SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE PRIOURET

Construction de processus de Markov sur $\mathbf{R}^n$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 316-328

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__316_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités

CONSTRUCTION de PROCESSUS de MARKOV sur R^n

par Pierre PRIOURET

1. INTRODUCTION.

Désignant par C_k^2 l'espace des fonctions de classe C^2 à support compact sur R^n, on définit pour $u \in C_k^2$, l'opérateur W,

$$(1)\quad Wu(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{i,j} u(x) + \sum_i b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x)$$

$$+ \int \{u(y) - \Psi(|x-y|)(u(x) + \langle y-x, \nabla_u(x)\rangle\} s(x,dy) = P(x) + S(x)$$

où

- la matrice $(a_{ij}(x))$ est non négative,
- $s(x,dy)$ est une mesure de Radon sur $R^n - \{x\}$ telle que

$$\int \frac{|x-y|^2}{1+|x-y|^2} s(x,dy) < +\infty ,$$

- Ψ est une fonction de classe C^∞ telle que $\Psi(y) = 1$ si $|y| \leq 1$, $\Psi(y) = 0$ si $|y| \geq 2$,
- $W1(x) = c(x) + \int (1-\Psi(|x-y|)s(x,dy)) \leq 0$.

On sait que les générateurs infinitésimaux des processus de Markov sur R^d sont de la forme de W sur C_k^2 (voir par exemple [1]). Le problème auquel on va s'intéresser ici est, W donné (avec les hypothèses de régularité), de construire un processus de Markov de semi-groupe P_t tel que

$$(2)\qquad \text{quelle que soit } u \in C_k^2 ,\ P_t u - u = \int_0^t P_s W u \, ds .$$

On va également établir l'unicité de ce processus.

La méthode utilisée pour construire un tel processus est en général, après Ito, celle des équations différentielles stochastiques (voir Skorokhod [7], Maizenberg [6]). La méthode présentée ici est analytique, s'inspirant de celle de [1] pour les variétés compactes ; on obtiendra également des renseignements sur la régularité des solutions du problème de Dirichlet associé à W . (Voir Maizenberg [5] pour un traitement du problème de Dirichlet par les équations différentielles stochastiques).Nous allons présenter ici les grandes lignes de cette construction.

2. Soit U un ouvert borné régulier (∂U de classe C^3 par exemple) et $0<\alpha<1$. Nous allons introduire quelques espaces de fonctions holdériennes sur U (voir Friedman [4]).

On pose pour $x\in U$, $d_x = \operatorname{dist}(x,\partial U)$, $d_{x,y} = \inf(dx,dy)$.

$$|g|_\infty = \sup_{x\in U} |g(x)| ,$$

$$|g|_\alpha = |g|_\infty + \sup_{x,y\in U} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} ,$$

$$|g|_{2+\alpha} = |g|_\alpha + \Sigma|D_i g|_\alpha + \Sigma|D_{i,j}g|_\alpha \text{ , et pour } m \geq 1 ,$$

$$|g|_{m,\alpha} = |d^m.g|_\infty + \sup_{x,y\in U} d_{x,y}^{m+\alpha} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} ,$$

$$|g|_{0,2+\alpha} = |g|_\alpha + \Sigma|D_i g|_{1,\alpha} + \Sigma|D_{i,j}g|_{2,\alpha} .$$

On désigne par $C^\alpha(U)$, $C^{2+\alpha}(U)$, $C^{m,\alpha}(U)$, $C^{0,2+\alpha}(U)$ les espaces de fonctions pour lesquelles les sommes $|\ |_\alpha$, $|\ |_{2+\alpha}$, $|\ |_{m,\alpha}$, $|\ |_{0,2+\alpha}$ sont finies ; munis de ces normes, ce sont des espaces de Banach.

On va faire sur $W = P + S$ les hypothèses suivantes :

(P1) a_{ij} , b_i , c sont de classe C^α ; (a_{ij}) est strictement elliptique. On suppose une fois pour toute que $s(x,dy)$ a une densité et on pose :

(3) $$S_U u(x) = \int_U \{u(y)-\Psi(|x-y|)(u(x) + \langle y-x\ ,\ \nabla u(x)\rangle\} s(x,y)dy)$$

et pour f borélienne à support compact ,

(4) $$Tf(x) = \int f(y)|x-y|^2 s(x,y)dy$$

(5) $$T^{i,j}f(x) = \int f(y)(y_i-x_i)(y_j-x_j)s(x,y)dy\ .$$

Pour tout compact K on note $L^p(K)$ - $1 \leq p \leq +\infty$ - l'espace des fonctions de L^p à support inclus dans K .

On suppose :

(S1) Pour tout compact K l'opérateur T est continu de $L^\infty(K)$ dans C^α_{loc} .

(S2) Pour tout ouvert U régulier, l'opérateur S_U est compact de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\overline{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U)$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'indication de conditions suffisantes pour avoir (S1) - (S2) . Soient,

(S'1) Il existe p , $0 \leq p < +\infty$, tel que pour tout compact K , T est continu de $L^p(K)$ dans C^α_{loc} .

(S'2) Pour tout ouvert U régulier, S_U est continu de $C^2(\overline{U})$ dans $C(\overline{U})$ et envoie, pour un $\beta > \alpha$, $C^{2+\beta}(U)$ dans $C^\beta(U)$.

(S"1) Il existe p , $0 \leq p < +\infty$ tel que pour tout compact K , et pour tout i,j , $T^{i,j}$ est continu de $L^p(K)$ dans C^α_{loc} .

On a alors,

PROPOSITION 1. - Les conditions (S'1) et (S'2) impliquent (S1) , (S2) .

L'idée de la démonstration est la suivante. L'hypothèse (S'2) et les techniques d'interpolation développées dans [1] montrent que S_U est compact de $C^{2+\alpha}(U)$ dans $C^\alpha(U)$. Notant φ_n une suite de fonctions

C^∞ à support compact dans U telle que $\varphi_n \uparrow 1_U$; on définit

$$S_U^n u(x) = S_U(\varphi_n u)(x) \ ;$$

on a alors facilement que S_U^n est compact de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\overline{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U)$. Enfin l'hypothèse (S'1) permet de montrer que, lorsque $n \to +\infty$, les S^n convergent vers S en norme d'opérateur, ce qui entraîne le résultat.

PROPOSITION 2. - <u>La condition</u> (S"1) <u>implique</u> (S1) <u>et</u> (S2) .

Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral dans (3) et d'un peu de calculs.

3. Donnons un exemple de noyau vérifiant (S"2) .

Soit $N(x,y)$ une fonction borélienne positive sur $R^n \times R^n$, sommable en y pour chaque y, localement bornée, et supposons,

(N1) Quels que soient les compacts H, K, on a pour $y \in H$, x, $x' \in K$,

$$|N(x,y) - N(x',y)| \le C(H,K)|x-x'|^\gamma \ ;$$

alors $s(x,y) = \dfrac{N(x,y)}{|x-y|^{n+2-\mu}}$, $- 0 < \mu < n -$ vérifie (S"2) pour tout $\alpha < \inf(\gamma, \frac{\mu}{2})$ et $p > \dfrac{n}{\mu - 2\alpha}$.

Soient donc H et K des compacts et f une fonction à support dans K, il s'agit de montrer :

(6) $$|T^{i,j}f(x)| \le C_1(K)\|f\|_{p,K} \quad \text{pour tout } x \in H \ ;$$

(7) $$|T^{i,j}f(x) - T^{i,j}f(x')| \le C_2(H,K)\|f\|_{p,K}|x-x'|^\alpha, \quad \text{pour tout } x,x' \in H .$$

D'une part,

$$|T^{i,j}f(x)| = |\int N(x,y)(y_i - x_i)(y_j - x_j)|x-y|^{-n-2+\mu} f(y)dy|$$

$$\le C_1'(K)|\int_K |x,y|^{-n+\mu} f(y)dy|$$

$$\leq C_1'(K)\|f\|_{p,K}\{\int_K |x-y|^{(-n+\mu)q}dy\}^{1/q}$$

où $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ et on a le résultat cherché si $(n-\mu)q < n$ i.e. $\frac{1}{q} > 1 - \frac{\mu}{n}$ ce qui est le cas si $\frac{1}{p} < \frac{\mu}{n} - \frac{2\alpha}{n}$.

D'autre part, si on pose,

$$N'(x,y) = N(x,y)(y_i-x_i)(y_j-x_j)|y-x|^{2-\alpha},$$

on a, compte tenu de $\alpha < \gamma$ et de (N-1),

$$N'(x,y) \leq C_3(H,K) \ , \ x \in H \ , \ y \in K \ ,$$

$$|N'(x,y) - N'(x',y)| \leq C_4(H,K)|x-x'|^{\alpha} \ , \ x,x' \in H \ , \ y \in K \ ,$$

on a alors pour $x,x' \in H$,

$$|T^{i,j}f(x)-T^{i,j}f(x')| = |\int (N'(x,y)|x-y|^{-n+\mu-\alpha} - N'(x',y)|x'-y|^{-n+\mu-\alpha})f(y)dy|$$

$$\leq D_1 + D_2 \quad \text{où}$$

$$D_1 \leq \int_K |N'(x,y)-N'(x',y)|.|x-y|^{-n+\mu-\alpha}.f(y)dy$$

$$\leq C_4(H,K)|x-x'|^{\alpha}\int_K |x-y|^{-n+\mu-\alpha}f(y)dy \ ,$$

$$\leq C_4(H,K)|x-x'|^{\alpha}\|f\|_{p,K}\{\int_K |x-y|^{(-n+\mu-\alpha)q}dy\}^{1/q}$$

$$\leq C_4'(H,K)|x-x'|^{\alpha}\|f\|_{p,K}$$

car $p > \frac{n}{\mu-2\alpha} > \frac{n}{\mu-\alpha}$ implique $(n-\mu+\alpha)q < n$.

$$D_2 = |\int_K N'(x',y)(|y-x|^{-n+\mu-\alpha}-|y-x'|^{-n+\mu-\alpha})f(y)dy|$$

et compte tenu de l'inégalité, $x,x' \in H$, $y \in K$

$$||y-x|^{-n+\mu-\alpha}-|y-x'|^{-n+\mu-\alpha}| \leq C_5(H,K)|x-x'|^{\alpha}\{\inf(|y-x|,|y-x'|)\}^{-n+\mu-2\alpha}$$

$$D_2 \leq C_6(H,K)|x-x'|^{\alpha}\|f\|_{p,K}\{\int_K [\inf(|y-x|,|y-x'|)]^{(-n+\mu-2\alpha)q}dy\}^{1/q}$$

$$\leq C_6'(H,K)|x-x'|^{\alpha}\|f\|_{p,K}$$

car $p > \frac{n}{\mu-2\alpha}$ implique que $(-n-\mu+2\alpha)q < n$.

Ceci montre les inégalités (6) et (7) .

<u>Remarque</u> : On peut également montrer directement que si $s(x,y)$ est associé comme ci-dessus à un noyau $N(x,y)$ vérifiant (N1) alors les hypothèses (S1) et (S2) sont satisfaites sans utiliser les propositions 1 et 2 .

5. Dans ce paragraphe, on fixe un ouvert U régulier (i.e. borné, connexe, de classe C^3) et on suppose vérifiées (P1) , (S1) et (S2) . D'abord, un résultat qui nous sera utile à plusieurs reprises.

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $f \in L^\infty(K)$ - K <u>compact</u> - $h(x) = \int_{U^c} s(x,z)f(z)dz$ <u>appartient à</u> $C^{2,\alpha}(U)$ <u>et</u> $|h|_{2,\alpha} \leq C_K|f|_\infty$.

<u>Démonstration</u> : Il faut montrer :

(8) $$\text{quel que soit } x \in U\ ,\ |d_x^2 h(x)| \leq C.|f|_\infty$$

(9) $$\text{quels que soient } x,y \in U\ ,\ d_{x,y}^{2+\alpha}|h(x)-h(y)| \leq C|x-y|^\alpha|f|_\infty \ .$$

Pour (8) il suffit de remarquer que si $x \in U$, $z \in U^c$, $d_x \leq |x-y|$ d'où $|h(x)| = |\int_{U^c} s(x,z)|x-z|^2 \frac{f(z)}{|x-z|^2}| \leq d_x^{-2} \int_{U^c} s(x,z)|x-z|^2|f(z)|$

$$\leq d_x^{-2} \ .\ C.|f|_\infty \quad \text{d'après (S.1)} \ .$$

La démonstration de (9) est un peu plus délicate mais se fait par le même principe.

On va définir à partir de W un nouvel opérateur de $C^2(U)$ dans U par

(10) $$W_U f(x) = P_U f(x) + S_U f(x)\ ,\ f \in C^2(U)\ ,\ x \in U\ ;$$

où S_U est défini par (3) et où

$$(11) \qquad P_U f(x) = \Sigma a_{ij}(x) D_{i,j} f(x) + \Sigma b_i^U(x) D_i f(x) + c^U(x) f(x)$$

avec

$$(12) \qquad b_i^U(x) = b_i(x) - \int_{U^c} \Psi(|x-z|)(z_i - x_i) s(x,z) dz$$

$$(13) \qquad c_i^U(x) = c(x) - \int_{U^c} \Psi(|x-z|) s(x,z) dz .$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 3 , on établit facilement la

PROPOSITION 4. - On a $b_i^U \in C^{1,\alpha}(U)$, $c \in C^{2,\alpha}(U)$.

Si $u \in C(\overline{U})$, on note $\overset{\circ}{\gamma} u$ la restriction de u à ∂U ; d'après des résultats de Douglis-Niremberg [3] (voir également Friedman [4]), on a le théorème suivant :

THEOREME 5. - Si $a_{ij} \in C^{\alpha}(U)$, $b_i^U \in C^{1,\alpha}(U)$, $c \in C^{2,\alpha}(U)$ alors l'application $u \to (P_U u, \overset{\circ}{\gamma} u)$ est un isomorphisme de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\overline{U})$ sur $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$.

Considérons maintenant l'application de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\overline{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$, $u \to (W_U u, \overset{\circ}{\gamma} u) = (P_U u, \overset{\circ}{\gamma} u) + (S_U u, 0)$; c'est la somme d'une application d'indice zéro d'après le théorème 5 et d'une application compacte d'après (S2) ; elle est donc d'indice 0 . Pour montrer que c'est un isomorphisme des espaces considérés, il suffit de montrer qu'elle est injective. Ceci est une conséquence du principe du maximum de W_U et plus précisément des lemmes suivants (rappelons qu'on a supposé U connexe).

LEMME 1. - Si $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ et si $W_U u(x) \geq 0$ pour $x \in U$, alors si u atteint un maximum ≥ 0 en $x_0 \in U$, u est constante.

La démonstration de ce lemme est assez longue mais à peu près semblable (sous des hypothèses cependant un peu différentes) à celle du théorème VII, chapitre I de [1] .

Du lemme 1, on déduit de façon classique le

LEMME 2. - <u>Soit</u> $u \in C^2 \cap C(\overline{U})$ <u>telle que</u> $W_u(x) \geq 0$ <u>pour</u> $x \in U$ <u>et</u> $\overset{\circ}{\gamma} u \leq 0$ <u>alors</u> $u \leq 0$.

On peut donc énoncer, $W_U - \lambda$ ayant les mêmes propriétés que W_U ,

THEOREME 6. - <u>Pour tout</u> $\lambda \geq 0$, <u>l'application</u> $u \to ((W_U - \lambda)u, \overset{\circ}{\gamma} u)$ - W_U <u>défini par</u> (10) - <u>est un isomorphisme de</u> $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\overline{U})$ <u>sur</u> $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$.

6. On fixe toujours un ouvert U régulier et on considère l'opérateur $\hat{W}_U$ défini par $\hat{W}_U u(x) = Wu(x).1_U(x)$, $u \in C_k^2$.

En particulier,

$$\hat{W}u(x) = \begin{cases} W_U u(x) + \int_{U^c} u(y)s(x,y)dy , & x \in U \\ 0 & , x \notin U . \end{cases}$$

On va montrer que la fermeture de $(C_k^2, \hat{W}_U)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur $C_0(R^n)$. Cela repose sur le

LEMME. - <u>Soit</u> $f \in C_k(R^n)$ <u>telle que</u> $f|_U \in C^{2,\alpha}(U)$, <u>pour tout</u> $\lambda > 0$, <u>il existe</u> u <u>unique</u>, $u \in C_k(R^n)$ <u>avec</u> $u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)$, <u>telle que</u> $(\lambda - \hat{W}_U)u = f$.

En effet, $(\lambda - \hat{W}_U)u = f$ équivaut à :

(14) $(\lambda - W_U)u(x) - \int_{U^c} u(y)s(x,y)dy = f(x)$, $x \in U$; $\lambda u(x) = f(x)$, $x \notin U$.

Soit encore

(15) $(\lambda - W_U)u(x) = f(x) + \frac{1}{\lambda}\int_{U^c} f(y)s(x,y)dy$, $x \in U$; $u(x) = \frac{f(x)}{\lambda}$, $x \in \partial U$.

D'après la proposition 3, n° 5, $\int_{U^c} f(y)s(x,y)dy \in C^{2,\alpha}(U)$, d'où il existe une et seule solution à (15) d'après le théorème 6, n° 5.

Soit $\mathcal{D}_U = \{u \; ; \; u \in C_k(R^n) , u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)\}$, alors on a le

THEOREME 7. - <u>Il existe un unique semi-groupe de Feller sur</u> $C_0(R^n)$ <u>dont le générateur infinitésimal prolonge</u> $(\mathcal{D}_U, \hat{W}_U)$.

C'est le théorème de Hille-Yosida-Ray car $\mathcal{D}_U \supset C_k^3$ est dense dans C_0 , $\hat{W}_U$ a le principe du maximum (Lemme 2, n° 5) et $(\lambda - \hat{W}_U)\mathcal{D}_U \supset C_k^3$ - Lemme ci-dessus - donc $(\lambda - \hat{W}_U)\mathcal{D}_U$ est dense dans C_0 .

<u>Notations</u> : On note P_t^U ce semi-groupe, G_λ^U sa résolvante, $X^U = (\Omega, X_t, P_x^U)$ le processus de Markov canonique associé, Ω est l'ensemble des applications c.a.d.l.à.g. de R_+ dans $R^n \cup \{\partial\}$ absorbées en $\{\partial\}$; alors

$$G_\lambda^U f(x) = E_x^U\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) .$$

On a également (formule de Dynkin), pour tout temps d'arrêt τ :

$$\text{(16)} \qquad E_x^U(e^{-\lambda\tau}u(X_\tau))-u(x) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda s}(\hat{W}_U-\lambda)u(X_s)ds\right) , \; u \in \mathcal{D}_U .$$

7. Soient U et V deux ouverts réguliers tels que $\overline{V} \subset U$.

Considérons le processus X^U et soit $\sigma_V = \inf(t \geq 0 , X_t \notin V)$; on peut considérer le processus $\overline{X} = \overline{(X^U)}^V$ "stoppé" de X^U au temps σ_V : $\overline{X}_t = X^U_{t\wedge\sigma_V}$. Sa résolvante $\overline{G}_\lambda = \overline{(G^U)}^V_\lambda$ est donnée par

$$\text{(17)} \qquad \overline{G}_\lambda f(x) = E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} f(X_t)dt + \frac{1}{\lambda} E_x^U(e^{-\lambda\sigma_V} f(X_{\sigma_V})) .$$

Le problème est de montrer l'équivalence des processus $\overline{X}$ et X^V . Cela repose sur le

LEMME. - <u>On a pour</u> $x \in V$ <u>et</u> $u \in \mathcal{D}_V$, <u>la formule</u>

$$\text{(18)} \qquad E_x^U(e^{-\lambda\sigma_V}u(X_{\sigma_V})) - u(x) = E_x^U\left(\int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t}(W-\lambda)u(X_s)ds\right) .$$

Cette formule se réduit à (16) si $u \in \mathcal{D}_U$; il faut la prolonger à $\mathcal{D}_V$; ceci se fait en approximant une fonction $u \in \mathcal{D}_V$ par des éléments $u_n \in \mathcal{D}_U$ et un peu de calcul.

Ce lemme montré, soit $f \in (\lambda - \hat{W}_V)\mathcal{D}_V$, $f = (\lambda - \hat{W}_V)u$, $u \in \mathcal{D}_V$ et $G_\lambda^V f(x) = u(x)$; de plus si $x \notin V$, $f(x) = \lambda u(x)$.

Si $x \in V$,

$$(\overline{G}_\lambda)f(x) = E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} f(X_t)dt + \frac{1}{\lambda} E_x^U(e^{-\lambda\sigma_V} f(X_{\sigma_V})) \quad \text{- d'après (17) -} ,$$

$$= E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t}(\lambda - W)u(X_t)dt + E_x^U(e^{-\lambda\sigma_V}.u(X_{\sigma_V})) ,$$

$$= u(x) \qquad \text{- d'après (18) -} ,$$

$$= G_\lambda^V f(x) .$$

Si $x \notin V$,

$$\overline{G}_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) = u(x) = G_\lambda^V f(x) .$$

Comme $(\lambda - \hat{W}_V)\mathcal{D}_V$ est dense dans $C_0(R^n)$ - Lemme n° 6 - $\overline{G}_\lambda = G_\lambda^V$ et on a montré le

THEOREME 8. - <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>deux ouverts réguliers tels que</u> $\overline{V} \subset U$, <u>alors le processus</u> X^U <u>stoppé au temps de sortie de</u> V <u>est équivalent au processus</u> X^V.

8. Prenons pour U_n la boule de centre 0 , de rayon n , il résulte du théorème de recollement ([2], p. 344) qu'il existe un unique processus standard $X = (\Omega, X_t, P_x)$ - Ω espace canonique - dont le processus stoppé au temps de sortie de U_n est X^{U_n} . Plus généralement, si U est un ouvert régulier, le stoppé de X à σ_U est X^U , ce qui signifie que l'on a les relations, pour $\lambda > 0$ et $f \in C_0(R^n)$,

(19) $$G_\lambda^U f(x) = E_x\left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) + \frac{1}{\lambda} E_x(e^{-\lambda\sigma_U}.f(X_{\sigma_U})) .$$

(20) $$P_t^U f(x) = E_x(f(X_{t\wedge\sigma_U}))\ .$$

Si on choisit $f \in C_k^2$ et U un ouvert régulier contenant $\mathrm{supp}(f)$, on a, grâce à (20),

$$E_x(f(X_{t\wedge\sigma_U})) - f(x) = E_x\int_0^t \hat{W}^U f(X_{s\wedge\sigma_U})ds$$

$$= E_x\int_0^{t\wedge\sigma_U} Wf(X_s)ds\ .$$

Mais comme $f(X_{\sigma_U}) = 0$, on a aussi

$$E_x(f(X_t)1_{[t<\sigma_U]}) - f(x) = E_x\int_0^{t\wedge\sigma_U} Wf(X_s)ds\ ;$$

si maintenant on fait croître U vers R^n, σ_U croît vers la durée de vie ζ de X (le processus est standard) et compte tenu des conventions usuelles, on obtient

(21) $$E_x(f(X_t)) - f(x) = E_x\int_0^t Wf(X_s)ds\ .$$

Considérons maintenant un processus de Markov standard $\tilde{X} = (\Omega, X_t, \tilde{P}_x)$ vérifiant

(21) $$\tilde{E}_x u(X_t) - u(x) = \tilde{E}_x\int_0^t Wu(X_s)ds\ ,\ \text{quelle que soit}\ u \in C_k^2\ .$$

On notera R_λ^U la résolvante de $\tilde{X}^U$ processus stoppé de $\tilde{X}$ au temps σ_U.

De (21), on déduit de façon usuelle, pour $\lambda > 0$, $u \in C_k^2$,

(22) $$\tilde{E}_x(e^{-\lambda t}u(X_t)) - u(x) = \tilde{E}_x\int_0^t e^{-\lambda s}(W-\lambda)u(X_s)ds\ ,$$

(23) $$\tilde{E}_x(e^{-\lambda\sigma_U}u(X_{\sigma_U})) - u(x) = \tilde{E}_x\int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda s}(W-\lambda)u(X_s)ds\ .$$

Cette dernière relation s'étend à $u \in \mathcal{D}_U$ et on a donc, pour U ouvert régulier et $u \in \mathcal{D}_U$,

(24) $$u(x) = \tilde{E}_x \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda s}(\lambda - W)u(X_s)ds + \tilde{E}_x(e^{-\lambda\sigma_U}u(X_{\sigma_U}))$$

soit encore puisque $W = \hat{W}^U$ sur U , $\hat{W}^U = 0$ sur U^c ,

(25) $$u(x) = R_\lambda^U[(\lambda - \hat{W}^U)u](x)$$

$$= G_\lambda^U[(\lambda - \hat{W}^U)u](x)$$

d'où comme $(\lambda - \hat{W}^U)\mathcal{D}_U$ est dense dans $C_0(R^n)$, $R_\lambda^U = G_\lambda^U$ puis, d'après l'unicité du recollement, $X = \tilde{X}$.

On peut énoncer le

THEOREME 9. - <u>Soit</u> W <u>un opérateur de la forme</u> (1) , <u>vérifiant les hypothèses</u> (P1) , (S1) , (S2) ; <u>il existe un et un seul processus de Markov standard sur</u> R^n , $X = (\Omega, X_t, P_x)$ <u>tel que,</u>

$$E_x u(X_t) - u(x) = E_x \int_0^t Wu(X_s)ds \text{ , quelle que soit } u \in C_k^2 \text{ .}$$

9. Nous terminons par deux remarques.

D'abord, U étant un ouvert régulier et f une fonction donnée sur U^c , continue nulle en dehors d'un compact, il résulte de ce qui précède que $u(x) = E_x(f(X_{\sigma_U}))$ est l'unique solution du problème de Dirichlet $Wu(x) = 0$, $x \in U$; $u(x) = f(x)$, $x \in U^c$ et que cette solution est telle que $u \in C_k(R^n)$, $u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)$.

Enfin, on peut donner des conditions sur les coefficients de P et sur le noyau $s(x,y)$ pour que le processus X soit conservatif ou de Feller.

R E F E R E N C E S

[1] BONY - COURREGE - PRIOURET — Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte... Ann. Inst. Fourier, 18.2 (1969), p. 369.

[2] COURREGE - PRIOURET — Recollements de processus de Markov. Publ.Math.Stat.Univ., Paris 14 (1965), p. 275.

[3] DOUGLIS - NIREMBERG — Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm.Pure Appl.Math., 8 (1955), p. 503.

[4] FRIEDMAN — Partial differential equations of parabolic Type. Prentice-Hall.

[5] MAIZENBERG — The Dirichlet problem for certain integro-differential equations. Math. URSS, Izvestija, Vol. 3 (1969), n° 3.

[6] MAIZENBERG — The Cauchy problem for some integro-differential equations. Izv.Vyss.Uceb.Zaved Matematica, (1969), n° 8.

[7] SKOROHOD — Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley (1965).