JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (IV)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 38-51
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__38_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (IV)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Nous consacrons cet exposé à l'étude des hélices croissantes d'un flot. Nous reprenons des résultats contenus dans notre article [4], et dont il existe maintenant de bien meilleures démonstrations, et des résultats sur les mesures de PALM des hélices croissantes, empruntés à un article non publié de HOROWITZ et GEMAN, à qui nous devons beaucoup. L'histoire de ces résultats appelle des commentaires que l'on trouvera au début du § 2, et avec la bibliographie.

1. PERFECTION DES HELICES

Nous considérons un flot $(\Omega,\underline{\underline{A}}^{\circ},P,(\theta_t))$ satisfaisant à nos conditions générales (en particulier, à la mesurabilité de $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$). Nous notons $\underline{\underline{A}}$ la P-complétion de $\underline{\underline{A}}^{\circ}$, et nous supposons le flot filtré par une famille $(\underline{\underline{A}}_t)$ telle que $\underline{\underline{A}}_{\infty}=\underline{\underline{A}}$, et que $\underline{\underline{A}}_{-\infty}$ contienne tous les ensembles P-négligeables.

Notre premier travail va consister à donner une <u>meilleure version</u> d'une " hélice grossière" , c'est à dire d'un processus (Z_t) à trajectoires continues à droite, tel que $Z_0=0$, satisfaisant aux deux hypothèses

(1) quels que soient s,t,h on a $(Z_t-Z_s)\circ\theta_h = Z_{t+h}-Z_{s+h}$ P-p.s.

[l'ensemble de mesure nulle peut dépendre de s,t,h]

(2) pour tout $t\geq 0$, Z_t est $\underline{\underline{A}}_t$-mesurable.

Nous commençons par choisir, pour t rationnel, une v.a. Z_t' $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable, p.s. égale à Z_t . Soit L l'ensemble des ω tels que $Z_t(\omega)=Z_t'(\omega)$ pour tout t rationnel : L est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et de mesure 1, donc il contient M $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable et de mesure 1. Le processus (Z_tI_M) est indistinguable de (Z_t), continu à droite, et il possède la propriété supplémentaire que <u>toutes ses v.a. sont $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurables</u> . Pour abréger les notations, c'est lui que nous désignerons désormais par (Z_t).

Nous laissons au lecteur le petit lemme suivant, qui tient à la mesurabilité du flot sur $\underline{\underline{A}}^{\circ}$:

LEMME 1. <u>Pour tout</u> t, <u>l'application</u> $(s,\omega)\mapsto Z_{t-s}(\theta_s\omega)$ <u>est</u> $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^{\circ}$-<u>mesurable</u>.

Nous utilisons maintenant les <u>limites essentielles droites</u> introduites par WALSH dans la question voisine des fonctionnelles additives. Nous renvoyons à l'article [8] de WALSH pour la définition.

Nous posons pour tout t

(3) $\qquad \overline{Z}_t(\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow 0} \text{ess}\ Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$

remplaçant t par t-u, ω par $\Theta_u\omega$, nous avons

(4) $\qquad \overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u} \text{ess}\ Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$

Mais ceci est une opération de régularisation scs pour la topologie essentielle droite, et on a donc aussi

(5) $\qquad \overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u} \text{ess}\ \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega)$

Soit U_t l'ensemble des ω tels que pour presque tout $s\in\mathbb{R}$ on ait

(6) $\qquad Z_t(\omega) = Z_s(\omega)+Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$

D'après le théorème de Fubini, U_t est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, et la propriété (1) entraîne que $P(U_t)=1$. Soit U l'intersection des U_t pour t rationnel : on a encore $P(U)=1$, et par continuité à droite

(7) si $\omega\in U$, on a pour tout t et tout $s\in N^c$ $Z_t(\omega)=Z_s(\omega)+Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$,
où N est négligeable au sens de Lebesgue.

Soit enfin V l'ensemble des ω tels que $\Theta_r\omega\in U$ pour presque tout r. Comme U est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, V est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable ; V est invariant et $P(V)=1$.

Supposons que $\omega\in U$ et appliquons (7), en prenant une limite essentielle droite en s . Il vient

(8) $\omega\in U$: $Z_t(\omega) = Z_s(\omega) + \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega)$ pour tout t et tout s

Prenons maintenant $\omega\in V$, choisissons r tel que $\Theta_r\omega\in U$, et appliquons (8) en remplaçant ω par $\Theta_r\omega$, t par t-r, s par u-r :

$$Z_{t-r}(\Theta_r\omega) = Z_{u-r}(\Theta_r\omega) + \overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega)$$

Cela entraîne d'abord que $\overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega)$ est fini. Prenons ensuite une limite sup essentielle pour $r\downarrow\downarrow 0$, il vient d'après (5)

(9) $\omega\in V$: $\overline{Z}_t(\omega) = \overline{Z}_u(\omega)+\overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega)$ identiquement .

Noter que $\overline{Z}_t$ est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable pour tout t. D'autre part, faisons tendre s vers 0 dans (8) et utilisons (5). Il vient que

(10) si $\omega\in U$, $Z_t(\omega)=\overline{Z}_t(\omega)$ identiquement

Les processus Z et $\overline{Z}$ sont donc indistinguables, donc $\overline{Z}_t$ est $\underline{\underline{A}}_t$-mesurable pour $t\geqq 0$.

Soit $\omega\in V$. Choisissons u tel que $\Theta_u\omega\in U$ et posons $\Theta_u\omega=w$. Nous avons $\overline{Z}_t(w) = \overline{Z}_{-u}(w)+\overline{Z}_{t+u}(\Theta_{-u}w) = \overline{Z}_{-u}(w)+\overline{Z}_{t+u}(\omega)$, ou encore $\overline{Z}_{t+u}(\omega) =$

$Z_t(w)-Z_{-u}(\omega)$. En faisant varier t on voit que $\overline{Z}_{\bullet}(\omega)$ est finie et continue à droite.
Hors de V nous ne savons pas ce qui se passe : nous y remplacerons $\overline{Z}_t$ par 0 (ou par t). La continuité à droite et l'additivité ont lieu partout après ce remplacement. Nous avons établi

THEOREME 1. Si (Z_t) est une hélice grossière satisfaisant à (1) et (2), il existe un processus indistinguable $(\overline{Z}_t)$ continu à droite, nul pour t=0, tel que pour tout t $\overline{Z}_t$ soit $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable (donc aussi $\underline{\underline{A}}^{\circ}\cap\underline{\underline{A}}_t$-mesurable pour $t\geq 0$), et satisfaisant identiquement à la relation des hélices $(\overline{Z}_t-\overline{Z}_s)\circ\theta_h = \overline{Z}_{t+h}-\overline{Z}_{s+h}$.

C'est le théorème de perfection des hélices : nous l'avions établi dans [4] par une bien moins bonne méthode.

COMPLEMENTS

Nous supposons maintenant que notre hélice (Z_t) initiale était croissante, et nous allons construire des versions un peu meilleures de $\overline{Z}_t$.

Rappelons que la construction de $\overline{Z}_t$ a été faite sur une version intermédiaire de l'hélice, que nous avions notée Z_t^2 (l'indice ^{2} ayant simplement été omis dans la construction). Nous modifions maintenant Z_t^2 pour t négatif de la manière suivante : pour tout t rationnel négatif, soit ζ_t une v.a. $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurable, égale p.s. à Z_t. Puis soit pour t réel négatif $Z_t^3 = \inf \zeta_s$, s rationnel négatif >t. La fonction $Z_{\bullet}^3$ est croissante et continue à droite, mais non nécessairement finie : nous la remplaçons par 0 sur l'ensemble où elle prend la valeur $-\infty$, et nous gardons du côté positif la valeur Z_t^2 précédemment obtenue. Enfin, nous définissons $\overline{Z}_t = \limsup_{s\downarrow\downarrow 0} \text{ess}\; Z_{t-s}^3\circ\theta_s$ comme plus haut. Il est clair que $\overline{Z}_t$ est croissante du côté négatif. Sur l'ensemble invariant V, d'autre part, elle satisfait à l'identité des hélices, et elle est donc croissante sur tout $\mathbb{R}$. Sur V^c, nous l'avions remplacée par t, et il n'y a aucun problème quant à la croissance.

Cette construction un peu étrange a un autre intérêt, plus considérable. Il arrive fréquemment que la filtration s'obtienne ainsi : il existe une famille $(\underline{\underline{A}}_t^{\circ})$ filtrant le flot, contenue dans $\underline{\underline{A}}^{\circ}$, telle que $\underline{\underline{A}}_{\infty}^{\circ} = \underline{\underline{A}}^{\circ}$, et que $\underline{\underline{A}}_t$ s'obtienne en adjoignant à $\underline{\underline{A}}_t^{\circ}$ tous les ensembles P-négligeables. Dans ce cas, on peut prendre les v.a. ζ_t , pour t négatif, $\underline{\underline{A}}_0^{\circ}$-mesurables, et les Z_t^3 , pour t négatif, le seront aussi. Alors $\overline{Z}_t$ sera $\underline{\underline{A}}_{\varepsilon}^{\circ}$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$, donc $\underline{\underline{A}}_{0+}^{\circ}$-mesurable. Sur V, l'identité des hélices entraînera que pour t positif, $\overline{Z}_t$ est

$\underline{\underline{A}}^{\circ}_{t+}$ -mesurable, et non seulement $\underline{\underline{A}}^{\circ} \cap \underline{\underline{A}}_t$-mesurable. Cela nous servira plus tard.

D'autres petites remarques : si l'hélice grossière de départ (Z_t) était continue, l'ensemble W des ω tels que $\overline{Z}_{\bullet}(\omega)$ soit continue est invariant et porte P ; en remplaçant $\overline{Z}_t$ par t sur W^c, on réalise la continuité de $(\overline{Z}_t)$ partout. De même pour d'autres propriétés analogues. On sait aussi[1] que $\overline{Z}_t \rightarrow \pm\infty$ p.s. sur l'ensemble où $\overline{Z}_{\bullet}$ n'est pas identiquement nulle, lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. L'ensemble des ω pour lesquels $\overline{Z}_{\bullet}(\omega)$ n'est pas identiquement nulle, mais $\overline{Z}_{\bullet}(\omega) \not\rightarrow \pm\infty$, est un ensemble invariant de mesure nulle, sur lequel on peut remplacer $\overline{Z}_t$ par t de manière à faire disparaître entièrement ces vices de l'hélice $(\overline{Z}_t)$.

En vue de références ultérieures, on résume les petits résultats complémentaires obtenus :

PROPOSITION 1 . Supposons que $(\underline{\underline{A}}^{\circ}_t)$ soit une famille filtrante, avec $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{\infty} = \underline{\underline{A}}^{\circ}$, et que $\underline{\underline{A}}_t = \underline{\underline{A}}^{\circ}_t$ aux ensembles P-négligeables près. Alors il existe une hélice parfaite $(\overline{Z}_t)$ indistinguable de (Z_t), croissante, continue si (Z_t) est continue, possédant les propriétés suivantes

1) $\overline{Z}_{\pm\infty} = \pm\infty$ ou $\overline{Z}_{\bullet} \equiv 0$.

2) Il existe un ensemble invariant $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mes. P-plein V tel que, sur V, le processus $(\overline{Z}_t)_{t\geq 0}$ soit adapté à la famille $(\underline{\underline{A}}^{\circ}_{t+}|_V)$.

2. MESURE DE PALM D'UNE HELICE CROISSANTE

Les résultats de ce paragraphe sont dus en grande partie à MECKE [1]. Il se trouve seulement que l'article de MECKE, écrit dans le langage des groupes abéliens localement compacts, n'a pas été suffisamment lu par les probabilistes (c'est à NEVEU que nous avons dû de le connaître). La mesure de PALM introduite par MECKE figure par exemple dans le travail de TOTOKI sur les changements de temps, sans que le rapport soit signalé. Surtout, les résultats essentiels de MECKE ont été retrouvés , dans un langage beaucoup plus probabiliste, par HOROWITZ et GEMAN dans un article que nous avons beaucoup apprécié, mais qui ne sera pas publié sous sa forme primitive (seuls les résultats nouveaux par rapport à MECKE paraîtront).

La présentation des résultats doit beaucoup à une conversation avec NEVEU.

Nous désignons ci-dessous par (Z_t) une hélice croissante, parfaite, dont les v.a. sont $\underline{\underline{A}}^{\circ}$-mesurables. Nous ferons l'hypothèse auxiliaire

1 Si P est bornée.

que $Z_\infty = +\infty$, $Z_{-\infty} = -\infty$ identiquement : noter que $Z_t + \varepsilon t$ y satisfait pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous commençons par un lemme très simple, dont la démonstration est laissée au lecteur .

LEMME 1. Soit λ une mesure sur $\Omega\times\mathbb{R}$ telle que l'on ait pour toute fonction positive f, $\underline{\underline{A}}^\circ\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable

(11) $\int f(\omega,t)\lambda(d\omega,dt) = \int f(\omega,t-u)\lambda(d\omega,dt)$ pour $u\in\mathbb{R}$

Si la mesure sur Ω

(12) $\mu(A) = \lambda(A\times]0,1])$

est σ- finie, on a $\lambda(d\omega,dt) = \mu(d\omega)\otimes dt$.

Et inversement, bien entendu, si μ est σ-finie, la mesure $\mu(d\omega)\otimes dt$ satisfait à (11).

LEMME 2. Soit P une mesure σ- finie sur Ω. Pour que la mesure sur $\Omega\times\mathbb{R}$

(13) $\Gamma(A) = \int_\Omega P(d\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} I_A(\omega,t)dZ_t(\omega) \quad (A\in\underline{\underline{A}}^\circ\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$

satisfasse à la condition

(14) $\int f(\omega,t)\Gamma(d\omega,dt) = \int f(\theta_u\omega,t-u)\Gamma(d\omega,dt)$

pour tout $u\in\mathbb{R}$, toute $f\geq 0$ $\underline{\underline{A}}^\circ\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable, il faut et il suffit que P soit invariante par les θ_t.

DEMONSTRATION. Soit $g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega,t)dZ_t(\omega)$; on a du fait que Z est une hélice (identiquement)

$$\int f(\theta_u\omega,t-u)dZ_t(\omega) = \int f(\theta_u\omega,s)dZ_{s+u}(\omega) =$$
$$= \int f(\theta_u\omega,s)dZ_s(\theta_u\omega) = g(\theta_u\omega)$$

La formule (13) s'écrit donc $\langle P,g\rangle = \langle P,g\circ\theta_u\rangle$, elle est satisfaite si P est invariante. Inversement, soit h positive sur Ω, et soit $D(\omega)$ l'ensemble des $n\in Z$ tels que $Z_n(\omega)-Z_{n-1}(\omega)>0$. Posons

$$a_n(\omega) = 0 \text{ si } n\notin D(\omega)$$
$$a_n(\omega) = 2^{-|n|}/\sum_{k\in D(\omega)} 2^{-|k|} \quad \text{si } n\in D(\omega)$$
$$f(\omega,t) = h(\omega)\sum_{n\in D(\omega)} a_n(\omega)I_{]n-1,n]}(t)(Z_n(\omega)-Z_{n-1}(\omega))^{-1}$$

alors la fonction g correspondant à $f(\omega,t)$ est égale à h, grâce à l'hypothèse auxiliaire suivant laquelle $D(\omega)$ n'est jamais vide. La relation $\langle P,g\rangle = \langle P,g\circ\theta_u\rangle$ entraîne alors, h étant arbitraire, l'invariance de P.

Nous arrivons au résultat principal de MECKE. Comme dans le lemme 2, la notation P ne désigne pas nécessairement une loi de probabilité

THEOREME 2. <u>Soit</u> P <u>une mesure invariante bornée sur</u> Ω. <u>Il existe alors une mesure</u> σ-<u>finie</u> μ <u>sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ)$ <u>telle que l'on ait, pour toute</u> f $\underline{\underline{A}}^\circ\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-<u>mesurable positive</u>

$$(15)\quad \int P(d\omega)\int f(\theta_t\omega,t)dZ_t(\omega) = \int f(\omega,t)\mu(d\omega)dt$$

<u>Inversement, si</u> P <u>et</u> μ <u>sont</u> σ-<u>finies et liées par</u> (15), P <u>est invariante</u>, μ <u>est donnée en fonction de</u> P <u>par</u>

$$(16)\qquad \mu(A) = \int P(d\omega)\int_0^1 I_A(\theta_s\omega)dZ_s(\omega)$$

<u>et</u> P <u>en fonction de</u> μ <u>par</u>

$$(17)\qquad P(A) = \int I_A(\theta_{-t}\omega)h(\theta_{-t}\omega,t)\mu(d\omega)dt$$

<u>où</u> h <u>est positive mesurable, telle que</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega,s)dZ_s(\omega)=1$.

DEMONSTRATION. Introduisons les mesures sur $\Omega\times\mathbb{R}$

$$\Gamma(f) = \int P(d\omega)\int f(\omega,t)dZ_t(\omega)$$
$$\lambda(f) = \int P(d\omega)\int f(\theta_t\omega,t)dZ_t(\omega)$$

et définissons μ par (16) . <u>Supposons</u> d'abord que μ soit σ- finie. La relation (15) s'écrit $\lambda(d\omega,dt) = \mu(d\omega)\otimes dt$, et équivaut, d'après le lemme 1, à

(18) Pour tout u , $\int f(\omega,t)\lambda(d\omega,dt) = \int f(\omega,t-u)\lambda(d\omega,dt)$

λ est l'image de Γ par la bijection $(\omega,t)\mapsto(\theta_t\omega,t)$. On en déduit que (18) est équivalente à

(19) Pour tout u , $\int f(\omega,t)\Gamma(d\omega,dt) = \int f(\theta_u\omega,t-u)\Gamma(d\omega,dt)$

Noter que λ et Γ sont σ-finies. D'après le lemme 2, P étant aussi supposée σ-finie, (19) équivaut à l'invariance de P. Ainsi

P σ-finie invariante, μ σ -finie => (19)=>(18)=>(15)

P σ-finie, μ σ-finie, (15) => (18)=>(19)=> P invariante .

Les formules (16) et (17) sont des cas particuliers de (15). Noter que l'existence d'une fonction h satisfaisant à (17) dépend de l' hypothèse auxiliaire faite sur Z .

Il reste une question : quand pouvons nous <u>affirmer</u> que μ est σ-finie ? Les v.a. Z_1 et Z_{-1} sont finies, donc Ω est réunion d' ensembles A contenus dans des ensembles de la forme $\{Z_1\leq a, Z_{-1}\geq -a\}$. Alors $\theta_s^{-1}(A)$ est contenu, pour $s\in[0,1]$, dans l'ensemble $\{Z_1\leq 2a\}$, et par conséquent

$$\mu(A) \leq \int_{\{Z_1\leq 2a\}} Z_1 dP$$

On peut donc affirmer que μ est σ-finie si P est bornée, et bien entendu si Z_1 est P-intégrable (alors μ est bornée).

DEFINITION. Si P est σ-finie invariante, μ σ-finie, nous dirons que μ est la mesure de PALM de l'hélice Z par rapport à P .

Cette définition appelle quelques remarques

1) Si Z ne satisfait pas à l'hypothèse auxiliaire, l'ensemble des ω tels que $Z_{\pm\infty}(\omega)=\pm\infty$ est un ensemble invariant W auquel on peut restreindre le flot . Z admet alors une mesure de PALM sur W, que nous considérerons comme une mesure sur Ω portée par W. Alors les formules (15) et (16) sont vraies sur Ω, tandis que (17) ne peut s'appliquer que sur W, et ne détermine P que sur W.

2) μ n'est pas absolument continue par rapport à P, et n'est qu'une mesure sur $\underline{\underline{A}}^{\circ}$. Cependant, on voit sur (16) que si A est un ensemble P-polaire , i.e. tel que le processus $(I_A\circ\Theta_s)$ soit P-évanescent, alors $\mu(A)=0$. Cela concerne d'abord les ensembles invariants P-négligeables.

3) Cette notion de mesure de PALM coïncide avec la notion de mesure de PALM d'un processus ponctuel discret, lorsque Z est l'hélice qui compte les sauts. Cela peut se voir de plusieurs manières. Par exemple, la formule (16) rapprochée du th.3 de l'exposé II.

4) Nous avons travaillé sur une hélice parfaite . Mais si maintenant nous partons d'une hélice croissante " grossière" Z , dont $\bar{Z}$ est une version parfaite, nous pouvons calculer la mesure de PALM de $\bar{Z}$ par la formule (16) appliquée à Z . En particulier, toutes les versions parfaites de Z ont la même mesure de PALM.

Nous appliquons la formule (15) à une jolie formule de HOROWITZ et GEMAN, qui joue un rôle important dans leur travail :

COROLLAIRE 1. Si h est une variable aléatoire positive, et $s<t$

(20) $$\int h.(Z_t-Z_s)dP = \int d\mu \int_s^t h\circ\Theta_{-u}du$$

DEMONSTRATION. Prendre dans (15) $f(\omega,u)=h(\Theta_{-u}\omega)I_{]s,t]}(u)$.

Le corollaire suivant sera perfectionné par la suite : la filtration n'y intervient pas encore .

COROLLAIRE 2. Si deux hélices croissantes Z et Z' ont même mesure de PALM, elles sont indistinguables.

DEMONSTRATION. $E[h.Z_t]=E[h.Z'_t]$ pour tout h et tout $t>0$ d'après (20), donc $Z_t=Z'_t$ p.s., et le résultat par continuité à droite.

MESURES DE PALM ET FLOTS FILTRES

Nous reprenons maintenant les hypothèses un peu plus fortes de la proposition 1 : nous avons non seulement $\underline{\underline{A}}^\circ$ et la filtration $\underline{\underline{A}}_t$, mais une filtration non complétée $\underline{\underline{A}}_t^\circ$. Nous utilisons alors une version de l'hélice Z satisfaisant à la prop.1. L'ensemble invariant V porte P, donc aussi la mesure de PALM μ .

LEMME 3. Soit $\underline{\underline{A}}_0^\times$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{A}}_0^\circ$ et par les ensembles invariants P-négligeables. Si P est bornée, μ est σ-finie sur $\underline{\underline{A}}_0^\times$.

DEMONSTRATION. Nous prenons μ sous la forme

$$\mu(A) = \int P(d\omega)\int_{-1}^{0} I_A(\Theta_s\omega)dZ_s(\omega)$$

Si A est contenu dans l'ensemble $\{Z_{-2}\geqq -a\}$, la relation $\omega\in A$, $s\in]-1,0]$ entraîne $Z_{-1}(\Theta_s\omega) = Z_{-1+s}(\omega)-Z_s(\omega) \geqq Z_{-1+s}(\omega)\geqq Z_{-2}(\omega) \geqq -a$, donc $\Theta_s^{-1}(A)$ est contenu dans $\{Z_{-1}\geqq -a\}$, et $\mu(A) \leqq aP(A)$ est fini. L'ensemble $\{Z_{-2}\geqq -a\}$ appartenant à $\underline{\underline{A}}_0^\times$ (cf. prop.1), le lemme est démontré.

Nous faisons maintenant une remarque : soit f une fonction positive $\underline{\underline{A}}_0^\circ$-mesurable, telle que les v.a.

$$(21)\qquad (f.Z)_t = \int_0^t f\circ\Theta_s dZ_s$$

soient p.s. finies pour tout t. L'ensemble où elles sont effectivement finies pour tout t est alors invariant P-plein, et sur cet ensemble le processus f.Z est une hélice parfaite. Nous conviendrons de le prendre égal à 0 hors de cet ensemble.

LEMME 4 . Si μ est la mesure de PALM de Z, la mesure de PALM de f.Z est f.μ .
C'est évident sur la formule (15).

Le résultat suivant est dû à HOROWITZ et GEMAN (sauf la partie qui concerne les hélices prévisibles) : il améliore beaucoup le corollaire 2 du th.2 .

THEOREME 3. Soient Z et Z' deux hélices croissantes, dont les mesures de PALM μ et μ' (qui sont σ-finies sur $\underline{\underline{A}}_0^\times$, P étant supposée bornée) coïncident sur $\underline{\underline{A}}_{0+}^\circ$. Alors μ et μ' sont indistinguables. Il en est de même si les processus $(Z_t)_{t\geqq 0}$ et $(Z'_t)_{t\geqq 0}$ sont prévisibles par rapport à la famille $(\underline{\underline{A}}_t)_{t\geqq 0}$, et si μ et μ' coïncident sur $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$.

DEMONSTRATION. Aucune hypothèse de continuité n'étant faite sur la famille $(\underline{\underline{A}}_t^\circ)$, nous supposerons pour simplifier les notations que celle-ci est continue <u>à gauche</u> : $\underline{\underline{A}}_0^\circ = \underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$. Cela ne restreint pas la généralité.

Tout ensemble invariant P-négligeable et $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable est négligeable pour μ et μ', donc ces mesures coïncident (dans les deux cas) sur $\underline{\underline{A}}_0^\times$. Comme elles sont σ-finies sur cette tribu, il existe une fonction f, $\underline{\underline{A}}_0^\times$-mesurable , partout >0 et bornée, intégrable pour μ et μ'. Les hélices f.Z et f.Z' ont des mesures de PALM $f.\mu$ et $f.\mu'$ qui coïncident sur $\underline{\underline{A}}_{0+}^\circ$(resp. $\underline{\underline{A}}_0^\circ$), et dans le second cas il est facile de voir qu'elles sont prévisibles. D'autre part, il nous suffit de montrer qu'elles sont indistinguables. Autrement dit, quitte à changer de notation, nous pouvons nous ramener au cas où les mesures de PALM sont bornées, i.e. où les v.a. Z_t et Z_t' sont intégrables.

Pour traiter le premier cas, désignons par $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus borné, bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{A}}_{t+}^\circ)_{t\geq 0}$. Nous avons pour tout t , d'après la formule (15)

$$E\lfloor\int_0^t X_s dZ_s\rfloor = \int\mu(d\omega)\int_0^t X_s(\Theta_{-s})ds$$

mais $X_s\circ\Theta_{-s}$ est $\underline{\underline{A}}_{0+}^\circ$-mesurable, ce qui permet de remplacer μ par μ', puis Z par Z'. C'est un résultat bien connu de théorie générale des processus que deux processus croissants adaptés qui déterminent la même mesure sur la tribu bien-mesurable sont indistinguables.

Le cas prévisible se traite de même, en prenant (X_t) prévisible.

Nous démontrons maintenant, d'après J.HOROWITZ, le théorème de Radon-Nikodym pour hélices dont nous avions donné dans [4] une démonstration plus compliquée. On dit qu'une fonction $f\geq 0$ est <u>Z-négligeable</u> si l'hélice f.Z est indistinguable de 0. P est toujours bornée.

PROPOSITION 2. <u>Soient</u> Z <u>et</u> Z' <u>deux hélices croissantes</u> , <u>telles que pour toute fonction</u> f ≥ 0 , $\underline{\underline{A}}_{0+}^\circ$<u>-mesurable et</u> Z'-<u>négligeable</u>, f <u>soit</u> Z <u>négligeable</u>. <u>Alors il existe une fonction</u> $c\geq 0$, $\underline{\underline{A}}_{0+}^\circ$<u>-mesurable</u>, <u>telle que</u> Z <u>et</u> c.Z' <u>soient indistinguables</u>.

<u>Si</u> Z <u>et</u> Z' <u>sont prévisibles, il suffit de vérifier la condition précédente pour des</u> f $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$<u>-mesurables, et la fonction</u> c <u>peut être prise</u> $\underline{\underline{A}}_{0-}^\circ$ <u>-mesurable</u> .

DEMONSTRATION . Traitons par exemple le cas prévisible. Notre hypothèse entraîne que la mesure de PALM μ de Z, restreinte à $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$, est absolument continue par rapport à la restriction de la mesure de PALM μ' de Z'. Soit c une densité $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurable de la restriction de μ par rapport à celle de μ' : alors $Z=c.Z'$ (th.3).

REMARQUE. Nous mettons en garde ici contre une erreur qui était commise à cette place dans une rédaction antérieure : les v.a. Z_t , pour $t<0$, ne sont que $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0+}$-mesurables sur l'ensemble invariant V P-plein, et non $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurables : ce sont les v.a. Z_t-Z_{0-} qui sont $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurables.

Signalons à ce propos que notre théorie est incomplète quant aux hélices prévisibles : on souhaiterait en construire une version parfaite telle que, sur un ensemble invariant P-plein V, Z_t pour $t<0$ soit $\underline{\underline{A}}^{\circ}_{0-}$-mesurable (nous venons de voir qu'il suffit que cela ait lieu pour Z_{0-}). Pour l'instant, nous ne savons pas comment faire.

CHANGEMENTS DE TEMPS

La théorie des changements de temps dans les flots est due à MARUYAMA (qui a établi le théorème principal pour des hélices d'un type particulier) et à TOTOKI. Nous allons traiter ici cette question par les méthodes d'HOROWITZ et GEMAN.

En théorie des processus de Markov (qui a servi de modèle à cette théorie ci), on effectue des changements de temps par rapport à deux types de fonctionnelles additives croissantes : les fonctionnelles purement discontinues à sauts égaux à 1 (et le changement de temps correspondant transforme un processus à temps continu en un processus à temps discret), d'autre part, les fonctionnelles continues. Dans le premier cas, la notion correspondante en théorie des flots est celle d'hélice comptant les sauts d'un processus ponctuel discret, et le flot changé de temps est un flot discret dont la mesure invariante est la mesure de PALM. Nous allons traiter ici le cas des hélices croissantes continues. La mesure de PALM apparaîtra aussi comme la mesure invariante d'un flot sur le " support" de l'hélice.

Dans ce qui suit, Z désigne une hélice croissante <u>continue</u> , satisfaisant identiquement à l'identité des hélices, dont les v.a. sont $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurables. On maintient l'hypothèse auxiliaire que $Z_{\pm\infty} = \pm\infty$ identiquement. Nous laisserons de côté toutes les questions de filtration. Nous supposerons que la mesure P est (invariante) σ-finie et que la mesure de PALM $\hat{P}$ de Z existe (i.e. est σ-finie). Ces notations ont pour but d'établir une certaine symétrie entre P et $\hat{P}$. On pose successivement

(22) $\hat{Z}_t(\omega) = \inf \{ s : Z_s(\omega)>t \}$ pour $t\in\mathbb{R}$

(23) $\hat{\Omega} = \{ \omega : \hat{Z}_0(\omega)=0\}$ (i.e. tels que $Z_\varepsilon(\omega)>0$ pour tout $\varepsilon>0$)

(24) $\hat{\theta}_t\omega = \theta_{\hat{Z}_t(\omega)}(\omega)$

Voici quelques propriétés élémentaires . D'abord, dans la définition de $\hat{Z}_t$, on peut prendre un inf sur les s rationnels, donc $\hat{Z}_t$ est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable . L'application $\hat{Z}_.(\omega)$ étant croissante, continue à droite, l'application $(t,\omega)\mapsto \hat{Z}_t(\omega)$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, et l' application $(t,\omega)\longmapsto \hat{\theta}_t\omega$ à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{A}}^\circ)$ l'est aussi. Noter que seule l'hypothèse auxiliaire garantit que $\hat{Z}$ est à valeurs finies, et nous permet de définir $\hat{\theta}_t$. L'ensemble $\hat{\Omega}$ est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable, et $\hat{\theta}_t$ applique Ω dans $\hat{\Omega}$. On a la formule suivante, qui établit une symétrie entre Z et $\hat{Z}$

(25) $$Z_t(\omega) = \inf \{ s : \hat{Z}_s(\omega)>t \}$$

Tout cela vaut sans l'hypothèse de continuité de Z. Celle ci intervient (sous la forme de l'identité $Z_{\hat{Z}_t} \equiv t$) dans la relation

(26) $$\hat{Z}_{s+t} = \hat{Z}_s+\hat{Z}_t\circ\theta_{\hat{Z}_s}$$

d'où l'on déduit l'identité fondamentale $\hat{\theta}_s\hat{\theta}_t=\hat{\theta}_{s+t}$. $\hat{\theta}_0$ n'est pas l'identité, mais applique Ω dans $\hat{\Omega}$ et induit l'identité sur $\hat{\Omega}$: les $\hat{\theta}_t$ induisent donc sur $\hat{\Omega}$ un groupe mesurable de bijections.

Une dernière conséquence de la continuité : la mesure <u>diffuse</u> $dZ_.(\omega)$ est portée par l'ensemble des points de croissance <u>à droite</u> de $Z_.(\omega)$, et il en résulte que $\int I_{\hat{\Omega}^c}(\theta_s\omega)dZ_s(\omega)=0$. La mesure $\hat{P}$ est donc portée par $\hat{\Omega}$.

Avec tout cela, on arrive au théorème principal, dû en partie à TOTOKI (invariance), en partie à HOROWITZ et GEMAN (détermination de la mesure de PALM de $\hat{Z}$). Noter la symétrie parfaite si Z est continue et strictement croissante.

THEOREME 4. $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{\underline{A}}}^\circ, \hat{P}, (\hat{\theta}_t))$ <u>est un flot dont</u> $\hat{Z}$ <u>est une hélice, et la mesure de PALM de</u> $\hat{Z}$ <u>est l'image de</u> P <u>par</u> $\hat{\theta}_0$.

DEMONSTRATION. L'identité des hélices pour $\hat{Z}$ n'est autre que (26). Il reste donc seulement à vérifier que $\hat{P}$ est invariante, et que la mesure de PALM de $\hat{Z}$ est $\hat{\theta}_0(P)$. Nous ferons les deux choses simultanément grâce au th.2, en montrant que si $f(\omega,t)$ est $\underline{\underline{A}}^\circ$-mesurable sur Ω

(27) $\int\hat{P}(d\omega)\int f(\hat{\theta}_t\omega,t)d\hat{Z}_t(\omega) = \int f(\hat{\theta}_0\omega,t)P(d\omega)dt$

Nous partons du côté gauche de (27), et de l'identité $\int c(s)d\hat{Z}_s(\omega)= \int c(Z_s(\omega))ds$, après quoi nous remplaçons s par -s. D'où la valeur

$$\int\hat{P}(d\omega)\int f(\hat{\theta}_{Z_s}(\omega),Z_s(\omega))ds=\int f(\hat{\theta}_{Z_{-s}(\omega)}(\omega),Z_{-s}(\omega))\hat{P}(d\omega)ds$$

La formule (15) nous donne une recette pour calculer de telles intégrales relatives à $d\hat{P}\otimes ds$: remplacer $\hat{P}$ par P, ds par dZ_s, et dans la fonction ω par $\theta_s\omega$. Nous obtenons donc, comme $Z_{-s}(\theta_s\omega)=-Z_s(\omega)$

$$\int P(d\omega)\int f(\hat{\theta}_{-Z_s(\omega)}(\theta_s\omega), -Z_s(\omega))dZ_s(\omega)$$

que nous transformons par la formule $\int c(t)dZ_t(\omega)=\int c(\hat{Z}_s)ds$, en remarquant que $Z_{\hat{Z}_s} = s$. Comme $\theta_{\hat{Z}_s} = \hat{\theta}_s$, il vient

$$\begin{aligned}\int P(d\omega)\int f(\hat{\theta}_{-s}(\theta_{\hat{Z}_s}\omega),-s)ds &= \int P(d\omega)\int f(\hat{\theta}_0\omega,-s)ds\\ &= \int f(\hat{\theta}_0\omega,t)P(d\omega)dt \quad . \quad \text{cqfd}\end{aligned}$$

REMARQUE. Il est toujours intéressant de rechercher quels sont les analogues discrets d'un théorème relatif au cas continu (et vice versa!). Ici, considérons un flot discret $(\Omega,\underline{\underline{A}},P,s)$ filtré par une famille $(\underline{\underline{A}}_n)$. Une hélice croissante (Z_n) est uniquement déterminée par la v.a. positive, $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable $Z_1=h$: on a pour $n>0$

$$Z_n=h+h\circ s+\ldots+h\circ s^{n-1}$$

La "mesure de PALM" de l'hélice est la mesure $\mu=h.P$. Le théorème 3 correspond à la trivialité suivant laquelle h est déterminée par la mesure μ restreinte à $\underline{\underline{A}}_1$, à $\underline{\underline{A}}_0$ si h est $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable !

En revanche, le théorème des "changements de temps" présente un intérêt. Il concerne ici le cas où h ne prend que les valeurs 0 et 1 : il existe alors un ensemble C , $\underline{\underline{A}}_1$-mesurable, tel que $h=I_C$ Posons alors comme dans le cas continu

$$\hat{Z}_n(\omega) = \inf \{ k : Z_k(\omega)>n\}-1 = \sup \{ k : Z_k(\omega)\leq n\}$$

$$\hat{\Omega} = \{ \omega : \hat{Z}_0(\omega)\neq 0\}=C$$

on a $\hat{Z}_{n+m} = \hat{Z}_n+\hat{Z}_m\circ s^{Z_n}$, et on en déduit facilement que les applications

$$\hat{s}_k = (\omega\mapsto s^{\hat{Z}_k(\omega)}(\omega))$$

satisfont à $\hat{s}_n\hat{s}_m=\hat{s}_{n+m}$. $\hat{s}_0$ n'est pas l'identité, mais induit l'identité sur $C=\hat{\Omega}$, et on en déduit un groupe discret d'automorphismes de $\hat{\Omega}$.

Le résultat fondamental maintenant est le fait que ce groupe d'automorphismes préserve la mesure de PALM $\hat{P}=I_C.P$. Nous ne démontrerons pas ce résultat, mais il suffit tout simplement de transposer la méthode qui a été utilisée dans le cas continu pour y aboutir ! Ainsi, le théorème des changements de temps correspond dans le cas discret au théorème classique sur l'existence du flot induit sur C par un flot discret.

Nous aurons l'occasion d'utiliser plus loin (cf. l'appendice de l'exposé V) cette notion de flot induit.

Par ailleurs, les hélices à sauts unité correspondent ici encore aux processus ponctuels : nous laissons au lecteur le soin de regarder la correspondance entre les processus ponctuels et les flots sous une fonction, dans le cas discret.

BIBLIOGRAPHIE

La généalogie des résultats concernant les hélices est la suivante. D'une part, il y a le travail de MECKE, où les théorèmes sont cachés sous une forme adaptée aux groupes abéliens localement compacts :

[1] J.MECKE. Stationäre zufällige Masze auf lokallompakten Abelschen Gruppen. Z.W-th., 9, 1967, p.36-58

D'autre part, le premier article où les hélices et les changements de temps (avec leur mesure invariante, de PALM) apparaissent en tant que tels est celui de

[2] G.MARUYAMA. Transformation of flows. J.Math. Soc. Japan, 18, 1966, p.290-302

développé par

[3] H.TOTOKI. Time changes of flows. Mem. Fac. Sc. Kyushu Univ., 20, 1966, p.27-55.

Nous avons nous mêmes étudié les hélices, en particulier les résultats de perfection et le théorème de Radon-Nikodym

[4] J. de Sam LAZARO et P.A.MEYER. Méthodes de martingales et théorie des flots. Z.W-th.,18, 1971, p.116-140.

La notion de mesure de PALM d'une hélice croissante a été redécouverte dans un article de HOROWITZ et GEMAN, que nous avons bien souvent cité dans ce chapitre, et qui n'a malheureusement pas été intégralement publié en raison de la priorité de MECKE. Il en existe seulement un résumé

[5] J.HOROWITZ et D.GEMAN, abstract 71T-F11, Notices AMS, 81, 1971 n°6, p.972.

Une forme abrégée en est

[6] J.HOROWITZ et D. GEMAN. Remarks on Palm measures.

le théorème de Radon-Nikodym, quant à lui, est extrait de l'article

[7] J.HOROWITZ. Short proof of a Radon-Nikodym theorem for additive functionals.

Voici enfin les références de la méthode des limites essentielles pour les théorèmes de perfection :

[8] J.B.WALSH . Some topologies connected with Lebesgue measure. Sém. Prob. Strasbourg V, Lecture Notes in M. 191, 1971, p. 290-310. Springer-Verlag.

[9] J.B.WALSH. The perfection of multiplicative functionals. Sém. Prob. Strasbourg VI. Lecture Notes in M. 258 , 1972, p.233-242. Springer-Verlag.