D. DACUNHA-CASTELLE

# Processus et espaces de Banach invariants par réarrangement

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 246-267

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__246_0>

# PROCESSUS ET ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR REARRANGEMENT

par D. DACUNHA-CASTELLE

Les processus échangeables sont l'analogue en temps continu des suites de variables échangeables. L'étude de ces dernières est, comme chacun sait, une variation très simple sur le cas indépendant et équidistribué. Contrairement à l'idée que l'on pourrait se faire, il n'en est nullement ainsi pour le cas des processus, en particulier lorsque le temps varie dans un ensemble borné. Pour un temps dans $\mathbb{R}^+$, le problème a trouvé différentes solutions [2], [6]. Pour un temps dans $[0, 1]$ on a une situation renversée. Les processus échangeables sont les objets simples et les processus à accroissements indépendants les objets compliqués. Le premier exposé complet sur les processus échangeables est récent [6]. L'idée de base, tirée d'un problème classique sur les sondages est due à Rosen.

Le but de cet exposé est d'étudier certains rapports entre processus et espaces de Banach invariants par réarrangement et notamment de résoudre un problème d'isomorphismes entre espaces d'Orlicz où les méthodes non probabilistes n'ont rien donné à ce jour. Donc nous n'avons fait que donner les définitions et quelques résultats essentiels, sur les processus échangeables, en insistant sur l'aspect points extrêmaux, qui n'est pas introduit dans [6] et que nous utilisons ensuite. Nous avons fait aussi une courte disgression sur les groupes amenables, car il nous semble y avoir là des voies de travail intéressantes.

# I. PROCESSUS ECHANGEABLES. DEFINITIONS ET REMARQUES

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des intervalles à extrémités dyadiques sur $[0, 1]$ ; $I_k^n = ]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ ; un processus échangeable $X_t$, $t \in$ {dyadiques} est un processus tel que la loi des variables $\{X_k^n = X(\frac{k+1}{2^n}) - X(\frac{k}{2^n}), k = 1 \dots 2^n\}$ (avec $X(\frac{2^n+1}{2^n}) = X(0)$) soit une loi échangeable sur $\mathbb{R}^{2^n}$ c'est-à-dire invariante par permutation des coordonnées.

En identifiant $\omega$ et $(X_k^n(\omega))_{\substack{k=1 \dots 2^n \\ n \in \mathbb{N}}}$, on identifie le processus X avec une mesure sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$, invariante pour le groupe $H = \bigcup_n \sigma_{2^n}$ ; les groupes $\sigma_{2^n}$ de permutations formant une famille croissante de groupes. Si f est une fonction bornée sur $\Omega = \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ on a $(\sigma f)(\omega) = f(\sigma \omega)$ pour $\sigma \in G$. Si on désigne par $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite décroissante des $\sigma$-algèbres des événements $\sigma_{2^n}$ invariants, $\mathcal{B}_n \downarrow \mathcal{B}_\infty$, $\sigma$-algèbre des événements H-invariants.

Pour ne pas étudier des problèmes de mesurabilité totalement disjoints de la suite de cet exposé, on admettra que les processus étudiés sont tels que les dyadiques forment une partie séparante, et on pourra alors considérer $X_t$ défini pour tout $t \in (0, 1)$. [On pourra utiliser la méthode indiquée plus loin pour l'étude des points extrêmaux discrets pour montrer qu'un processus échangeable est nécessairement continu en probabilité]. Il est alors facile de montrer qu'un processus échangeable peut être réalisé sur D (0, 1) espace des fonctions cad-lag.

On a pour ces processus une loi des grands nombres, à savoir que si l'on pose

$$\theta_n = \frac{\sum_{\sigma \in \sigma_{2^n}} \sigma}{2^n\,!} \qquad \text{et si} \quad f \in L^\infty(\Omega, P)$$

on a $\theta_n f = E^{\mathcal{B}_n} f \longrightarrow E^{\mathcal{B}_\infty} f$ la convergence ayant lieu dans $L^1(P)$ et P.ps (P étant la mesure invariante associée au processus). Ceci résulte simplement du théorème des martingales renversées [7].

Exemple : Soit g (x, y) une fonction de 2 variables. Alors

$$\theta_n f(\omega) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \; \Sigma \; g\left( \sum_{k \in A} X_k^n \; , \; \sum_{k' \in A^c} X_{k'}^n \right)$$

$$A = \{\text{ensemble de } 2^{n-1} \text{ intervalles } I_k^n \text{ disjoints}\}$$

$$\xrightarrow{L_1 \text{ et ps}} \; E^{\mathcal{B}_\infty} \, g(X_1^2 \; , \; X_2^2)$$

Cette loi des grands nombres sera le point essentiel pour définir les points extrêmaux du convexe des processus échangeables. On peut faire à ce propos une disgression pour obtenir ce type de théorème limite. La situation naturelle paraît être la suivante : un espace mesuré $(\Omega , \mathcal{A})$, un groupe amenable dénombrable, (c'est-à-dire un groupe muni d'une moyenne invariante) une probabilité P sur $(\Omega , \mathcal{A})$ H-invariante.

C'est le cas d'une suite de variables échangeables, c'est aussi le cas d'une suite stationnaire de variables aléatoires, le groupe étant alors $\mathbb{Z}$ et le théorème, le théorème ergodique (en fait, comme il y a beaucoup de moyennes invariantes sur $\mathbb{Z}$ on devrait dire les théorèmes ergodiques). On peut démontrer tous ces théorèmes de convergence dans $L^1$ (P), pour cette structure $(\Omega , \mathcal{A} , P, H)$ en une seule fois en utilisant le théorème suivant (non publié, car la démonstration est beaucoup plus simple directement dans chaque cas particulier utilisé

Théorème : Si H est un groupe amenable discret (doté d'une moyenne invariante), si $Y_k$ est une partie finie de G, $Y_k \uparrow G$ si $\theta_k$ est la moyenne des éléments de $Y_k$ alors $\theta_k f \xrightarrow[L^1(P)]{} E^{\mathcal{B}_\infty} f$ où $\mathcal{B}_\infty$ est la $\sigma$-algèbre des événements invariants. La démonstration de ce théorème se fait à partir du théorème (difficile) de structure des groupes amenables en utilisant la méthode des algèbres archimèdiennes due à J.L. Krivine. De plus J.L. Krivine a aussi donné une méthode qui permet de montrer que la caractérisation des points extrêmaux que l'on verra au paragraphe suivant est encore valable dans le cadre général. Nous avons fait cette disgression pour inciter à des réflexions sur le problème suivant = y-a-t-il des méthodes unifiantes pour obtenir des théorèmes de convergence presque sûre ?

## II. LE CONVEXE DES PROBABILITES INVARIANTES

Supposons $H = \cup G_n$, $G_n$ famille croissante de groupes finis opérant sur $L^\infty(\Omega)$. Soit P une probabilité G invariante sur $\Omega$ élément du cône des mesures positives et soit $\mathcal{G}$ le convexe des probabilités invariantes.

Soit $\mathcal{B}_n$ la $\sigma$-algèbre des événements de $\mathcal{A}$, qui sont $G_n$-invariants. $\mathcal{B}_n$ décroît vers une $\sigma$-algèbre $\mathcal{B}_\infty$ dite $\sigma$-algèbre des événements H-invariants $(E^{\mathcal{B}_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ est pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ une martingale renversée et donc $E^{\mathcal{B}_n} f \to E^{\mathcal{B}_\infty} f$ ps et $L_1$ comme nous l'avons vu.

Proposition 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un point extrêmal du convexe des probabilités invariantes sur $\Omega$ est que P soit $\mathcal{B}_\infty$-triviale c'est-à-dire qu'il existe $\omega_o$ tel que la restriction de P à $\mathcal{B}_\infty$ soit $\delta_{\omega_o}$.

Démonstration :

Si P n'est pas $\mathcal{B}^\infty$ triviale, il existe $B \in \mathcal{B}^\infty$ telle que $0 < a = P(B) < 1$.

Il est alors clair que $P(./B)$ est H-invariante. En effet

$$P(gA/B) = \frac{P(gA.B)}{P(B)} \quad , \quad g \in H$$

$$P(gA \cap B) = P(A \cap g^{-1}(B))$$

$$= P(A \cap B) \text{ puisque } B \in \mathcal{B}^\infty .$$

On a de même $P = a\,P(./B^c)$, H-invariante est donc

$$P = a\,P(./B) + (1-a)\,P(./B^c)$$

n'est pas extrêmale.

Soit maintenant $P = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$ ; avec P, $\mathcal{B}^\infty$-triviale, donc $P_1$ et $P_2$ sont aussi $\mathcal{B}^\infty$ triviales.

Soit $f = \dfrac{dP_1}{dP}$ .

On a $gf = f$ Ppp. pour tout $g \in H$

(invariance de P et $P_1$).

Posons $f^* = \inf\limits_{g \in H} gf$ . Comme H est dénombrable

$f = f^*$ Ppp et $gf^* = f^*$ pour tout $g \in G$ partout. Donc $f^*$ est $\mathcal{B}^\infty$ mesurable.

Si $P_1 \neq P$, pour tout c, $P(f^* = c) \leq 1$ et il existe a tel que $0 < P(f^* < a) < 1$, or $(f^* < a) \in \mathcal{B}^\infty$ donc P n'est pas triviale.

On a dans la pratique de nombreux événements invariants par échangeabilité. Nous aurons à en utiliser certaines :

1 - $(X(1) - X(0) \leq a)$

2 - (le plus grand saut de $X_t$ est $\leqq$ a)

3 - (la p-variation de $X_t$ est $\leqq$ a).

Ces événements sont de probabilités 0 ou 1 pour un processus extrêmal.

Ceci montre en particulier que (sauf la translation) les processus à accroissements indépendants ne sont pas extrêmaux.

## III. CARACTERISATION DES POINTS EXTREMAUX

Les résultats énoncés ci-dessous résultent aussi de [6]. Nous ne donnerons pas ici de démonstration complète renvoyant à [6] . Nous nous contenterons de donner une démonstration dans le cas très simple des processus croissants. Remarquons d'abord que X (1) - X (0) est constant car invariant par réarrangement. On peut donc considérer à un coefficient près X comme une probabilité aléatoire sur [0, 1] invariante par réarrangement. En identifiant alors $\omega$ à une probabilité, on peut décomposer $\omega$ en $\omega = \omega_{at} + \omega_d$ où $\omega_{at}$ est la partie atomique de $\omega$ et $\omega_d$ la partie diffuse.

L'espace des probabilités étant convenablement mesuré (par ses boréliens) l'application $A_t^{-1} : \omega \longrightarrow \omega_{at}$ est mesurable et l'image par $A_t^{-1}$ de P est une probabilité $A_t^{-1}$ P concentrée sur les probabilités atomiques.

Le groupe des réarrangements d'intervalles dyadiques opère (sans difficulté) sur $\Omega$ = {probabilités sur 0, 1} et si P est invariante, $A_t^{-1}$ P l'est aussi (immédiat). De même pour la partie diffuse. S P est extrêmale dans $\mathcal{G}$ il en est de même des probabilités $A_t^{-1}$ P et $d^{-1}$ P (correspondant à la partie diffuse). On peut donc étudier séparément ces quantités.

Proposition 2 : le seul processus croissant extrêmal, diffus, est la translation.

Démonstration : Notons

$$X_k^n(\omega) = \omega(I_k^n) \quad , \text{ et } v_n = \operatorname{Var} X_k^n \quad , \quad C_n = \operatorname{cov}(X_1^n, X_2^n) \ .$$

On a $\qquad E\, X_k^n = 2^{-n}$

Les trajectoires étant continues, sont uniformément continues. De plus $\eta(\omega)$ est le module de continuité uniforme $(\omega\ (\eta\ (\omega) < a)$ est invariant donc sa probabilité est 0 ou 1 pour un processus extrêmal. Par suite les trajectoires sont uniformément continues.

On a :

$$\sum_{i=1}^{2^n} |X_i^n - 2^{-n}|^2 \leq 2 \max_i (|X_i^n| + 2^{-n}) \longrightarrow 0$$

d'après la propriété d'uniformité ci-dessus.

De plus $\sum_{i=1}^{2^n} X_i^n - 1 = 0$ , donc

$$v_n + (2^n - 1)\, c_n = 0$$

$2^n v_n = E \sum_i |X_i^n - 2^{-n}|^2 \longrightarrow 0$ d'après le théorème de Lebesgue. Soit $t = k_n/2^n$

$$E \left| \sum_{i=1}^{k_n} (X_i^n - 2^{-n}) \right|^2 = k_n v_n + k_n (k_n - 1)\, c_n \longrightarrow 0$$

d'où le résultat pour $t$ dyadique et par continuité pour tout $t$, $X_t = t$ .

Proposition 3 : Tout processus échangeable croissant de saut pur, est de la forme (en tant que probabilité aléatoire) $\sum_j \beta_j\, \delta\, U_j$ où $(\beta_j)$ est une suite de constantes positives $\Sigma \beta_j < \infty$ et $U_j$ une suite de variables indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$ .

Démonstration : La probabilité $\omega$ étant discrète, supposons qu'elle admette une plus grande masse (qui est constante puisque le processus est extrêmal). Au rang $n$ considérons les applications $\Omega \longrightarrow \Omega$ ainsi définies. $T_m$ est la permutation qui échange les intervalles $]\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ et $]\frac{S}{2^n}, \frac{S+1}{2^n}]$ , ce dernier intervalle étant celui de pas $2^{-n}$ qui contient la plus grande masse. Choisissons une suite $m(n)$ telle que $\frac{m(n)}{2^n} \rightarrow t$ .

Considérons les variables aléatoires $(U_n)$ position des n-sauts tous classés par taille décroissante et supposés distincts. (Il est immédiat de voir que ces variables sont mesurables). On considère une fonction bornée $h(U_1 \dots U_n)$. On a $E\, h(U_1 \dots U_n) = E\, h(U_1 + S, \dots, U_n + S)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme : Les processus $T_{m(n)} X$ et $X$ ont même loi. La démonstration se fait en décomposant $\Omega$ suivant les valeurs possibles de S et en sommant après avoir utilisé à S fixé l'invariance par réarrangement (S joue le rôle d'un temps d'arrêt).

Donc $$\int_0^1 E\, h\,(U_1 + s, U_2, \ldots U_n)\, ds = E \int_0^1 h\,(s, U_2 \ldots U_n)\, ds\ ,$$

donc $U_1$ est indépendant de $U_2 \ldots U_n$, d'où la proposition par induction. Si les tailles des masses ne sont pas distinctes, on les rend distinctes par adjonction de petites masses et on utilise la convergence en loi des processus.

Le cas général [6] passe par l'étude de la variation quadratique. Sa finitude par un processus extrêmal est la seule partie difficile de l'étude de ces processus. (Si les processus de variation quadratique sont finis c'est nécessairement une translation pour la partie diffuse).

Le théorème général [6] est le suivant :

Théorème 1 : Tout processus échangeable extrêmal est du type suivant

$$X_t = \alpha + \beta\ t + \gamma\ .\ W_t + \Sigma\ \beta_j\ [\ 1_{[0,\ 1]}\ (U_j) - t]$$

où $W_t$ est le pont brownien, c'est-à-dire le processus gaussien échangeable sur (0,1) (où le mouvement brownien "conditionné" par X (1) = 0) et les masses $p_j$ vérifient $\sum_j \beta_j^{\,2} < \infty$ ; les $(U_j)$ et W sont des variables indépendantes ; les $U_j$ de loi uniforme sur (0, 1).

(La démonstration montre de plus que les points extrêmaux forment un fermé).

Corollaire 1 [5] : Un processus échangeable est un processus de type précédent où $(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ ,\ (\beta_j)\ )$ sont des variables aléatoires, les $\beta_j$ devant alors être ordonnées au sens $\beta_1 \leqq \beta_3 \leq \ldots < 0 \ldots \leq \beta_4 \leq \beta_2$ .

Remarque importante :

1)- Les processus à accroissements indépendants (PAI) ne sont pas des éléments extrêmaux. Donc une trajectoire d'un (PAI) n'est jamais qu'une trajectoire du processus échangeable extrêmal "tirée au sort" suivant la mesure de représentation du PAI. Il est donc plus logique et plus facile d'étudier certaines propriétés invariantes par réarrangement comme les variations des trajectoires sur les processus échangeables, et d'en déduire les propriétés correspondantes pour les PAI. 2)- Il y a en général obstruction à l'extension d'un processus échangeable défini sur (0,1) en un processus échangeable défini sur (0, T). La forme des éléments extrêmaux fait pressentir la validité du théorème suivant [6] .

Théorème : Si un processus échangeable sur (0,1) s'étend en un processus échangeable sur (0, T) pour tout T, c'est la trace d'un P.A.I. défini sur $\mathbb{R}^+$ .

Nous aurons besoin de la notion de processus invariant par réarrangement.

Définition : Un processus échangeable est dit invariant par réarrangement si la loi de $(\epsilon_1 X^n_{\sigma(1)}, \dots \epsilon_{2^n} X^n_{\sigma(2^n)})$ est invariante pour tout choix de $\epsilon_i$ , $\epsilon_i^2 = 1$, $i = 1 \dots 2^n$ et pour tout choix de $\sigma \in \mathfrak{S}_{2^n}$ .

Le passage des processus échangeables aux processus invariants par réarrangement n'est pas complètement trivial.

Les points extrêmaux du convexe des processus invariants par réarrangement ne sont pas des points extrêmaux du convexe des processus échangeables.

Théorème 2 : Tout processus invariant par réarrangement et extrêmal est du type :

$$X_t = \sigma\ W_t + \sum_j \epsilon_j\ \beta_j\ [1_{(0,\ t)}(U_j) - t]$$

où $(\epsilon_j)$ est une suite de variables de Bernouilli indépendantes et indépendantes des $U_j$, uniformément distribuées et $\beta_j$ une suite de constantes, $\sum_j \beta_j^2 < \infty$ .

Quoique la démonstration de ce théorème ne soit pas publiée, nous ne la donnerons pas ici mais nous utiliserons ce résultat (le groupe associé est le groupe produit (bilatère) des permutations et des multiplications par $\pm 1$).

## IV. FORMES LINEAIRES ALEATOIRES ET ESPACES DE BANACH ASSOCIES A UN PROCESSUS INVARIANT PAR REARRANGEMENT

Soit E l'espace des fonctions étagées sur $[0, 1]$ construites sur des intervalles à extrémités dyadiques $I_k^n = ]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $k = 1, \ldots 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit X un processus invariant par réarrangement. Si $f \in E$, $f = \Sigma \lambda_j \cdot 1_{I_{k_j}^{n_j}}$.

On pose $X(f) = \Sigma \lambda_j X_{k_j}^{n_j}$.

Soit d une distance définie sur un sous-espace de $L^o(\Omega, \mathcal{A}, P)$, invariante par le groupe $\epsilon\sigma$ sur X (E). On note alors $[X(E), d]$ le complété de X (E) pour d. Si $f \in E$, on pose $d(0, f) = d(0, X(f))$. E est alors un espace métrique. On note $[E, X, d]$ son complété.

Notre problème est de caractériser les espaces $[X(E), d]$ et $[E, X, d]$ pour certaines distances associées à une fonction d'Orlicz F, c'est-à-dire une fonction convexe sur $\mathbb{R}^+$, $F(0) = 0$, modérée au sens où $F(2x) < k F(x)$ pour tout x et un certain $k > 1$.

L'espace d'Orlicz $L_F(0, 1)$ est alors l'espace des classes de fonctions mesurables f telles que $\int_o^1 F(f)\, dx < \infty$, muni de la norme définie par $\int_o^1 F\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = 1$.

Pour étudier les espaces $[X(E), F]$ associés aux normes d'Orlicz et $[E, X, F]$ nous allons d'abord étudier les cas extrêmaux, le passage au cas général se faisant par sommes continues d'espaces d'Orlicz.

<u>Lemme 1</u> : Si $X_t$ est le pont brownien, F une fonction d'Orlicz, $[X, E, F]$ est isométrique pour tout F à $[X, E, x^2]$ et $[E, X, d]$ est isomorphe à $L^2$.

<u>Démonstration</u> : L'isométrie est triviale.

Soit $f = \sum_{j=1}^{2^n} \lambda_j \; 1_{I_j^n}$

$$EX(f) = 0 \qquad \text{et posant}$$

$$v_n = E(X_j^n)^2 \quad , \qquad c_n = \operatorname{cov}(X_1^n, X_2^n)$$

il vient :

$$E\,X(f)^2 = \sum_j \lambda_j^2 \, v_n + \sum_{i \neq j}\sum \lambda_i \lambda_j \, c_n$$

Or de $\sum_n X_j^n = 0$ , il vient $v_n + (2^n - 1)\, c_n = 0$

donc

$$E\,X(f)^2 \leqq 3\, \|f\|_{L^2}$$

et

$$E\,|X(f)|^2 \geqq \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n - 1}\right) \sum_j \lambda_j^2 + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^n - 1}\left(\sum_j \lambda_j\right)^2$$

$$\geqq \frac{1}{2}\, \|f\|_{L^2} \ .$$

Lemme 2 : Si X est un processus invariant par réarrangement et extrêmal (différent du pont brownien), si $F \in K(2, 1)$ c'est-à-dire si $\frac{F(x)}{x^2}$ est une fonction décroissante, alors il existe une fonction G de la forme

$$G(x) = \int_0^1 (F(\lambda x) \cap \lambda^2 x^2)\, dM(\lambda) \tag{1}$$

où M est une mesure de Lévy sur $(0, 1)$ $\left( \int_0 \lambda^2 \, dM(\lambda) < \infty \right)$ telle que

$$[E, X, F] \sim L_G(0, 1) \tag{2}$$

et la constante d'isomorphisme peut être choisie indépendamment de F et X . Réciproquement si G a la forme (1) il existe un processus échangeable X tel que l'on ait (2).

Démonstration : On a , d'après la forme des processus extrêmaux

$$E\,F(X(f)) = E\,F\left(\sum_j \gamma_j \, \epsilon_j \, f(U_j)\right)$$

où les $U_j$ sont une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées. Posons $V_j = \epsilon_j \, f(U_j)$ . Les $V_j$ forment une suite de variables aléatoires symétriques, équidistribuées indépendantes. On peut leur appliquer les résultats démontrés par exemple dans [3] .

<u>Lemme 3</u> : Si $E \sum_j (1 \cap \gamma_j^2 \; V_j^2) \leq \frac{1}{4}$ on a

$$E\,F\,(\sum_j \gamma_j \; \epsilon_j \; V_j) \sim \sum_j E\,F\,(\gamma_j \; V_j)$$

les constantes d'équivalence étant universelles pour $F \in K\,(2,\,1)$ et $(V_j)$ suite de variables indépendantes de $L_F\,(\Omega\,,\,\mathcal{A}\,,\,P)$. Posons $G\,(x) = \sum_j F\,(\gamma_j\,x)$, avec la convention fondamentale pour que G soit définie partout, que $F\,(x) \sim C\,x^2$ à l'origine (ce qui est toujours possible et ne restreint pas la généralité, en prenant par exemple

$F\,(x) = \int_0^1 (1 - \cos t\,x)\,dN\,(t)$ , N mesure de Lévy (cf. [4] sur cette représentation).

On a alors, en choisissant $\theta$ tel que $E\,F\,(\Sigma\,\gamma_j \; \epsilon_j\,\theta\,f\,(U_j) \leq 1/4$ ce qui implique d'après la forme de F que

$$E\,(\sum_j 1 \cap \gamma_j^2 \; \theta^2 \; V_j^2) \leq 1/4$$

que

$$\begin{aligned} E\,F\,(\,\Sigma\,\gamma_j\,\epsilon_j\,\theta \;\; V_j) &\sim \sum_j E\,F\,(\gamma_j\,\epsilon\,f\,(U_j) \\ &= \Sigma \int_0^1 F\,(\gamma_j \;\; \epsilon_j\,f\,(x)\,) \\ &= \int_0^1 G\,(\,|g\,(x)|\,)\,dx \end{aligned}$$

<u>Remarques</u> : 1 - Si le nombre des $\gamma_j \neq 0$ est fini, alors $G \sim F$. Autrement dit il existe une injection de $L_F\,(0,\,1)$ dans $L_F\,(\Omega\,,\,P)$ réalisé par des processus quasi-triviaux dont l'équivalent n'existe ni pour des espaces de suites, ni pour des espaces de mesure non bornée.

2 - Le cas de $L^o$ s'obtient de manière identique, avec les fonctions du type $G\,(x) = \sum_j 1 \wedge \gamma_j^2\,x^2$ . En particulier en prenant $\gamma_j = j^{-\alpha}$ , $\alpha > 1/2$ , on obtient $L_G = L^{2 - 1/\alpha}$ , ce qui est une manière intéressante d'obtenir des isomorphismes de $L^p\,(0,\,1)$ dans $L^o\,(\Omega\,,\,\mathcal{A}\,,\,P)$ sans passer par les processus stables.

3 - Le cas général pour F est traité dans un preprint. Le résultat valable pour tout F, ne fait plus jouer un rôle spécial à la fonction $x^2$.

Passons maintenant au cas général (supposons qu'il n'y a pas de partie brownienne).

$$E\,F(f(X)) = \underset{\omega}{E}\ \underset{\omega'}{E}\ \underset{\omega''}{E}\ F'\Big[\sum_j \lambda_j(\omega)\,\epsilon_j(\omega')\,f(U_j(\omega''))\Big]$$

M étant fixé, posons

$$A_M = \{\omega,\ \sum_j \int_0^1 1 \wedge \gamma_j^2(\omega)\,M^{-1} f^2(x)\,dx < \frac{1}{4}\}$$

En appliquant le lemme 2, on voit que

$$\underset{\omega'}{E}\ \underset{\omega''}{E}\ F\Big(\sum_j \lambda_j(\omega)\ \epsilon_j(\omega')f(U_j(\omega'')\,M^{-1})\Big) \sim \sum_j \underset{\omega'}{E}\ \underset{\omega''}{E}\ F\big(\gamma_j(\omega')\,\epsilon_j(\omega')\,f(U_j(\omega'')M^{-1})\big)$$

les constantes d'équivalences étant indépendantes de $\gamma_j$ et de M.

Posons maintenant :

$$\theta_M(\omega, f) = \inf\{\theta,\ \underset{\omega',\,\omega''}{E}\ F(\Sigma\ \gamma_j(\omega)\ \epsilon_j(\omega')\,f(U_j(\omega'')\ M^{-1}\ \theta^{-1})) \leq 1\}$$

et posons $\qquad G(x,\omega) = \sum_j \int_0^1 F(|\gamma_j(\omega)\,x|)\,dx \qquad ;$

on a un isomorphisme (de bornes indépendantes de M) de $L_G$ dans $L_F(\Omega' \times \Omega'')$ défini par $f \longrightarrow \sum_j \gamma_j(\omega)\,\epsilon_j(\omega')\,f(U_j(\omega''))$ avec comme normes respectives

$$\|f\|_{L_{G(\omega)}} \qquad \text{et} \qquad M\,\theta_M(\omega, f)$$

On a maintenant $A_M \uparrow \Omega$

On a donc la même expression en intégrant en $\omega$ sur $A_M$.

Posons $\qquad \theta_M(f) = \inf\{\theta,\ E\ \Sigma\gamma_j\,\epsilon_j\,f(U_j)\,M^{-1}\,\theta^{-1} \leq 1\}$

et $\qquad G_M(x) = \sum_j E\,F\ (\gamma_j\ \epsilon_j\ f(U_j)\,1_{A_M})$

Alors on a un isomorphisme d'espaces de Banach de normes indépendantes de M (après le lemme 2) défini par $f \longrightarrow f(X)\,1_{A_M}$ de $L_{G_M}$ dans $L_F$. On a

$$\|f\|_{G_M} \uparrow \|f\|_G \qquad \text{lorsque} \quad M \longrightarrow \infty$$

ou

$$G(x) = \lim \uparrow G_m(x) = \sum_j \int_o^1 \int_{\mathbb{R}^+} F(xy)\, d\nu_j(y)$$

où $\nu_j$ est la loi de $\gamma_j$.

En posant $dM(y) = \Sigma\, d\nu(y)$ et en remarquant que $\Sigma\, \gamma_j^2 < \infty$ implique $\int x^2\, dM(x) < \infty$ d'après le théorème des 3 séries, on obtient le théorème.

La réciproque est aisée car $\int F(xy)\, dM(y)$ représente la fonction déterminant la fermeture dans $L_F$ de X (E) où X est le processus à accroissements indépendants définis par la mesure M.

Pour terminer, s'il y a une partie brownienne, comme elle est indépendante de la précédente, on peut appliquer les inégalités de Jenssen et $F(2x) < k F(x)$. Désignant par W la partie brownienne et U la partie non brownienne on a :

$$E\, F(W(f) + U(f)) \geqq E\, W(f)$$

$$E\, F(W(f) + U(f)) \geqq E\, U(f)$$

par Jenssen

et $$E\, F(W(f) + U(f)) \leqq k\, [E\, F(W(f)) + E\, F(U(f)]$$

et $$\|W(f)\|_F \sim \|W(f)\|_2$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit $X_t$ un processus invariant par réarrangement ayant une partie non brownienne.

Soit F (x) une fonction d'Orlicz telle que $\frac{F(x)}{x^2} \downarrow$. Alors l'espace [E , X, F] est isomorphe à un espace d'Orlicz $L_G$ (0, 1) où G admet la représentation (1) du lemme 2.

## V. APPLICATIONS AUX ESPACES D'ORLICZ

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : étant donné un espace d'Orlicz $L_F$, à quelles conditions sur G a-t-on $L_G \to L_F$ ? Dans [2], ce problème est résolu si $F(x) = x^p$ $1 \leq p \leq 2$. Dans [1] des conditions nécessaires sont données et dans [3] des conditions suffisantes. On dire que $F \in K(p, q)$ si $\frac{F(x)}{x^p} \downarrow$ et $\frac{F(x)}{x^q} \uparrow$.

Supposons avoir un plongement X d'un espace d'Orlicz $L_G(0, 1)$ dans un espace d'Orlicz $L_F(0, 1)$.

On note $X(I_k^n) = X_k^n$, avec les notations précédentes.

Un élément de $\mathcal{D}$ ensemble des réunions finies d'éléments dyadiques est de pas $2^{-n}$ si $2^{-n}$ est la longueur du plus petit intervalle figurant dans l'élément.

$\mathcal{D}^a$ désignera l'ensemble des éléments de mesure de Lebesgue a, $\mathcal{D}^a$ est ordonné a) par pas décroissant, b) par l'indice du premier k ne figurant pas, puis du deuxième, etc... Notons $D_n^a$ la suite ordonnée des éléments de $\mathcal{D}^a$ et supposons avoir un plongement $L_G(0, 1) \longrightarrow L_F(0, 1)$. Soit $(U_n^a)$ l'image de $D_n^a$ dans ce plongement.

<u>Lemme 4</u> : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 < \infty$ alors $E\left(\sum_{\mathbb{N}} c_n \epsilon_n 1_{D_n^a}\right) < \infty$, si $(\epsilon_n)$ est une suite des variables de Bernouilli indépendantes et indépendantes des $1_{D_n^a}$. Le lemme 4 résulte immédiatement du lemme 5, plus général ci-dessous.

<u>Lemme 5</u> : Soit $(X_i)_{i=1\ldots n}$ une suite de v.a. telles que :

$$\|X_i\|_\infty \leq 1 \qquad i = 1 \ldots n.$$

$$\|X_i\|_2 \geq a > 0$$

Soit $\epsilon_i$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli indépendante et indépendantes des $X_i$. Alors pour toute fonction $G \in \Delta_2$ (et plus généralement pour tout espace interpolable entre espaces $L_G$) on a :

$$E_\epsilon \int_o^1 G[\Sigma(\lambda_i \; \epsilon_i \; X_i)] \sim C(G, a)\, G(|\Sigma \lambda_i|^2)^{1/2}$$

Autrement dit les inégalités de Khintchine sont valables dans l'espace produit pour la suite $\epsilon_i \cdot X_i$ .

Démonstration : On a :

$$E_\epsilon \int_o^1 G\,\Sigma(\lambda_i \; \epsilon_i X_i) = \int_o^1 E_\epsilon \; G(\Sigma \; \lambda_i \, \epsilon_i \, X_i)$$

$$\leqq C_1(G) \int_o^1 G[(\Sigma \; \lambda_i^2 \; X_i^2)^{1/2}]$$

inégalité de Khintchine sous la forme Buckholder-Gundy)

$$\leqq C_1(G)\, G[(\Sigma \; \lambda_i^2)^{1/2}]$$

Supposons maintenant G tel que $H(x) = G(\sqrt{x})$ soit convexe (en fait il suffit de prendre $G(x) = x^{2p}$ , $p > 1$).

On a :

$$\int_o^1 E_\epsilon \; G(|\Sigma \; \lambda_i \; \epsilon_i X_i|)$$

$$\geqq \int_o^1 G(E_\epsilon \; |\Sigma \; \lambda_i \; \epsilon_i X_i|) \qquad \text{(inégalité de Jessen)}$$

$$\geqq \int_o^1 G[(C_2(G)(\Sigma \; \lambda_i^2 \; X_i^2)^{1/2}]$$

$$\geqq H(C_2(G) \int_o^1 \Sigma \; \lambda_i^2 \; X_i^2) \qquad \text{(par convexité de H)}$$

$$\geqq H(C_2(G)\, a \; \Sigma \; \lambda_i^2)$$

Les topologies de $L^2$ et $L_G$ coïncident donc sur le sous-espace de $L^2$ engendré par les $\epsilon_i X_i$ (pour l'espace produit). Donc toutes les topologies de $L_G$ , $G(X)$ fonction d'Orlicz appartenant à $\Delta_2$ coïncident sur $L^2$ et le résultat démontré pour $G(\sqrt{X})$ convexe est aussi valable pour $G(X)$ concave, ceci résultant soit du théorème d'Assouad (cf. [1]) soit simplement de la démarche suivante parallèle à la démonstration de l'inégalité de Khintchine :

a) le résultat est vrai pour $L_G = L^{2p}$ , p entier > 1.

b) par des inégalités type Holder il est vrai pour tout $L^p$.

c) par interpolation, il est vrai pour tout espace interpolable par injection entre deux $L^p$ donc en particulier pour tout Orlicz $L_G$ , $G \in \Delta_2$ (les espaces invariants par réarrangement de ce type pourraient être appelés espaces de Khintchine).

Lemme 6 : Si $E\, G\, (\Sigma\, c_n\, \epsilon_n\, 1_{D_n^a}) < \infty$ , alors $E\, F\, (\Sigma\, c_n\, \epsilon_n\, U_n^a) < \infty$.

Démonstration : Il existe $b > 0$ tel que

$$P\, \|\, \Sigma\, \lambda_n\, \epsilon_n\, 1_{D_n^a}\, \|_G < b) > \frac{1}{2}$$

On a alors d'après l'inégalité (de Kahane) exponentielle classique sur les sommes $\sum_n \epsilon_n\, u_n$ , $u_n$ à valeurs dans un Banach que

$$P_\epsilon\, (\|\, \Sigma\, \lambda_n\, \epsilon_n\, 1_{D_n^a}\, \|_G > nb) \leq e^{-cn} \qquad c > 0$$

et donc si A est la constante d'isomorphisme $L_G \rightarrow L_F$

$$P_\epsilon\, (\|\, \Sigma\, \lambda_n\, \epsilon_n\, U_n^a\, \|_G > A\, nb) \leq e^{-cn}$$

Or il existe $p \geqq 1$ tel que pour toute variable aléatoire Z on a

$$E\, F\, (Z) \leqq \|Z\|^p \qquad , \text{(puisque F satisfait } F\,(2x) \leq k\, F\,(x)\,)$$

et donc de

$$P_\epsilon\, (\|\, \Sigma\, \lambda_n\, \epsilon_n\, U_a^n\|^p > (A\, n\, b)^p \leqq e^{-cn}$$

on tire

$$P_\epsilon\, (E\, F\, (\Sigma\, \lambda_n\, \epsilon_n\, U_a^n\,) < \infty$$

Lemme 7 : Il y a deux cas possible :

a) La suite $F\,(U_a^n)$ est équi-intégrable.

b) Il existe un espace $\ell_{F_1}$ où $F_1\,(x) = \lim_\infty \frac{F\,(\lambda\, x)}{F\,(x)}$ tel que

$$EF(\Sigma\, c_n\, \epsilon_n\, U_a^n) < \infty \text{ implique } \Sigma\, F_1\,(c_n) < \infty$$

soit
$$b = \sup \{ c, \lim_{K\to\infty} \overline{\lim_n}\; EF(U_a^n)\, 1_{(U_n^a > K)} > c\}$$

On peut extraire une sous-suite $U_{n'}^a$ telle que U existe une suite d'entiers $K_{n'}$ avec :

$$U_{n'}^a = V_{n'}^a + W_{n'}^a \quad , \quad V_{n'}^a\ W_{n'}^a$$

$(V_{n'}^a)$ étant équi-intégrable, $W_{n'}^a \to 0$ en posant simplement $V_{n'}^a = U_{n'}^a\, A_{U_{n'}^a < K(n')}$ et $W_{n'}^a \to 0$ en probabilité.

Supposons donc $b > 0$. On peut en utilisant un argument du type du lemme standard de Kadec et Pelczynski (cf. [4]), extraire une nouvelle sous-suite $n''$ telle que les $W_{n''}^a$ soient à support presque disjoints au sens suivant = il existe $Z_{n''}^a$, tel que $|Z_{n''}^a| < |W_{n''}^a|$ et tels que les espaces $[Z_{n''}^a]_F$ et $[W_{n''}^a]_F$ soient, pour tout $\epsilon > 0$, $(1+\epsilon)$ isomorphes, pour cela on choisit $Z_{n''}^a$ tel que son support soit inclus dans celui de $W_{n''}^a$ et $\|Z_{n''}^a - W_{n''}^a\| \leq 2^{-n''}\,\eta$ et $E\,F\,(Z_{n''}^a - W_{n''}^a) < 2^{-n''}\,\eta$.

Notons pour simplifier $U_n^a$ la sous-suite $U_{n''}^a$. On a

$$\begin{aligned}
E\,F\,(\sum_n c_n\,\epsilon_n\,U_n^a) &= E\,F\,(\sum_n c_n\,\epsilon_n\,(V_n^a + W_n^a))\\
&= E\,F\,[\sum_n c_n\,\epsilon_n\,(V_n^a + (W_n^a - Z_n^a) + Z_n^a)]\\
&\geq E_\epsilon \sum_k E\,F\,[(\sum_{n\neq k} c_n\,\epsilon_n\,V_n^a + \epsilon_k\,Z_k^a)\, 1_{Z_k^a \neq 0}]\\
&\quad + E\,F\,[(\sum_n c_n\,\epsilon_n\,V_n^a)\, 1_{\cap_n (Z_n^a = 0)}\\
&\quad - E\,F\,[\sum c_n\,\epsilon_n\,(W_n^a - Z_n^a)]
\end{aligned}$$

où $E_\epsilon$ désigne l'espérance en $\epsilon$. Supposons pour simplifier $\|(c_n)\|_\infty \leq 1$, et appliquons aux variables $(\epsilon_n)$ l'inégalité de Jenssen. Il vient

$$E\,F\,[(\sum_{n\neq k} c_n\,\epsilon_n\,V_n^a + \epsilon_k\,Z_k^a)\,1_{Z_k^a \neq 0}\,]$$

$$\geqq E\,F\,(c_k\,Z_k^a)\ ,$$ et finalement par regroupement

$$E\,F\,(\Sigma\,c_n\,\epsilon_n\,U_n^a) \geqq \Sigma\,E\,F\,(c_n\,W_n^a) - \eta$$

Or si $\Sigma\, c_n^2 < \infty$ , le premier membre converge donc aussi le $2^{\text{ème}}$ et donc aussi $\sum_n E\,F\,(c_n\,W_n^a)$. Mais l'ensemble des fonctions convexes $F\,\{EF\,(\lambda\,W_n^a)]$ est relativement compact. On peut par une technique standard en extraire une sous-suite convergente (dans C (0, 1) muni de la convergence uniforme par exemple) vers une fonction $F_1$. Extrayant une nouvelle sous-suite $U_n^a$ , on a alors $\Sigma\, c_n\, U_n^a$ converge si $\Sigma\, c_n^2$ et implique que $(c_n) \in \ell_{F_1}$ .

Corollaire 2 : Si $F \in K\,(p,\,q)$ , $p < 2$ alors $(U_n^a)$ est équi-intégrable.

En effet on a alors $\ell_{F_1} \subset \ell^2$ avec inclusion stricte.

Nous allons maintenant, grâce au corollaire , étudier la forme de G en symétrisant le processus $(U_n^a)_{\substack{a \in \mathcal{B} \\ n \in \mathbb{N}}}$ pour en faire un processus échangeable.

Lemme 8 : Il existe un processus invariant par réarrangement X tel que

$(X\,(E)\ ,\ F)$ et $[U_n^a\ ,\ F]$ soient isomorphes.

Démonstration : Soit $a = 2^{-m}$, m fixé . Soit $\mu_{\sigma,\epsilon}^{a,n}$ la loi de $\epsilon_1\,U_{\sigma(1)}^a\ ,\ \epsilon_n\,U_{\sigma(n)}^a$ où $\sigma$ est une permutation de $(1,\,\ldots,\,n)$, et $(\epsilon_i)$ une suite de $\pm 1$, et posons

$$\mu_S^{a,n} = \frac{1}{2^n\,n!} \sum_{\sigma,\epsilon} \mu_{\sigma,\epsilon}^{a,n}$$

et soit $\mu_{S,K}^{a,n}$ la $K^{\text{ème}}$ marginale de $\mu_S^{a,n}$ c'est-à-dire l'image de $\mu_S^{a,n}$ dans l'application canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K$ $(K \leqq n)$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de voisinages de $\infty$ dans $\overline{\mathbb{N}}$ . Supposons que les familles $\mu_{S,K}^{a,n}$ forment à K fixé une famille relativement compacte pour la convergence étroite sur $\mathbb{R}^K$.

Posons $$\mu_K^a = \lim_{n,\mathcal{U}} \mu_{S,K}^{a,n}$$

La famille $(\mu_K^a)_{K \in \mathbb{N}}$ est une famille projective sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ et définit un processus invariant par réarrangement, par la formule suivante : Si $\Delta_1 \ldots \Delta_K$ sont K réunions d'intervalles, disjointes, de longueur $a = 2^{-m}$, la loi de $X(\Delta_1) \ldots X(\Delta_k)$ est $\mu_K^a$, la construction assure de la projectivité du système ainsi construit.

Il reste à montrer d'abord que les lois $(\mu_{S,K}^{a,n})$ forment une famille relativement compacte.

Or $\|U_n^a\|_F \geq C(a) > 0$, ce qui est suffisante pour assurer que $(\mu_K^{a,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact (a, K fixé).

Il faut maintenant montrer que les espaces $[U(E), F]$ et $[X(E), F]$ sont isomorphes, X étant le processus invariant par réarrangement défini par le système projectif, défini plus haut, $(\mu_K^a)$.

On sait que pour tout K fixé, les familles de variables aléatoires $F(\sum_{n=1}^{K} c_n \epsilon_n U_{j_n}^a)$ sont équi-intégrables comme somme d'un nombre fixe de variables équi-intégrables ($K, c_1, c_K$ à fixer, $j_1 \neq j_2 \neq j_k$, $j_n \in \mathbb{N}$). Par ailleurs, il existe une constante A avec $A^{-1}\, E\, F(\sum_1^K c_n \epsilon_n U_{j_n}^a) \leq A\; E\, F(\sum_1^K c_n U_n^a)$.

Par sommation et passage à l'image sur $\mathbb{R}^K$ on a donc

$$A^{-1}\, EF(\sum_1^K c_n U_n^a) \leq \int F(\sum_1^K c_n x_n)\, d\mu_{S,K}^{a,n} \leq AEF(\sum_1^K c_n U_n^a)$$

Par suite de l'équi-intégrabilité, le même résultat vaut par passage à la limite en $\mathcal{U}$. D'où l'isomorphisme (car $x \sum c_k U_k^{a_k}$ est une combinaison finie, on peut toujours l'écrire sous la forme $\sum d_n U_n^a$). Le lemme est donc démontré.

Du corollaire (2) et du théorème (3), on déduit :

<u>Théorème 4</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que $L_G(0, 1) \longrightarrow L_F(0, 1)$ ou $F \in K(2,1)$ est que

$$G(x) = \int_0^1 F(\lambda x) \cap \lambda^2 x^2)\, dM(\lambda) \qquad (*)$$

où M est une mesure de Lévy.

On peut se demander à quelles conditions G vérifie cette relation.

Plus précisément nous avons vu dans [2] que dans le cas où $F(x) = x^p$ (∗) équivaut à $\frac{G(x)}{F(x)} \uparrow$ .

Dans [3] nous avons indiqué une méthode pour montrer ce résultat moyennant l'une des conditions supplémentaires $\frac{F(2x)}{F(x)} \uparrow$ ou $\frac{G(2x)}{G(x)} \uparrow$ . L'énoncé donné dans [3] pour $F \in K(2, q)$ est incorrect. Comme nous l'a fait remarquer D.J.H. Garling [5] ce résultat ne vaut que si $K(p, q)$ avec $p < 2$. Le problème reste ouvert de savoir si cette condition $\frac{G}{F} \uparrow$ équivaut à la représentation (∗).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ASSOUAD, P.
Un résultat d'extrapolation pour des espaces d'Orlicz
C.R. Acad. Sc. Paris p. 275 (2.10.72) Série A, p. 651-653.

[2] J. BRETAGNOLLE et D. DACUNHA-CASTELLE
Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces $L^p$.
Ann. Scient Ec. Norm. Sup. 4° série t. 2 (1969), p. 473-480.

[3] D. DACUNHA-CASTELLE
Remarques sur les isomorphismes entre espaces d'Orlicz.
Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. B, vol. IX n° 1 (1973) p. 59-75

[4] D. DACUNHA-CASTELLE et M. SCHREIBER
Annales IHP, 1974 (à paraître).

[5] D.J.H. GARLING
Random measures and in bedding theorems (Cours 3° cycle - Cambridge)

[6] KALLENBERG
Zeit. Wahrsch. Verw. Geb. 27. 23-36, 1973

[7] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI
On Orlicz sequence spaces,
Israel J. Math. I. vol. 10 (1971), p. 379-390 - II. vol. 11 (1972), p. 355-379 - III. Vol. 14 (1973), p. 368-389.

[8] NEVEU
Martingales à temps discret. Masson.