>optionnel par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^\mu_{t+})$. <u>Alors</u> H <u>est</u> μ-<u>indistinguable d'un processus mesurable par rapport à la tribu sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>engendrée par</u> $\underline{\underline{P}}$ <u>et par le processus</u> (Z^μ_t).

Ou encore : $\underline{\underline{O}}^\mu = \underline{\underline{P}}\vee\sigma(Z^\mu)\vee\sigma(\underline{\underline{I}}^\mu)$, où $\underline{\underline{I}}^\mu$ est la classe des ensembles μ-évanescents.

DEMONSTRATION. Il est bien connu qu'un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^\mu_{t+})$ est égal μ-p.s. à un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$. On en déduit que H est μ-indistinguable d'un processus $\underline{\underline{O}}$-mesurable, et

1. Voir [8].

par conséquent, en particulier, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable. On se ramène alors à l'énoncé suivant : tout processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable borné (K_t) admet une projection optionnelle (K'_t) pour la loi μ, mesurable par rapport à $\underline{\underline{P}}\vee\sigma(Z^\mu)$ - en particulier, si K est $\underline{\underline{O}}$-mesurable, K et K' seront μ-indistinguables, et le lemme sera prouvé. Or d'après le lemme 2, il suffit de traiter le cas où $K_t(\omega)=a(t,\omega)b(\theta_t\omega)$, a étant prévisible, et b $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable. Alors on peut prendre

$$K'_t(\omega) = a(t,\omega)Z^\mu_t(\omega,b)$$

qui est mesurable par rapport à $\underline{\underline{P}}\vee\sigma(Z^\mu)$.

REMARQUE. Si l'on ne dispose pas d'opérateurs de translation, le théorème est vrai - avec une preuve encore plus simple - pour la tribu $\underline{\underline{P}}\vee\sigma(K^\mu)$. Le point intéressant ici est le fait que les tribus $\underline{\underline{P}}\vee\sigma(K^\mu)$, $\underline{\underline{P}}\vee\sigma(Z^\mu)$ sont de bonnes tribus de Blackwell sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, tandis que $\underline{\underline{O}}$ est une mauvaise tribu.

REMARQUE. Pour tout t.d'a. S de $(\underline{\underline{F}}^\mu_{t+})$ la tribu $\underline{\underline{F}}^\mu_{S+}$ est engendrée par les v.a. H_S , où (H_t) est un processus optionnel de la famille $(\underline{\underline{F}}^\mu_{t+})$. D'après le résultat précédent, $\underline{\underline{F}}^\mu_{S+}$ est aussi engendrée, aux ensembles négligeables près, par les v.a. H_S où H est un processus <u>prévisible</u> , et par la seule v.a. Z^μ_S . Or les v.a. H_S où H est prévisible engendrent F^μ_{S-} . Ainsi

$$\underline{\underline{F}}^\mu_{S+} = \underline{\underline{F}}^\mu_{S-}\vee\sigma(Z^\mu_S) \tag{4}$$

il n'est pas nécessaire d'ajouter la tribu $\sigma(\underline{\underline{N}}^\mu)$ engendrée par les μ-négligeables : elle est déjà dans $\underline{\underline{F}}^\mu_{S-}$. Si S est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$ on peut aussi écrire

$$\underline{\underline{F}}^\mu_{S+}= \underline{\underline{F}}^\circ_{S-}\vee\sigma(Z^\mu_S)\vee\sigma(\underline{\underline{N}}^\mu). \tag{4'}$$

REMARQUE. Continuons à décomposer (4') : comme processus prévisibles H dont on va regarder les traces H_S , on peut se borner aux processus de la forme $H(t,\omega) = f\circ X_u(\omega)I_{]u,\infty[}(t)$. D'autre part, $f\circ X_u = E_\mu[f\circ X_0\circ\theta_u|\underline{\underline{F}}^\circ_{u+}] = Z^\mu_u(f\circ X_0)$ μ-p.s.. Ainsi, $\underline{\underline{F}}^\circ_{S-}$ est engendrée aux ensembles μ-négligeables près par les v.a. $Z^\mu_u I_{\{u<S\}}$. Donc

$$\underline{\underline{F}}^\mu_{S+} = \sigma(\ Z^\mu_u I_{\{u<S\}},\ u\in\mathbb{R}_+)\vee\sigma(Z^\mu_S)\vee\sigma(\underline{\underline{N}}^\mu) \tag{5}$$

HOMOGENEITE DU PROCESSUS DE PREDICTION

Ce paragraphe contient les résultats essentiels de l'exposé : d'une part le théorème sur la prédiction, qui apporte un complément important au th. de Knight , et d'autre part un résultat de décomposition des tribus utilisé dans [7] pour démontrer, précisément, le théorème de Knight. Il nous faut d'abord des résultats techniques.

LEMME 3. <u>Soit</u> $g \in \underline{\underline{U}}$ (lemme 1). <u>Alors pour</u> μ-<u>presque tout</u> ω <u>la fonction</u> $t \mapsto Z_t^\mu(\omega,g)$ <u>est continue à droite sur</u> $[0,\infty[$ <u>et pourvue de limites à gauche sur</u> $]0,\infty[$, <u>et l'on a</u> $(Z_\cdot^\mu(\omega,g))_{t-}=Z_{t-}^\mu(\omega,g)$ <u>sur</u> $]0,\infty[$.

DEMONSTRATION. Le processus $(g\circ\theta_t)$ est continu. Le lemme ne fait alors que traduire un résultat bien connu sur les projections optionnelle et prévisible d'un processus continu ([3], V.T20, p.101).

COMMENTAIRE. On a souligné à plusieurs reprises le caractère artificiel de la topologie compacte sur Ω, considérée dans l'exposé précédent *exception faite du cas des fonctions lipschitziennes* . Choisissons maintenant une suite (f_n) dense dans $\underline{\underline{U}}$, et considérons l'application de Ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$j : \omega \mapsto (f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$$

Puisque les f_n engendrent $\underline{\underline{F}}^\circ$, donc séparent Ω, j est injective. <u>Identifions</u> Ω à son image par j, munissons Ω de la topologie induite par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $\underline{\underline{F}}^\circ$ est alors la tribu borélienne de Ω, et comme Ω est lusinien, Ω est borélien dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$([4], III.21, p.76). Les f_n étant bornées, l' adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est compacte. Toute f_n se prolonge par continuité à $\overline{\Omega}$, il en est donc de même de toute fonction $g\in\underline{\underline{U}}$, et comme $\underline{\underline{U}}$ est une algèbre qui contient les constantes, et que les prolongements des f_n séparent $\overline{\Omega}$, il résulte du théorème de Stone-Weierstrass que $\underline{\underline{U}}$ est l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de $\underline{\underline{C}}(\overline{\Omega})$. Le lemme 3 nous dit alors que si l'on considère les Z_t^μ comme des mesures sur $\overline{\Omega}$ portées par Ω, le processus (Z_t^μ) est μ-indistinguable d'un processus càdlàg. pour la convergence étroite des mesures sur $\overline{\Omega}$, et que le processus (Z_{t-}^μ) est μ-indistinguable du processus des limites à gauche de (Z_t^μ). Mais les mesures Z_t^μ sont portées par Ω , donc ([4], III.58, p.114), la convergence étroite des Z_t^μ en tant que mesures sur $\overline{\Omega}$ est la même que leur convergence étroite en tant que mesures <u>sur Ω</u> , i.e. pour μ-presque tout ω on peut affirmer que, quelle que soit g $\in \underline{\underline{C}}_b(\Omega)$, $Z_\cdot^\mu(\omega,g)$ est continue à droite, avec limites à gauche égales à $Z_{\cdot-}^\mu(\omega,g)$ - et cela, bien que $\underline{\underline{C}}_b(\Omega)$ ne soit pas séparable en général. Ce choix de topologie (non compacte) sur Ω est donc assez plaisant.

Le second lemme est purement technique :

LEMME 4. Soit $G(\lambda,\omega)$ une fonction sur $M\times\Omega$, mesurable par rapport à la complétion universelle $(\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o})^{*}$ de $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o}$. Alors pour tout temps optionnel S de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$ et toute loi μ, on a μ-p.s.

$$E_{\mu}[G(Z^{\mu}_{S}(\omega),\theta_{S}\omega)|\underline{\underline{F}}^{o}_{S+}] = \int Z^{\mu}_{S}(\omega,dw)G(Z^{\mu}_{S}(\omega),w) \tag{6}$$

DEMONSTRATION. Soit $V(\omega,w) = G(Z^{\mu}_{S}(\omega),w)$. L'application $(\omega,w)\mapsto(Z^{\mu}_{S}(\omega),w)$ étant $\underline{\underline{F}}^{o}_{S+}\times\underline{\underline{F}}^{o}/\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o}$ -mesurable, elle est aussi $(\underline{\underline{F}}^{o}_{S+}\times\underline{\underline{F}}^{o})^{*}/(\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^{o})^{*}$-mesurable, et V est $(\underline{\underline{F}}^{o}_{S+}\times\underline{\underline{F}}^{o})^{*}$-mesurable. Soit alors λ la mesure sur $\Omega\times\Omega$, image de μ par $\omega\mapsto(\omega,\theta_{S}\omega)$: encadrant V entre deux fonctions $\underline{\underline{F}}^{o}_{S+}\times\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurables égales λ-p.p. et appliquant la formule (18) de [7] - étendue aux t.d'a. - on obtient (6).

Voici enfin le résultat de décomposition des tribus qui joue un rôle essentiel dans la démonstration, de manière implicite (l'extension aux temps d'arrêt du lemme 7 de [7] repose sur lui). Nous consacrerons le paragraphe II à la discussion de ce résultat.

THEOREME 1. - Soient S et T deux temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$, et R le temps d'arrêt $S+T\circ\theta_{S}$. Soit U une v.a. $\underline{\underline{F}}^{o}_{R+}$-mesurable. Il existe alors une fonction $\overline{U}(\omega,w)$ sur $\Omega\times\Omega$, possédant les propriétés suivantes

a) $\overline{U}$ est $\underline{\underline{F}}^{o}_{S-}\times\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable, et $U(\omega)=\overline{U}(\omega,\theta_{S}\omega)$ identiquement .
b) Pour tout ω fixé, $\overline{U}(\omega,.)$ est $\underline{\underline{F}}^{o}_{T+}$-mesurable.

DEMONSTRATION. Nous vérifions d'abord que R est un temps d'arrêt. Nous écrirons que $\omega\equiv\omega'$ (t) pour exprimer que $X_{s}(\omega)=X_{s}(\omega')$ pour tout $s\leq t$. Le point à vérifier est le suivant ("test de Galmarino", cf. [5], et [4], IV.99-101, p.233), où ε désigne un nombre >0 .

$$(R(\omega)=t,\ \omega\equiv\omega'\ (t+\varepsilon)\ ) \Rightarrow R(\omega')=t .$$

Or soit $S(\omega)=u \leq t$. Comme S est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$, la relation $\omega\equiv\omega'$ $(t+\varepsilon)$ entraîne $S(\omega')=u$. Alors $T(\theta_{t}\omega)=t-u$, et $\theta_{t}\omega\equiv\theta_{t}\omega'$ $(t-u+\varepsilon)$, donc $T(\theta_{t}\omega)=T(\theta_{t}\omega')$, et finalement on a bien $R(\omega)=R(\omega')$.

Dans [4], cette démonstration repose sur l'emploi d'opérateurs d'arrêt a_{u} , définis par $X_{t}(a_{u}(\omega))=X_{t\wedge u}(\omega)$. *Sur l'espace des fonctions lipschitziennes utilisé dans [7], avec les coordonnées L_{t}, on peut utiliser les opérateurs a_u tels que $L_t \circ a_u = L_{t\wedge u}$, mais le mot "opérateur d'arrêt" est légèrement impropre : la véritable trajectoire est en effet celle de la dérivée L'_t , définie presque partout, et sur celle-ci l'effet de a_u est un remplacement par 0 après u - plutôt donc un meurtre qu'un arrêt.*

Posons maintenant $V(\omega,w)= U(\omega/S(\omega)/w)$. Nous avons vérifié dans l'exposé [7] que $V(\omega,\theta_S\omega)=U(\omega)$, et que V est $\underline{\underline{F}}^o_{S-}\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. Pour tout h>0 nous posons

$$V_h(\omega,w) = V(\omega,\ a_{T(w)+h}w\ )$$

Comme $w \mapsto a_{T(w)+h}(w)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{T+h}/\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, V_h est $\underline{\underline{F}}^o_{S-}\times\underline{\underline{F}}^o_{T+h}$-mesurable. Vérifions que si U est $\underline{\underline{F}}^o_{R+}$-mesurable, on a encore $U(\omega)=V_h(\omega,\theta_S\omega)$. Posons $w=\theta_S\omega$, $w'=a_{T(w)+h}w$; nous avons par définition

$$U(\omega) = U(\omega/S(\omega)/w) \quad ; \quad V_h(\omega,\theta_S\omega) = U(\omega/S(\omega)/w')$$

Soit $S(\omega)=s$, $T(w)=t$; nous avons $R(\omega)=S(\omega)+T(\theta_S\omega)=S(\omega)+T(w)=s+t$, et $\omega=\omega/s/w\equiv\omega/s/w'$ (s+t+h), donc comme U est $\underline{\underline{F}}^o_{R+}$-mesurable, $U(\omega)= U(\omega/s/w')= V(\omega,w')=V_h(\omega,w)$.

Ce point étant établi, posons $\overline{U}(\omega,w)= \liminf_n V_{1/n}(\omega,w)$. Cette fonction est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_n (\underline{\underline{F}}^o_{S-}\vee\underline{\underline{F}}^o_{T+1/n})$, qui est en général distincte de $\underline{\underline{F}}^o_{S-}\vee\underline{\underline{F}}^o_{T+}$, mais elle satisfait à la propriété b) de l'énoncé. Quant à a), la relation $U(\omega)=V_{1/n}(\omega,\theta_S\omega)$ passe bien à la limite, et le théorème est établi.

Nous démontrons maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

THEOREME 2. <u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$. <u>Alors pour toute loi</u> μ <u>les processus</u>

(7) $\qquad Z^\mu_{S+t}(\omega) \quad$ <u>et</u> $\quad Z_t^{Z^\mu_S(\omega)}(\theta_S\omega)$

<u>sont</u> μ-<u>indistinguables sur</u> $[0,\infty[$, <u>et les processus</u>

(8) $\qquad Z^\mu_{(S+t)-}(\omega) \quad$ <u>et</u> $\quad Z_{t-}^{Z^\mu_S(\omega)}(\theta_S\omega)$

μ-<u>indistinguables sur</u> $]0,\infty[$.

REMARQUE. Si S est prévisible, on a un énoncé analogue, en remplacant $Z^{Z^\mu_S(\omega)}$ par $Z^{Z^\mu_{S-}(\omega)}$. Nous laissons cela au lecteur : l'idée de la démonstration est la même, mais il faut remplacer partout les formules du type $E_\mu[Y\circ\theta_S|\underline{\underline{F}}^o_{S+}]=Z^\mu_S(.,Y)$ par des formules du type $E_\mu[Y\circ\theta_S|\underline{\underline{F}}^o_{S-}]=Z^\mu_{S-}(.,Y)$.[1]

DEMONSTRATION. Nous commençons par invoquer le lemme 7 de [7], étendu aux temps d'arrêt, pour obtenir que pour t fixé

$$(9) \qquad Z^\mu_{S+t} = Z_t^{Z^\mu_S}(\theta_S.) \ \mu\text{-p.s. (l'ensemble négligeable dépendant de } t)$$

Ce point étant acquis, démontrons par exemple 7). Il nous suffit de prouver que pour toute v.a. $g\in\underline{\underline{U}}$ (lemme 1) et pour μ-presque tout ω

$$(7') \qquad Z^\mu_{S(\omega)+t}(g) = Z_t^{Z^\mu_S(\omega)}(\theta_S\omega,g) \text{ identiquement en } t .$$

La formule (9) nous dit que l'égalité a lieu μ-p.s. pour t fixé, donc pp en (t,ω) pour la mesure $dt\times d\mu$ donc (Fubini), que pour presque tout ω, que (7') <u>a lieu presque partout pour la mesure</u> dt. D'autre part, d'après le lemme 3, le côté gauche de (7') est, pour μ-presque tout ω, une fonction continue à droite de t. <u>Il nous suffit donc de prouver la même chose pour le côté droit de</u> (7'). Nous allons prouver un peu plus, de manière à obtenir (8) du même coup.

Soit N l'ensemble des (λ,ω) pour lesquels la propriété suivante (Π) <u>n'est pas</u> satisfaite, et soit $n(\lambda,\omega)$ l'indicatrice de N.

(Π) : l'application $t\mapsto Z^\lambda_t(\omega,g)$ est continue à droite sur $[0,\infty[$, et pourvue de limites à gauche sur $]0,\infty[$,
l'application $t\mapsto Z^\lambda_{t-}(\omega,g)$ est continue à gauche sur $]0,\infty[$ et pourvue de limites à droite sur $[0,\infty[$,
on a $(Z^\lambda_\cdot(\omega,g))_{t-} = Z^\lambda_{t-}(\omega,g)$ et $(Z^\lambda_{\cdot-}(\omega,g))_{t+}=Z^\lambda_t(\omega,g)$ pour tout t.

Le lemme 3 nous dit que, pour toute loi λ, l'ensemble $N_\lambda=\{\omega:(\lambda,\omega)\in N\}$ est λ-négligeable. D'après le théorème 34, p.164 du chapitre IV de [4], N est le complémentaire d'un ensemble $(\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o)$-analytique, donc appartient à la complétion universelle de $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o$. D'après le lemme 4, nous avons alors

1. En particulier, le processus (Z^μ_{t-}) est modérément markovien de semi-groupe $J^-_t(\lambda,A)=\lambda\{Z^\lambda_{t-}\in A\}$. Aussi, si S est un t.d'a. prévisible, on a $\mu\{Z^\mu_S\in A|\underline{\underline{F}}^o_{S-}\} = J_0(Z^\mu_{S-},A)$ p.s. (notations de [7], th.3).

$$P_\mu\{\ \theta_S\omega \in N_{Z_S^\mu(\omega)} | \underline{\underline{F}}^o_{S+}\ \} = E_\mu[\ n(Z_S^\mu(\omega),\ \theta_S\omega)|\underline{\underline{F}}^o_{S+}\ ]$$
$$= \int Z_S^\mu(\omega,dw)n(Z_S^\mu(\omega),w) = 0$$

car nous avons vu plus haut que $\int\lambda(dw)n(\lambda,w) = 0$ pour tout λ. Mais alors, le côté gauche est nul aussi, et on a pour μ-presque tout ω que $\theta_S\omega \notin N_{Z_S^\mu(\omega)}$, ce qui entraîne que le côté droit de (7') est une fonction continue à droite de t, d'où (7), et de même (8) par passage aux limites à gauche.

II. PREDICTION ET DECOMPOSITION DES TRIBUS

Supposons pour un instant que l'on puisse choisir, étant donné t fixé, les opérateurs de prédiction Z_t^μ de telle manière que

(10$^?$) <u>l'application</u> $(\lambda,\omega)\longmapsto Z_t^\lambda(\omega)$ <u>soit</u> $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+}/\mathfrak{M}$ <u>-mesurable</u> ,

et tirons en quelques conséquences. Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$. Alors (formule (4')), $\underline{\underline{F}}^\mu_{(S+t)+}$ est engendrée aux ensembles μ-négligeables près par $\underline{\underline{F}}^o_{(S+t)-}$ et Z^μ_{S+t} . D'autre part, nous avons

$$\underline{\underline{F}}^o_{(S+t)-} = \underline{\underline{F}}^o_{S-} \vee \theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t-})$$

d'après la formule (9), p.95 de [1] - nous pourrions la redémontrer ici rapidement, mais comme tout ce qui suit est conditionnel modulo (10$^?$) qui sera fausse, c'est un peu inutile ! Enfin, la v.a. Z^μ_{S+t} est égale μ-p.s. (si (10$^?$) est vraie) à une v.a. $\underline{\underline{F}}^o_{S+}\vee\theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$-mes.. En effet, $\omega\longmapsto(Z_S^\mu(\omega),\theta_S\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{S+}\vee\theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t+})/\mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable, donc par composition avec (10$^?$) $\omega\longmapsto Z_t^{Z_S^\mu(\omega)}(\theta_S\omega)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{S+}\vee\theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$-mesurable, et cette dernière v.a. est égale μ-p.s. à Z^μ_{S+t} d'après (7). En regroupant les résultats obtenus, il vient, en notant $\underset{\mu}{=}$ l'égalité aux ensembles μ-négligeables près

(11$^?$) $\quad \underline{\underline{F}}^o_{(S+t)+} \underset{\mu}{=} \underline{\underline{F}}^o_{(S+t)-}\vee\sigma(Z_t^\mu) \underset{\mu}{=} \underline{\underline{F}}^o_{S+}\vee\ \theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$

qui répond de manière satisfaisante aux questions posées par Chung dans [1]. De même, si S est <u>prévisible</u>, en utilisant la remarque suivant l'énoncé du théorème 2, on a

$$(12^?)\qquad \underline{\underline{F}}^o_{(S+t)+} \underset{\mu}{=} \underline{\underline{F}}^o_{S-} \vee \theta_S^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_{t+}) \quad .$$

<u>Nous allons démontrer que</u> ($11^?$) <u>et</u> ($12^?$) <u>peuvent être fausses</u>, même lorsque S est une constante, et que par conséquent ($10^?$) est fausse aussi.

Nous commençons par une remarque. Nous prendrons S=1 ou $\frac{1}{2}$. Soit (C_t) un processus quelconque à trajectoires càdlàg., défini sur un espace probabilisé $(W,\underline{\underline{G}},P)$ complet. Posons

$$\underline{\underline{G}}^o_t = \sigma(C_s,\ s\leq t)\ ,\ \underline{\underline{H}}^o_t = \sigma(C_s\ ,\ 1\leq s\leq 1+t),\ \underline{\underline{K}}^o_t = \sigma(C_s\ ,\ \tfrac{1}{2}\leq s\leq \tfrac{1}{2}+t)$$

Soit φ l'application de W dans Ω qui à $w\in W$ associe sa trajectoire $C_\cdot(w)$. Alors φ est mesurable, et l'on a

$$\underline{\underline{G}}^o_t = \varphi^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_t)\ ,\ \underline{\underline{H}}^o_t = \varphi^{-1}(\theta_1^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_t))\ ,\ \underline{\underline{K}}^o_t = \varphi^{-1}(\theta_{1/2}^{-1}(\underline{\underline{F}}^o_t)) \ .$$

Si ($11^?$) et ($12^?$) sont vraies pour la loi $\mu=\varphi(P)$, alors nous avons aussi

$$(13^?)\qquad \underline{\underline{G}}^o_{1+} \underset{P}{=} \underline{\underline{G}}^o_{1-} \vee \underline{\underline{H}}^o_{0+} \underset{P}{=} \underline{\underline{G}}^o_{1/2+} \vee \underline{\underline{K}}^o_{1/2+}$$

Nous allons prendre un processus C_t défini sur $W=[0,1[\times[0,1[$, muni de sa tribu borélienne, et construit de la manière suivante. Etant donné $w=(u,v)\in W$, nous posons $R(w)=u/2$, nous désignons par $Y_i(w)$ $(i\geq 1)$ la i-ième " décimale" du développement dyadique du nombre v, en excluant pour les v rationnels dyadiques le développement admettant des 1 à partir d'un certain rang. Puis nous posons

$$(14)\qquad \begin{aligned} &C_t(w)= 1 \text{ pour } 0\leq t<R(w)\\ &C_t(w)= 0 \text{ pour } R(w)\leq t\leq 1\\ &C_t(w)= \Sigma_{i>n}\ 2^{-i}Y_i(w) \quad \text{pour } 1+\frac{1}{n+1}\leq t< 1+\frac{1}{n}\ (n\geq 0)\end{aligned}$$

Le processus est défini pour tout t, càdlàg, continu à l'instant 1. Comme $R(w)\leq 1/2$, on a $\underline{\underline{G}}^o_{1-}=\underline{\underline{G}}^o_{1/2+} = \sigma(R)$, tribu que nous noterons $\underline{\underline{B}}$. D'autre part, $H^o_{1/n-} = \underline{\underline{K}}^o_{(1/2+1/n)-} = \sigma(Y_i,\ i>n)$, tribu que nous noterons $\underline{\underline{F}}_n$. Alors

$$(15)\qquad \underline{\underline{G}}^o_{1+} = \bigcap_n (\overline{\underline{\underline{B}}}\vee\overline{\underline{\underline{F}}}_n) \quad ; \quad \underline{\underline{G}}^o_{1-}\vee\underline{\underline{H}}^o_{0+}=\underline{\underline{G}}^o_{1/2-}\vee\underline{\underline{K}}^o_{1/2+} = \overline{\underline{\underline{B}}}\vee(\bigcap_n\overline{\underline{\underline{F}}}_n)$$

Changeons légèrement de notations, en désignant par $\mathcal{F}_n$ la tribu sur $[0,1[$ (second facteur) engendrée par les " décimales" dyadiques de rang $i>n$, et par $\mathcal{F}_\infty$ la tribu $\bigcap_n \mathcal{F}_n$. Notons aussi $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur le premier facteur. Alors $\overline{\mathcal{B}} \vee \mathcal{F}_n = \mathcal{B}\times\mathcal{F}_n$, $\overline{\mathcal{B}}\vee(\bigcap_n \mathcal{F}_n)=\mathcal{B}\times\mathcal{F}_\infty$.

Nous allons achever l'exposé en trouvant <u>une loi</u> P <u>sur</u> $[0,1[\times[0,1[$ <u>telle que</u> $\mathcal{B}\times\mathcal{F}_\infty$ <u>soit égale à</u> $\overline{\mathcal{B}}$ <u>aux ensembles de mesure nulle près</u>, <u>mais que ceci soit faux pour</u> $\bigcap_n(\mathcal{B}\times\mathcal{F}_n)$.

La tribu $\mathcal{F}_\infty$ est la tribu asymptotique de la suite des " décimales" dyadiques. Elle est dégénérée pour la mesure de Lebesgue λ (car dans ce cas les "décimales" dyadiques sont indépendantes) , mais il existe aussi des lois(*) μ pour lesquelles $\mathcal{F}_\infty$ n'est pas dégénérée. Choisissons une telle loi, et définissons la loi P sur $[0,1[\times[0,1[$ par

$$\int f(u,v)P(du,dv) = \int_{[0,1[} \lambda(du)\int_{[0,1[} f(u,u+v)\mu(dv)$$

où + désigne l'addition mod.1. La projection de P sur le second facteur est égale à $\lambda*\mu$ (convolution sur $[0,1[$ identifié au tore), elle est donc égale à λ, et toute fonction de la forme $(u,v)\mapsto b(v)$, où b est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, est égale P-p.s. à une constante c. Donc toute fonction de la forme $(u,v)\mapsto a(u)b(v)$ est égale P-p.s. à une fonction $(u,v)\mapsto ca(u)$ $\overline{\mathcal{B}}$-mesurable, et un raisonnement de classes monotones étend cela à toute fonction $\mathcal{B}\times\mathcal{F}_\infty$ -mesurable.

D'autre part, une fonction borélienne $f(u,v)$ est $\mathcal{B}\times\mathcal{F}_n$-mesurable si et seulement si ses applications partielles ou " coupes" $f(u,.)$ sont périodiques (sur le tore) de période 2^{-n}. Donc f est mesurable par rapport à $\bigcap_n(\mathcal{B}\times\mathcal{F}_n)$ si et seulement si ses coupes admettent toutes les périodes 2^{-n} , i.e. sont $\mathcal{F}_\infty$-mesurables. $\mathcal{F}_\infty$ n'étant pas μ-dégénérée, choisissons une fonction $h(v)$, $\mathcal{F}_\infty$-mesurable bornée, non constante μ-p.s.(*), et posons $f(u,v)=h(v-u)$. Alors f est $\bigcap_n(\mathcal{B}\times\mathcal{F}_n)$-mesurable et l'on a, pour toute fonction $\mathcal{B}$-mesurable $a(u)$

$$\int|f(u,v)-a(u)|P(du,dv)=\int\lambda(du)\int|h(v)-a(u)|\mu(dv) > 0$$

de sorte que f n'est pas égale P-p.s. à une fonction $\overline{\mathcal{B}}$-mesurable.

Nous ne pensons pas que cet exemple soit nouveau : seule son interprétation en termes de familles de tribus l'est peut être. Notre conclusion sera, en tout cas, que le théorème 1 est le meilleur résultat de décomposition possible, et qu'il faut s'en contenter.

(*) Par exemple $= \frac{1}{2}\varepsilon_0+\frac{1}{2}\varepsilon_{1/3}$ et h = indicatrice de l'ensemble des dyadiques.

REMARQUES. Bien entendu, si l'on a une relation (13?) fausse <u>après</u> adjonction des ensembles de mesure nulle

$$\underline{\underline{G}}^o_{1+} \underset{P}{\neq} \underline{\underline{G}}^o_{1-} \vee \underline{\underline{H}}^o_{0+}$$

on a aussi que $\underline{\underline{G}}^o_{1+} \neq \underline{\underline{G}}^o_{1-} \vee \underline{\underline{H}}^o_{0+}$ <u>avant</u> adjonction (bien que les deux tribus considérées aient les mêmes atomes). Cela semble un défi à l'intuition au premier abord, mais ensuite, en regardant l'exemple, on comprend très bien ce qui se passe. Pour la loi P que l'on a construite, la tribu $\underline{\underline{H}}^o_{0+}$ qui représente le germe de trajectoire à l'instant 1, est <u>dégénérée</u>, de sorte qu'ajouter $\underline{\underline{H}}^o_{0+}$ à $\underline{\underline{G}}^o_{1-}$, c'est ne rien ajouter du tout. Mais <u>conditionnellement à R</u> - c'est à dire à $\underline{\underline{G}}^o_{1-}$ - la tribu des germes <u>n'est pas dégénérée</u>, de sorte que $\underline{\underline{G}}^o_{1+}$ ne se réduit pas à $\underline{\underline{G}}^o_{1-}$ aux ensembles négligeables près. Et pourquoi ne peut on pas conclure de la dégénérescence de $\underline{\underline{H}}^o_{0+}$ pour la loi absolue, à sa dégénerescence pour les lois conditionnelles ? Parce que $\underline{\underline{H}}^o_{0+}$ n'est pas séparable. Nous verrons cela d'une autre manière au paragraphe III.

Une autre remarque : on peut montrer que les énoncés (11?) (12?) (13?) sont des conséquences de (10?) écrite <u>pour</u> t=0 <u>seulement</u>, c'est à dire

$$(\lambda,\omega) \longmapsto K_0^\lambda(\omega) = Z_0^\lambda(\omega) \text{ est } \mathfrak{M}\times\underline{\underline{F}}^o_{0+}/\mathfrak{M} \text{ - mesurable .}$$

Mais nous ne prouverons pas cela - établir des implications entre énoncés faux étant une activité réservée aux jours de grève des chercheurs. Sous cette forme, on rejoint aussi le problème du § 3 .

III. ESPACES DE BLACKWELL ET MESURABILITE D'ESPERANCES CONDITIONNELLES

Nous supposons ici que $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ est un espace mesurable lusinien. Quitte à supposer que les atomes sont les points de Ω, nous pouvons munir Ω d'une topologie compacte métrisable dont $\underline{\underline{F}}^o$ est la tribu borélienne, et comme on l'a fait plus haut, munir l'ensemble M des mesures de probabilité sur Ω (l'adjonction de la mesure 0 ne sert à rien ici) de sa tribu borélienne $\mathfrak{M}$ naturelle (associée par ex. à la convergence étroite).

Le résultat suivant a été obtenu avec l'aide de G. Mokobodzki.

THEOREME 3 . <u>Soit</u> $\underline{\underline{G}}$ <u>une sous-tribu de</u> $\underline{\underline{F}}^o$. <u>Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes</u>

1) <u>Il existe une application</u> $(\lambda,\omega)\longmapsto K^\lambda(\omega,.)$ <u>de</u> $M\times\Omega$ <u>dans</u> M,

$\mathfrak{M}\times\underline{\underline{G}}/\mathfrak{M}$-<u>mesurable</u>, <u>telle que pour tout</u> $\lambda\in M$ $(\omega,A)\longmapsto K^{\lambda}(\omega,A)$ <u>soit un noyau d'espérance conditionnelle de</u> λ <u>par rapport à</u> $\underline{\underline{G}}$.

2) $\underline{\underline{G}}$ <u>est séparable</u>.

DEMONSTRATION. 2)=>1) est classique (Doob) et fait l'objet du lemme 1 de [7]. Montrons que 1)=>2). L'application K étant $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{G}}/\mathfrak{M}$-mesurable, il existe une suite de rectangles $A_n\times B_n$ ($A_n\in\mathfrak{M}$, $B_n\in\underline{\underline{G}}$) telle que K soit mesurable par rapport à la tribu qu'elle engendre. Soit $\underline{\underline{H}}=\sigma(B_n\ ,\ n\in\mathbb{N})$. Comme $\underline{\underline{H}}$ est séparable, contenue dans $\underline{\underline{G}}$, il nous suffit de montrer que $\underline{\underline{H}}=\underline{\underline{G}}$, ou encore, d'après le théorème de Blackwell, que $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{G}}$ ont les mêmes atomes. Or soient x et y appartenant au même atome de $\underline{\underline{H}}$, et f une fonction $\underline{\underline{G}}$-mesurable bornée, montrons que $f(x)=f(y)$. Si $x=y$, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $\lambda=\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$. Comme K est $\mathfrak{M}\times\underline{\underline{H}}$-mesurable, on a $K^{\lambda}(x)=K^{\lambda}(y)$, donc $K^{\lambda}(x,f)=K^{\lambda}(y,f)$. Comme f est $\underline{\underline{G}}$-mesurable, on a $K^{\lambda}f=f$ λ-p.s., donc $K^{\lambda}(x,f)=f(x)$, $K^{\lambda}(y,f)$ $=f(y)$, et finalement $f(x)=f(y)$.

R E F E R E N C E S

[1]. K.L. CHUNG. Some Universal field equations. Séminaire de Probabilités VI, p.90-97 (Lecture Notes in M.).

[2]. K.L. CHUNG et J.L. DOOB. Fields, Optionality and Measurability. Amer.J.Math., 87, 1965, p. 397-424.

[3]. C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Springer Ergebnisse 67, 1972.

[4]. C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiels. Version refondue. Hermann 1976.

[5]. Ph. COURREGE et P. PRIOURET. Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire. Publ. ISUP, 14, 1965, p.245-274.

[6]. F. KNIGHT. A predictive view of continuous time processes. A paraître aux Annals of Probability.[1]

[7]. P.A. MEYER. La théorie de la prédiction de F. Knight. Séminaire de probabilités X.

[8]. R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. Balayage and multiplicative functionals. Z.f.W. 28, 1974, p.139-164.

1. Il est paru : Vol.3 , 1975, p. 573-596 .