Didier Dacunha-Castelle

Sous-espaces symétriques des espaces d'Orlicz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 268-284
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__268_0>

SOUS-ESPACES SYMETRIQUES DES ESPACES D'ORLICZ

par D. DACUNHA-CASTELLE

A) Introduction

La recherche des sous-espaces à base symétrique est un problème assez intéressant car directement lié à des problèmes plus importants concernant les espaces L^p, non abordés ici. Nous traitons ici du cas général des sous-espaces symétriques d'espaces d'Orlicz à valeurs dans certains Banach.

Nous donnons ici une solution complète de ce problème en utilisant l'inégalité très intéressante, assez récemment démontrée par Hoffmann-Jørgensen sur les sommes de variables indépendantes [1] .

En fait notre but, dans cet exposé, est aussi de montrer que ce type de problème sur les Banach se ramène pour l'essentiel à un certain nombre d'inégalités sur les variables de Bernouilli et qu'il s'agit bien de problèmes presque purement probabilistes.

Par rapport à nos résultats antérieurs [4] le point essentiel est que les résultats valent même si la fonction $\frac{F(x)}{x^2}$ n'a pas de comportement régulier.

B) Définitions et notations

E désigne un espace vectoriel mesuré. ρ un module tempéré sur E c'est-à-dire une application E $\longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que il existe C avec

$$\rho(x+y) \leq C\,[\rho(x)+\rho(y)] \quad \text{pour tout } x,\, y \in E, \tag{1}$$

$$\rho(\alpha x) \leq \rho(x) \qquad \text{pour } |\alpha| < 1$$

$$\rho(-x) = \rho(x)$$

Une fonction d'Orlicz F sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire, strictement croissante F (0) = 0, telle que F définisse un module tempéré sur $\mathbb{R}$.

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite ϵ-invariante (ou signe-invariante, d'après l'expression anglaise plus ou moins consacrée), si pour tout K, tout K-uplet $(n_1 \dots n_K)$, la loi de $(\epsilon_1 X_{n_1}, \dots, \epsilon_K X_{n_K})$ est indépendante du choix des ϵ_i , $\epsilon_i^2 = 1$. On notera, par convention $P^{|x_1|,\dots,|x_k|}$ la probabilité conditionnelle régulière lorsque $X_1 \in \{x_1, -x_1\}, \dots, X_k \in \{x_k, -x_k\}$, (dans le cas de $\mathbb{R}$, cela signifie simplement $|x_i|$ fixés).

Le lemme suivant est à peu près immédiat et bien connu.

Lemme 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

1 - (X_n) est ϵ-invariante .

2 - Les loi $P^{|x_1| \dots |x_k|}(dx_1 \dots dx_k)$ de $X_1 \dots X_k$ à $|X_1|, \dots |X_k|$ fixés sont celles de k-variables de Bernouilli indépendantes.

3 - Les lois conditionnelles de $(\epsilon_{k+1} X_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+n} X_{k+n})$ lorsque $X_1 = \epsilon_1 x_1, \dots, X_k = \epsilon_k x_k$ sont indépendantes de $\epsilon_1, \dots \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+n}$.

De plus $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une martingale.

C) Quelques inégalités

Conditionnellement à un choix $|X_i|$ de X_i (dans $\{x_i, -x_i\}$), les variables $X_1 \dots X_n$, se comportent donc comme des vecteurs de Bernouilli $|X_1|\,\epsilon_1, \dots |X_n|\,\epsilon_n$). Toutes les inégalités classiques valables pour de tels vecteurs, s'étendront donc au cas de variables ϵ-invariantes, dont un cas particulier est celui de variables (X_i) indépendantes et symétriques.

Inégalités des modules modérés.

Soit (X, Y) un couple ϵ-invariant. Alors

$$E\,\rho(X+Y) \geqq \frac{1}{2C}\, E\,\rho\,(X) \qquad (2)$$

En effet, soit $x, y \in E$, ϵ_1, ϵ_2 deux variables de Bernouilli indépendantes. On a :

$$\rho\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) \leqq C\left(\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

donc

$$\rho(x) \leqq 2\,C\; E\,(x + \epsilon_2\, y)$$

d'où le résultat par intégrations successives. On en déduit

$$E^{|X|,\,|Y|}\;\rho\,(X,\,Y) \geqq \frac{1}{2C}\; E^{(X),\,(Y)}\,\rho\,(X)$$

et l'inégalité par intégration.

(Remarque : Si ρ est convexe, on a l'inégalité de Jessen, $E\,\rho\,(X+Y) \geqq \rho\,(X)$, qui provient de $\frac{1}{2}\,[\rho\,(x+y) + \rho\,(x-y)] \geqq \rho\,(x)$).

Inégalité de la médiane.

$$\rho\,(y+x) + \rho\,(y-x) \geqq \frac{1}{C}\,\rho\,(2\,y)$$

donc les événements

$$(\rho\,(y + x\,\epsilon_1) < \frac{\rho\,(2\,y)}{2\,C}) \cap (\epsilon_1 = 1)$$

et
$$\rho\,(y + x\,\epsilon_1) < \frac{\rho\,(2\,y)}{2\,C} \cap (\epsilon_1 = -1)$$

sont incompatibles et de probabilité $\leq \frac{1}{2}$ par suite

$$P\,[\,\rho\,(y + x\,\epsilon_1) \geq \frac{\rho\,(2\,y)}{2\,C}\,] \leq \frac{1}{2}$$

(c'est-à-dire que la médiane de la variable décentrée $\rho\,(y + x\,\epsilon_1)$ est supérieure à $\frac{\rho\,(2\,y)}{2\,C}$) . Par intégration on obtient donc

$$P\,(\rho\,(y + X) \geqq \frac{\rho\,(2\,y)}{2\,C}) \leq \frac{1}{2} \tag{3}$$

<u>Inégalité de Paul Lévy</u>.

On a, pour une suite de v.a. ϵ-invariantes

$$P\,(\max_{1 \leq k \leq n} \rho\,(S_k) \geq t) \leqq 2\,P\,(\rho\,(S_n) \geqq \frac{t}{2\,C}) \tag{4}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de la faire pour des variables de la forme $X_i = x_i\,\epsilon_i$.

Posons $\tau = \inf\{k\,,\ 1 \leq k \leqq n\ ,\ \rho\,(S_k) > t\}$.

On a
$$\{\rho\,(S_k + (S_n - S_k)) < \frac{t}{2\,C}\} \subset \{\rho\,(S_k + (S_n - S_k)) < \frac{\rho\,(2\,S_k)}{2\,C}\}$$

Appliquant l'inégalité sur la médiane on a , si $(\tau = k)$,

$$P^{(S_1 \dots S_k)}\ (\rho\,(S_k + (S_n - S_k) < \frac{t}{2\,C}) < \frac{1}{2}$$

donc en intégrant et en sommant en k ,

$$P\,(\rho\,(S_n) < \frac{t}{2\,C}) < \frac{1}{2}\,P\,(\max_{1 \leq k \leq n} \rho\,(S_k) > t)$$

d'où le résultat, en utilisant

$$P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B) \leq 1 .$$

Inégalité de Hoffmann-Jørgensen

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires ϵ-invariantes. Alors si $S_n = \sum_1^n X_k$, et si

$$P\left(\rho(S_n) > \frac{1}{2C^3}\right) \leq \frac{1}{48\,C^3} \qquad (5)$$

on a

$$E\,\rho(S_n) \leq 6\,E \max_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) + 24 \qquad (6)$$

Nous renvoyons à [1] ou [2] pour la démonstration de ce résultat important.

Il suffit évidemment de travailler avec $X_i = c_i\,\epsilon_i$.

D) Convergence de certaines séries de variables aléatoires

Nous supposons maintenant que (E, ρ) est un espace de Banach, modulaire au sens de Nakano, c'est-à-dire que la norme $\| \quad \|$ est définie par un module convexe et modéré ρ, à partir de $\|x\| = \inf \{\theta , \rho (\frac{x}{\theta}) \leq 1\}$.

Si $(\Omega , \mathcal{A} , P)$ est un espace de probabilité on notera $L_o (\Omega , \mathcal{A}, P, E)$ l'espace des classes de variables aléatoires X telles que

$$\int_\Omega \rho (X)\, dP < \infty$$

On supposera de plus que dans E le théorème suivant est vrai. Pour toute martingale S_n à valeurs dans E, convergeant p.S vers S_∞ et telle que $\sup_n E \rho (S_n) < \infty$, on a S_n converge vers S dans L_ρ $(\Omega, \mathcal{A} , P, E)$. Il n'est pas dans notre propos de détailler les conditions dans lesquelles ce théorème est vrai. En tout cas c'est vrai pour $E = \mathbb{R}$ (voir par exemple, [3], chap. V, pour des conditions larges de validité).

On en déduit

Lemme 2 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ convergeant p.s , les X_k étant une suite de variables ϵ-invariantes.

Alors S_n converge dans L_o si et seulement si

$$\lim_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho (X_k) < \infty \quad .$$

En effet, d'après le théorème des martingales vu plus haut (qui est bien classique pour $E = \mathbb{R}$ et $\rho (x) = x^p$ mais qui s'étend sans difficultés majeures à des ρ modérés), si $S_n \longrightarrow S$ p.s et si $\sup_n E \rho (S_n) < \infty$ alors $S_n \longrightarrow S$ dans L_ρ .

D'après l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen si

$$\sup_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho (X_k) < \infty \qquad \text{alors}$$

$$\sup_n E\rho(S_n) < \infty \quad .$$

Inversement comme $\rho(X_k) \leqq C\ [\rho(S_k) + \rho(S_{k-1})]$

$$\sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(X_k) \leqq 2C \sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(S_k)$$

$$P(\sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(X_k) > t) \leqq P(\sup \rho(S_k) > \frac{t}{2C})$$

$$\leqq 2P(\rho(S_n) \geqq \frac{t}{4C^2})$$

d'après l'inégalité de Paul Lévy et donc

$$E \sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(X_k) \leqq 8C^2 E\rho(S_n) \tag{7}$$

d'où le lemme 2, car on remarque que si $\sum_{k=1}^{N} c_k X_k$ converge p.S vers S, alors $\frac{S - S_N}{\theta} \longrightarrow 0$ p.S et donc, par l'inégalité triangulaire

$$P\rho(\sum_1^N \frac{c_k X_k}{\theta} \geqq \frac{1}{2C^3}) \leqq \frac{1}{48C^3}$$

dès que N est assez grand, pour un certain θ (ce qui justifie l'utilisation de l'inégalité (6).

Supposons maintenant les variables X_k indépendantes et symétriques dans L_ρ. Supposons $\Sigma c_k X_k$ convergeant p.s vers S. On a divisé éventuellement par θ les c_k de manière à être dans les conditions d'application de l'inégalité (6).

On a
$$P(\sup_{1 \leqq k \leqq n} (\rho(X_k) < t) = \Pi_{i=1}^n P(\rho(X_k < t)$$

soit
$$E \sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(X_k) = \int_0^\infty 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \log[1 - P(\rho(X_k) \geqq t)]} dt \quad .$$

Supposons que l'on ait pour tout n,

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^n P(\rho(X_k) \geqq t) \leqq \frac{1}{4}$$

alors il existe des constantes C_1, C_2, C_3 indépendantes de n telles que

$$C_1 \int_1^\infty p_n(t)\,dt \leqq E \sup_{1 \leqq k \leqq n} \rho(X_k) \leqq C_2 \int_1^\infty p_n(t)\,dt + C_3 \qquad (8)$$

(puisque on a pour $u \leqq 1$, $1 - e^{-1} \leqq 1 - e^{-u} \leqq u$, et que $p_n(t)$ décroît vers 0 à l'∞).

Si on se donne une série $\sum_{i=1}^{\infty} c_k X_k$ convergeant p.s, on sait que en particulier (théorème des 2 séries),

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\|X_k\| > \frac{t}{|c_k|}\right) < \infty$$

et donc il existe θ tel que

$$\sum P\left(\|X_k\| > \frac{t}{\theta\,|c_k|}\right) \leqq a \quad , \text{ pour } a \text{ donné .}$$

Mais ρ étant modéré $\rho(c_k X_k) \leqq \|c_k X_k\|^q$ pour un certain $q \geqq 1$ et donc on a aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[\rho(\theta\, c_k X_k) > t] \leqq 1/4 \qquad \text{pour } \theta \text{ assez grand.}$$

Donc, puisque $\{ (c_k) , \sum_{i=1}^{\infty} c_k X_k$ converge dans $L_\rho \}$ est un espace vectoriel, on a

<u>Lemme 3</u> : La condition nécessaire et suffisante pour que $\sum c_k X_k$ converge dans L_ρ, si X_k est une suite de variables indépendantes et symétriques est que $\sum c_k X_k$ converge p.s et que

$$\int_1^\infty \sum_{k=1}^{\infty} P(\rho(c_k X_k) > t)\,dt < \infty \qquad (9)$$

Dans le cas particulier où X_k est réelle, et $\rho = F$, on obtient, $\sum c_k X_k$ converge p.s et

$$\int_1^\infty \sum_{k=1}^{\infty} P\left(|X_k| > \frac{u}{|c_k|}\right) F'(u)\,du < \infty$$

soit après intégration par parties

$\sum c_k X_k$ converge p.s et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/c_k}^{\infty} F(c_k u)\, dP(X_k > u) < \infty$$

Donc, en appliquant de plus le théorème des 2 séries pour traduire la convergence p.s , on obtient dans le cas réel :

Lemme 4 : Si (X_k) est une suite de variables réelles et symétriques, indépendantes, alors $\Sigma\, c_k X_k$ converge dans L_F si et seulement si

$$\Sigma\, f_k(c_k) < \infty$$

où

$$f_k(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2\, dP(X_k > u) + \int_{1/\lambda}^{\infty} F(\lambda u)\, dP(X_k > u) \qquad (10)$$

De plus, pour $\theta < \theta_o$ (θ_o défini par $\sum_{k=1}^{\infty} P(c_k X_k \theta_o > 1) < \frac{1}{4}$) des constantes D_1, D_2, D_3 telles que

$$D_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\theta c_k) \leqq E\, F(\Sigma\, \theta\, c_k X_k)$$

$$\leqq D_2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\theta c_k) + D_3 \qquad (11)$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité (8) et du lemme 2.

Nous allons maintenant terminer par le cas qui nous intéressera le plus par la suite.

Définition : Une suite de variables aléatoires (U_i) est dite invariante par réarrangement si elle est ϵ-invariante et échangeable c'est-à-dire si la loi de $(\epsilon_1 U_{i_1}, \dots, \epsilon_n U_{i_n})$ est indépendante du choix des ϵ et des n entiers distincts $i_1 \dots i_n$.

Lemme 5 : Les variables (U_i) sont conditionnellement indépendantes et symétriques, par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{B}_\infty$ de queue (des événements symétriques).

D'après ce qui précède, les U_i étant ϵ-invariants $\Sigma\, c_k U_k$ converge dans L_ρ si et seulement si

$$\sup_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(c_k U_k) < \infty$$

soit

$$\sup_n E\, E^{\mathcal{B}_\infty} \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(c_k U_k) < \infty \;.$$

Notant $P_{\mathcal{B}_\infty}$ la trace de P sur $\mathcal{B}_\infty$, on a $P(d\omega) = Q(d\omega, a)\, P_{\mathcal{B}_\infty}(da)$ et les variables (U_i) sont indépendantes pour les probabilités $Q(d\omega, a)$

Il est facile de vérifier que si $\Sigma\, c_k U_k$ converge P p.S, on a de même $\Sigma\, c_k U_k$ converge Q_a p.s., $P_{\mathcal{B}_\infty}$ p.s. ; posant Q_a pour $Q(d\omega, a)$.

Par suite, si l'on définit A_K par

$$A_K = \{ a ,\ \sum_k Q_a [\rho(\frac{c_k U_k}{K}) > 1] < \frac{1}{4} \}$$

on a $P_{\mathcal{B}}(\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K) = 1$. On pose $B_{K,a} = \{ (c_k) ,\ a \in A_K$ pour la suite $(c_k)\}$.

Donc si $(c_k) \in B_{K,a}$, on a, d'après le lemme 4 que

$$D_1 \sum_{k=1}^{\infty} f^a(\frac{c_k}{K}) \leq \int F\, \frac{(\Sigma\, c_k U_k)}{K}\, dQ_a \leq D_2 \sum_{k=1}^{\infty} f^a(\frac{c_k}{K}) + D_3 \qquad (12)$$

en se limitant à partir de maintenant au cas de $E = \mathbb{R}$ et $\rho = F$, pour simplifier, ou

$$f^a(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2\, dQ_a (U_k > u) + \int_{1/\lambda}^{\infty} F(\lambda u)\, dQ_a (U_k > u) \quad (13)$$

Posons $f^K(\lambda) = \int_{A_K} f^a(\lambda)\, dP_{\mathcal{B}}(a)$

et $$L_F^K = L_F(\Omega\, 1_{A_K},\ \mathcal{A} \cap A_K,\ P)$$

Il résulte de l'inégalité (12) que les espaces de Banach ℓ_{f^K} et $[U_k]_{L_F^K}$ sont isomorphes, les constantes d'isomorphisme étant indépendantes de K.

$$\text{Lorsque } K \uparrow \infty ,\ f^K \uparrow f = \int f^a(\lambda)\, dP_{\mathcal{B}}(a) \qquad (14)$$

et $\|(c_k)\|_{\ell_{f^K}} \longrightarrow \|(c_k)\|_{\ell_f}$ par continuité. De même $\|\Sigma\, c_k U_k\|_{L_F^K}$ tend vers

$\| \Sigma \; c_k \, U_k \|_{L_F}$, d'où :

<u>Théorème 1</u> : Si (U_k) est une suite de variables aléatoires réelles invariantes par réarrangement, $\Sigma \; c_k \; U_k$ converge dans L_F, si et seulement $\Sigma \, f \, (c_k) < \infty$ où f est donné par (13) et (14).

Un résultat du même type vaut pour des modules sur des Banach, la définition de f étant alors un peu plus compliquée.

E) <u>Application aux sous-espaces symétriques d'un espace d'Orlicz</u>

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite basique inconditionnelle dans un espace $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P, E)$.

Considérons l'espace produit

$$(\Omega \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad , P \otimes P_\epsilon)$$

où P_ϵ désigne la probabilité associée aux variables de Bernouilli indépendantes (ϵ_n). On notera E_ϵ (resp. E_ω) l'espérance à ω (resp. (ϵ_n)) fixé .

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ une série convergente dans $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On a donc :

$$E_\omega \, \rho \, (\Sigma \, c_n \, \epsilon_n X_n) < \infty$$

pour toutes valeurs des ϵ_n, puisque (X_n) est inconditionnelle . En utilisant un argument classique de Kahane (voir [5] , p. 18), on voit que

$$E_\epsilon \quad E_\omega \, \rho \, (\Sigma \, c_n \epsilon_n \, X_n) < \infty$$

Supposons de plus que $E_\omega \, \rho(X_n) = 1$

Soit $b = \sup \{ a$, il existe une suite infinie i_n ,

$$A_n \subset \Omega \quad , P(A_n) < 2^{-n} , \quad \text{et} \int \rho \, (X_{i_n}) \, dP > a - 2^{-n}$$

<u>Lemme 6</u> : Si $b > 0$, il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles A_k telle que

$$1 - P(A_k) \longrightarrow 0$$

$$2 - \int_{A_k} \rho \, (X_{n_k}) \uparrow b$$

3 - $(\rho\,(X_{n_k})\,1_{A_k^c})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite équi-intégrable.

Démonstration (cf. [4] , lemme 3.3.4)

Utiliser la maximalité de b et le procédé diagonal.

Lemme 7 : (Kadec-Pelczynski et [4], lemme 3.3.3) . Si $b > 0$, si (X_{n_k}) et (A_k) sont les suites introduites au lemme 6, il existe alors des sous-suites infinies

$$Y_m = X_{n_{k_m}} \quad , \qquad A'_m = A_{k_m}$$

et une suite (B_m) d'ensembles 2 à 2 disjoints tels que

1 - $B_m \subset A_m$

2 - les espaces engendrés par les variables $(Y_m\, 1_{A'_m})$ et $(Y_m\, 1_{B_m})$ sont $(1+\epsilon)$ isomorphes.

3 - les variables $(Y_m\, 1_{B_m^c})$ sont équi-intégrables.

Principe de la démonstration : On construit les ensembles B_m de proche en proche en utilisant le lemme classique de perturbation.

Lemme 8 : On a

$$(15)\ \frac{1}{2C} \max\Big(\underset{\epsilon}{E}\ \underset{\omega}{E}\ \rho\,\big(\sum_{m=1}^{N} c_n\,\epsilon_m\, Y_m\, 1_{B_m^c}\big)\ ,\ \sum_{m=1}^{N} \underset{\epsilon}{E}\ \underset{\omega}{E}\ \rho\,(c_m\, Y_m\, 1_{B_m})\Big)$$

$$\leq \underset{\epsilon}{E}\ \underset{\omega}{E}\ \rho\,\big(\sum_{m=1}^{N} \epsilon_m\, c_m\, Y_m\big)$$

$$\leq C\Big(\underset{\epsilon}{E}\ \underset{\omega}{E}\ \rho\,\big(\sum_{m=1}^{N} c_m\,\epsilon_m\, Y_m\, 1_{B_m^c}\big) + \sum_{m=1}^{N} \underset{\epsilon}{E}\ \underset{\omega}{E}\ \rho\,(c_m\, Y_m\, 1_{B_m})\Big)$$

Démonstration : Les 2 variables $c_k\, Y_k\, 1_{B_k}\, \epsilon_k$ et $\sum_{k\neq j} c_j\, Y_j\, 1_{B_j}\, \epsilon_j$ sont ϵ-invariantes.

On obtient l'inégalité de droite en appliquant (1). On obtient l'inégalité de gauche en appliquant (2), en intégrant sur B_k et en sommant en k .

On déduit du lemme 8 que si $\Sigma\, c_n Y_n$ converge dans L_ρ , alors $\Sigma\, c_n Y_n 1_{B_n}$ converge aussi dans L_ρ et donc que $\overline{\lim}\; E_\epsilon\, E_\omega\, (\Sigma\, c_n Y_n \epsilon_n 1_{B_n^c}) < \infty$. Donc en utilisant le critère de Cauchy et le théorème de Fubini que $\Sigma\, c_n \epsilon_n Y_n 1_{B_n^c}$ converge dans $L_\rho (\Omega, \mathcal{A}, P)$ P_ϵ . p.s.

On suppose maintenant avoir un espace de Banach B à base symétrique, et un isomorphisme de B dans L_ρ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Il existe donc A, $0 < A < \infty$ tel que pour toute suite finie (c_n) on ait

$$A^{-1} < \frac{E\, \rho\, (\sum_1^N \epsilon_n\, c_n X_{\sigma(n)})}{E\, \rho\, (\sum_1^N c_n\, X_n)} < A$$

pour tout choix de $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ et de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ (car une inégalité est valable pour les normes correspondantes avec d'autres constantes).

Une telle suite (X_n) est dite presque invariante par réarrangement en norme (ou en module ρ).

<u>Lemme 9</u> : Si (X_n) est une suite presque invariante en norme par réarrangement, il existe une suite (B_k) d'ensembles 2 à 2 disjoints et une sous-suite (Y_k) de (X_n) tels que

1 - $P(B_k) \longrightarrow 0$

2 - $(Y_k 1_{B_k^c})$ est équi-intégrable.

3 - $[Y_n]_{L_\rho}$ est isomorphe à $[X_n]_{L_\rho}$.

4 - $\Sigma\, c_k Y_k$ converge si et seulement si $\Sigma\, c_k Y_k 1_{B_k^c}$ et

$\Sigma\, c_k Y_k 1_{B_k}$ convergent dans L_ρ .

<u>Démonstration</u> : Cela résulte simplement de (15) et de la presque ϵ-invariance.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème que nous avions en vue.

Théorème 2 : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach B à base symétrique se plonge dans $L_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est que B soit isomorphe à un espace $\ell_{F_1+F_2}$ où

$$F_1(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2 \, dM(u) + \int_{1/\lambda}^{\infty} F(\lambda u) \, dM(u)$$

$F_2(\lambda) \in$ convexe fermé engendré par l'ensemble des fonctions $\{ \lim_{\mathcal{U}} \frac{F(\lambda x)}{F(x)}$, où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre à l'∞ en x$\}$.

Démonstration : Si $b > 0$ pour la suite (X_n), on peut extraire de la suite

$$F_k(\lambda) = \int_{B_k} F(\lambda Y_k) \, dP$$

qui est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions d'Orlicz sur $(0,1)$ une sous-suite convergente vers $F_2(\lambda)$, en remarquant que pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$, $\lim \frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)}$ existe car $\frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)} \leq \Phi(\lambda)$ d'après (1) et donc que par le théorème de Lebesgue et un argument standard

$$\lim_{\mathcal{U}} \int \frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)} F(Y_k) \, dP$$

existe, on a F_2 sous la forme indiquée dans le lemme. La convergence de F_k vers F_2 étant uniforme, on peut alors choisir une sous-suite Y_{k_n} de Y_k telle que

$$|F_{k_n}(\lambda) - F(\lambda)| \leq 2^{-n}$$

pour tout $0 < \lambda \leq 1$ et donc $[Y_{k_n} 1_{B_{k_n}}]_{L_F}$ est isomorphe à ℓ_F d'après le lemme de perturbation.

Si l'on pose maintenant $Z_n = Y_{k_n} 1_{B^c_{k_n}}$ la suite Z_n est équi-intégrable et presque invariante par réarrangement en norme puisque Y_{k_n} et $Y_{k_n} 1_{B^c_{k_n}}$ le sont.

Lemme 11 : Si $(\hat{Y}_n)$ est une suite équi-intégrable et presque invariante par réarrangement en norme alors il existe une suite de variables aléatoires (U_n), invariante par réarrangement (en loi) telles que

$$[U_n]_{L_F}(\Omega', \mathcal{A}', P') \quad \text{et} \quad [\hat{Y}_n]_{L_F}(\Omega', \mathcal{A}, P) \text{ soit isomorphes.}$$

La démonstration de ce lemme se trouve dans ([4], lemme 3.3.7) et est analogue à celle donnée dans [5].

Le théorème est alors démontré en utilisant les lemmes 9 et 11 et le théorème 1.

Dans le cas général d'un espace $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P, E)$, où E est un espace de Banach convenable, on a un théorème analogue, l'espace d'Orlicz ayant seulement une forme un peu plus compliquée.

Bibliographie

[1] Hoffmann-Jørgensen
Preprint series 1972-73, n° 15 - Matematisk Institut Aarhus

[2] Kwapien
Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73 - Ecole Polytechnique, Exposé VI.

[3] Neveu
Martingales à temps discret. Masson-Paris.

[4] Dacunha-Castelle et Schreiber
Annales IHP, octobre 1974 (à paraître).

[5] Dacunha-Castelle
Séminaire Strasbourg, même volume.