SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (V)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 52-72
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__52_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (V)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Dans l'exposé IV, nous avons étudié les hélices croissantes. Celui-ci est consacré essentiellement aux hélices de carré intégrable à accroissements orthogonaux, ou HAO. Les résultats sont empruntés pour la plupart à notre article [2], dont nous présentons ici une version remise à jour.

Nous avons le sentiment que le pont établi dans [2] entre la théorie des flots et la théorie des martingales doit nécessairement conduire à une meilleure compréhension de la structure des flots filtrés . D'autre part, malheureusement, nous sommes incapables d'aller loin dans cette direction. Nous le pourrons peut être un jour, ou d'autres le pourront.

1. HELICES A ACCROISSEMENTS ORTHOGONAUX

Comme d'habitude, $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ,P,(\theta_t))$ est un flot filtré par la famille de tribus $(\underline{\underline{A}}_t)$, $\underline{\underline{A}}_\infty$ est la P-complétion de $\underline{\underline{A}}^\circ$, et chaque $\underline{\underline{A}}_t$ contient tous les ensembles P-négligeables. Il nous arrivera aussi de préciser un peu les hypothèses en supposant donnée une filtration $\underline{\underline{A}}_t^\circ$ contenue dans $\underline{\underline{A}}^\circ$, telle que $\underline{\underline{A}}_\infty^\circ=\underline{\underline{A}}^\circ$, et $\underline{\underline{A}}_t$ est alors obtenue par adjonction à $\underline{\underline{A}}_t^\circ$ de tous les ensembles P-négligeables. Lorsque nous ferons cette hypothèse, nous le signalerons explicitement.

Nous appellerons <u>HAO</u> (hélice à accroissements orthogonaux) <u>grossière</u> un processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ adapté à la famille $(\underline{\underline{A}}_t)$ pour $t\geq 0$, tel que $Z_0=0$ p.s., satisfaisant à la relation $(Z_t-Z_s)\circ\theta_h = Z_{t+h} - Z_{s+h}$ p.s. quels que soient s,t,h (ensemble exceptionnel dépendant de s,t,h) , et en outre aux deux propriétés suivantes

1) $Z_t\in L^2$ pour tout t

2) si s<t , $E[Z_t-Z_s|\underline{\underline{A}}_s] = 0$ p.s.

La propriété 2) revient à dire que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Partant d'une HAO grossière, les procédés de l'exposé IV nous permettent de construire une vraie <u>HAO</u>, ou <u>HAO parfaite</u>, qui en est une modification. Rappelons rapidement ces procédés en les adaptant un peu à la situation présente

a) Soit $t>0$. Pour tout $s>0$, Z_s est la projection orthogonale de Z_t sur $L^2(\underline{\underline{A}}_s)$, donc Z_s tend dans L^2, lorsque $s\downarrow 0$, vers la projection orthogonale de Z_t sur $\underline{\underline{A}}_{0+}=\underline{\underline{A}}_0$, c'est à dire 0. On en déduit que l'hélice est continue à droite - même continue- dans L^2.

b) Pour t rationnel, choisissons Z_t^1 $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable p.s. égal à Z_t. D'après la théorie des martingales , l'ensemble P-plein

$$H = \{ \omega : Z^1_{t+}(\omega) \text{ et } Z^1_{t-}(\omega) \text{ existent et sont finis pour tout } t \}$$

est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable. Nous posons

$$Z^2_t(\omega) = Z^1_{t+}(\omega) \quad \text{pour tout } t \text{ si } \omega\in H$$
$$Z^2_t(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

Sous les hypothèses précises quant à la filtration (famille $\underline{\underline{A}}^\circ_t$) on modifiera un peu le processus Z^2_t du côté négatif seulement, de manière que pour t négatif Z^2_t soit $\underline{\underline{A}}^\circ_0$-mesurable.

c) On pose $Z^3_t = \limsup_{s\downarrow 0} \text{ess } Z^2_{t-s}\circ\theta_s$. Il existe un ensemble invariant V $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable et P-plein sur lequel le processus Z^3_t est continu à droite,($\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-mesurable pour t négatif,) satisfait identiquement à la relation des hélices . L'ensemble W des $\omega\in V$ pour lesquels $Z^3_{\cdot}(\omega)$ est pourvu de limites à gauche finies est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable et P-plein. Notre version définitive s'obtient alors en remplaçant Z^3 par 0 sur W^c.

<u>Dans le reste de ce paragraphe, le mot HAO sert à désigner des HAO grossières, continues à droite et pourvues de limites à gauche finies, $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables, satisfaisant identiquement à la relation des hélices</u>.
(sous les hypothèses précisées, nous supposerons de plus qu'il existe V invariant P-plein sur lequel Z_t , pour $t<0$, est $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-mesurable).

PROPRIETES ELEMENTAIRES DES HAO

Nous notons $\underline{\underline{H}}$ l'espace des HAO (ou plus exactement des classes de HAO indistinguables) muni de la forme bilinéaire

(1) $$(Z,Z') = E[Z_1 Z'_1]$$

<u>Nous avons le résultat simple suivant</u>

PROPOSITION 1. <u>$\underline{\underline{H}}$ est un espace de Hilbert et on a quels que soient</u> s <u>et</u> t, $s<t$

(2) $$E[(Z_t-Z_s)(Z'_t-Z'_s)] = (t-s).(Z,Z')$$

DEMONSTRATION. Cf. [2] p. 123. Pour établir (2), on commence par le cas où $t=0$, $t=2^{-n}$ par récurrence sur n, puis le cas où s et t sont de la forme $k2^{-n}$, et enfin le cas général par continuité. Le fait que $\underline{\underline{H}}$ soit complet est évident : la limite d'une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}$ est une HAO grossière, dont on prend une version parfaite.

Nous dirons que deux HAO Z et Z' sont <u>orthogonales</u> si $(Z,Z')=0$. Les sous espaces D_Z et $D_{Z'}$ de L^2 engendrés par les différences Z_b-Z_a ($a,b \in \mathbb{R}$), resp. $Z'_b-Z'_a$, sont orthogonaux. Nous dirons que Z et Z' sont <u>strictement orthogonales</u> si pour s<t on a

$$E[(Z_t-Z_s)(Z'_t-Z'_s)|\underline{\underline{A}}_s] = 0 \tag{3}$$

ce qui revient à dire que les martingales $(Z_t)_{t\geq 0}$, $(Z'_t)_{t\geq 0}$ sont orthogonales au sens des martingales : leur produit est une martingale. Pour distinguer plus clairement ces deux notions, nous parlerons de la première comme de l'orthogonalité <u>faible</u>, ou <u>ordinaire</u>.

On sait que toute martingale M de carré intégrable admet deux processus croissants associés, notés $\langle M,M\rangle$ et $[M,M]$. Occupons nous d'abord du premier :

PROPOSITION 2. <u>Si</u> Z <u>est une HAO, il existe une hélice croissante</u> $\langle Z,Z\rangle$ <u>unique telle que le processus</u> $(\langle Z,Z\rangle_t)_{t\geq 0}$ <u>soit prévisible par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\geq 0}$, <u>et que le processus</u> $(Z_t^2-\langle Z,Z\rangle_t)_{t\geq 0}$ <u>soit une martingale. Autrement dit, si</u> s<t

$$E[(Z_t-Z_s)^2|\underline{\underline{A}}_s] = E[\langle Z,Z\rangle_t-\langle Z,Z\rangle_s|\underline{\underline{A}}_s] . \tag{4}$$

DEMONSTRATION. Pour chaque s notons $\langle Z,Z\rangle_t^s$, $t\geq 0$ le processus croissant prévisible pour la famille $(\underline{\underline{A}}_{s+t})_{t\geq 0}$ associé à la martingale $(Z_{s+t}-Z_s)$. L'unicité de la décomposition des surmartingales nous dit que les processus $\langle Z,Z\rangle_t^s$ et $\langle Z,Z\rangle_t^0\circ\theta_s$ sont indistinguables, d'où la possibilité de recoller tous ces processus en une hélice croissante grossière, dont on prend enfin une version parfaite.

Pour l'autre processus $[Z,Z]$, on note deux choses : d'abord, l'ensemble des ω tels que $\sum_{s<u\leq t} \Delta Z_u^2(\omega) < \infty$ quels que soient s,t finis est un ensemble invariant P-plein. Quitte à remplacer Z par 0 sur le complémentaire, on peut supposer que ces sommes de carrés de sauts sont finies pour tout ω. D'autre part, les " parties continues" des martingales $(Z_{s+t}-Z_s)_{t\geq 0}$ se laissent recoller en une HAO continue Z^c. On pose alors, comme d'habitude

$$[Z,Z]_t = \langle Z^c,Z^c\rangle_t + \sum_{0<u\leq t} \Delta Z_u^2 \quad \text{pour } t\geq 0 \tag{5}$$

et on prolonge du côté négatif grâce à l'identité des hélices.

On définit $\langle Z,Z'\rangle$ par polarisation, pour tout couple d'HAO. Z et Z' sont strictement orthogonales si et seulement si $\langle Z,Z'\rangle=0$.

Si Z est une HAO , et $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, tel que $E[\int_{-\infty}^{+\infty} f_t^2\, d\langle Z,Z\rangle_t] < \infty$, on peut définir sans aucune difficulté l'intégrale stochastique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_t dZ_t \in L^2(\Omega)$$

dont la norme dans L^2 est $(E[\int_{-\infty}^{+\infty} f_t^2 d\langle Z,Z\rangle_t])^{1/2}$. Lorsque f ne dépend pas de ω , mais seulement de t, ces expressions se simplifient en $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$.

Il arrive fréquemment que le processus prévisible (f_t) soit de la forme $(\varphi\circ\theta_t)$, où φ est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable : dans ce cas nous noterons $\varphi.Z$ l'HAO définie du côté positif par

$$(6)\qquad (\varphi.Z)_t = \int_0^t \varphi\circ\theta_s dZ_s$$

(du côté négatif, prendre $-\int_t^0$), ou plus exactement une version parfaite du processus ainsi défini.

BASES D'HELICES

Une HAO Z est dite <u>normalisée</u> si sa norme dans $\underline{\underline{H}}$ est égale à 1, autrement dit si $E[Z_1^2]=1$. Nous appelons <u>base d'hélices</u> une famille maximale d'hélices normalisées, deux a deux orthogonales au sens ordinaire (i.e. une base orthonormale de $\underline{\underline{H}}$). Si l'on remplace dans cette définition l'orthogonalité par l'orthogonalité stricte, on obtient la notion de <u>base stricte</u> d'hélices . Si $\underline{\underline{A}}^\circ$ est séparable - hypothese que nous ferons le plus souvent dans la suite - toute base d'hélices, a fortiori toute base stricte, est au plus dénombrable. Nous verrons dans la suite qu'une base stricte peut être finie, mais qu'une base (ordinaire) d'hélices non vide est toujours infinie.

Le résultat suivant a été établi par le premier auteur de ces exposés, à partir d'une idée de O.HANNER [1]. Nous nous sommes aperçus ensuite que le résultat était une conséquence immédiate - ou plutôt une autre formulation - du théorème de STONE-Von NEUMANN de la théorie de la représentation des groupes. Nous ne ferons ici qu'en esquisser la démonstration, en renvoyant le lecteur à [2], p.117-118, pour tous détails.

THEOREME 1. <u>Soit $(Z^i)_{i\in I}$ une base d'hélices normalisée, et soit $f\in L^2(\Omega)$. Il existe une famille unique $(c^i)_{i\in I}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$</u> (qui ne sont $\neq 0$ que pour une infinité dénombrable d'indices i) <u>telle que</u>

$$(6)\qquad f = E[f\,|\,\underline{\underline{A}}_{-\infty}] + \sum_{i\in I} \int_{-\infty}^{+\infty} c^i(t)dZ^i(t)$$

la série étant convergente dans L^2. En particulier

(7) $$\|f\|_2^2 = \| E[f|\underline{\underline{A}}_{-\infty}]\|_2^2 + \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} c_i^2(t)dt$$

DEMONSTRATION. Elle se décompose en deux parties :

1) Si Z est une HAO non nulle, D_Z est le sous-espace fermé engendré par toutes les différences $Z_b - Z_a$ ($a,b \in \mathbb{R}$), alors D_Z est l'ensemble des intégrales stochastiques $g = \int_{-\infty}^{-\infty} c(t)dZ_t$, et l'application $c \to g$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur D_Z est une bijection.

Cette partie est facile, et tout à fait classique.

2) L'espace $\underline{\underline{L}} = L^2(\underline{\underline{A}})$ est somme directe orthogonale de $\underline{\underline{L}}_{-\infty} = L^2(\underline{\underline{A}}_{-\infty})$ et des espaces D_{Z^i} . C'est la partie intéressante de la démonstration.

L'espace hilbertien $\underline{\underline{L}}$ est muni de la filtration par les $\underline{\underline{L}}_t = L^2(\underline{\underline{A}}_t)$ (nous noterons E_t les projecteurs correspondants), et du groupe unitaire $T_t : f \mapsto f \circ \theta_t$, compatible avec la filtration . Sous cette forme purement hilbertienne, la situation se laisse induire sur un sous-espace de $\underline{\underline{L}}$ invariant par les T_t . Prenant pour sous-espace l'orthogonal de tous les D_{Z^i} , on est ramené au problème suivant

montrer que si toute HAO est nulle, alors $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}_{-\infty}$ (la filtration est triviale).

Introduisons le semi-groupe d'opérateurs $P_t = E_0 T_t$ ($t \geq 0$) sur $\underline{\underline{L}}_0$, prenons deux éléments f et g de $\underline{\underline{L}}_0$ et considérons pour t positif

(8) $$Z_t = T_t f - f - \int_0^t T_s g \, ds$$

qui se prolonge de manière évidente du côté négatif en une hélice au sens hilbertien du terme ($Z_{t+h} - Z_{s+h} = T_h(Z_t - Z_s)$). A quelle condition est elle nulle ? Si f appartient au domaine du générateur infinitésimal Γ du groupe (T_t), et $g = \Gamma f$. A quelle condition est elle une HAO[1]? Si f appartient au domaine du générateur infinitésimal G du semi-groupe (P_t), et $g = Gf$. La nullité de toutes les HAO exprime que ces deux conditions sont équivalentes pour $f \in \underline{\underline{L}}_0$. Un peu de calcul qu'on ne détaille pas ici, et on en déduit que $T_t(\underline{\underline{L}}_0) \subset \underline{\underline{L}}_0$ pour tout t, d'où l'égalité cherchée $\underline{\underline{L}}_0 = \underline{\underline{L}}$.

REMARQUE 1. Supposons que $\underline{\underline{L}}_{-\infty} = 0$. Alors, du point de vue hilbertien, la situation se décompose en somme directe des situations induites sur les D_{Z^i} , elles mêmes isomorphes à la situation suivante : $\underline{\underline{L}} = L^2(\mathbb{R})$, T_t est la translation par t sur $\mathbb{R}$, E_t est l'opérateur de

---

1 Au sens hilbertien : si $s<t$, $E_s(Z_t - Z_s) = 0$.

multiplication par l'indicatrice de $]-\infty,t]$. Appliquant ce résultat aux K-flots, on obtient un résultat de SINAI suivant lequel "un K-flot est à spectre de Lebesgue" - il est inutile de définir ici ce qu'est un spectre de Lebesgue, cela signifie exactement ce qu'on vient de dire quant aux D_{Z^i} , le cardinal de l'ensemble d'indices I étant appelé la multiplicité du spectre de Lebesgue. Nous démontrerons plus loin un autre résultat de SINAI, suivant lequel, pour un K-flot, I est toujours infini (plus précisément, pour un flot quelconque, I est nul ou infini).

REMARQUE 2 . Comment s'exprime toute cette théorie dans le cas discret ? Tout y est trivial. Donnons nous une base orthonormale de $L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$, $(z^i)_{i\in I}$. A chaque v.a. z^i associons une HAO discrête $(Z^i_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie du côté positif par

(9) $\quad Z^i_0=0 \quad , \; Z^i_1=z^i \; ,\ldots\ldots , \; Z^i_n = z^i+z^i\circ\theta + \ldots+z^i\circ\theta^{n-1}$

Soit $f\in L^2(\underline{\underline{A}}_\infty)$. Nous écrivons

$$f = f_{-\infty} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$$

où $f_{-\infty} = E[f\,|\,\underline{\underline{A}}_{-\infty}]$ et f_n est la projection orthogonale de f sur $L^2(\underline{\underline{A}}_n)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_{n-1})$. Ecrivons

$$f_1 = \sum_i c^i_1 z^i \qquad\qquad f_n = \sum_i c^i_n z^i\circ\theta^{n-1}$$

Nous avons alors la représentation, forme discrête de (6)

$$f = f_{-\infty} + \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c^i_n(Z^i_n - Z^i_{n-1}) \,.$$

Dans le cas discret, toute HAO est du type (9) :

$$Z_0=0 \quad , \; Z_1=h \quad , \;\ldots\; Z_n=h+h\circ\theta+\ldots+h\circ\theta^{n-1} \text{ si } n\geq 0$$
$$Z_n=-h\circ\theta^{-1}-\ldots-h\circ\theta^{-n} \text{ si } n<0$$

avec une fonction $h\in L^2(\underline{\underline{A}}_1)\ominus L^2(\underline{\underline{A}}_0)$. L'orthogonalité ordinaire de deux hélices Z et Z' s'exprime sur les fonctions h et h' correspondantes par la relation $E[hh']=0$, et l'orthogonalité stricte par la relation $E[hh'\,|\,\underline{\underline{A}}_0]=0$.

REPRESENTATIONS COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES

Nous nous plaçons ici dans la situation précisée, où l'on se donne une filtration $(\underline{\underline{A}}^\circ_t)$. Donnons nous une base stricte d'hélices $(Z^j)_{j\in J}$. Nous allons nous en servir pour représenter les autres HAO.

THEOREME 2. Soit Z une HAO. Il existe des fonctions c^j $(j\in J)$ $\underline{\underline{A}}^\circ_{0-}$-mesurables telles que l'on ait, pour $t>0$

(10) $$Z_t = \sum_j \int_0^t c^j \circ \theta_s dZ_s^j$$

DEMONSTRATION. Nous utilisons des résultats classiques de théorie des martingales, dus à KUNITA-S.WATANABE. Tout d'abord, le processus (à variation bornée) prévisible $<Z,Z^j>$ est tel, pour $t \geq 0$, que la mesure $d<Z,Z^j>_t$ soit absolument continue par rapport à $d<Z^j,Z^j>_t$. Soit $(C_t^j)_{t \geq 0}$ une version prévisible de la densité de Radon-Nikodym correspondante. Alors la série d'intégrales stochastiques

(11) pour $t \geq 0$ $$\zeta_t = \sum_j \int_0^t C_s^j dZ_s^j$$

est convergente, dans l'espace des martingales de carré intégrables de la famille $(\underline{\underline{A}}_t)_{t \geq 0}$, vers une martingale ζ telle que $Z-\zeta$ soit orthogonale à toutes les Z^j au sens des martingales.

Maintenant, nous utilisons le théorème de Radon-Nikodym pour hélices de l'exposé IV, prop. 2 : en fait, les versions (C_t^j) peuvent être prises de la forme $(c^j \circ \theta_t)$, où c^j est $\underline{\underline{A}}_{0-}^{\circ}$-mesurables [il est évident qu'un tel processus est prévisible, par classes monotones à partir des tribus $\underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^{\circ}$,$\varepsilon<0$]. Dans ce cas, la série (11) est une série de HAO (vues du côté des $t \geq 0$) et ζ est une HAO. La définition des bases strictes entraîne que $Z=\zeta$ et le théorème est établi.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $f \in L^2(\underline{\underline{A}})$. f <u>admet une représentation</u>

(12) $$f = f_{-\infty} + \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} c_s^j dZ_s^j$$

<u>où</u> $f_{-\infty} = E[f|\underline{\underline{A}}_{-\infty}]$, <u>où les processus</u> (c_s^j) <u>sont prévisibles par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{A}}_s)$, <u>et où</u>

(13) $$\|f\|_2^2 = \|f_{-\infty}\|_2^2 + \sum_j E[\int_{-\infty}^{+\infty} c_s^{j2} d<Z,Z>_s^j]$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat, qui est une conséquence facile des théorèmes 1 et 2. Noter qu'il contient implicitement un résultat d'unicité : si f=0, l'expression (13) est nulle, donc $f_{-\infty}=0$ et les c^j sont nuls " presque partout" .

2. L'ANALOGIE MARKOVIENNE

Nous avons indiqué dans [2] une construction de"prédicteurs" pour des K-flots mis sous une forme particulière. Il se trouve que cette construction s'applique à des flots beaucoup plus généraux, c'est pourquoi nous la reprenons ici - sans toutefois donner tous les détails.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que la tribu $\underline{\underline{A}}^{\circ}$ est séparable , et nous nous placerons sous les hypothèses " précisées" (famille $(\underline{\underline{A}}^{\circ}_{t})$) . Le moment venu, nous ajouterons des hypothèses du genre "espace de BLACKWELL".

LE PROBLEME DE LA PREDICTION

La prédiction au sens strict d'une v.a. $f \in L^1$ à l'instant t est a priori n'importe quelle version $E_t f$ de l'espérance conditionnelle $E[f|\underline{\underline{A}}_t]$. Nous appellerons prédicteur une version régulière (s'il en existe) de l'opérateur d'espérance conditionnelle E_0 sur $\underline{\underline{A}}^{\circ}$: pour qu'il existe, il suffit que $\underline{\underline{A}}^{\circ}$ soit raisonnablement bon du point de vue de la théorie de la mesure, la propriété de BLACKWELL étant plus que suffisante . On en déduit en principe la prédiction à l'instant t par la formule $E_t = T_t E_0 T_{-t}$, où $T_t f$ désigne comme d'habitude la v.a. $f \circ \theta_t$.

Cependant, il y a là une difficulté : si l'on considère deux prédicteurs différents E_0 et E_0' , les processus de prédiction $(E_t f)$ et $(E_t' f)$ d'une même variable aléatoire f sont des modifications l'un de l'autre, mais ne sont pas indistinguables. Le problème consiste donc à choisir des versions qui soient définies plus précisément qu'à des ensembles P-négligeables près. On pourra par exemple essayer de les définir à des ensembles P-polaires près (rappelons que A est dit P-polaire si le processus $(I_A \circ \theta_t)$ est P-indistinguable de 0).

On sait que des problèmes analogues ont été traités en théorie des processus de Markov, les versions de l'espérance conditionnelle calculées au moyen du semi-groupe étant de bonnes versions continues à droite. Nous nous laisserons alors guider par l'analogie suivante : soit F l'espace mesurable $(\Omega, \underline{\underline{A}}_0)$, et soit I_t l'application $\omega \mapsto \theta_t \omega$ de $(\Omega, \underline{\underline{A}}_t)$ dans $(\Omega, \underline{\underline{A}}_0) = F$. Si $s<t$, si h est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable, on a $E[h \circ I_t | \underline{\underline{A}}_s] = (E[h \circ \theta_{t-s} | \underline{\underline{A}}_0]) \circ \theta_s = P_{t-s} h \circ I_s$, où P_u désigne, pour tout $u \geq 0$, l'opérateur $E_0 T_u$ sur L^2. Formellement, donc, le processus $(I_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus de Markov à valeurs dans F, admettant (P_t) comme"semi-groupe de transition" . Tout notre travail dans ce paragraphe va consister à faire disparaître, dans la mesure du possible, l'adjectif "formellement" , et en même temps à bien choisir nos espérances conditionnelles.

Du point de vue des notations : nous désignerons par $E_0 f$ l'opérateur d'espérance conditionnelle (sa valeur est une classe de fonctions égales P-p.s.) et nous poserons

(14) pour $p>0$, f $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable positive, $R_p f = \int_0^{\infty} e^{-ps} f\circ\theta_s ds$

R_p peut aussi être considéré comme un opérateur borné dans L^2.

Nous noterons $\underline{\underline{C}}$ la tribu engendrée par les fonctions h, $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurables bornées, telles que $h\circ\theta_t \to h$ lorsque $t\downarrow 0$. Les fonctions $R_p f$ ($p>0$, f bornée) possèdent cette propriété, et inversement si h la possède on a $h = \lim_{p\to+\infty} pR_p h$: $\underline{\underline{C}}$ est donc aussi la tribu engendrée par les $R_p f$.

Nous reprenons rapidement les résultats de [2]. Nous dirons qu'une fonction $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable bornée f <u>possède la propriété de projection bien-mesurable</u> s'il existe une fonction $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$-mesurable $\bar{f}$ telle que le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ soit projection bien-mesurable du processus $(f\circ\theta_t)_{t\geq 0}$. On définit de même la propriété de projection prévisible , en remplaçant dans la phrase précédente $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$ par $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$, bien-mesurable par prévisible. Nous laisserons de côté ici ce qui touche à la projection prévisible [1].

THEOREME 3. <u>Toute fonction $\underline{\underline{C}}$-mesurable bornée possède la propriété de projection bien-mesurable</u> .

DEMONSTRATION. Les constantes possèdent la propriété de projection bien-mesurable. Grâce à un argument de classes monotones, il nous suffit de démontrer que les fonctions de la forme $R_{p_1}g_1\wedge\ldots R_{p_n}g_n$ la possèdent, où $p_1\ldots p_n$ sont >0, $g_1\ldots g_n$ positives et bornées. Si $p=\sup_i p_i$, cette fonction est un inf de fonctions p-excessives pour le semi-groupe $(\theta_t)_{t\geq 0}$, donc (en raison du caractère "déterministe" de ce semi-groupe) une fonction p-excessive, donc une limite croissante de fonctions $R_p g_j$, où les g_j sont positives bornées. Il suffit donc de le montrer pour des fonctions de la forme $f=R_p g$.

LEMME 1. <u>Il existe un ensemble</u> D <u>total dans</u> $L^2(\underline{\underline{A}})$, <u>tel que pour</u> $g\in D$, $p>0$ <u>le processus</u> $(R_p g\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ <u>admette une projection bien-mesurable p.s. continue à droite et pourvue de limites à gauche, de la forme</u> $(\bar{f}\circ\theta_t)_{t\geq 0}$, <u>où</u> f <u>est</u> $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$<u>-mesurable</u>.

DEMONSTRATION. Nous prendrons pour D la réunion d'un ensemble $D_{-\infty}$ total dans $L^2(\underline{\underline{A}}^{\circ}_{-\infty})$, formé de fonctions bornées, et de l'ensemble

---

1 Signalons une petite différence : si f est $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$-mesurable, le processus $(f\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ n'est pas forcément bien-mesurable. Il est toujours prévisible si f est $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$ -mesurable.

de toutes les v.a. Z_u, où Z est une HAO et u est réel. Si $g\in D_{-\infty}$, R_pg est $\underline{\underline{A}}^\circ_{-\infty}$-mesurable et on peut prendre pour f la fonction R_pg elle même. Si $g=Z_u$, $u\geqq 0$, on peut prendre $\bar{f}=0$. Reste à traiter le cas de Z_u, $u<0$.

Nous commençons par des remarques qui vont être à nouveau utiles plus loin, en montrant que le processus $(R_pg\circ\theta_t)_{t\geqq 0}$ admet bien une projection bien-mesurable si $g\in L^2$. Nous écrivons

$$R_pg \leqq \int_0^\infty e^{-ps}|g\circ\theta_s|ds$$

variable aléatoire que nous noterons G, dont la norme dans L^2 est au plus $\|g\|_2/p$, et qui satisfait à $e^{-pt}G\circ\theta_t \leqq G$. Nous avons donc

$$\text{pour } 0\leqq t\leqq A \quad R_pg\circ\theta_t \leqq e^{pA}G$$

d'où une projection bien-mesurable pour ce processus sur l'intervalle $[0,A]$, majorée par la martingale $e^{pA}E[G|\underline{\underline{A}}_t]$. En particulier, si nous savons que cette projection bien-mesurable est de la forme $(\bar{f}\circ\theta_t)$, nous avons d'après l'inégalité de DOOB

$$(15) \qquad \|\sup_{0\leqq t\leqq A}|\bar{f}\circ\theta_t|\,\|_2 \leqq 2e^{pA}\|\,G\,\|_2 \leqq 2e^{pA}\|g\|_2/p$$

Revenons au cas de Z_u, $u<0$: les résultats précédents s'appliquent, et nous avons, avec $g=Z_u$

$$R_pg = \int_0^\infty e^{-ps}(Z_{u+s}-Z_s)ds$$

Comme $E[Z_t^2]=k|t|$, les deux intégrales correspondant aux termes de la différence existent séparément, et l'on obtient pour E_0R_pg l'expression

$$\int_0^\infty e^{-ps}Z_{(u+s)\wedge 0}\,ds = \int_0^{-u} e^{-ps}Z_{u+s}ds$$

Cette fonction est partout définie et appartient à L^2, nous la noterons $\bar{f}$. Nous avons pour tout t positif $E[R_pg\circ\theta_t|\underline{\underline{A}}_t]=\bar{f}\circ\theta_t$. Le premier processus $(R_pg\circ\theta_t)$ se trouve bien majoré sur l'intervalle $[0,A]$. Que dire du second ? pour $t\in[0,A]$

$$(16) \qquad \bar{f}\circ\theta_t = \int_0^{-u} e^{-ps}Z_{u+s}\circ\theta_t\,ds = \int_0^{-u} e^{-ps}(Z_{u+t+s}-Z_t)ds$$

$$|\bar{f}\circ\theta_t| \leqq 2|u|\sup_{u\leqq r\leqq A}|Z_r|$$

variable aléatoire qui appartient à L^2. On vérifie immédiatement sur l'expression (16) que le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)$ est continu à droite et possède des limites à gauche (il n'est pas continu en général !) et on a $E[R_pg\circ\theta_T|\underline{\underline{A}}_T]=\bar{f}\circ\theta_T$ pour tout temps d'arrêt étagé T. La continuité à droite et les majorations établies plus haut permettent de passer au cas général.

Le lemme suivant conclut alors la démonstration du théorème 3.

LEMME 2. <u>L'énoncé du lemme</u> 1 <u>est vrai pour toute fonction</u> $g\in L^2(\underline{\underline{A}})$.

DEMONSTRATION. Soit $\underline{\underline{M}}$ l'espace vectoriel engendré par D, dense dans L^2. Soit $g\in L^2$, et soient g_n des éléments de $\underline{\underline{M}}$ tels que $\|g_n-g\|_2 \leq 2^{-n}$. Soient $\bar{f}_n$ les fonctions $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-mesurables correspondantes. D'après (15) nous avons

$$\| \sup_{0\leq t\leq A} |\bar{f}_n\circ\theta_t-\bar{f}_{n+1}\circ\theta_t| \|_2 \leq 4e^{pA}2^{-n}/p$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli, les processus $(\bar{f}_n\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ convergent p.s. uniformément sur tout intervalle $[0,A]$. Si l'on pose $\bar{f} = \liminf \bar{f}_n$, le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)$ est indistinguable d'un processus continu à droite et pourvu de limites à gauche, et c'est une version de la projection bien-mesurable de $(R_p g\circ\theta_t)_{t\geq 0}$.

COMPLEMENTS AU THEOREME 3

Nous indiquons ici diverses petites propriétés, qui ne méritent pas un énoncé formel.

<u>Remarque 1</u>. La tribu $\underline{\underline{C}}$ est engendrée par les $R_p g$, où g est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable bornée. Elle est donc aussi engendrée par les fonctions h $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables, telles que $t\mapsto h\circ\theta_t(\omega)$ soit continue pour tout ω, et aussi par les $R'_p g$, où g est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable et R'_p est le noyau

(17) $$R'_p f= \int_0^\infty e^{-ps} f\circ\theta_{-s} ds$$

Posons $\underline{\underline{B}}^\circ=\underline{\underline{C}}$: c'est une sous-tribu de $\underline{\underline{A}}^\circ$, séparable si $\underline{\underline{A}}^\circ$ est séparable (donc de BLACKWELL si $\underline{\underline{A}}^\circ$ est de BLACKWELL) . L'application $(t,\omega)\mapsto \theta_t\omega$ est mesurable de $\mathbb{R}\times\underline{\underline{B}}^\circ$ dans $\underline{\underline{B}}^\circ$, comme on le voit immédiatement grâce aux générateurs indiqués ci-dessus. Si f est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, la fonction $f' = \liminf_n nR'_n f$ est $\underline{\underline{B}}^\circ$-mesurable, égale p.s. à f : donc on ne perd rien quant à la structure du flot en remplaçant $\underline{\underline{A}}^\circ$ par $\underline{\underline{B}}^\circ$.

Il y a plus : soit $\underline{\underline{B}}^\circ_0$ la tribu engendrée par les $R'_p f$, f $\underline{\underline{A}}^\circ_0$-mesurable : c'est une sous-tribu de $\underline{\underline{A}}^\circ_{0-}$, séparable si $\underline{\underline{A}}^\circ_0$ est séparable, stable par les θ_t ($t<0$). On peut donc définir la famille croissante de tribus $(\underline{\underline{B}}^\circ_t)$: explicitement, $\underline{\underline{B}}^\circ_t$ est engendrée par les $R'_p f$, f $\underline{\underline{A}}^\circ_t$-mesurable. La tribu $\underline{\underline{B}}^\circ_\infty$ est égale à $\underline{\underline{B}}^\circ$. Toute v.a. $\underline{\underline{A}}^\circ_0$-mesurable est égale p.s. à une v.a. $\underline{\underline{B}}^\circ_0$-mesurable.

Tout ceci montre qu'on ne perd pratiquement aucune généralité en supposant que $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}^\circ$, et que $\underline{\underline{A}}^\circ_0$ est engendrée par des h tels que $h\circ\theta_\bullet$ soit une fonction continue.

REMARQUE 2. Soient f $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable bornée, $\bar{f}$ $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-mesurable bornée, telles que $(\bar{f}\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ soit projection bien-mesurable de $(f\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ pour la mesure P . Soit $\bar{f}'$ une seconde fonction possédant les mêmes propriétés, et soit N l'ensemble $\{\bar{f}\neq\bar{f}'\}$: d'après les propriétés d'unicité de la projection bien-mesurable, le processus $(I_N\circ\theta_t)$ pour t positif est P-indistinguable de 0 . Mais ceci vaut aussi pour toutes les mesures $\theta_n P=P$, donc le processus $(I_N\circ\theta_{t-n})_{t\geq 0}$ est P-indistinguable de 0 pour tout n. Autrement dit, N est <u>P-polaire</u>.

Travaillons maintenant par transport de structure : il existe une fonction $\underline{\underline{A}}^\circ_{-n+}$-mesurable φ , telle que le processus $(\varphi\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ soit projection bien-mesurable pour la famille $(\underline{\underline{A}}_{-n+t})_{t\geq 0}$ du processus $(f\circ\theta_{-n+t})_{t\geq 0}$. Alors $(\varphi\circ\theta_n\circ\theta_t)_{t\geq 0}$ est projection bien-mesurable (pour $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\geq 0}$) de $(f\circ\theta_t)_{t\geq 0}$. Donc $\varphi\circ\theta_n=\bar{f}$ sauf sur un ensemble polaire près, $\varphi=\bar{f}\circ\theta_{-n}$ à un ensemble polaire près, et nous avons montré :

<u>Le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est projection bien-mesurable de $(f\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$.</u>
<u>La fonction $\bar{f}$ est définie aux ensembles P-polaires près.</u>

(nous dirons aussi : <u>P-quasi-partout</u>, en abrégé P-q.p.).

CONSTRUCTION DE VRAIS NOYAUX

Nous allons faire maintenant quelques hypothèses supplémentaires. Nous supposons l'existence d'une famille $(\underline{\underline{A}}^\circ_t)$ et nous demandons
1) <u>que $\underline{\underline{A}}^\circ$ soit une tribu de BLACKWELL</u> , <u>et que $\underline{\underline{A}}^\circ$ soit égale à $\underline{\underline{C}}$</u>,
2) <u>que $\underline{\underline{A}}^\circ_0$ soit séparable</u> (donc de BLACKWELL).

De ces trois hypothèses, seule la première ($\underline{\underline{A}}^\circ$ de BLACKWELL) est essentielle[1], mais les choses sont déjà assez compliquées comme çà : nous ne chercherons pas à les affaiblir.

Nous allons nous permettre dans cette section une seule opération, consistant à enlever à Ω un ensemble invariant U, P-négligeable et $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, et à nous restreindre à l'ensemble Ω' restant. Les résultats que l'on peut obtenir par ce procédé seront groupés en deux énoncés, dont voici le premier.

THEOREME 4. <u>Si U a été convenablement choisi, il existe sur Ω' un noyau markovien E_0 appliquant $\underline{\underline{A}}^\circ$ dans $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$ et possédant les propriétés suivantes</u>

1) <u>Pour toute f bornée $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, la fonction $\bar{f}=E_0 f$ est une version de l'espérance conditionnelle $E[f|\underline{\underline{A}}_0]$, et le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une version de la projection bien-mesurable de $(f\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$</u> .

---
1 Nous supposons dans toute la suite que les atomes de $\underline{\underline{A}}^\circ$ sont les points de Ω. Cette hypothèse est anodine (passage au quotient).

2) Posons $T_t f = f \circ \Theta_t$, $E_t = T_t E_0 T_{-t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors on a identiquement $E_s E_t = E_{s \wedge t}$ pour $s,t \in \mathbb{R}$ et pour toute f $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable bornée sur Ω', le processus $(E_t f)_{t \in \mathbb{R}}$ est une version de la martingale $(E[f|\underline{\underline{A}}_t])$ dont les trajectoires sont P-p.s. c.à.d.l.à.g..

Le second énoncé contiendra les résultats proprement " markoviens" Pour l'instant, démontrons celui-ci. C'est extrêmement ennuyeux, et répète des arguments déjà donnés des dizaines de fois dans d'autres articles ennuyeux. Nous aurons besoin de deux remarques

Remarque 1 . Les T_t pour $t \geq 0$ forment un semi-groupe markovien de résolvante (R_p). Cette résolvante sépare Ω , puisque $\underline{\underline{A}}^\circ = \underline{\underline{C}}$ et que les atomes de $\underline{\underline{A}}^\circ$ sont les points de Ω. Nous pouvons donc plonger Ω dans un compactifié de RAY $\overline{\Omega}$. Rappelons brièvement en quoi cela consiste.

Soit $\underline{\underline{J}}$ un ensemble de fonctions $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables bornées. Nous notons $\underline{\underline{R}}(\underline{\underline{J}})$ le plus petit espace vectoriel $\wedge$-stable, fermé pour la convergence uniforme , stable pour la résolvante (R_p), contenant $\underline{\underline{J}}$ et les constantes ; le lemme de KNIGHT affirme que si $\underline{\underline{J}}$ est séparable pour la convergence uniforme, il en est de même de $\underline{\underline{R}}(\underline{\underline{J}})$.

Le compactifié de RAY se construit ainsi : nous prenons pour $\underline{\underline{J}}$ un ensemble de fonctions j bornées $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables, telles que pour tout ω l'application $t \mapsto j \circ \Theta_t(\omega)$ soit c.à.d.l.à.g. sur $\mathbb{R}$. Nous supposons $\underline{\underline{J}}$ séparable pour la convergence uniforme, et nous supposons que $\underline{\underline{J}}$ engendre $\underline{\underline{A}}^\circ$. C'est possible, car $\underline{\underline{A}}^\circ = \underline{\underline{C}}$ est une tribu séparable. Nous poserons alors $\underline{\underline{R}}(\underline{\underline{J}}) = \Phi$. $\overline{\Omega}$ est le compactifié de Ω relativement à Φ, et le théorème de Stone-Weierstrass entraîne que Φ est la trace de $\underline{\underline{C}}(\overline{\Omega})$ sur Ω . Les mots ouvert, compact, borélien... seront relatifs à la topologie induite par $\overline{\Omega}$ sur Ω ;"borélien"équivaut à " $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable".

Une remarque : si Ω' est un ensemble invariant $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, soit $\underline{\underline{J}}'$ l'ensemble des traces sur Ω' des fonctions de $\underline{\underline{J}}$; alors $\underline{\underline{R}}'(\underline{\underline{J}}')$ construit sur Ω' est exactement l'ensemble des traces sur Ω' des fonctions de $\underline{\underline{R}}(\underline{\underline{J}})$.

Remarque 2 . Pour toute loi μ sur Ω, le processus constitué par les variables aléatoires Θ_t $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ,\mu) \mapsto (\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ)$ pour $t \geq 0$ est un processus de Markov (déterministe) admettant $(T_t)_{t \geq 0}$ comme semi-groupe de transition, μ comme loi initiale. Ce processus est continu à droite dans la topologie précédente, fortement markovien . Son semi-groupe est borélien. On peut alors lui appliquer le théorème d'approximation des temps d'entrée dans le compactifié de RAY :

<u>Si</u> H <u>est un ensemble</u> $\underline{\underline{A}}^{\circ}$<u>-mesurable, ou même seulement</u> $\underline{\underline{A}}^{\circ}$<u>-analytique, il existe une suite décroissante</u> (G_n) <u>d'ouverts contenant</u> H, <u>telle que le " début"</u> $D_n(\omega) = \inf \{t \geq 0 : \theta_t\omega \in G_n\}$ <u>croisse</u> μ<u>-p.s. vers le début</u> D <u>de</u> H.

Le point important ici est que les v.a. D_n soient $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurables, alors que D ne l'est pas . Prenons $\mu=P$, et supposons que H soit P-<u>polaire</u> , de sorte que $D=+\infty$ P-p.s.. H est contenu dans $\{D=0\}$, contenu dans l'ensemble $V=\{\lim_n D_n<+\infty\}$ qui est P-négligeable, $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable, stable par les θ_r, $r<0$. Il est alors contenu dans l'ensemble invariant P-négligeable et $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable $U = \bigcup_n \theta_n V$. Nous avons obtenu notre procédé de construction de tels ensembles invariants, qui nous servira constamment :

LEMME 3. <u>Un ensemble</u> P-<u>polaire</u> $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-<u>analytique est contenu dans un ensemble invariant</u> P-<u>négligeable</u> (donc P-polaire) A°-<u>mesurable</u>.

<u>Première étape</u> : <u>construction du noyau</u> $E=E_0$

Nous en construisons une forme "grossière" que nous améliorerons par la suite.

A) Soit $f \in \Phi$. Nous savons qu'il existe $\bar{f}$ $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$-mesurable telle que le processus $(\bar{f}\circ\theta_t)$ soit indistinguable d'un processus c.à.d.l.à.g. projection bien-mesurable de $(f\circ\theta_t)$. L'ensemble N des ω tels que $\bar{f}\circ\theta_{\cdot}(\omega)$ ne soit pas c.à.d.l.à.g. est réunion de deux ensembles N_1 et N_2 :

a) N_1, ensemble des ω tels que $\bar{f}\circ\theta_{\cdot}(\omega)$ sur les rationnels ne soit pas prolongeable en une application c.à.d.l.à.g. sur $\mathbb{R}$. Il est connu que N_1 est $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable (utiliser les "upcrossings" sur les rationnels).

b) Si $\omega \notin N_1$, notons $F_{\cdot}(\omega)$ le prolongement en question. Alors N_2 est $\{\omega \notin N_1 , \exists t \in \mathbb{R}, F_t(\omega) \neq \bar{f}\circ\theta_t\omega\}$: celui-ci est une projection de borélien, il est analytique.

Donc N lui même est analytique polaire, il se laisse enfermer dans un invariant borélien P-négligeable, U_f .

B) Soit Φ_0 un sous-espace de Φ sur les rationnels , <u>dénombrable</u>, contenant la fonction 1, dense dans Φ . Pour $f \in \Phi_0$, soit $\bar{f}$ comme ci-dessus. Considérons les ensembles suivants

pour $f,g \in \Phi_0$: $\{\omega : \bar{f}+\bar{g} \neq \overline{f+g}\}$

pour $f \in \Phi_0$, t rationnel : $\{t\bar{f} \neq \overline{tf}\}$

pour $f,g \in \Phi_0$, $f \leq g$: $\{\bar{f} > \bar{g}\}$

et enfin l'ensemble $\{\overline{1}\neq 1\}$. Tous ces ensembles sont boréliens P-polaires, en infinité dénombrable. Nous les enfermons tous, ainsi que tous ceux de A) pour $f\in\Phi_0$, dans un unique ensemble borélien P-polaire <u>invariant</u> U_1 , et nous posons $\Omega_1=U_1^c$.

C) L'application $f\mapsto\overline{f}|_{\Omega_1}$ sur Φ_0 se prolonge par continuité à Φ . Mais Φ est l'ensemble des restrictions à Ω des éléments de $\underline{\underline{C}}(\overline{\Omega})$, et l'application apparaît alors comme un noyau markovien de Ω_1 muni de la tribu induite par $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$, dans $\overline{\Omega}$. Nous le noterons provisoirement E .

Un raisonnement de classes monotones nous donne alors : si g est borélienne bornée sur $\overline{\Omega}$ et $f = g|_\Omega$, si $\overline{f}=Eg$, alors $\overline{f}$ est $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-mesurable sur Ω_1, et le processus $(\overline{f}\circ\theta_t)$ est une projection bien-mesurable du processus $(f\circ\theta_t)$.

D) Appliquons ceci en prenant pour g l'indicatrice de Ω_1^c dans $\overline{\Omega}$: $(f\circ\theta_t)$ est indistinguable de 0, donc $(\overline{f}\circ\theta_t)$ aussi . L'ensemble borélien $N_1=\{\omega\in\Omega_1 : E(\omega, .)$ charge $\Omega_1^c\}$ est donc polaire. Nous l'enfermons dans un ensemble invariant borélien P-polaire I_1, et nous posons $\Omega_2=\Omega_1\setminus I_1$. Soit alors $N_2=\{\omega\in\Omega_1 : E(\omega,.)$ charge $\Omega_2^c\}$, P-polaire que nous enfermons dans I_2 invariant, et soit $\Omega_3=\Omega_2\setminus I_2$... Continuons indéfiniment , et posons $\Omega^\times=\bigcap\Omega_n$: c'est un ensemble invariant borélien P-plein, E est un noyau de $\Omega^\times$ dans $\Omega^\times$.

Nous changeons de notation, en écrivant Ω au lieu de $\Omega^\times$, et nous énonçons de manière plus formelle les résultats de la première étape

LEMME 4 . <u>Après réduction à un ensemble invariant P-plein borélien, on peut construire un noyau markovien</u> E <u>sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ)$ <u>tel que</u>

1) <u>Si</u> f <u>est</u> $\underline{\underline{A}}^\circ$-<u>mesurable bornée</u>, $\overline{f}=Ef$ <u>est</u> $\underline{\underline{A}}^\circ_{0+}$-<u>mesurable</u>, <u>et le processus</u> $(\overline{f}\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>est projection bien-mesurable du processus</u> $(f\circ\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

2) <u>Si</u> $f\in\Phi$, <u>la fonction</u> $t\mapsto\overline{f}\circ\theta_t\omega$ <u>est c.à.d.l.à.g. sur</u> $\mathbb{R}$ <u>pour tout</u> ω.

Nous définissons $E_t=T_tET_{-t}$. Nous écrirons indifféremment E ou E_0 . Enfin, nous poserons $P_t=E_0T_t$, $S_p=E_0R_p$.

Avant d'aller plus loin, montrons que le noyau E résout le problème de la prédiction :

PROPOSITION 3. <u>Pour toute</u> $f\in L^1$, <u>le processus</u> $(E_tf)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>est une version p.s. continue à droite de la martingale</u> $(E[f|\underline{\underline{A}}_t])$.

DEMONSTRATION. Par encadrement on se ramène au cas où f est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, puis par des arguments standard de théorie des martingales au cas d'un ensemble total dans L^1, pour lequel nous prendrons les fonctions de la forme R_pg , $p>0$, $g\in\Phi$. Soit $f_s = T_{-s}R_pg$, et soit $\bar{f}_s=E_0f_s$. Pour tout s rationnel, soit N_s un ensemble polaire hors duquel le processus $(\bar{f}_s\circ\theta_t)$ soit continu à droite, et soit N la réunion des N_s : par convergence uniforme, on voit que tous les processus $(\bar{f}_s\circ\theta_t)$ sont continus à droite hors de N.

Soit $\omega\notin N$. Nous avons pour $t\downarrow t_0$

$$E_tf(\omega)-E_{t_0}f(\omega) =(T_tET_{-t}f(\omega)-T_tET_{-t_0}f(\omega)) + (T_tET_{-t_0}f(\omega)-T_{t_0}ET_{-t_0}f(\omega))$$

Comme f est de la forme R_pg, g bornée, $T_{-t}f$ converge uniformément vers $T_{-t_0}f$, et le premier terme converge donc uniformément vers 0 sur Ω . Le second s'écrit $\bar{f}_{-t}(\theta_t\omega)-\bar{f}_{-t}(\theta_{t_0}\omega)$, et il tend vers 0 en vertu de la propriété établie plus haut et du fait que $\omega\notin N$.

Remarque . L'espace Φ peut être choisi avec un certain arbitraire. On peut s'en servir pour établir la propriété suivante, qui est plus une curiosité qu'autre chose :

Dans l'énoncé du lemme 4, on peut supposer de plus que Φ est stable par E (donc par les $ER_p=S_p$)

DEMONSTRATION. Partons de la situation du lemme 4, et posons

$$A_1= E(\Phi) = \{Ef,\ f\in\Phi\}$$

$$B_1= \underline{\underline{R}}(A_1\cup\Phi)$$

Rappelons que $\underline{\underline{R}}$ est une opération de stabilisation pour les inf, la résolvante (R_p), etc. Maintenant, définissons par récurrence

$$A_{n+1} = E(B_n) \quad , \quad B_{n+1}= \underline{\underline{R}}(B_n\cup A_{n+1})$$

Les B_n croissent, soit B leur réunion : c'est un espace vectoriel $\wedge$-stable de fonctions $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables, stable par E et par les R_p, contenant Φ et séparable pour la convergence uniforme. Le nouvel espace Φ' sera la fermeture de B.

Soit Ω_1 un ensemble invariant P-plein , tel que pour $\omega\in\Omega_1$, $f\in\Phi'$ la fonction $Ef\circ\theta_.(\omega)$ soit c.à.d.l.à.g.. Puis soit Ω_2 un ensemble invariant P-plein contenu dans Ω_1 tel que pour $\omega\in\Omega_2$ $E(\omega,.)$ soit portée par Ω_2 , comme dans la partie D) plus haut.On change alors de notation, en appelant Ω_2 Ω, et Φ', Φ .

Seconde étape : vérification des identités.

LEMME 5. Quitte à restreindre une nouvelle fois Ω à un ensemble invariant $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable P-plein, on peut supposer les propriétés suivantes :

a) L'équation résolvante $S_p-S_q=(q-p)S_pS_q$ a lieu identiquement

b) On a identiquement $E_0E_t=E_0=E_tE_0$ pour $t\geq 0$.

c) Si f et g sont $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurables positives, on a $E_0(f.E_0g)=E_0f.E_0g$.

d) Si f est $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurable on a $E_0f=f$.

DEMONSTRATION. Nous prenons f,g dans Φ , et nous vérifions les propriétés suivantes, hors d'ensembles polaires.

a) Pour tout couple (p,q), la fonction $d_{p,q} = S_pf-S_qf-(q-p)S_pS_qf$ est nulle P-p.s. : pour cela, on écrit que pour tout $t \geq 0$ on a $E_0T_tE_0f=E_0T_tf$ P-p.s. (cela résulte de la relation $E_0E_t=E_0$ aux ens. de mesure nulle près : transitivité des espérances conditionnelles). On en déduit en intégrant $E_0R_pE_0f=E_0R_pf$ P-p.s., et en remplaçant f par R_qf $S_pS_qf=E_0R_pR_qf$, donc $(q-p)S_pS_qf= E_0(R_pf-R_qf)=S_pf-S_qf$.

Mais le processus $(d_{p,q}\circ\theta_t)$ est indistinguable d'un processus continu à droite : ce processus étant p.s. nul pour chaque t fixé est évanescent, et $d_{p,q}$ est nulle hors d'un ensemble polaire.

b) Soit $R'_qf = \int_0^{\infty} e^{-qt}f\circ\theta_{-t}dt$; le processus $(R'_qf\circ\theta_t)$ est indistinguable d'un processus continu, donc le processus $(E_0R'_qf\circ\theta_t)$ qui en est la projection bien-mesurable est indistinguable d'un processus c.à.d.l.à.g.. De même, le processus $(R'_qE_0f\circ\theta_t)$ est indistinguable d'un processus continu. D'autre part, ces deux processus sont p.s. égaux pour chaque t fixé : par homogénéité, il suffit de le voir pour t=0, et cela revient à $E_0R'_qf = R'_qE_0f$ P-p.s., qui s'obtient par intégration à partir de la relation $E_0T_{-t}=T_{-t}E_0$ si $t\geq 0$ P-p.s. (transitivité des espérances conditionnelles). Finalement, on en déduit que $R'_qE_0f=E_0R'_qf$ hors d'un ensemble P-polaire.

c) Soit $\overline{g}=E_0g$; le processus $(\overline{g}\circ\theta_t)$ est bien-mesurable, donc la projection bien-mesurable du processus $(f\circ\theta_t.\overline{g}\circ\theta_t)$est le processus $(\overline{f}\overline{g}\circ\theta_t)$, où $\overline{f}=E_0f$. Autrement dit, $E_0(f.E_0g)=E_0f.E_0g$ P-quasi-partout.

Enfin, nous remarquons que si h est $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurable, le processus $(h\circ\theta_t)$ est prévisible, donc bien-mesurable, donc $h=E_0h$ P-q.p..

Maintenant, faisons parcourir à f,g un ensemble dénombrable Φ_0 dense dans Φ , à p et q l'ensemble des rationnels positifs, enfermons tous les ensembles P-polaires ci-dessus dans un ensemble invariant $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable P-négligeable indépendant de f,g. De même, $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$ étant supposée séparable (c'est le seul point où cette propriété , conséquence de la séparabilité de $\underline{\underline{A}}_0^\circ$, sera utilisée), nous pouvons faire parcourir à h un ensemble dénombrable de fonctions engendrant $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$ par classes monotones, et enfermer aussi dans l'ensemble invariant tous les ensembles $\{h\neq E_0h\}$. Et maintenant, nous jetons cet ensemble invariant comme dans la démonstration de la partie D) de la première étape. Ceci fait sans changer de notations, nous avons obtenu les propriétés

a) $S_p-S_q = (q-p)S_pS_q$ pour p et q rationnels positifs, donc pour p et q réels >0 , identiquement sur Ω .

b) $R'_qE_0=E_0R'_q$ pour q rationnel positif, donc pour q réel >0, partout.

c) $E_0(f.E_0g)=E_0f.E_0g$ quelles que soient f,g $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables ≥ 0

d) $E_0f=f$ quelle que soit f $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$-mesurable ≥ 0

Il ne nous reste à vérifier, dans l'énoncé, que la propriété b).

L'identité $E_0E_t=E_0$ s'écrit $E_0T_tE_0T_{-t} = E_0$, ou $E_0T_tE_0=E_0T_t$. De même, l'identité $E_tE_0=E_0$ s'écrit $T_tE_0T_{-t}E_0=E_0$, ou $E_0T_{-t}E_0=T_{-t}E_0$. Comme il s'agit d'identités entre noyaux, nous pouvons nous borner à les vérifier sur des fonctions de ♀ , ou même sur des fonctions de la forme $g=R_pf$, $f\in$ ♀ . Mais alors l'application $t\mapsto T_tE_0g$ est continue à droite (lemme 4, 2)), donc l'application $t\mapsto E_0T_tE_0g$ est continue à droite par convergence dominée. L'application $t\mapsto T_tg$ est continue, et $t\mapsto E_0T_tg$ continue par convergence dominée. De même, $t\mapsto E_0T_{-t}E_0g$ est continue à gauche, et $t\mapsto T_{-t}E_0g$ continue à gauche par le lemme 4, 2). Pour vérifier les égalités, on peut donc passer aux transformées de Laplace. Mais alors tout cela s'écrit

$$E_0R_qE_0g = E_0R_qg$$

et

$$E_0R'_qE_0g = R'_qE_0g$$

Pour la première relation, nous utilisons le fait que $g=R_pf$, et la relation à vérifier s'écrit $S_qS_pf=E_0R_qR_pf$. Multiplions par q-p (il suffit de vérifier l'égalité pour $q\neq p$!), il vient à vérifier que $S_p-S_q = E_0(R_p-R_q)$, ce qui est évident.

La première relation entraîne en particulier que $E_0E_0=E_0$. La seconde relation s'écrit , E_0 et R'_q commutant, $R'_qE_0E_0=R'_qE_0$, qui est vraie. Le lemme est établi.

REMARQUE. La tribu séparable $\underline{\underline{A}}_0^\circ$ satisfait parfois à la propriété suivante : si f est $\underline{\underline{A}}_0^\circ$-mesurable, alors le processus $(f\circ\theta_t)$ est bien-mesurable. Dans ce cas les propriétés c) et d), établies pour $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$, peuvent s'étendre à $\underline{\underline{A}}_0^\circ$.

LE CARACTERE MARKOVIEN

Nous avons complètement établi le théorème 4, et même un peu plus, notre espace Ω jouissant maintenant de quelques conforts supplémentaires énoncés dans les lemmes 4 et 5. Nous allons maintenant modifier très légèrement la filtration et faire quelques remarques, avant d'énoncer le théorème 5 qui exprime le caractère markovien du flot.

DEFINITION. On note $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$ la tribu engendrée par les v.a. E_0f, où f est $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable bornée, et $\underline{\underline{A}}_t^{\times}$ la tribu $\Theta_t^{-1}(\underline{\underline{A}}_0^{\times})$.

La tribu $\underline{\underline{A}}^{\circ}$ étant séparable, $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$ est séparable (donc de BLACKWELL). On a $\underline{\underline{A}}_0^{\times} \subset \underline{\underline{A}}_{0+}^{\circ}$, puisque E_0 est un noyau de $\underline{\underline{A}}_{0+}^{\circ}$ dans $\underline{\underline{A}}^{\circ}$, et $\underline{\underline{A}}_0^{\times} \supset \underline{\underline{A}}_{0-}^{\circ}$ puisque E_0 est l'identité sur $\underline{\underline{A}}_{0-}^{\circ}$ (lemme 5, d)). On en déduit que la famille $(\underline{\underline{A}}_t^{\times})$ est croissante, engendre $\underline{\underline{A}}^{\circ}$, admet les mêmes familles complétées $\underline{\underline{A}}_t$ que la famille $(\underline{\underline{A}}_t^{\circ})$: elle est donc aussi bonne pour filtrer le flot que la famille initiale.

Si f est $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable, le processus $(f\circ\Theta_t)$ est bien-mesurable. Utilisons la remarque suivant le lemme 5 : quitte à agrandir un peu l'ensemble invariant que nous jetons, nous pouvons supposer que E_0 est l'identité sur $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$. Enonçons cela pour des références ultérieures :

LEMME 6. Quitte à réduire un peu plus Ω, on peut supposer que

a) Si f est $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable bornée, $E_0f=f$. Inversement si f est $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable bornée et $E_0f=f$, f est $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable.

b) Si f est $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable bornée, g $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable bornée, on a $E_0[fg] = f.E_0g$.

DEMONSTRATION . Tout est évident.

COROLLAIRE. Soient f $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable bornée, g $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable bornée, et $\bar{g}=E_0g$. Alors $E_0[T_tf.T_tg]=E_0[T_tf.T_t\bar{g}]$.

DEMONSTRATION. Comme $E_0=E_0E_t$ il suffit de vérifier que $E_t[T_tf.T_tg]= E_t[T_tf.T_t\bar{g}]$. Mais Cela s'écrit aussi $E_tT_t[fg]=E_tT_t[f\bar{g}]$, et $E_tT_t= T_tE_0$, de sorte que l'identité se réduit à $E_0[fg]= fE_0[g]=f\bar{g} =E_0[f\bar{g}]$.

THEOREME 5. Soit $(\tilde{F},\tilde{\underline{\underline{F}}})$ l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{A}}_0^{\times})$, et soit I_t l'application mesurable Θ_t de $(\Omega,\underline{\underline{A}}^{\circ})$ dans $(\tilde{F},\tilde{\underline{\underline{F}}})$: le processus $(I_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{A}}_t^{\times})$.

a) Les deux familles de noyaux sur $(\tilde{F},\tilde{\underline{\underline{F}}})$

(18) $\qquad P_t=E_0T_t \quad , \quad P_t^!=T_{-t}E_0 \quad (t\geq 0)$

sont deux semi-groupes markoviens, admettant tous deux P comme loi invariante, en dualité par rapport à P.[1]

---

1 Mais il manque l'hypothèse usuelle de continuité absolue p.r.à P!

b) <u>Pour tout</u> ω, <u>soit</u> P^{ω} <u>la mesure</u> $E_0(\omega,.)$ <u>sur</u> Ω . <u>Alors le processus</u> $(I_t)_{t\geq 0}$ <u>est pour</u> P^{ω} <u>un processus fortement markovien admettant</u> (P_t) <u>comme semi-groupe de transition</u>.

DEMONSTRATION. Les choses se comprennent mieux si l'on passe au quotient suivant la relation d'équivalence dont les classes sont les atomes de $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$: notons F l'ensemble quotient, $\underline{\underline{F}}$ la tribu quotient. $(F,\underline{\underline{F}})$ est un espace de BLACKWELL.
Soit $\Phi^{\times}$ l'ensemble des fonctions $E_0 f$, $f\in\Phi$: c'est une <u>algèbre</u> de fonctions bornées, qui contient les constantes. Ces fonctions étant $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurables, nous pouvons aussi passer au quotient suivant la relation d'équivalence précédente, et considérer $\Phi^{\times}$ comme un ensemble de fonctions sur F . $\Phi^{\times}$ étant évidemment séparable pour la convergence uniforme, nous pouvons compactifier F par rapport à $\Phi^{\times}$, ce qui nous donne un compact métrisable $\overline{F}$; d'après le théorème de Weierstrass-Stone, $\Phi^{\times}$ est <u>dense</u> dans $\underline{C}(\overline{F})|_F$. Nous munirons F de la topologie induite par $\overline{F}$. Nous noterons aussi (X_t) le processus à valeurs dans F déduit de (I_t) à valeurs dans $\overline{F}$ par passage au quotient.

Nous remarquons alors (lemme 4, 2) que le processus (X_t) est continu à droite dans F et admet des limites à gauche dans $\overline{F}$.

Nous ne vérifierons pas les propriétés a), qui sont des conséquences immédiates des identités $T_t E_0 = E_t T_t$, $E_0 E_t = E_t E_0 = E_{t\wedge 0}$.

Pour vérifier la propriété b), il nous faut d'abord examiner si l'on a, pour tout $t\geq 0$, tout $s\geq 0$, toute h $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable positive , toute g $\underline{\underline{A}}_t^{\times}$-mesurable positive, tout $\omega\in\Omega$

(19) $\qquad E^{\omega}[\, g.h\circ I_{s+t}] = E^{\omega}[\, g.P_s(I_t,h)]$ (propriété de Markov)

Soit $k=h\circ I_s$; alors $P_s h = E_0 T_s h = E_0 k$, et $P_s(I_t,h)= T_t E_0 k$. D'autre part, g s'écrit $f\circ\theta_t$, où f est $\underline{\underline{A}}_0^{\times}$-mesurable. La formule (19) s'écrit donc

(20) $\qquad E(T_t f.T_t k) = E(T_t f.T_t \overline{k})$, où $\overline{k} = E_0 k$

et on reconnaît le corollaire suivant le lemme 6. Reste à vérifier la propriété de Markov forte. Celle ci se ramène de manière classique à la propriété suivante : la résolvante (S_p) transforme " suffisamment " de fonctions boréliennes bornées en fonctions continues à droite sur les trajectoires des processus. Ici il nous suffira de démontrer que si $h\in\Phi^{\times}$, le processus $(S_p h\circ I_t)$ est continu à droite. Or $h=E_0 f$, $f\in\Phi$, et $S_p h= E_0 R_p E_0 f = E_0 R_p f$ (on rappelle l'identité $E_0 T_t E_0 = E_0 T_t$ pour $t\geq 0$) . Mais on peut poser $R_p f = g\in\Phi$, et alors la propriété cherchée résulte du lemme 4, 2).

REMARQUE. Nous avons vu (remarque suivant la prop.3) que l'on peut supposer, si on le désire, que Φ est stable par E_0 , donc par les

S_p. Cela rend diverses choses plus jolies. Par exemple, Φ^X est alors exactement l'ensemble des éléments $\underline{\underline{A}}_0^X$-mesurables de Φ ; il est donc fermé pour la convergence uniforme, et identique à $\underline{\underline{C}}(\overline{F})|_F$. D'autre part, Φ^X est stable par les S_p, de sorte que la résolvante (S_p) nous apparaît comme une résolvante de RAY.

Nous reprendrons l'étude des HAO dans l'exposé suivant

BIBLIOGRAPHIE

[1]. O.HANNER. Deterministic and non-deterministic processes. Ark. Math. 1, 161-177 (1950).

[2]. J. de Sam LAZARO et P.A.MEYER. Méthodes de martingales et théorie des flots. Z.W-theorie 18, 116-140 (1971).

Les résultats sur la construction de vrais noyaux sont rédigés ici pour la première fois, mais ils ne sont pas vraiment originaux : ce sont des variations sur les thèmes de

[3]. J.B.WALSH et P.A.MEYER. Quelques applications des résolvantes de RAY. Invent.Math. 14, 143-166 (1971)

[4]. P.A.MEYER. Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH. Séminaire de Prob. Strasbourg. Lecture Notes in M. vol. 191, Springer 1971.

L'article [1] de HANNER concernait les processus faiblement stationnaires en temps discret. L'extension des méthodes de HANNER au cas continu, c'est à dire le "théorème de Stone-Von Neumann" du paragraphe 1, a été faite bien avant nous dans deux articles de KALLIANPUR et MANDREKAR :

[5]. Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic stochastic processes. Teor. Veroiatn. 10, 1965 (p.553-580 de la traduction anglaise).

[6]. Semi-groups of isometries and the representation and multiplicity of weakly stationary stochastic processes. Arkiv för Mat. 6, 1965, p.319-335.

Nous regrettons de ne pas avoir cité ces articles dans la bibliographie de notre travail (exposé IV, [4]) de 1971. Le langage de KALLIANPUR-MANDREKAR nous a empêchés de voir alors que leur extension couvrait le cas des flots filtrés (et les a d'ailleurs empêchés eux mêmes de s'en apercevoir).