SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

# Les méthodes d'A. Garsia en théorie des martingales. Extension au cas continu

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 213-225

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__213_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

# LES METHODES D'A.GARSIA EN THEORIE DES MARTINGALES
## EXTENSIONS AU CAS CONTINU

par CHOU Ching-Sung

A.GARSIA vient d'écrire un livre sur la théorie des martingales discrètes, dans lequel certains des résultats considérés comme les plus difficiles ( les inégalités de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY, les résultats sur les espaces $H^p$ ) sont établis par de nouvelles méthodes, extrêmement rapides et élégantes. Nous nous proposons ici d'étendre les démonstrations de GARSIA au cas continu. La plupart du temps , il s'agit d'un simple exercice de traduction, mais on rencontre parfois une difficulté intéressante. Dans tous les cas, la comparaison entre le cas discret et le cas continu permet de mieux comprendre la signification des démonstrations, les notations étant plus compactes.

Les références au livre de GARSIA figurent sous le renvoi [G] à la bibliographie. Les autres références sont numérotées.

### 1. UN LEMME ELEMENTAIRE ET SES CONSEQUENCES

1. NOTATIONS

a) $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de tribus satisfaisant aux conditions habituelles de continuité à droite et de complétion dans $\underline{\underline{F}}$.

Nous aurons besoin d'étendre un peu la théorie usuelle de la représentation des surmartingales, de la manière suivante : soit $(X_t)$ une surmartingale positive continue à droite, qui appartient à la classe (D) mais n'est pas nécessairement un potentiel. Soit $X_t = X'_t + E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ sa décomposition de Riesz, et soit $(A'_t)$ le processus croissant intégrable prévisible engendrant $(X'_t)$ au sens usuel. Nous posons

(1) $$A_t=A'_t \text{ pour } 0\leqq t<\infty \quad , \quad A_\infty = A'_\infty + X_\infty$$

et nous avons alors pour tout temps d'arrêt T

(2) $$X_T = E[A_\infty - A_T|\underline{\underline{F}}_T]$$

représentation de $(X_t)$ au moyen d'un processus croissant prévisible qui présente un <u>saut à l'infini</u>. Il est très facile de voir que $(A_t)$ est unique, et nous l'appellerons le processus croissant prévisible engendrant $(X_t)$, comme lorsque $(X_t)$ est un potentiel.

Une autre notion qui intervient dans cet exposé est la suivante. Considérons un processus croissant intégrable $(B_t)$, continu à droite, non nécessairement adapté, ne satisfaisant pas nécessairement à la condition $B_0=0$ ( nous conviendrons que $B_{0-}=0$, de sorte que $dB_s$ peut présenter un saut en 0 égal à $B_0$ ) et pouvant aussi présenter un saut à l'infini. Considérons le processus $(X_t)$, projection bien-mesurable du processus $(B_\infty - B_{t-})$ : pour tout temps d'arrêt T

(3) $$X_T = E[B_\infty - B_{T-} | \underline{\underline{F}}_T]$$

Ce processus est une surmartingale forte ( si $S \leq T$, $X_S \geq E[X_T | \underline{\underline{F}}_S]$ ), en général non continue à droite, appartenant à la classe (D), et <u>régulière</u> : pour tout temps d'arrêt T et toute suite $T_n \uparrow T$ , $E[X_{T_n}] \downarrow E[X_T]$. Inversement on peut montrer que toute surmartingale forte régulière de la classe (D) est ainsi engendrée par un processus croissant $(B_t)$ <u>adapté</u> unique. Ces résultats de représentation ne sont pas tout à fait classiques : ils sont dus à MERTENS dans le cas des surmartingales fortes quelconques, la notion de surmartingale forte régulière ayant été dégagée par AZEMA [1].

b) Nous désignerons par $\varphi$ , dans tout l'exposé, une fonction positive croissante sur $\mathbb{R}_+$ ( à valeurs finies ), et par $\Phi$ la fonction croissante convexe

(4) $$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$$

$\Phi$ ne change pas si l'on remplace $\varphi$ par sa limite à gauche : nous supposerons donc $\varphi$ continue à gauche, en convenant que $\varphi(0)=0$. Nous aurons besoin de l'inégalité

(5) $$\Phi(tx) \leq t\Phi(x) \text{ si } t \leq 1$$

qui exprime simplement que $\Phi$ est convexe et que $\Phi(0)=0$.

Soit $\psi$ la fonction inverse de $\varphi$

$$\psi(t) = \inf \{ s : \varphi(s) \geq t \}$$

croissante et continue à gauche, et soit $\Psi$ la fonction convexe <u>conjuguée</u> de $\Phi$

(6) $$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$$

L'inégalité d'YOUNG est alors classique :

(7) $$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v)$$

On dit que la fonction $\Phi$ est <u>à croissance modérée</u> si $\varphi$ n'est pas bornée ( i.e. si $\Phi(t)/t$ n'est pas bornée : le cas de $\Phi(t)=t$ demande toujours une étude spéciale ) et s'il existe une constante c telle que $\Phi(2t) \leq c\Phi(t)$ - cela revient à exiger la même chose pour $\varphi$, avec une autre constante. Posons dans ce cas

(8) $\quad p = \sup_u \dfrac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}$

On a alors les propriétés suivantes, si $\Phi$ est à croissance modérée

(9) $\quad 1<p\leqq c-1<\infty$

(10) $\quad \Phi(tu) \leqq t^p\Phi(u)$ si $t\geqq 1$ ([G], inégalités III.4.15 )

(11) $\quad \Psi(v) \leqq (p-1)\Phi(\psi(v))$

A l'aide de ces inégalités, nous démontrerons un lemme[1]:

LEMME 1. Soient A et Y deux v.a. positives telles que

(12) $\quad E[\Phi(A)]<\infty$ , $E[\Phi(A)]\leqq E[Y\varphi(A)]$

On a alors si $\Phi$ est à croissance modérée

(13) $\quad E[\Phi(A)] \leqq p^{p+1}E[\Phi(Y)]$

Si $\Phi(t)=t^p$ - y compris pour p=1 - on a l'inégalité plus précise

(13') $\quad E[A^p] \leqq p^pE[Y^p]$ ([G],cf. th.III.4.3, démonstration)

DEMONSTRATION. Nous appliquons l'inégalité d'YOUNG (7)

$$\varphi(A)Y \leqq \Phi(pY) + \Psi(\tfrac{1}{p}\varphi(A))$$

puis $\Phi(pY) \leqq p^p\Phi(Y)$ d'après (10), $\Psi(\frac{1}{p}(\varphi(A)) \leqq \frac{1}{p}\Psi(\varphi(A))$ d'après (5), et (11) nous donne

$$\varphi(A)Y \leqq p^p\Phi(Y)+ \frac{p-1}{p}\Phi(\psi(\varphi(A)) \leqq p^p\Phi(Y)+ \frac{p-1}{p}\Phi(A)$$

On intègre et on utilise (12), et on obtient

$$E[\Phi(A)] \leqq p^pE[\Phi(Y)] + \frac{p-1}{p} E[\Phi(A)]$$

d'où (13) puisque $E[\Phi(A)]<\infty$ . Le cas $\Phi(t)=t^p$ est évident pour p=1 ($\varphi$=1), et sinon on fait un calcul direct en utilisant l'inégalité de HÖLDER

c) On utilise fréquemment la norme d'ORLICZ associée à $\Phi$

$$\|f\|_\Phi \leqq 1 \text{ si et seulement si } E[\Phi\circ|f|]\leqq 1$$

Pour ces normes, consulter le livre de NEVEU [2], p.196-197.

2. LE LEMME DE GARSIA

La clef des méthodes de GARSIA est le lemme élémentaire suivant ([G], théorème III 4.2 ) , que nous appellerons simplement le " lemme de GARSIA" dans la suite. Il faut remarquer que, si l'on se borne à l'écrire pour une fonction $\varphi$ de la forme $I_{]0,\lambda]}$ , de sorte que $\Phi(t)=(t-\lambda)^+$ - ce qui suffit pour déduire le cas général - le lemme de GARSIA est un lemme maximal identique à celui de NEVEU ([2], p.174), aussi donné dans MEYER [3], p.53. La nouveauté consiste en l'emploi systématique de ce lemme, avec toutes sortes de martingales $(Y_t)$ différentes. Il faut remarquer aussi la disparition des temps d'arrêt.

1 Ce lemme est complété plus loin. Voir prop.4, fin de la démonstr.

LEMME 2. <u>Soit</u> $(X_t)$ <u>une surmartingale positive continue à droite, majorée par une martingale</u> $Y_t=E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ , $Y\in L^1_+$ . <u>Soit</u> $(A_t)$ <u>le processus croissant prévisible engendrant</u> $(X_t)$. <u>On a alors</u>

$$(14) \qquad E[\Phi(A_\infty)] \leqq E[\varphi(A_\infty)Y]$$

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer $\varphi$ bornée, de sorte que toutes les intégrales envisagées sont finies. Soit $c_t=\inf\{s : A_s>t\}$. On sait que pour toute fonction positive $f$ sur $\bar{\mathbb{R}}_+$

$$\int_{[0,\infty]} f(s)dA_s(\omega) = \int_0^{A_\infty(\omega)} f(c_s(\omega))ds$$

Appliquons cela avec $f(s)=\varphi(A_s(\omega))$. Comme $\varphi$ est croissante et $A_{c_s} \geqq s$, on a

$$\Phi(A_\infty)= \int_0^{A_\infty} \varphi(s)ds \leqq \int_0^{A_\infty} \varphi(A_{c_s})ds = \int_{[0,\infty]} \varphi(A_s)dA_s$$

intégrons par parties en posant $B_t=\varphi(A_t)$, processus croissant prévisible admettant la masse $\varphi(0)$ en 0 :

$$E[\Phi(A_\infty)]\leqq E[\int_{[0,\infty]}(A_\infty-A_{s-})dB_s] = E[\int_{[0,\infty]} X_{s-}dB_s]$$

car le processus $(B_t)$ est prévisible, et la projection prévisible du processus $(A_\infty-A_{s-})$ est le processus $(X_{s-})$, avec $X_{0-}=X_0$. Nous majorons $X_{s-}$ par $Y_{s-}$ , remarquons que $(Y_{s-})$ est projection prévisible du processus constant égal à Y, et que $E[\int_{[0,\infty]} YdB_s]=E[YB_\infty]=E[\varphi(A_\infty)Y]$. Le lemme est établi.

VARIANTE DU LEMME. $(X_t)$ <u>est une surmartingale forte régulière, engendrée par le processus croissant continu à droite adapté</u> $(A_t)$, <u>et majorée par</u> $(Y_t)$. <u>On a alors la même conclusion</u> (14).

La démonstration est la même, la projection bien-mesurable remplaçant la projection prévisible.

COROLLAIRE. <u>Sous les mêmes hypothèses</u> ( ou celles de la variante ), <u>nous avons si</u> $\Phi$ <u>est à croissance modérée</u>

$$(15) \qquad E[\Phi(A_\infty)] \leqq p^{p+1}E[\Phi(Y)]$$

<u>et si</u> $\Phi(t)=t^p$ - <u>y compris pour</u> p=1

$$(15') \qquad E[A^p_\infty] \leqq p^pE[Y^p] .$$

DEMONSTRATION. On tronque le processus $(A_t)$ à une constante n ; le "potentiel" correspondant reste majoré par Y, et on applique le lemme 2 et le lemme 1 - la condition d'intégrabilité (12) étant satisfaite. Puis on fait tendre n vers $+\infty$ .

Ces résultats unifient plusieurs propositions établies indépendamment les unes des autres dans le fascicule [ ] de MEYER

PROPOSITION 1. <u>Avec les notations ci-dessus, supposons</u> $(X_t)$ <u>majorée par une constante</u> c . <u>Alors</u> , <u>pour</u> $p \geq 1$

(16) $$E[A_\infty^p] \leqq cpE[A_\infty^{p-1}] \quad \underline{\text{et}} \quad E[e^{A_\infty}] \leqq 1/(1-c) \quad \underline{\text{si}} \quad c<1 \ .$$

DEMONSTRATION. Pour la première formule, prendre Y=c, $\varphi(t)=t^{p-1}$. Pour la seconde prendre Y=c, $\varphi(t)=e^t$. Cf. [3], p.49, th.45-46

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> $(B_t)$ <u>un processus croissant intégrable non nécessairement adapté tel que</u> $B_0=0$, $X_t=E[B_\infty - B_t|\underline{\underline{F}}_t]$. <u>Alors</u> (A ayant le même sens que ci-dessus )

(17) $$\int_{\{A_\infty > \lambda\}} (A_\infty - \lambda)\, dP \leqq \int_{\{A_\infty > \lambda\}} B_\infty \, dP$$

<u>On a la même inégalité avec</u> $X^*$ <u>au lieu de</u> $B_\infty$ .

DEMONSTRATION. Dans le lemme de GARSIA, nous prenons $\varphi(s)=1$ si $s \geqq \lambda$, 0 si $s<\lambda$, de sorte que $\Phi(s)=(s-\lambda)^+$, et $Y=X^*$ ou $B_\infty$ . Cf. [ ], p.53, th.49.

Nous déduisons maintenant du lemme de GARSIA le théorème de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY sur les processus croissants . Cf. [ ], p.56-57.

PROPOSITION 3. <u>Supposons</u> $\Phi$ <u>à croissance modérée</u> .
<u>Soit</u> $(X_t) = (E[B_\infty - B_t|\underline{\underline{F}}_t])$ , <u>où</u> $(B_t)$ <u>est un processus croissant intégrable continu à droite non nécessairement adapté, et soit</u> $(A_t)$ <u>le processus croissant prévisible engendrant</u> $(X_t)$ ( $(A_t)$ est projection <u>duale prévisible de</u> $(B_t)$). <u>On a alors</u>

(18) $$E[\Phi(A_\infty)] \leqq p^{p+1} E[\Phi(B_\infty)]$$

<u>et aussi</u>

(19) $$E[\Phi(A_\infty)] \leqq p^{p+1} E[\Phi(X^*)]$$

<u>On a aussi des résultats analogues pour les projections duales bien-mesurables et les surmartingales fortes régulières</u>. ([G], th.III.4.3)

( On n'a pas écrit les formules (18'),(19') relatives à $\Phi(t)=t^p$ ).

DEMONSTRATION. Prendre $Y=B_\infty$ ou $X^*$, dans le corollaire du lemme de GARSIA.

## 2. APPLICATIONS A LA THEORIE DES MARTINGALES[1]

### 1. NOTATIONS. DEFINITION DES DIVERSES NORMES.

Soit $(M_t)$ une martingale continue à droite. Contrairement à l'habitude, nous ne supposerons pas que $M_0=0$, et nous modifierons la définition usuelle du processus croissant associé à $(M_t)$ de la manière suivante : soit $M'_t = M_t - M_0$ . Alors

(20) $[M,M]_t = M_0^2 + [M',M']_t$ pour $t \geqq 0$ , $[M,M]_{0-} = 0$

On rappelle que ( cf. [4] )

(21) $\|M\|_{H^p} = \| [M,M]_\infty^{1/2} \|_{L^p}$ pour $1 \leqq p < \infty$

tandis que la norme $\|M\|_{BMO}$ est définie comme le plus petit nombre $c \leqq +\infty$ tel que $c^2$ majore la surmartingale forte régulière

(22) $\eta_T^M = E[[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} | \underline{\underline{F}}_T]$

Nous n'aurons pas besoin dans cet exposé des résultats de [4] sur les normes $H^p$ et BMO : nous définirons d'après GARSIA de nouvelles normes équivalentes à celles-ci, que nous étudierons directement.

GARSIA introduit en fait deux idées nouvelles et importantes

a) Un moyen d'étendre aux processus $(X_t)$ une semi-norme - notons la n - sur l'espace $L^1(\Omega)$ : on pose

(23) $\| X \|_n = \inf_Y \, n(Y)$

où Y parcourt l'ensemble des variables aléatoires intégrables positives telles que le processus $(X_t)$ soit majoré par la martingale continue à droite $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ ( s'il n'existe pas de telles Y, on pose $\|X\|_n = +\infty$ ).

Cas particuliers : $\|X\|_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ , $\|X\|_\Phi$ .

b) Un moyen d'associer à n une seconde semi-norme, cette fois sur l'espace des martingales : soit M une martingale telle que $[M,M]_\infty^{1/2}$ soit intégrable ( i.e., $M \in H^1$ ). On introduit la surmartingale forte régulière

(24) $\xi_T^M = E[ \sqrt{[M,M]_\infty - [M,M]_{T-}} | \underline{\underline{F}}_T]$

(25) $\|M\|_{(n)} = \|\xi^M\|_n$

Il est facile de vérifier que $\xi^{tM} = |t| \xi^M$ , $\xi^{M+N} \leqq \xi^M + \xi^N$, de sorte que $\| \ \|_{(n)}$ est bien une semi-norme sur $H^1$.

Le processus $\xi^M$ est majoré par la martingale $E[[M,M]_\infty^{1/2} | \underline{\underline{F}}_t]$ , d'où l'on déduit que

(26) $\|M\|_{(n)} \leqq \|[M,M]_\infty^{1/2}\|_n$

1 Plusieurs résultats de ce paragraphe ne figurent pas dans [G], et sont des 'private communications' de M. GARSIA.

Les cas particuliers les plus importants sont ceux des normes $\|M\|_{(\Phi)}$ correspondant à la norme d'ORLICZ $n = \| \ \|_{\Phi}$ , et particulier les normes $\|M\|_{(p)}$ , $1 \leqq p < \infty$ , et d'autre part la norme $\|M\|_{(\infty)}$ correspondant à $n = \| \ \|_{\infty}$ .

Nous démontrons d'abord deux résultats d'équivalence de normes : $\|M\|_{(\Phi)}$ est équivalente à la norme $\|[M,M]_{\infty}^{1/2}\|_{\Phi}$ si $\Phi$ est à croissance modérée, et en particulier $\|M\|_{(p)}$ est équivalente à $\|M\|_{H^p}$ pour p fini. En revanche, $\|M\|_{(\infty)}$ n'est pas équivalente à $\|[M,M]_{\infty}^{1/2}\|_{\infty}$ , mais à $\|M\|_{BMO}$ . Ceci suggère que les normes $\|M\|_{(\Phi)}$ méritent aussi d'être étudiées lorsque $\Phi$ n'est pas à croissance modérée - mais pour l'instant, on ne va donner de résultats que sur les normes $\| \ \|_{(p)}$ et $\| \ \|_{(\infty)}$ .

PROPOSITION 4. <u>Si $\Phi$ est à croissance modérée, les normes $\|M\|_{(\Phi)}$ et $\|[M,M]_{\infty}^{1/2}\|_{\Phi}$ sont équivalentes. Cela vaut aussi pour</u> $\Phi(t)=t$ .

DEMONSTRATION. (26) nous donne une inégalité dans un sens. Inversement, nous allons montrer que $\|M\|_{(\Phi)}<1$ entraîne $E[\Phi([M,M]_{\infty}^{1/2})] \leqq p^{p+1}$. Nous avons un résultat plus précis pour $\| \ \|_{(p)}$ , $p \geqq 1$ fini, que nous n'énonçons pas.

Nous introduisons la troisième surmartingale forte régulière

(27) $$\zeta_T^M = E[\, \sqrt{[M,M]_{\infty}} - \sqrt{[M,M]_{T-}} \mid \underline{\underline{F}}_T \,]$$

qui est majorée par $\xi^M$ . Dire que $\|M\|_{(\Phi)}<1$ revient à dire qu'il existe une martingale $Y_t = E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ majorant $\xi^M$, avec $E[\Phi(Y)]<1$. Elle majore alors $\zeta^M$ et la variante du lemme de GARSIA pour les surmartingales fortes nous dit que

(28) $$E[\Phi([M,M]_{\infty}^{1/2})] \leqq E[\varphi([M,M]_{\infty}^{1/2})Y]$$

mais nous ne pouvons pas appliquer directement le lemme 1, car nous ignorons si le premier membre est fini. Soit $\varphi_n$ la fonction croissante $\varphi \wedge \varphi(n)$, soit $\Phi_n$ la fonction convexe correspondante, et soit $J_n$ la v.a. $[M,M]_{\infty}^{1/2} \wedge n$ . Appliquons (28) à $\varphi_n$ et $\Phi_n$

$$E[\Phi(J_n)] = E[\Phi_n(J_n)] \leqq E[\Phi_n([M,M]_{\infty}^{1/2})] \leqq E[\varphi_n([M,M]_{\infty}^{1/2})Y]$$
$$= E[\varphi(J_n)Y]$$

Nous appliquons le lemme 1 à $\Phi$ et à $J_n$ bornée, obtenant que $E[\Phi(J_n)] \leqq p^{p+1}E[\Phi(Y)] \leqq p^{p+1}$, et enfin nous faisons tendre n vers $+\infty$ .

Nous passons à $\| \ \|_{(\infty)}$ , en comparant d'abord les processus $\xi^M$ (24) et $\eta^M$ (22) . Pour la simplicité des notations, nous posons $[M,M]_t = A_t$.

LEMME 3. Soit $(Y_t)=(E[Y|\underline{\underline{F}}_t])$ une martingale positive. Supposons que l'on ait pour tout temps d'arrêt T

(29) $$E[\sqrt{A_\infty - A_{T-}} \mid \underline{\underline{F}}_T] \leqq Y_T$$

On a alors aussi

(30) $$E[A_\infty - A_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq 16E[Y^2|\underline{\underline{F}}_T]$$

(Si Y est une constante c , le second membre peut être remplacé par $2c^2$ ).

DEMONSTRATION. Supposons le résultat établi pour T=0. Soient T un temps d'arrêt , et $H\in\underline{\underline{F}}_T$ ; en appliquant le résultat pour 0 sur H muni de la loi $P'=P(.|H)$, de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}_{T+t}$, de la martingale $Y_{T+t}=E'[YI_H|\underline{\underline{F}}'_t]$, au processus $A'_t=A_{T+t}-A_{T-}$, on obtient la formule générale (30).

Il suffit donc de montrer que $E[A_\infty] \leqq 16E[Y^2]$. Notons $(X_t)$ la projection bien-mesurable du processus $((A_\infty - A_{t-})^{1/2})$, $(Z_t)$ celle du processus $((A_\infty - A_{t-})^{-1/2})$, qui est plus grande que $1/X_t$ ( inégalité de JENSEN : $E[1/U] \geq 1/E[U]$ si $U\geqq 0$ ). La relation (29) s'écrit $1\leqq Y_t/X_t$ et entraîne donc $1\leqq Y_tZ_t$ et

$$E[A_\infty] = E[\int_{[0,\infty[} dA_s] \leqq E[\int_{[0,\infty[} Z_sY_s dA_s]$$

Le processus $Y_sZ_s$ est projection bien-mesurable de $Y_s(A_\infty - A_{s-})^{-1/2}$, et le dernier terme vaut donc

$$E[\int_{[0,\infty[} Y_s \frac{dA_s}{\sqrt{A_\infty - A_{s-}}}] \leqq 2E[-\int_{[0,\infty[} Y_s d\sqrt{A_\infty - A_s}]$$

Si $(Y_t)$ est une constante c, on a fini : le dernier terme vaut $2E[c\sqrt{A_\infty}] \leqq 2c^2$ .

Soit $(B_s)$ le processus croissant $\sqrt{A_\infty} - \sqrt{A_\infty - A_s}$ , et soit $(C_s)$ sa projection duale bien-mesurable. Nous avons pour le dernier terme le calcul

$$2E[\int_{[0,\infty[} Y_s dB_s] = 2E[\int_{[0,\infty[} Y_s dC_s] = 2E[YC_\infty] \leqq 2E[Y^2]^{1/2}E[C_\infty^2]^{1/2}$$

D'après le lemme de GARSIA , $E[C_\infty^2] \leqq 4E[(\sqrt{A_\infty})^2] = 4E[A_\infty]$, d'où l'on déduit

$$E[A_\infty] \leqq 4E[Y^2]^{1/2}E[A_\infty]^{1/2}$$

d'où l'énoncé si $E[A_\infty]<\infty$ . Pour obtenir le cas général, remplacer $A_t$ par $A_t \wedge n$ , appliquer ceci, puis faire tendre n vers $+\infty$ .

COROLLAIRE. $\| M \|_{(\infty)} \leqq \|M\|_{BMO} \leqq \sqrt{2}\|M\|_{(\infty)}$

La première inégalité est facile, et la seconde résulte du lemme 2. Il faut remarquer que la norme BMO d'une martingale est plus facile à manier que la norme $\| \ \|_{(\infty)}$ : en effet, la surmartingale forte engendrée par le processus $[M,M]_t$ est aussi projection de $((M_\infty - M_{t-})^2)$.

## 2. L'INEGALITE DE FEFFERMAN ET SES CONSEQUENCES

Nous rappelons d'abord, pour être complets, la démonstration de l'inégalité de FEFFERMAN dans [4]. Il est essentiel pour la suite de constater que cette inégalité est vraie pour des martingales qui ne sont pas nulles en 0.

PROPOSITION 5. <u>Soient</u> $(M_t)$ <u>et</u> $(N_t)$ <u>deux martingales uniformément intégrables. On a alors</u>

(31) $$E\left[\int_{[0,\infty[} |d[M,N]_s|\right] \leqq c\|M\|_{H^1}\|N\|_{BMO} \qquad (c=\sqrt{2})$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons l'inégalité ([5], p.85)

$$E\left[\int_{[0,\infty[} H_sK_s|d[M,N]|_s\right] \leqq E\left[\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[M,M]_s\right]^{1/2} E\left[\int_{[0,\infty[} K_s^2 d[N,N]_s\right]^{1/2}$$

où $H_s, K_s$ sont deux processus bien-mesurables positifs. Nous prenons ici $H_s^2 = 1/([M,M]_{s-}^{1/2}+[M,M]_s^{1/2})$ , $K_s^2 = 2[M,M]_s^{1/2}$. On vérifie que le membre de gauche majore $E[\int_{[0,\infty[}|d[M,N]_s|]$, le produit $H_sK_s$ étant presque partout $\geqq 1$ pour la mesure $|d[M,N]|$. Le premier terme au second membre vaut $E[[M,M]_\infty^{1/2}]^{1/2}$ . Le second terme peut s'écrire, après une intégration par parties

$$E^{1/2}\left[\int_{[0,\infty[} ([N,N]_\infty - [N,N]_{t-})dK_s^2\right]$$

On projette sur la tribu bien-mesurable , on utilise la définition de la norme BMO, et il reste simplement $\|N\|_{BMO}E[[M,M]_\infty^{1/2}]^{1/2}$ . L'énoncé en résulte.

REMARQUE. Plus généralement, le premier membre de (31) est majoré par $c_p\|M\|_{(p)}\|N\|_{(q)}$ , où p et q sont deux exposants conjugués quelconques. Ce résultat est , lui aussi, dû à GARSIA[1] - mais le cas où p>1 peut aussi se ramener aux inégalités de BURKHOLDER, et nous le laissons de côté.

COROLLAIRE. <u>Si</u> $\|N\|_{BMO}<\infty$ , <u>on a pour tout temps d'arrêt</u> T

(32) $$E\left[\int_{[T,\infty[} |d[M,N]_s|\,|\underline{\underline{F}}_T\right] \leqq cE\left[\sqrt{[M,M]_\infty - [M,M]_{T-}}\,|\underline{\underline{F}}_T\right].\|N\|_{BMO}$$

DEMONSTRATION. Voir le début de la démonstration du lemme 3 : le procédé pour passer des espérances absolues aux espérances conditionnelles est le même.

Nous allons montrer maintenant, toujours en suivant GARSIA, comment l'inégalité de FEFFERMAN entraîne l'inégalité de DAVIS. Il faut pour cela deux lemmes :

---

1 [G], théorème I.3.1.

LEMME 4. <u>Soit</u> $(A_t)$ <u>un processus</u> ( <u>non nécessairement adapté</u> ) <u>tel que</u> $A_{0-}=0$ , <u>dont les trajectoires sont continues à droite à variation bornée, tel que</u>

(33) $$E[\int_{[T,\infty[}|dA_s|\,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq 1 \text{ pour tout temps d'arrêt } T \text{ .}$$

<u>Soit</u> $(B_t)$ <u>la projection duale bien-mesurable de</u> $(A_t)$, <u>et soit</u> $(N_t)$ <u>la martingale</u> $(E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_t])$ . <u>On a alors</u> $\|N\|_{BMO} \leqq \sqrt{5}$ . ([G], th.II.4.1).

DEMONSTRATION. Soit $(X_t)$ la projection bien-mesurable du processus $(A_\infty - A_{t-})$. Nous commençons par faire un calcul d'espérances absolues :

$$E[B_\infty^2] = E[\int_{[0,\infty[}((B_\infty - B_s)+(B_\infty - B_{s-}))dB_s]$$

le processus B est adapté. Les processus $(B_\infty - B_{s-})$ et $(A_\infty - A_{s-})$ ont même projection bien-mesurable $(X_t)$. On en déduit que les processus $(B_\infty - B_s)$ et $(A_\infty - A_s)$ ont même projection bien-mesurable ( égale en fait à $(X_{t+})$). Par conséquent

$$E[B_\infty^2] = E[\int_{[0,\infty[}(X_s + X_{s+})dB_s] \leqq 2E[\int_{[0,\infty[}|dB_s|] \leqq 2$$

Pour passer au cas général, on procède comme dans le lemme 3 : T étant un temps d'arrêt, et H un élément de $\underline{\underline{F}}_T$ , on pose $\Omega'=H$ , $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}_{T+t}$ , $A'_t=A_{T+t}-A_{T-}$ , $B'_t = B_{T+t}-B_{T-}$ ... et il vient

$$E[(B_\infty - B_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] \leqq 2$$

D'autre part, on a identiquement[1] $X_t=N_t-B_{t-}$ , donc $N_{t-}=X_{t-}+B_{t-}$ , et

$$N_\infty - N_{T-} = (B_\infty - B_{T-}) - X_{T-}$$

Par conséquent, comme X est majoré par 1 en valeur absolue

$$E[(N_\infty - N_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[(B_\infty - B_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] + X_{T-}^2 + 2|X_{T-}|E[|B_\infty - B_{T-}|\,|\underline{\underline{F}}_T]$$
$$\leqq 2+1+2 = 5 \text{ .}$$

LEMME 5. <u>Soient</u> $(B_t)$ <u>un processus croissant adapté continu à droite</u> $(B_{0-}=0)$, $(U_t)$ <u>un processus prévisible majoré[2] par</u> $(B_{t-})$ <u>pour</u> $t>0$, H <u>une v.a. positive intégrable majorée par</u> $1/B_\infty$ , $(H_t)$ <u>la martingale</u> $E[H|\underline{\underline{F}}_t]$, <u>et</u> $(L_t)$ <u>la martingale locale</u> $\int_{]0,t]}U_s dH_s$ . <u>Alors</u> $(L_t)$ <u>est une vraie martingale et</u> $\|L\|_{BMO} \leqq 1$ .

DEMONSTRATION. L'inégalité BMO entraîne $E[[L,L]_\infty] \leqq 1$, donc L sera nécessairement bornée dans $L^2$. Supposons d'abord $B_\infty$ et H bornées. On peut alors écrire

$$[L,L]_t = \int_{]0}^{t]} U_s^2 d[H,H]_s$$

$$E[[L,L]_\infty - [L,L]_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] = E[\int_{[T,\infty[}U_s^2 d[H,H]_s|\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[\int_{[T,\infty[}B_{s-}^2 d[H,H]_s|\underline{\underline{F}}_T]$$

1 Cette égalité a lieu p.s. pour tout temps d'arrêt T, et les deux membres sont des processus bien-mesurables.

2 en valeur absolue

le processus $H_t^2-[H,H]_t$ est une martingale, donc cette espérance s' écrit

$$E[\int_{[T,\infty[} B_{s-}^2 dH_s^2 \,|\underline{\underline{F}}_T]=E[B_\infty^2 H^2-B_{T-}^2 H_{T-}^2-\int_{[T,\infty[} H_s^2 dB_s^2 \,|\underline{\underline{F}}_T]$$
$$\leq E[B_\infty^2 H^2|\underline{\underline{F}}_T] \leq 1$$

Pour passer au cas général, remplacer $B_t$ par $B_t\wedge n$ , H par $H\wedge m$ , faire tendre m vers l'infini, puis n vers l'infini.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer l'inégalité de DAVIS. Nous la donnons pour des martingales M <u>non nécessairement nulles en</u> 0 , ce qui sera essentiel pour le conditionnement plus loin.

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> M <u>une martingale</u>. <u>Il existe des constantes</u> c <u>et</u> c' <u>telles que</u>

(34) $$cE[M^*] \leq E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leq c'E[M^*] .$$

( et les mêmes inégalités avec $E[\;|\underline{\underline{F}}_0]$ au lieu de E ).
DEMONSTRATION. Les inégalités conditionnelles sont des conséquences immédiates des inégalités absolues.

Pour démontrer l'inégalité de gauche, commençons par supposer M bornée. Au moyen d'un théorème de section choisissons une v.a. S positive finie telle que $|M_S| \geq M^*-\varepsilon$ ( S n'est pas un temps d'arrêt ), et posons $A_t = \mathrm{sgn}(M_S)I_{\{t\geq S\}}$ , processus dont la variation totale est $\leq 1$ . Appliquons les notations et les résultats du lemme 4, et l'inégalité de FEFFERMAN :

$$E[M^*-\varepsilon] \leq E[|M_S|]=E[\int_{[0,\infty[} M_s dA_s] = E[\int_{[0,\infty[} M_s dB_s ] =E[M_\infty B_\infty ]$$
$$=E[\int_{[0,\infty[} d[M,N]_s ] \leq c\|M\|_{H^1}\|N\|_{BMO} \leq c\|M\|_{H^1}$$

( la constante c change de place en place ). Pour étendre cela à tout $H^1$ , on remarque 1) que toute martingale $M\in H^1$ est uniformément intégrable , 2) qu'il existe des martingales bornées $M^n$ qui convergent vers M dans $H^1$ , 3) qu'alors $E[|M_\infty-M_\infty^n|]\to 0$ , ce qui entraîne que $(M-M^n)^*$ tend vers 0 en probabilité, et permet d'appliquer le lemme de FATOU. Pour tout cela, voir [4], p.138-140.

Passons à l'inégalité de droite. Supposons M bornée, appliquons l'inégalité de Schwarz :

(35) $$E[[M,M]_\infty^{1/2} ] \leq (E[M^*+\varepsilon])^{1/2} (E[ \frac{[M,M]_\infty}{M^*+\varepsilon}])^{1/2}$$

pour évaluer le second terme, on utilise l'identité

$$[M,M]_t = M_t^2 - 2\int_{]0,t]} M_{s-}dM_s$$

où l'on peut faire tendre t vers $+\infty$ . Multiplions par $H=\frac{1}{M^*+\varepsilon}$ . Nous avons $M_\infty^2 H \leq M^*$. Posons $H_t=E[H|\underline{\underline{F}}_t]$ et étudions le dernier terme.

On a d'abord

$$E[H\int_0^\infty M_{s-}dM_s] = E[\int_0^\infty [dH_s, M_{s-}dM_s]] = E[\int_0^\infty [dM_s, M_{s-}dH_s] = E[\int_0^\infty M_{s-}dH_s . M_\infty]$$

Appliquons le lemme 5 en prenant $U_t = M_{t-}$ , $B_t = M_t^*$ . La martingale $L_t = \int_0^t M_{s-}dH_s$ a une norme BMO $\leq 1$, et par conséquent ((31))

$$E[L_\infty M_\infty] \leqq c\|M\|_{H^1}\|L\|_{BMO} \leqq c\|M\|_{H^1}$$

Revenons alors à (35) :

$$E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leqq (E[M^*+\varepsilon])^{1/2}(E[M^*+c[M,M]_\infty^{1/2}])^{1/2}$$

d'où l'on déduit que

$$E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leqq cE[M^*] \qquad \text{( c change de place en place )}$$

du moins lorsque M est bornée. Nous laissons de côté les détails du passage au cas non borné.

## 3. L'INEGALITE DE BURKHOLDER, DAVIS ET GUNDY

GARSIA a remarqué que l'inégalité de DAVIS se met sous forme "conditionnelle", et entraîne alors immédiatement la "grande" inégalité de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY sur la comparaison entre $M^*$ et $[M,M]$, toujours grâce au lemme de GARSIA.

Nous donnons d'abord la forme conditionnelle de l'inégalité de DAVIS. Soit T un temps d'arrêt ; considérons la martingale $M'_t = M_{T+t} - M_{T-}$ ( non nulle en 0 ) par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}'_t) = (\underline{\underline{F}}_{T+t})$. Nous avons $[M',M']_t = [M,M]_{T+t} - [M,M]_{T-}$ , et d'autre part $M'^* \leqq 2M^*$ et $M^* \leqq M^*_{T-} + M'^*$ . Appliquons les inégalités (34) sous la forme conditionnée par rapport à $\underline{\underline{F}}'_0$ . Il vient ( avec une constante c' modifiée )

COROLLAIRE. <u>On a pour tout temps d'arrêt</u> T

(36) $$cE[M^*_\infty - M^*_{T-} | \underline{\underline{F}}_T] \leqq E[\sqrt{[M,M]_\infty - [M,M]_{T-}} | \underline{\underline{F}}_T] \leqq E[\sqrt{[M,M]_\infty} | \underline{\underline{F}}_T]$$

(37) $$E[\sqrt{[M,M] - [M,M]_{T-}} | \underline{\underline{F}}_T] \leqq c'E[M^* | \underline{\underline{F}}_T]$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme de GARSIA, et le lemme 1 ( avec le supplément donné dans la démonstration de la proposition 4 ), pour obtenir directement le théorème de BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY :

PROPOSITION 7. <u>Si</u> $\Phi$ <u>est à croissance modérée, on a</u> (avec des constantes c et c' dépendant de $\Phi$)

(38) $$cE[\Phi(M^*)] \leqq E[\Phi(\sqrt{[M,M]_\infty})] \leqq c'E[\Phi(M^*)] \quad .$$

De la même manière, le lemme de GARSIA se prête très bien à la démonstration du théorème suivant :

PROPOSITION 8. <u>Soit</u> $(D_t)$ <u>un processus croissant continu à droite adapté tel que</u> $|\Delta M_t| \leqq D_{t-}$ <u>pour tout</u> $t \geqq 0$ . <u>Alors</u>

(39) $$cE[\Phi(\langle M,M\rangle_\infty^{1/2})] < E[\Phi([M,M]_\infty^{1/2})] < c'E[\Phi(\langle M,M\rangle_\infty^{1/2} + D_\infty)] .$$

BIBLIOGRAPHIE

[G] . A.GARSIA. Recent progress in the theory of martingales. Seminar Notes ( University of California, San Diego ).

[1] . J.AZEMA. Le retournement du temps. A paraître aux Annales E.N.S.

[2] . J.NEVEU. Martingales à temps discret. Masson 1972 .

[3] . P.A.MEYER. Martingales and stochastic integrals I. Lecture Notes 284, Springer 1972.

[4] . P.A.MEYER. Le dual de $H^1$ est BMO ( cas continu ). Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes 321, Springer 1973.

[5] . P.A.MEYER. Intégrales stochastiques I. Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes 39, 1967.

xxxxxxxxxxxxxxxxxx

I.R.M.A.
Laboratoire associé au C.N.R.S
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG-Cedex