CLAUDE DELLACHERIE

Correction : « Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener ou de Poisson »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 494
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__494_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1973/74

CORRECTION A " Intégrales stochastiques par rapport ..."

par C. Dellacherie

J. Zábczyk m'a signalé que la démonstration parue dans l'exposé "Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson" du volume VIII était trop courte pour être honnête. On y démontre en effet que toute martingale <u>bornée</u> orthogonale au processus de Wiener (ou de Poisson compensé) est nulle et on en déduit un peu rapidement qu'il en est de même pour toute L^2-martingale : ce n'est pas parce que les martingales bornées sont denses que l'on peut affirmer cela .

J'apporte ici les corrections nécessaires pour le processus de Wiener; je laisse au lecteur le soin de trouver celles pour le processus de Poisson.

D'abord, il est facile de voir que toute martingale(sous-entendu de carré intégrable et nulle à l'origine) <u>continue</u> orthogonale au processus de Wiener (B_t) est nulle : en effet, par arrêt à l'instant où la valeur absolue de la martingale dépasse le niveau n, on se ramène au cas d'une martingale bornée. Il ne nous reste plus alors qu'à démontrer que toute martingale (par rapport à la famille de tribu naturelle $(\underline{\underline{B}}_t)$ de (B_t)) est continue. Cela résulte aussitôt du fait que (B_t) est un processus de Hunt à trajectoires continues. Mais on peut en donner une démonstration élémentaire à l'aide de la théorie de l'orthogonalité. En effet, tout revient à démontrer que tout temps d'arrêt de $(\underline{\underline{B}}_t)$ est prévisible.

- supposons qu'il existe un t.d'a. totalement inaccessible T tel que $P\{T<\infty\}>0$. Soient $A_t = 1_{\{T\leq t\}}$ et $\hat{A}_t$ le processus croissant prévisible engendrant le même potantiel : comme T est totalement inaccessible, $(\hat{A}_t)$ est continu, et $(A_t-\hat{A}_t)$ est une martingale compensée de saut, n'ayant qu'un seul saut égal à 1 à l'instant T, là où T est fini. Comme compensée de saut, $(A_t-\hat{A}_t)$ est orthogonale à (B_t), et, par arrêt à un temps constant suffisamment grand, on obtient une martingale bornée non nulle orthogonale à (B_t), ce qui est impossible.
- supposons que la famille $(\underline{\underline{B}}_t)$ ait un temps de discontinuité. Il existe alors un temps d'arrêt prévisible T tel que la tribu $\underline{\underline{B}}_T$ ne soit pas égale à $\underline{\underline{B}}_{T-}$ (cf Capacités et processus stochastiques III.T51). Soit alors Z une v.a. bornée $\underline{\underline{B}}_T$-mesurable, mais non $\underline{\underline{B}}_{T-}$-mesurable : $M_t = (Z-E[Z|\underline{\underline{B}}_{T-}]).1_{\{T\leq t\}}$ est alors une martingale bornée non nulle, compensée de saut et donc orthogonale à (B_t). D'où une contradiction.