SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD MAISONNEUVE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Introduction et bibliographie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 172-261
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__172_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES

INTRODUCTION et BIBLIOGRAPHIE

Les quatre exposés groupés sous ce titre avaient pour but d'exposer, d'une part la thèse de MAISONNEUVE sur les " systèmes régénératifs", et d'autre part le travail récent de GETOOR-SHARPE sur les " last exit decompositions" . Chemin faisant, la rédaction initiale (due à MEYER) s'est beaucoup modifiée, et s'est écartée de plus en plus des deux modèles. La contribution de MAISONNEUVE y est aussi devenue si importante (en particulier, par l'amélioration de beaucoup de preuves) que les exposés III et IV sont signés par MAISONNEUVE et MEYER.

La notion de système régénératif apporte un langage commun à tout un ensemble de travaux se rattachant à l'idée suivante : décrire un processus stochastique qui se trouve être markovien " sur " un certain ensemble aléatoire fermé M , au moyen de son comportement sur M et de la structure de ses "excursions" hors de M. Il faut comparer cette idée à celle du calcul des probabilités classique : lorsqu'un processus, par exemple une chaîne de Markov, admet un " imbedded renewal process" , on peut le décrire comme une succession de morceaux indépendants et de même loi, mis bout à bout.

Lorsque le processus que l'on analyse est tout entier markovien, et non seulement markovien sur M, on peut pousser la description plus loin, en introduisant un semi-groupe "tué" qui donne la structure des excursions. On rencontre alors des problèmes classiques en théorie des processus de Markov : décomposition d'une diffusion en processus à la frontière et processus à l'intérieur (travaux de MOTOO, OKABE, SATO, UENO...) ; frontières idéales des chaînes de Markov et étude probabiliste du "retour de l'infini" (CHUNG, WILLIAMS...) ; étude d'un processus de Markov au voisinage d'un point (ITO, KINGMAN...). La forme de ces résultats sur les processus de Markov qui semble assez générale pour les unifier tous est celle de GETOOR-SHARPE (après un travail remarquable de PITTENGER-SHIH). Nous la présentons dans l'exposé II.

Les exposés III et IV contiennent les résultats essentiels de MAISONNEUVE. Dans l'exposé III, on associe à un processus " markovien sur M" un vrai processus de Markov, le processus d'incursions. Le résultat donné ici est techniquement meilleur que celui que MAISONNEUVE publiera de son côté : là où l'on construisait un processus fortement markovien, nous obtenons ici un processus de Markov droit. Cela permet d'appliquer directement à un tel processus toute la théorie classique des processus de Markov. Mais à quel prix ! Nous pataugeons pendant des dizaines de pages dans de la bouillasse de fonctions presque boréliennes et de complémentaires d'analytiques.

La récompense vient dans l'exposé IV, où nous présentons l'idée de MAISONNEUVE, suivant laquelle toute la structure des excursions est contenue dans le système de LEVY du processus d'incursions. En particulier, nous donnons une nouvelle démonstration des résultats de GETOOR-SHARPE .

Un court exposé V contient des applications aux chaînes de Markov.

SOURCES DES EXPOSES

Nous avons cité les sources directes : MAISONNEUVE, GETOOR-SHARPE. Mais il est impossible d'aborder un pareil sujet sans faire un peu d'histoire, et payer quelques dettes à des auteurs qui ne sont pas directement cités.

L'idée des systèmes régénératifs vient en ligne droite de celle des " Markov sets" , qui généralise au temps continu celle des " phénomènes récurrents" du livre de FELLER. Au départ, il semble que le problème ait été posé par KOLMOGOROV, traité rigoureusement (mais dans un système d'axiomes inutilisable) par KRYLOV-JUŠKEVIČ [14], puis par HOFFMANN-JØRGENSEN [12] avec des axiomes beaucoup plus maniables. Tous ces auteurs utilisent le processus qui correspond, pour la théorie du renouvellement en temps discret, au processus de l'âge : c'est MAISONNEUVE qui a eu l'idée de le remplacer par le processus représentant le reste de vie , qui est bien meilleur. D'autres aspects de la question ont été traités par J.HOROWITZ, par KINGMAN...

Le travail de GETOOR-SHARPE se trouve à l'intersection de deux autres "lignes" : d'une part celle de la théorie du balayage des fonctionnelles additives, et d'autre part celle des frontières . Dans la première ligne, il y a les nombreux travaux de GETOOR lui même, les travaux d'AZEMA [1],[2], qui ont (d'après GETOOR) joué un grand rôle dans la genèse du travail de GETOOR-SHARPE. Dans la seconde,les articles de CHUNG [5],[6] (qui ont fourni par exemple des modèles concrets pour les lois d'entrée non bornées de la théorie) , et deux articles très proches des idées de GETOOR-SHARPE : un remarquable article de MOTOO [19] déjà ancien, qui a été peu lu par suite de ses difficultés techniques (il ne figure pas dans la bibliographie de GETOOR-SHARPE), et un article tout récent de DYNKIN [9]. Bien entendu, il faut aussi citer, à nouveau, l'article de PITTENGER -SHIH [20].

N.KAROUI et H. REINHARD sont arrivés, indépendamment de GETOOR-SHARPE, à des résultats très voisins, en essayant de reprendre MOTOO avec des méthodes plus modernes. Ils s'intéressent (comme DYNKIN) à l'aspect des " u-processus" qui permettent de rendre bornées les lois d'entrée non bornées que nous rencontrerons, aspect que nous laissons entièrement de côté ici.

Enfin, l'idée de considérer le système de LEVY du processus d'incursions comme la clé de la structure du processus nous(*) est venue de l'article d'ITO [13] sur les processus de Poisson ponctuels.

On voit qu'il s'agit d'un sujet qui se trouve au centre de la théorie des processus de Markov, et qui ne s'est développé que par l'apport successif d'idées partielles, dues à une foule d'auteurs. Maintenant qu'on approche d'une vue d'ensemble, il est bon de s'en rendre compte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.AZEMA. Quelques applications de la théorie générale des processus I. Invent. Math. 18 (1972), p.293-336.

[2] J.AZEMA. Une remarque sur les temps de retour, trois applications. Séminaire de Probabilités de Strasbourg VI. Lect. Notes in M. vol. 258, Springer 1972.

[3] A. BENVENISTE et J. JACOD . Systèmes de Lévy des processus de Markov. Invent.Math. 21, 1973, p.183-198.

[4] A. BENVENISTE et J.JACOD. Projection des fonctionnelles additives et représentation des potentiels d'un processus de Markov. CRAS Paris, t.276 (1973) p.1365-1368.

[5] K.L.CHUNG . On the boundary theory for Markov chains. Acta Math. 110 (1963) et 115 (1966)

[6] K.L.CHUNG . Lectures on Boundary Theory for Markov Chains. Ann. of Math. Studies 65, Princeton Univ. Press 1970.

[7] C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Math. bd 67, Springer 1972.

(*) Mais nous nous sommes aperçus qu'elle figure explicitement chez MOTOO !

[8] R.D. DUNCAN et R.K.GETOOR. Equilibrium potentials and additive functionals. Ind. Univ. Math. J. 21 (1971), p.529-545.

[9] E.B. DYNKIN .СТРАНСТВИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА. Teoriia Ver. Prim. 16, n°3, p.409-436 (1971).

[10] R.K. GETOOR et M.J. SHARPE . Last exit time and additive functionals. Annals of Prob. 1,1973, p.550-569 .

[11] R.K.GETOOR et M.J.SHARPE. Last exit decompositions and distributions. Indiana Math. J.

[12] J. HOFFMANN-JØRGENSEN. Markov sets. Math. Scand. 24 (1969),

[13] K. ITO. Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. 6th Berkeley Symposium, vol.III, p.225-240 (1971).

[14] N.V.KRYLOV et A.A.YUSHKEVICH. Markov random sets. Trans. Moscow Math. Soc. 13 (1965) p.127-153 (traduction).

[15] J.F.MERTENS . Processus de Ray et théorie du balayage. à paraître aux Invent.Math.

[16] P.A.MEYER. Probabilités et potentiels. Hermann, 1966.

[17] P.A.MEYER, R.T.SMYTHE et J.B.WALSH. Birth and death of Markov processes. 6-th Berkeley Symp. III, p.295-306 (1971).

[18] P.A.MEYER et J.B.WALSH. Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. Math. 14, 1971, p.143-166.

[19] M.MOTOO. Application of additive functionals to the boundary theory of Markov processes. 5-th Berkeley Symposium (1967) vol.II part 2 , p.

[20] A.O. PITTENGER et C.T.SHIH. Coterminal families and the strong Markov property.

[21] J.B.WALSH . The perfection of multiplicative functionals. Sém. de Probabilités de Strasbourg VI, Lecture Notes vol. 258,1972 .

Le travail de MAISONNEUVE est à paraître, il n'en existe que des prépublications sans démonstrations (Notes aux CRAS t.274, 1972, p. 497-500 et autres); le texte complet de la thèse de MAISONNEUVE peut être obtenu à l'Institut de Mathématique de Strasbourg, 7 rue René Descartes .

P.S. GETOOR et SHARPE viennent d'écrire un article, intitulé <u>Balayage and multiplicative functionals</u>, qui étend [11] à des semi-groupes associés à des fonctionnelles multiplicatives quelconques.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES I

exposé de P.A. Meyer

Ce premier exposé est composé entièrement de préliminaires. Un paragraphe donne les notations qui seront utilisées dans toute la suite. Ensuite, nous présentons divers résultats techniques qui nous permettront de construire de bonnes versions d'un ensemble aléatoire homogène dans un processus de Markov.

§ 1 . DESCRIPTION D'ENSEMBLES ALEATOIRES

DESCRIPTION DE SOUS-ENSEMBLES DE $\mathbb{R}_+^*$

Cette première section ne contient pas de probabilités : nous considérons une partie M de $\mathbb{R}_+^* =]0,\infty[$, et nous introduisons les notations suivantes :

(1.1) $D(t) = \inf \{ s>t : s\in M\}$ ($\inf \emptyset = +\infty$) ; $D(0)=D$

C'est une fonction continue à droite (et pourvue de limites à gauche), croissante, constante dans les intervalles ouverts contigus à $\overline{M}$. On pose

(1.2) $R(t) = D(t)-t$

fonction positive, dont le graphe a l'allure suivante (" en dents de scie descendantes"

Elle est continue à droite et pourvue de limites à gauche. On introduit aussi la fonction moins importante

(1.3) $d(t) = \inf \{ s\geq t : s\in M\}$

qui n'est "en général" continue, ni à droite, ni à gauche[1]. D'autre part on a les fonctions (à nouveau très importantes)

(1.4) $L(t) = \sup \{ s\leq t , s\in M \}$ ($\sup \emptyset = 0$)

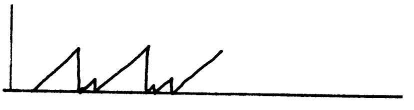
(1.5) $\ell(t) = \sup \{ s<t , s\in M \}$

(1.6) $a(t) = t-\ell(t)$

---

1. La plupart du temps, M sera fermé. Dans ce cas, d est continue à gauche, L continue à droite, on a $L=\ell_+$ et $d=D_-$.

Cela fait déjà une longue liste. On s'est efforcé, au prix de quelque incohérence logique (L correspond à d, D à ℓ) de respecter les notations essentielles de MAISONNEUVE d'une part, et de GETOOR-SHARPE d'autre part. Donnons l'origine de certaines de ces lettres, afin d'aider la mémoire du lecteur : D est l'initiale de <u>d</u>ébut (mais attention : d correspond à un vrai début, D à un " temps d'entrée") ; L correspond à <u>l</u>ast exit time ; a et R sont empruntés à la théorie du renouvellement : a vient de <u>â</u>ge , et R de <u>r</u>este (de vie). D(t)(donc R(t)), $\ell(t)$ (donc $a(t)$) dépendent seulement de $\overline{M}$. Les fonctions L et ℓ sont croissantes, donc pourvues de limites à droite et à gauche ; ℓ est continue à gauche ; a aussi, c'est une fonction " en dents de scie ascendantes"



Les fonctions R et a déterminent l'adhérence de M. Par exemple

$$\overline{M} = \{ t>0 : R(t-)=0 \}$$

Deux notations importantes : nous désignerons par $M^{\rightarrow}$ l'ensemble des extrémités <u>gauches</u> d'intervalles contigus à $\overline{M}$, et par $M^{\leftarrow}$ l'ensemble des extrémités <u>droites</u> . Par exemple

$$M^{\rightarrow} = \{ t>0 : L(t)=t, D(t)>t \}$$

TRANSPORT D'UNE MESURE SUR M

Nous supposons ici que M est fermé. Soit d'abord μ une mesure positive bornée(+) sur $\mathbb{R}_+^*$. <u>Transporter</u> μ sur M, cela veut dire ramener sur M la masse de μ contenue dans M^c, en attribuant à l'extrémité <u>gauche</u> d'un intervalle contigu $]L(t),D(t)]$ non vide toute la masse contenue dans cet intervalle . Noter que cela déplace aussi la masse placée en D(t), bien qu'elle soit sur M , et que la masse contenue dans l'intervalle $]0,D(0)]$ est entièrement perdue, puisqu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$ et non sur $\mathbb{R}_+$. Si nous notons $\overline{\mu}$ la mesure ainsi obtenue, nous pouvons écrire

$$(1.7) \qquad \overline{\mu} = I_{M\setminus M^{\leftarrow}} \cdot \mu + {\sum_{g\in M^{\rightarrow}}}' \mu(]g,D(g)])\varepsilon_g \quad (*)$$

En examinant d'abord le cas où $\mu=\varepsilon_x$, puis en intégrant, on voit que si f est borélienne positive sur $\mathbb{R}_+^*$

(*) Bien que ce ne soit pas logiquement nécessaire, la notation $\sum'$ est là pour rappeler que g=0 est exclu de cette somme.

(+) Cette restriction n'est nécessaire que si $L_\infty < \infty$.

(1.8) $\quad \int f(s)\bar{\mu}(ds) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(\ell(s)) I_{\{\ell(s)>0\}}\mu(ds)$

Au lieu de considérer des mesures, considérons des fonctions de répartition : soit $a(t)=\mu(]0,t])$, $\bar{a}(t)=\bar{\mu}(]0,t])$. Alors

(1.9) $\quad \bar{a}(t) = a(D(t))-a(D(0))$

L'opération qui fait passer de a à $\bar{a}$ (dérivation, transport, intégration) s'appelle, dans la terminologie de GETOOR-SHARPE, le <u>balayage brut</u> ("raw balayage", par opposition aux balayages <u>adapté</u> et <u>prévisible</u> qui viendront plus loin) de a sur M.

Une notion techniquement utile, parce qu'elle s'applique à des mesures non nécessairement bornées, est la suivante. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}_+^*$, non nécessairement bornée, mais admettant une transformée de Laplace finie pour p>0. La mesure $\bar{\mu}^{(p)}$ s'obtient alors en formant la mesure bornée $e^{-ps}\mu(ds)$, en la transportant sur M, et en multipliant le résultat par e^{ps}. Explicitement

(1.10) $\quad \bar{\mu}^{(p)} = I_{M\setminus M^{\leftarrow}}.\mu + \sum'_{g\in M^{\rightarrow}} e^{pg}\int_{]g,D(g)]} e^{-ps}\mu(ds).\varepsilon_g$

(1.11) $\quad \int f(s)\bar{\mu}^{(p)}(ds) = \int f(\ell(s))e^{p\ell(s)}I_{\{\ell(s)>0\}}e^{-ps}\mu(ds)$

d'où en particulier , si $f=I_{]0,t]}$, la fonction de répartition $\bar{a}^{(p)}$. L'opération $a \mapsto \bar{a}^{(p)}$ s'appelle p-balayage brut.

Si la mesure μ est diffuse, on peut remplacer ℓ par L ou ℓ+ dans toutes ces formules.

ENSEMBLES ALEATOIRES

Nous nous donnons maintenant un ensemble Ω, muni d'une tribu $\underline{\underline{F}}$, d'une loi P, d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Nous appellerons <u>ensemble aléatoire</u> une partie <u>progressivement mesurable</u> M de $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$. Nous dirons que M est un <u>fermé aléatoire</u> si les coupes $M(\omega)$ sont fermées dans $\mathbb{R}_+^*$.

Dans ce cas, toutes les quantités que nous avons considérées précédemment dépendent à la fois de t et de ω , et seront notées $D_t(\omega)$, $L_t(\omega)$... à la façon des processus. Il faut noter

- Que D_t est un temps d'arrêt, mais le processus continu à droite (D_t) n'est pas adapté : si (X_t) est un processus bien-mesurable, le processus (X_{D_t}) est adapté à la famille continue à droite $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, qui "avance" sur la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$; il en est ainsi en particulier des processus (D_t) et $(R_t)=(D_t-t)$.
- Que les processus (L_t), (ℓ_t), (a_t) sont adaptés à $(\underline{\underline{F}}_t)$: les deux derniers sont même prévisibles.

- Que l'ensemble $\overline{M} = \{ t : a_{t+}=0 \}$ est bien-mesurable .

En ce qui concerne le balayage : considérons un processus croissant (A_t) ; son p-balayé brut $(\overline{A}_t^{(p)})$, s'il existe [i.e. si pour presque tout ω $\int_0^\infty e^{-ps}dA_s(\omega)<\infty$], est un processus croissant <u>non adapté</u> à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, mais seulement à la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$. Les projections duales de $\overline{A}^{(p)}$, si elles existent, seront appelées suivant le cas p-balayé prévisible, p-balayé bien-mesurable (ou adapté) de (A_t). Tout cela est très proche des définitions (plus générales) d' AZEMA [1].

(Les familles de tribus que l'on rencontre en théorie des processus de Markov ne satisfont pas aux conditions habituelles, mais sont des intersections de familles 'complétées' $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$ qui y satisfont. L'extension des résultats précédents est alors immédiate.)

ENSEMBLES ALEATOIRES HOMOGENES

Supposons Ω muni d'opérateurs de translation θ_t $(t\geq 0)$: on ne suppose pas que $\theta_0=I$, mais seulement que $\theta_0\theta_t=\theta_t\theta_0=\theta_t$ pour tout $t\geq 0$. On dit qu'un processus $(X_t)_{t>0}$ (ou $(X_t)_{t\geq 0}$) est <u>homogène</u> si l'on a identiquement $X_{s+t} = X_s\circ\theta_t$. On dit que M est un <u>ensemble aléatoire homogène</u> si son indicatrice est un processus homogène. Il y aurait lieu, bien entendu, de relier l'opérateur de translation et la structure mesurable, mais en fait nous travaillerons toujours dans des situations concrètes où cela ira de soi (processus canoniques).

Supposons M homogène ; $\overline{M}$ est aussi homogène, de même que $\vec{M}$, $\overleftarrow{M}$...

Rappelons qu'on a posé $D_0=D$. On a les identités suivantes

(1.12) $\quad D_t = t+D\circ\theta_t$, donc $D_u\circ\theta_t = D_{u+t}-t$

(1.13) $\quad R_t = R_0\circ\theta_t= D\circ\theta_t$

en particulier, cela entraîne que le processus (R_t) est homogène.
Si (X_t) est un processus homogène, on montre aisément que le processus (X_{D_t}) est encore homogène.

(1.14) $\quad D\circ\theta_t = D-t$ sur $\{D>t\}$

(1.15) $\quad D= \lim_{t\to 0} D\circ\theta_t$

Inversement, si D satisfait à (1.14) et (1.15), le processus $(D\circ\theta_t)$ est un "processus en dents de scie descendantes", continu à droite ; si on le note (R_t), l'ensemble $\overline{M}=\{(t,\omega) : t>0 , R_{t-}(\omega) = 0 \}$ est un fermé homogène, et $D(\omega) = \inf \{t>0 : (t,\omega)\in M\}$. Ainsi (si l'on néglige, pour l'instant, les questions de mesurabilité) la théorie des ensembles homogènes est équivalente à celle des " temps terminaux".

Partons de la relation (1.14) : $t<D(\omega) \Rightarrow D(\theta_t\omega)=D(\omega)-t$, et remplaçons ω par $\theta_s\omega$: il vient

(1.16) $\quad t<R_s(\omega) \Rightarrow R_{t+s}(\omega) = R_t(\theta_s\omega) = R_s(\omega)-t$

de même, si (X_t) est un processus homogène , écrivons : $t<D(\omega) \Rightarrow X_D(\omega)=X_{D_t}(\omega)$, et remplaçons ω par $\theta_s\omega$. Il vient

(1.17) $\quad t<R_s(\omega) \Rightarrow X_{D_{t+s}}(\omega)= X_{D_t}(\theta_s\omega) = X_{D_s}(\omega)$

De l'autre côté, nous indiquerons seulement que le processus $(\mathcal{a}_t)$ est homogène, et que l'on a l'identité de définition des " familles coterminales" de PITTENGER-SHIH

(1.18) $\quad L_u\circ\theta_t = (L_{t+u}-t)^+$

Il y a en fait beaucoup plus à dire sur ce sujet, qui constitue en quelque sorte l'aspect"dual" de la théorie générale des processus. Voir AZEMA [1], [2] .

FONCTIONNELLES ADDITIVES

Comme nous ne voulons pas préciser les questions de mesurabilité, nous appellerons <u>processus croissant</u> , dans cette section, toute famille $(A_t)_{t\geq 0}$ de fonctions réelles sur Ω , telle que pour tout $\omega\in\Omega$ la fonction $A_\cdot(\omega)$ soit croissante, continue à droite, nulle pour t=0, et à valeurs finies (ces deux dernières conditions peuvent parfois être affaiblies, mais nous ne nous en occuperons pas ici). On dit que (A_t) est un processus croissant <u>additif</u> (resp. p-<u>additif</u>) si

(1.19) $\quad A_{s+t} = A_s+ A_t\circ\theta_s \quad$ (resp. $A_{s+t} = A_s+ e^{-pt}A_t\circ\theta_s$)

Si (A_t) est additif , $A'_t = \int_0^t e^{-ps}dA_s$ est p-additif , et $A_t=\int_0^t e^{ps}dA'_s$. Inversement, si(A'_t) est p-additif , (A_t)est additif. On utilise en théorie des processus de Markov l'expression " fonctionnelle additive" pour désigner les processus croissants additifs <u>adaptés</u> . On parlera ici, en imitant GETOOR-SHARPE, de fonctionnelle additive (ou p--additive) <u>brute</u>.

Soit M un ensemble fermé homogène ; nous reprenons les notations (D_t), etc. Un bel exemple de fonctionnelle additive brute est $K_t = D_t-D_0$, qui n'est autre que la balayée brute de la fonctionnelle additive $A_t=t$ sur M . Montrons d'après GETOOR-SHARPE que

PROPOSITION. <u>La</u> p-<u>balayée brute d'une f.a.brute sur M est encore additive</u>.

DEMONSTRATION. Cela revient à montrer que la balayée brute d'une fonctionnelle p-additive (brute) est p-additive. Soit (B_t) p-additive, et soit $C_t=B_{D_t}-B_{D_0}$ sa balayée brute. Il faut prouver

$$C_{t+s}(\omega)-C_s(\omega) = e^{-ps}(C_t(\theta_s\omega)) = e^{-ps}(B_{D_t}(\theta_s\omega)-B_{D_0}(\theta_s\omega))$$
$$= e^{-ps}.e^{-pD_0(\theta_s\omega)}B_{D_t(\theta_s\omega)-D_0(\theta_s\omega)}(\theta_{D_0(\theta_s\omega)}\theta_s\omega)$$
$$= e^{-pD_s(\omega)}B_{K_t(\theta_s\omega)}(\theta_{D_s}\omega)$$

Par ailleurs, le premier membre vaut

$$B_{D_{t+s}(\omega)}(\omega)-B_{D_s(\omega)}(\omega) = B_{D_s(\omega)+K_t(\theta_s\omega)}(\omega)-B_{D_s(\omega)}(\omega)$$
$$= e^{-pD_s(\omega)}B_{K_t(\theta_s\omega)}(\theta_{D_s}\omega)$$

et c'est bien la même chose.

§ 2 . ENSEMBLES ALEATOIRES HOMOGENES D'UN PROCESSUS DROIT

Ce paragraphe est très technique. Nous le divisons en deux parties. La première reprend la méthode de WALSH, qui permet d'associer une fonctionnelle multiplicative parfaite à toute fonctionnelle multiplicative exacte, en en extrayant quelques petits résultats supplémentaires (avec des applications aux ensembles aléatoires). La seconde étend une intéressante remarque de MERTENS [15]. Tout cela est extrêmement ennuyeux, et on n'en parle que parce qu'on y est obligé.

Nous considérons ici un processus de Markov à valeurs dans E, sous-espace borélien d'un espace métrique compact, et satisfaisant aux hypothèses droites. Comme d'habitude, nous distinguons dans E un point absorbant ∂ , et nous considérons la réalisation continue à droite canonique de ce processus, à durée de vie

$$(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ},X_t,\zeta,\dots\ \underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\dots,P^{\mu}\dots\ )\ (\text{ notations usuelles })$$

et nous notons $[\partial]$ la trajectoire constamment égale à ∂. Voici quelques notations maoins classiques

$\underline{\underline{F}}^*$ est la complétée universelle de $\underline{\underline{F}}^{\circ}$ sur Ω

$\underline{\underline{B}}_e$ est la tribu sur E engendrée par toutes les fonctions p-excessives ($p\in\mathbb{R}_+$), ou encore par les fonctions 1-excessives, les 1-potentiels... Elle est contenue dans la tribu presque-borélienne, elle même contenue dans la tribu universellement mesurable $\underline{\underline{B}}_u(E)$.

$\underline{\underline{F}}_t^{\circ\circ}$ est la tribu engendrée sans complétion par les v.a. $f\circ X_s$, f $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable, $s\leq t$: elle est contenue dans $\underline{\underline{F}}^*$.

COMPLEMENTS SUR LA METHODE DE WALSH

Nous partons d'une fonctionnelle multiplicative exacte (G_t), à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$: nous ne la supposons pas parfaite. Les trajectoires $G_.(\omega)$ sont supposées toutes décroissantes et continues à droite, et nous supposons pour l'instant (cf. appendice)

(1.19) $G_t([\partial])=1$ pour tout t , $G_t(\omega)=G_{\zeta-}(\omega)$ pour $t \geqq \zeta(\omega)$

Nous commençons par un lemme dont la démonstration est empruntée à BENVENISTE et JACOD [3].

LEMME. Il existe une fonctionnelle (G'_t) indistinguable de (G_t), et adaptée à la famille $(\underline{\underline{F}}^{oo}_{t+})$.

DEMONSTRATION. Soit (Q_t) le semi-groupe exact

$$Q_t(x,f) = E^x[f\circ X_t.G_t]$$

et soit (V_p) sa résolvante. Il est bien connu que si f est bornée, $p>0$, V_pf est différence de deux fonctions p-excessives, donc $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable. Soit f q-excessive bornée $(q>0)$; la fonction $Q_.(x,f)$ est continue à droite, et sa transformée de Laplace est $V_.(x,f)$: les formules d'inversion montrent que $Q_t(.,f)$ est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable pour tout t. On passe de là, par classes monotones, au cas où f est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable bornée, de sorte que Q_t est un noyau sur $\underline{\underline{B}}_e$.

Soit π^x_t la mesure sur $\underline{\underline{F}}^o_t$

$$\pi^x_t(h) = E^x[h.G_t]$$

La fonction $x \mapsto \pi^x_t(h)$ est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable sur E. Pour le voir, on se ramène par classes monotones au cas où $h=f_1\circ X_{t_1}\ldots f_n\circ X_{t_n}$ (les f_i boréliennes, les $t_i \leqq t$) et une récurrence nous renvoie aux remarques ci-dessus concernant Q_t. Comme $\underline{\underline{F}}^o_t$ est séparable, nous pouvons écrire

$$\text{sur } \underline{\underline{F}}^o_t \text{ , } \pi^x_t(d\omega) = a_t(x,\omega)P^x(d\omega)$$

oà a_t est ≤ 1, $\underline{\underline{B}}_e \times \underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable. Posons alors successivement

$$b_t(x,\omega) = \inf_s a_s(x,\omega) \text{ pour s rationnel } < t$$

$$c_t(x,\omega) = b_{t+}(x,\omega)$$

$$G'_t(\omega) = c_t(X_0(\omega),\omega)$$

Il n'y a aucune difficulté à vérifier que (G'_t) satisfait à l'énoncé[1].

Dans tout ce qui suit, nous changeons de notation, et supposons que G_t est $\underline{\underline{F}}^{oo}_{t+}$ -mesurable pour tout t .

Nous posons maintenant, suivant la méthode de WALSH

(1.20) $\Gamma_t(\omega) = \limsup_{s\downarrow 0} \text{ess } G_{t-s}(\theta_s\omega)$ pour $t>0$

1. On peut évidemment modifier (G'_t) de sorte que (1.19) reste vraie.

C'est une fonction décroissante de t, ce qui permet de définir Γ_0 par passage à la limite. Ce n'est pas utile pour l'instant.

Soit λ une loi quelconque sur Ω, et soit $\bar{\lambda}$ la loi $\int_0^\infty \Theta_u(\lambda)e^{-u}du$. Pour r rationnel < t, encadrons G_{t-r} entre deux v.a. H_r, H'_r $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables et égales $\bar{\lambda}$-p.p., puis posons pour s réel <t $H_s = \liminf_{r \uparrow s} H_r$ et $H'_s = \limsup_{r\uparrow s} H'_r$; par continuité à gauche ($G_.$ étant continue à droite) H_s et H'_s encadrent G_{t-s} et lui sont égales $\bar{\lambda}$-p.p.. Comme $e^{-s}\Theta_s(\bar{\lambda}) \leqq \bar{\lambda}$, $H_s \circ \Theta_s$ et $H'_s \circ \Theta_s$ encadrent $G_{t-s}\circ\Theta_s$ et lui sont égales $\bar{\lambda}$-p.s., et on a donc $<\int_0^t e^{-u}(H'_u\circ\Theta_u - H_u\circ\Theta_u)du, \lambda>=0$. Donc les fonctions $\limsup_{u\downarrow\downarrow 0}$ ess $H_u\circ\Theta_u$ et $\limsup_{u\downarrow\downarrow 0}$ ess $H'_u\circ\Theta_u$ encadrent Γ_t et lui sont égales λ-p.s.. Comme λ est arbitraire, <u>nous avons montré que Γ_t est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable</u>.

Maintenant, posons

(1.21) $U = \{ \omega :$ pour presque tout s, $G_{s+t}(\omega) = G_s(\omega)G_t(\Theta_s\omega)$ pour tout $t>0 \}$

(il suffit d'ailleurs que cela ait lieu pour tout t rationnel)

(1.22) $V = \{ \omega : \Theta_u\omega \in U$ pour presque tout $u \}$

On peut alors voir que U et V sont $\underline{\underline{F}}^*$-mesurables, V est stable par translation, et V a une mesure égale à 1 pour toute loi P^μ. WALSH a montré dans [21] que sur V <u>le processus</u> (Γ_t) <u>est continu à droite</u>, <u>décroissant</u>, <u>et satisfait à l'identité</u> $\Gamma_{u+v} = \Gamma_u . \Gamma_v\circ\Theta_u$, et que de plus il est indistinguable de (G_t) pour toute loi P^μ. Nous ne reprendrons pas ces résultats ici, nous allons plutôt nous intéresser au comportement de (Γ_t) relativement aux <u>opérateurs de meurtre</u> k_t.

Nous notons d'abord que le processus (G_t) étant adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}^{oo}_{t+})$, il possède la propriété d'adaptation "algébrique" suivante :

(1.23) $\forall\omega, \forall\omega', \forall s, \forall t>s, (X_u(\omega)=X_u(\omega')$ pour $u<t) \Rightarrow (G_s(\omega)=G_s(\omega'))$

Une conséquence intéressante est le fait que G_s est $\underline{\underline{F}}^*_{s+}$-mesurable : en effet, si l'on a t>s, on a $G_s = G_s\circ k_t$, or G_s est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable, et k_t est mesurable de $\underline{\underline{F}}^*_t$ dans $\underline{\underline{F}}^*$.

Montrons que <u>U est stable pour les opérateurs de meurtre</u>. Soient $\omega\in U$, $r\geq 0$. On veut montrer que pour presque tout s on a pour tout t

(1.24) $G_{s+t}(k_r\omega) = G_s(k_r\omega).G_t(\Theta_s k_r\omega)$

Soit $z=\zeta(k_r\omega)\leqq r$. Si $s\geq z$, la relation s'écrit $G_{z-}(k_r\omega)=G_{z-}(k_r\omega)G_t[\partial]$ d'après (1.19), et c'est vrai d'après (1.19). Supposons donc s<z, donc s<r : alors $\Theta_s k_r\omega = k_{r-s}\Theta_s\omega$, $G_s(k_r\omega)=G_s\omega$. Comme $\omega\in U$, nous avons pour

presque tout s

$$G_{s+t}(\omega) = G_s(\omega)G_t(\Theta_s\omega) \text{ pour tout } t$$

Pour $t<r-s$, cette relation équivaut à (1.24), car $G_{s+t}(\omega)=G_{s+t}(k_r\omega)$, $G_t(k_{r-s}\Theta_s\omega) = G_t(\Theta_s\omega)$. Prenant t à gauche de z-s, et faisant croître t, il vient

$$G_{z-}(\omega) = G_s(\omega)G_{(z-s)-}(\Theta_s\omega)= G_s(\omega)G_{\zeta-}(\Theta_s\omega)$$

et d'après (1.19) cela donne (1.24) pour les valeurs de $t\geq z-s$. Donc finalement $k_r\omega\in U$.

De cela, et du fait que $[\partial]\in U$, résulte alors aussitôt que V <u>est stable par les opérateurs</u> k_r (rappelons qu'il l'est aussi par les Θ_t).

Nous allons maintenant faire disparaître entièrement l'ensemble exceptionnel pour la multiplicativité, en modifiant Γ_t de la manière suivante : t étant fixé, ω aussi, regardons tous les systèmes $\tau = (s_1,t_1,s_2,t_2,\dots,s_k,t_k)$ de nombres réels tels que $k\in\mathbb{N}$, $0\leq s_1\leq t_1\dots \leq s_k\leq t_k\leq t$, et que $k_{t_1-s_1}\Theta_{s_1}\omega\in V$, $\dots k_{t_n-s_n}\Theta_{s_n}\omega\in V$, et posons

$$J^t_\tau(\omega) = \Gamma_{t_1-s_1}(\Theta_{s_1}\omega)\dots\Gamma_{t_k-s_k}(\Theta_{s_k}\omega)$$

$$J_t(\omega) = \inf_\tau J^t_\tau(\omega)$$

Si $\omega\in V$, les conditions ci-dessus n'entraînent aucune restriction sur τ , et l'identité multiplicative entraîne que $J^t_\tau(\omega)\geq\Gamma_t(\omega)$, donc $J_t(\omega)= \Gamma_t(\omega)$. Dans le cas général, on peut d'abord éliminer les couples (s_k,t_k) tels que $s_k=t_k$. En diminuant un peu t_k on peut supposer que t_k est rationnel, en modifiant à peine J^t_τ , puis encore augmenter un peu s_k de manière à le rendre rationnel : l'inf peut donc être pris sur les subdivisions rationnelles, et il en résulte que J_t <u>est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable</u>. Il est clair que J_t est fonction décroissante de t, et que si $t<r$ on a $J_t(\omega)=J_t(k_r\omega)$. Il n'y a aucune difficulté à vérifier l'identité multiplicative sur tout Ω. On rend la fonctionnelle continue à droite en la remplaçant par $K_t=J_t\prod_{s\leq t}J_{s+}/J_s$ (0/0=1) : la fonctionnelle (K_t) jouit encore de toutes les propriétés précédentes.

On peut encore gagner quelque chose : la multiplicativité entraîne que $K_{t-s}(\Theta_s\omega)$ décroît lorsque $s\downarrow 0$. Posons

$$L_t(\omega) = \lim_{s\downarrow\downarrow 0} K_{t-s}(\Theta_s\omega)$$

alors le même raisonnement que WALSH fait pour les limites essentielles, appliqué ici aux limites ordinaires, montre que (L_t) est encore continue à droite : en voici le principe.

On fixe ω et t. Il n'y a rien à démontrer si $L_t(\omega)=0$ (décroissance). Supposons donc $L_t(\omega)>0$; alors $K_{t-u}(\Theta_u\omega)>0$ si u appartient à un intervalle $]0,a[$ non vide. La relation $L_{t-s}(\Theta_s\omega)=\lim_{u\downarrow\downarrow s} K_{t-u}(\Theta_u\omega)$ pour tout s entraîne que $L_{t-u}(\Theta_u\omega)=K_{t-u}(\Theta_u\omega)$ pour les u n'appartenant pas à un ensemble dénombrable I_t . Nous prendrons ε de la forme 1/n et noterons I l'ensemble dénombrable réunion des $I_{t+\varepsilon}$: si $u\in]0,a[$ n'appartient pas à I, nous pouvons écrire

$$L_{t+\varepsilon}(\omega) = L_t(\omega)L_\varepsilon(\Theta_t\omega)$$

$$L_{t+\varepsilon-u}(\Theta_u\omega) = L_{t-u}(\Theta_u\omega)L_\varepsilon(\Theta_{t-u}\Theta_u\omega) = L_{t-u}(\Theta_u\omega)L_\varepsilon(\Theta_t\omega)$$

$$L_{t+\varepsilon-u}(\Theta_u\omega) = K_{t+\varepsilon-u}(\Theta_u\omega) \ , \quad L_{t-u}(\Theta_u\omega)=K_{t-u}(\Theta_u\omega)>0$$

et par conséquent

$$L_{t+\varepsilon}(\omega) = L_t(\omega)\frac{K_{t+\varepsilon-u}(\Theta_u\omega)}{K_{t-u}(\Theta_u\omega)}$$

Laissons u fixe : lorsque $\varepsilon\to 0$, la continuité à droite de L résulte aussitôt de celle de K.

Les autres vérifications relatives à L ne présentent aucune difficulté. Pour finir, nous avons construit une fonctionnelle L qui jouit de toutes les propriétés suivantes[1]

- Pour toute loi initiale μ, (L_t) est P^μ-indistinguable de (G_t) ;
- Toutes les trajectoires $L_.(\omega)$ sont continues à droite, décroissantes comprises entre 0 et 1 ;
- La multiplicativité a lieu sur Ω entier ;
- L_t est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable ;
- si $t<u$, $L_t(\omega)=L_t(k_u\omega)$ identiquement ;
- $L_t(\omega) = \lim_{s\downarrow 0} L_{t-s}(\Theta_s\omega)$ identiquement .

Il faut remarquer aussi que la limite $L_0(\omega) = \lim_{s\downarrow 0} L_s(\omega)$ existe. La relation $L_t(\omega)=L_\varepsilon(\omega)L_{t-\varepsilon}(\Theta_\varepsilon\omega)$, $L_t(\omega)= \lim_\varepsilon L_{t-\varepsilon}(\Theta_\varepsilon\omega)$ entraîne que ou bien $L_t(\omega) = 0$ pour tout $t>0$ (et alors $L_0(\omega)=0$) ou bien $L_0(\omega)=1$.

On peut difficilement demander mieux.

APPLICATION AUX ENSEMBLES ALEATOIRES HOMOGENES

Donnons nous un ensemble fermé M dans $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, et les fonctions D_t correspondantes. Nous faisons les hypothèses d'homogénéité suivantes

1) Pour tout t, D_t est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_s)$ du processus de Markov (famille complétée pour toutes les lois P^μ).

2) Pour tout t, toute loi initiale μ, $D_t=t+D\circ\Theta_t$ P^μ-p.s.

Dans ces conditions , le processus $(G_t)=(I_{\{t<D\}})$ est une fonctionnelle multiplicative exacte. Elle satisfait à (1.19) si

(1).(1.19) a pu se perdre en chemin. Si l'on y tient remplacer L_t par $L_{\zeta-}$ après ζ.

(1.25) $\quad D\geqq\zeta \quad \Rightarrow \quad D=+\infty$

hypothèse que nous ferons dans toute la suite. Nous pouvons alors construire la version améliorée (L_t) et le temps terminal

$$D'(\omega) = \inf \{ t : L_t(\omega)=0\}$$

parfait (sans exception !), exact, $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable, satisfaisant à la condition des temps d'arrêt "algébriques"

(1.26) $\quad r>D'(\omega) \Rightarrow D'(\omega)=D'(k_r\omega)$

Il lui correspond un ensemble aléatoire

(1.27) $\quad M'=\{t>0 : D'_{t-}=t \}$ où $D'_t=t+D'\circ\theta_t$

P^μ-indistinguable de M pour toute loi initiale μ, mais doué de bien meilleures propriétés : par exemple, l'homogénéité sans ensemble exceptionnel, la mesurabilité progressive pour toute famille $(\underline{\underline{F}}^*_{t+})$.

UNE REMARQUE SUR LES PROCESSUS DROITS $\square$

La lecture est ici vivement déconseillée aux personnes sensibles.

Voici ce dont il s'agit. Nous utiliserons plus tard un processus de Markov dont l'espace d'états sera une certaine partie de Ω, liée au temps terminal D' qui vient d'être construit. Nous souhaitons pouvoir appliquer à ce processus de Markov toute la théorie des processus droits (système de LEVY, etc) sans avoir à redémontrer tous les théorèmes sous des hypothèses un peu plus faibles ! Or les hypothèses classiques sur les processus droits supposent que les fonctions excessives sont presque-boréliennes et continues à droite sur les trajectoires, et aussi que l'espace d'états E est lusinien métrisable . Ω lui même n'étant pas lusinien, cette dernière condition ne sera pas satisfaite. Nous allons montrer dans cette section que la théorie des processus droits vaut sous une condition un peu plus faible qui, elle, sera satisfaite.

A quoi sert l'hypothèse ci-dessus ? On veut pouvoir prendre un compactifié de RAY F de E, travailler sur le processus de RAY, et redescendre sur E, ce qui signifie

- que pour toute loi initiale μ sur E, on sait définir la loi image μ' de μ par l'injection de E dans F
- que l'on sait identifier, à des ensembles négligeables près, le processus sur E de loi initiale μ, et le processus de RAY de loi initiale μ' .

Sous l'hypothèse lusinienne, ce passage est fait en détail dans MEYER-WALSH [18], p.154-155 (avec d'ailleurs une petite erreur : nous affirmons qu'en général E n'est pas universellement mesurable dans F, alors qu'il l'est toujours . La démonstration très simple de ce fait figure ailleurs dans ce volume). Rappelons que cette hypothèse lusinienne signifie que

(i) E est plongeable (avec sa topologie) comme sous-espace borélien d'un espace métrique compact $\bar{E}$.

MERTENS a remarqué dans [15] que l'on peut obtenir le même résultat sur le compactifié de RAY en affaiblissant (i) de la manière suivante

(ii) E est universellement mesurable dans $\bar{E}$, et pour toute loi initiale μ sur E le processus de Markov reste P^{μ}-p.s. dans une partie borélienne A_{μ} de $\bar{E}$ contenue dans E (pouvant dépendre de μ) .

Pour éviter toute confusion, soulignons que $\bar{E}$ et F sont sans relation aucune en général : d'ailleurs E n'est plongé dans F que comme sous-ensemble, non comme sous-espace topologique.

L'objet de cette section est de démontrer l'énoncé suivant, qui semble à première vue tout à fait délirant, et qui en fait rend la remarque de MERTENS beaucoup plus facile à appliquer.

(iii) La remarque de MERTENS vaut aussi lorsqu'on suppose seulement, dans (ii), que A_{μ} est un complémentaire d'analytique dans $\bar{E}$.

DEMONSTRATION. Faisons cette hypothèse. Le processus ne rencontre P^{μ}-p.s. pas l'ensemble analytique A_{μ}^{c} , qui contient E^{c}. Le théorème de capacitabilité entraîne l'existence d'un K_{σ} de $\bar{E}$ (notons le $A_{\mu}'^{c}$) contenant A_{μ}^{c} , et que le processus ne rencontre P^{μ}-p.s. pas. Alors A'_{μ} est un borélien de $\bar{E}$ contenu dans E, où le processus reste P^{μ}-p.s., et (ii) est satisfaite.

Le lecteur attentif de tous les volumes du séminaire strasbourgeois se rappellera certainement qu'à la p.235 du vol.V, l'espace Ω des applications continues à droite de $\mathbb{R}_{+}$ dans E polonais est homéomorphe à un complémentaire d'analytique d'un espace métrique compact - à vrai dire, pour une topologie peu intéressante, et que l'on changera dans l'exposé III ci-dessous. Le vol.VII, p.207, donne un autre exemple. Ainsi. nous voyons que la remarque ci-dessus permet de prendre pour E des espaces usuels.

Revenons maintenant aux ensembles aléatoires du processus de Markov (X_t) considéré plus haut [et dont l'espace d'états, lui, peut sans encombre être supposé lusinien !]. Partons de l'ensemble aléatoire "imparfait" M , et reprenons la construction faite plus haut. Tout d'abord, nous avons pris une version $(\underline{F}^{\circ\circ}_{t+})$-mesurable de la fonctionnelle

$(\underline{\underline{G}}_t)$: par définition de la famille $(\underline{\underline{F}}^{\circ\circ}_{t+})$, il existe une suite (f_n) de fonctions 1-excessives, telle que (G_t) soit mesurable par rapport à la tribu engendrée par les v.a. $f_n \circ X_s$ $(n\in\mathbb{N}\ ,\ s\in\mathbb{R}\ )$: d'après (1.19), quitte à inclure I_E dans la famille, on peut supposer les f_n nulles au point ∂ . Or les fonctions 1-excessives sont presque-boréliennes. Nous pouvons donc encadrer chaque f_n entre deux fonctions boréliennes f'_n, f''_n telles que les processus $(f'_n \circ X_t)$,$(f''_n \circ X_t)$ soient P^μ-indistinguables. Soit Ω_μ l'ensemble

$$\{\ \omega\ :\ \forall n,\ \forall t\ ,\ f'_n \circ X_t(\omega)=f''_n \circ X_t(\omega)\}$$

Ω^c_μ est la projection sur Ω de l'ensemble borélien $\{(t,\omega)\ :\ \exists n,\ f'_n \circ X_t(\omega) \neq f''_n \circ X_t(\omega)\ \}$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Il en résulte sans peine que, si l'on plonge Ω comme complémentaire d'analytique dans un espace métrique compact $\overset{*}{\Omega}$, Ω_μ est aussi un complémentaire d'analytique dans $\overset{*}{\Omega}$, de même que toute partie borélienne de Ω_μ .

D'autre part, sur l'espace Ω_μ invariant par translation et meurtre, les v.a. $f_n \circ X_t$ sont mesurables par rapport à la tribu trace de $\underline{\underline{F}}^\circ$. En suivant la démonstration précédente, on vérifie alors sans peine que les ensembles U,V, les fonctions L_t , sont <u>boréliens</u> sur Ω_μ. Cela nous fournira plus tard tous les complémentaires d'analytiques nécessaires à la vérification de l'hypothèse (iii).

APPENDICE : FONCTIONNELLES ADDITIVES

Nous nous proposons ici de revenir un peu sur le théorème de perfection, en indiquant des compléments qui ne serviront pas dans les exposés ultérieurs. D'une part, nous voulons lever la condition (1.19), qui est trop restrictive pour les applications aux fonctionnelles additives, par exemple. D'autre part, nous voulons dire un mot des fonctionnelles additives <u>prévisibles</u>.

Soit (G_t) une fonctionnelle multiplicative qui satisfait, au lieu de (1.19), à la condition plus courante

(1.28) $\quad G_t([\partial])=1$ pour tout t , $\quad G_t(\omega)=G_\zeta(\omega)$ pour $t\geqq\zeta(\omega)$

Nous pouvons alors écrire G=H.K, où K satisfait à (1.19), et où H est une fonctionnelle multiplicative (imparfaite) <u>qui ne saute qu' à l'instant</u> ζ . Nous en choisissons une version adaptée à la famille $(\underline{\underline{F}}^{\circ\circ}_t)$, et nous lui appliquons le procédé de WALSH, sans nous occuper des raffinements concernant les opérateurs de meurtre (la condition (1.19) était essentielle pour la stabilité de U par les opérateurs k_r) : cela nous fournit une fonctionnelle multiplicative $(\bar{H}_t)$, sans ensemble exceptionnel, à variables aléatoires $\underline{\underline{F}}^*$-mesurables. Posons alors

$$H'_t = 1 \text{ si } t<\zeta \quad , \; H'_t=\overline{H}_\zeta/\overline{H}_{\zeta-} \quad \text{si } t\geq\zeta$$

H' est une fonctionnelle multiplicative sans ensemble exceptionnel, P^μ indistinguable de H pour toute loi μ, à v.a. $\underline{\underline{F}}^*$-mesurables. Et maintenant, il est clair que

$$t<r \Rightarrow H'_t = H'_t \circ k_r$$

du fait que H' saute seulement à l'instant ζ : si $t<r$, $t<\zeta(\omega)$, on a $t<\zeta(\omega)\wedge r= \zeta(k_r(\omega))$ et les deux côtés valent 1 ; si $t\geq\zeta(\omega)$ on a $r\geq\zeta(\omega)$ et $\omega=k_r(\omega)$, et les deux côtés sont égaux.

En combinant ce résiltat avec celui du texte appliqué à K, on étend alors le résultat du texte aux fonctionnelles qui satisfont seulement à (1.28) au lieu de (1.19).

NOTE SUR LE CAS PREVISIBLE

On est amené tout naturellement à se poser le problème suivant : supposons que la fonctionnelle (G_t) de départ - imparfaite - soit pour toute loi P^μ, prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^\mu_t)$. Peut on alors améliorer la condition sur la fonctionnelle finale (L_t)

$$t<r \Rightarrow L_t(\omega)= L_t(k_r\omega) \text{ identiquement } ?$$

On souhaiterait arriver au moins à la condition suivante : quelle que soit la mesure μ, on a pour P^μ-presque tout ω

(1.29) $$L_t(\omega)=L_t(k_t\omega) \text{ identiquement sur } \mathbb{R}_+$$

J'ai essayé assez sérieusement de le démontrer, sans aboutir à un résultat satisfaisant. Je voudrais seulement faire quelques remarques.

(a). (1.19) est incompatible avec (1.29) si la fonctionnelle de départ n'est pas continue : en effet $L_{t-}(\omega)=L_{t-}(k_t\omega)=L_{\zeta-}(k_t\omega)$, et d'après (1.29) $L_t(\omega)=L_{\zeta-}(k_t\omega)$: si (1.19) a lieu identiquement, on ne peut donc pas avoir de discontinuités.

(b). Le processus (G_t) est , pour toute loi P^μ, indistinguable d'un processus (H_t) algébriquement prévisible (dépendant de μ), qui satisfait donc à l'identité $H_t=H_t\circ k_t$, mais cela n'entraîne absolument pas que pour μ-presque tout ω on a $G_t(\omega)=G_t(k_t\omega)$ pour tout t.

(c). Une réponse positive au problème est connue depuis longtemps lorsque la fonctionnelle (G_t) est associée à un temps terminal prévisible $D\leq\zeta$: soit f la fonction excessive $E^\bullet[e^{-D}]$, et soit D_n le temps d'entrée dans l'ensemble $\{f>1-1/n\}$. Alors pour presque tout ω on a pour tout n $D_n(\omega) < \lim\limits_n D_n(\omega) = D(\omega)$. Si l'on note $D'(\omega) = \lim D_n(\omega)$, $L_t = I_{\{t<D'\}}$, on a $L_t(\omega) = L_t(k_t\omega)$ identiquement pour tout t et tout ω tel que $D_n(\omega) < D'(\omega)$ pour tout n.

A partir de ce résultat, on arrive au moins à rendre à la fois parfaites et "algébriquement prévisibles" les fonctionnelles multiplicatives qui ne s'annulent jamais (i.e., les fonctionnelles additives). Nous laisserons ici cette question, qui montre simplement que suivant les problèmes, on a besoin de résultats de "perfection" un peu différents.

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES (II)

par P.A.Meyer

Cet exposé-ci est consacré, non pas encore à la présentation générale de MAISONNEUVE, mais aux résultats essentiels de l'article [11] de GETOOR-SHARPE. Il y a évidemment une relation entre ces résultats et ceux de MAISONNEUVE, mais nous n'aborderons cette question que dans l'exposé IV : pour l'instant, nous allons suivre la méthode " élémentaire" , et très belle, de GETOOR-SHARPE .

Dans tout cet exposé, nous travaillerons sur la réalisation continue à droite canonique $(\Omega,\underline{\underline{F}},\dots.)$ d'un semi-groupe (P_t) sur E , satisfaisant aux hypothèses droites. Nous supposerons E borélien dans un espace métrique compact (cette hypothèse est un peu trop forte, mais cela n'a aucune importance) . La résolvante de (P_t) sera notée (U_p). D'autre part, nous désignerons par M un ensemble aléatoire homogène dans $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$, fermé, progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Le début $D=D_0$ de M est un temps terminal (parfait) exact, et nous poserons

(2.1) $\qquad Q_t(x,f) = E^x[f\circ X_t I_{\{t<D\}}]$ (semi-groupe associé à D)

(2.2) $\qquad V_p(x,f) = \int_0^\infty e^{-pt}Q_t(x,f)dt$

(2.3) $\qquad F = \{ x\in E : P^x\{D=0\}=1 \}$

Il est bien connu que F , l'ensemble des points " réguliers pour D" ou " non-permanents pour (Q_t)" est un ensemble presque borélien finement fermé. Nous posons

(2.4) $\qquad \rho_F = \{ (t,\omega) : t>0, X_t(\omega)\in F \}$

C'est un ensemble aléatoire homogène. On note $\overline{\rho}_F$ son adhérence.

RESULTATS ELEMENTAIRES

Nous nous proposons, dans cette section, de rappeler quelques résultats classiques sur M et ρ_F, et surtout de classer les points de l'ensemble $M^{\rightarrow}$ des extrémités gauches d'intervalles contigus à M. Cette classification sera très importante pour la suite.

Nous notons M' le dérivé de M (ensemble des points non isolés), M'_d le dérivé droit (points de M' non isolés à droite), $\mathring{M}$ le noyau parfait de M.

PROPOSITION 1. $M'_d \subset \overline{\rho}_F \subset M'$

DEMONSTRATION. On sait que ρ_F est un fermé droit bien-mesurable. L'ensemble $\rho_F \backslash M'$ est bien-mesurable, et la définition de F entraîne qu'il n'y passe aucun graphe de temps d'arrêt. D'après le théorème de section bien-mesurable, il est évanescent, et $\rho_F \subset M'$ p.s..

Pour tout r rationnel, soit $D'_r = \inf \{ t \in M'_d,\ t > r \}$; D'_r est un temps d'arrêt dont le graphe passe dans M'_d, donc dans ρ_F (propriété de Markov forte) . D'autre part, M'_d est l'adhérence à droite de la réunion des graphes $[D'_r]$, donc M'_d est contenu dans $\overline{\rho}_F$.

REMARQUES. Noter le corollaire : M' et M'_d ne différant que par un ensemble dénombrable, il en est de même de M' et ρ_F.

Les temps d'arrêt passant dans M'_d et ρ_F sont les mêmes, mais le premier de ces deux ensembles n'est pas bien-mesurable en général, et on ne peut donc conclure qu'ils sont indistinguables.

Nous arrivons maintenant au point essentiel de cette section :

PROPOSITION 2. <u>L'ensemble</u> $\vec{M}$ <u>des extrémités gauches d'intervalles contigus à</u> M <u>admet une décomposition en deux ensembles homogènes</u>

$\vec{M} \backslash \rho_F$, <u>ensemble bien-mesurable</u>, <u>réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt</u> (<u>aussi égal à</u> $M \backslash \rho_F$),

$\vec{M} \cap \rho_F$, <u>ensemble progressif où ne passe aucun graphe de t.d'a.</u>. Ces ensembles seront notés dans la suite $\vec{M}_b$ (<u>b</u>ien-mesurable) et $\vec{M}_\pi$ (<u>π</u>rogressif). Par exemple, l'ensemble $\vec{M}$ associé à l'ensemble des zéros du mouvement brownien est tout entier du type π (ç'a été le premier exemple connu d'ensembles progressif sans temps d'arrêt !). Loin d'être une curiosité, $\vec{M}_\pi$ est un être extrêmement important (et même tout à fait fascinant, oui, vraiment...).

DEMONSTRATION. Le fait que $\vec{M} \cap \rho_F$ ne contienne aucun graphe de temps d'arrêt, c'est la propriété de Markov forte : un temps d'arrêt T colle à M à droite sur l'ensemble $\{X_T \in F\}$. $M \backslash \rho_F$ est un ensemble bien-mesurable ; $M \backslash M'$ et $M' \backslash \rho_F$ sont à coupes dénombrables (prop.1), donc aussi $M \backslash \rho_F$. D'après un théorème de DELLACHERIE [7], $M \backslash \rho_F$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. En appliquant la propriété de Markov forte à chacun d'eux, on voit que $M \backslash \rho_F \subset \vec{M}$, d'où la première assertion.

REMARQUES. Les versions actuelles de ces propositions remplacent des formes antérieures fausses : AZEMA m'a donné l'exemple du processus de translation uniforme , avec $M = \rho_H$,$H = \{1-1/n,\ n \in N\}$. Dans ce cas F est vide, mais M' n'est pas vide.

DELLACHERIE a montré que le noyau parfait $\mathring{M}$ est un ensemble aléatoire (évidemment homogène), et que $M\backslash\mathring{M}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt (dépendant de la loi initiale). Définissons $\mathring{D}$ et $\mathring{F}$ relativement à $\mathring{M}$: on a $\mathring{M} = \overline{\rho_{\mathring{F}}}$, et $\mathring{F}$ est un ensemble finement parfait (dont l'existence est établie sans hypothèse de continuité absolue). On a d'autre part $\vec{M_\pi} = \vec{\mathring{M}_\pi}$: du point de vue qui nous intéresse le plus ici, celui de l'étude de $\vec{M_\pi}$, nous pourrions donc supposer sans inconvénient que M est parfait.

PROJECTIONS D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE BRUTE

Cette section constitue une digression, et il est vivement recommandé au lecteur de regarder simplement l'énoncé du théorème 1, et de passer directement aux sections suivantes.

Notre démonstration des résultats de projection - qui sont dus à GETOOR-SHARPE - est différente de la leur : nous avons essayé de nous affranchir de l'hypothèse de continuité absolue.

Fixons d'abord une loi initiale μ , et soit (A_t) un processus croissant sur Ω, non nécessairement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$, tel que $E^\mu[A_t]<\infty$ pour tout t. Rappelons comment on définit, en théorie générale des processus , ses projections duales bien-mesurable et prévisible (pour la loi P^μ). Etant donnée une variable aléatoire bornée Y, $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, on construit une version continue à droite et pourvue de limites à gauche de la martingale $E^\mu[Y|\underline{\underline{F}}_s^\mu]$, que l'on note (Y_s). Puis on pose

(2.5) $\qquad \int Y.dQ_t^w = E^\mu[\int_{]0,t]} Y_s dA_s]$

(2.6) $\qquad \int Y.dQ_t^p = E^\mu[\int_{]0,t]} Y_{s-} dA_s]$

Les deux mesures Q_t^w et Q_t^p sont absolument continues par rapport à P^μ, d'où des densités q_t^w , q_t^p ; on montre alors que ces densités sont P^μ-p.s. égales à des v.a. $\underline{\underline{F}}_t^\circ$-mesurables, et régularisables en des processus croissants A_t^w, A_t^p , qui sont respectivement les projections duales bien-mesurable et prévisible cherchées.

Supposons maintenant que l'on ait $E^x[A_t]<\infty$ pour tout t et tout x , et que A_t soit $\underline{\underline{F}}$-mesurable pour tout t. Le procédé précédent nous donne pour chaque x des mesures $Q_{t,x}^w$, $Q_{t,x}^p$, dont il s'agit de choisir bien les densités. Le lemme suivant constitue une étape importante.

LEMME.[1] Si Y est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable bornée, il existe un processus (Y_t) adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, qui est pour toute loi initiale μ une version P^μ-p.s. continue à droite de la martingale $E^\mu[Y|\underline{\underline{F}}_t^\mu]$.

DEMONSTRATION. Nous démontrerons aussi un petit raffinement. Soit, comme dans l'exposé I, $(\underline{\underline{F}}_t^{oo})$ la famille de tribus engendrée sans complétion par les v.a. $\varphi o X_s$, $s \leq t$, où φ est p-excessive ($p \geq 0$). On vérifie d'abord que si $Y = f o X_r$ (f $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable bornée sur E), le processus

$$Y_t = P_{r-t}(X_t, f) \text{ si } t<r \quad , \quad Y_t = Y \text{ si } t \geq r$$

répond à la question, et qu'il est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^{oo})$. Cela n'est pas difficile : commencer par le cas où $f = U_p g$, g bornée, etc. Ensuite, on passe au cas où Y est de la forme $f_1 o X_{r_1} \ldots f_n o X_{r_n}$, puis on fait un raisonnement par classes monotones, reposant sur le théorème VI.T16 de MEYER [16]. Le raffinement annoncé est la mesurabilité de Y_t par rapport à $\underline{\underline{F}}_t^{oo}$.

Rappelons tout de même le joli procédé de DAWSON pour écrire "explicitement" (Y_t) . Si ω, ω' sont deux éléments de Ω, $t \in \mathbb{R}_+$, nous notons $\omega/t/\omega'$ l'élément de Ω défini **si $t \leq \zeta(\omega)$ par**

(2.7) $\qquad X_s(\omega/t/\omega') = X_s(\omega)$ si $s<t$, $X_{s-t}(\omega')$ si $s \geq t$

et si $t>\zeta(\omega)$ par $(\omega/t/\omega')=\omega$. Formons successivement

(2.8) $\qquad \overline{Y}(\omega,t,\omega') = Y(\omega/t/\omega')$

(2.9) $\qquad \eta(\omega,t,x) = E^x[\overline{Y}(\omega,t,.)]$

On a alors

(2.10) $\qquad Y_t(\omega) = \eta(\omega,t,X_t(\omega))$

Ce procédé - et le lemme - sont encore valables même lorsque Y est $\underline{\underline{F}}$-mesurable, mais bien sûr avec perte du petit raffinement.

Ceci étant dit, reprenons les formules (2.5) et (2.6) : dans (2.5), nous utilisons la version de (Y_t) qui vient d'être construite , et dans (2.6) nous définissons Y_{s-}, par exemple, comme une limite inf le long des rationnels, de manière à éviter toute ambiguïté. On a alors le résultat

LEMME. Les applications $x \mapsto \int Y dQ^w_{t,x}$, $\int Y dQ^p_{t,x}$ sont universellement mesurables sur E .

D'où l'existence de densités $q_t^w(x,\omega)$, $q_t^p(x,\omega)$, $\underline{\underline{B}}_u \times \underline{\underline{F}}^o$-mesurables, et la construction de densités valant pour toutes les P^x en posant

$$q_t^w(\omega) = q_t^w(X_0(\omega),\omega) \quad ; \quad q_t^p(\omega) = q_t^p(X_0(\omega),\omega)$$

Après quoi la régularisation donnera un même processus croissant $(A_t^w),(A_t^p)$, qui sera projection duale bien-mesurable ou prévisible de (A_t) pour toute mesure initiale.

1. BENVENISTE et JACOD ont démontré dans leur note [4] le lemme, le th.1 ci-dessous, et rempli le programme de la remarque après le th.1.

Voici maintenant le résultat important de cette section. Il s'applique aussi aux fonctionnelles p-additives, mais on ne donnera aucun détail.

THEOREME 1. <u>Supposons que le processus croissant</u> (A_t), <u>tel que</u> $E^x[A_t] < \infty$ <u>pour tout</u> x <u>et tout</u> t, <u>soit une fonctionnelle additive brute</u>. <u>Alors</u> (A_t^w) <u>et</u> (A_t^p) <u>sont des fonctionnelles additives</u>.

DEMONSTRATION. Nous fixons $r\in\mathbb{R}_+$, et raisonnons par exemple sur (A_t^w). Notre problème consiste à montrer que les deux processus

$$B_t = A_{r+t}^w - A_r^w \quad ; \quad C_t = A_t^w\circ\theta_r$$

qui sont tous les deux croissants, nuls pour t=0, adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_{r+t})$, sont indistinguables pour toute mesure P^μ. Il nous suffit pour cela de montrer que pour toute v.a. $\underline{\underline{F}}^o_{r+t}$-mesurable bornée Y

(2.11) $\quad E^\mu[Y.B_t] = E^\mu[Y.C_t]$

et un argument de classes monotones montre qu'il suffit de traiter le cas où Y s'écrit $H.Z\circ\theta_r$, où H est $\underline{\underline{F}}^o_r$-mesurable bornée, Z $\underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable bornée. Introduisons les martingales Y_u et Z_u, associées à Y et Z par le premier lemme. Le côté gauche de (2.11) vaut d'après un lemme d'intégration bien connu (MEYER, [16], VII.T16)

$$E^\mu[\int_0^t E[Y|\underline{\underline{F}}_{r+s}]dB_s] = E^\mu[\int_0^t Y_{r+s}dA^w_{r+s}] = E^\mu[\int_r^{r+t} Y_u dA^w_u]$$

$$= E^\mu[\int_r^{r+t} Y_u dA_u] \text{ par définition de } A^w \text{ comme projection.}$$

D'autre part, pour $u\geq r$, Y_u vaut $H.Z_{u-r}\circ\theta_r$, tandis que l'additivité de A entraîne que $dA_u = dA_{u-r}\circ\theta_r$. D'où l'expression

$$= E^\mu[H\int_r^{r+t} Z_{u-r}\circ\theta_r.dA_{u-r}\circ\theta_r] = E^\mu[H.(\int_0^t Z_v dA_v\circ\theta_r)]$$

$$= E^\mu[H.E^{X_r}[\int_0^t Z_v dA_v]]$$

d'après la propriété de Markov simple. Le second membre de (2.11) vaut quant à lui

$$E^\mu[\int_0^t Y_{r+s}dA^w_s\circ\theta_r] = E^\mu[H.\int_0^t Z_s\circ\theta_r dA^w_s\circ\theta_r] = E^\mu[H.E^{X_r}[\int_0^t Z_s dA^w_s]]$$

et l'on peut maintenant remplacer A^w par A, puisque (Z_s) est un processus bien-mesurable. En rapprochant ces expressions on obtient l'énoncé. La projection duale prévisible se traite de même, mais en utilisant la propriété caractéristique (MEYER [16], VII.D18) des processus croissants prévisibles ou " naturels" .

REMARQUE. Les idées de la démonstration précédente permettent sans doute une démonstration <u>sans laplaciens approchés</u> du théorème de représentation des fonctions excessives de la classe (D), mais je n'ai pas le courage de regarder.

CALCUL DE p-BALAYEES ADAPTEES SUR M

Nous abordons maintenant l'essentiel du travail de GETOOR-SHARPE. h désignant une fonction presque borélienne bornée, nous introduisons les fonctionnelles

(2.12) $A_t(h) = \int_0^t h\circ X_s ds$ (additive)

(2.13) $A_t^{(p)}(h) = \int_0^t e^{-ps} h\circ X_s ds$ (p-additive)

(2.14) $\overline{A}_t^{(p)}(h)$ = processus croissant obtenu par balayage brut de $A^{(p)}(h)$ sur M

(2.15) $\overline{A}_t^p(h) = \int_0^t e^{ps} d\overline{A}_s^{(p)}(h)$: p-balayée brute de $(A_t(h))$ sur M

Nous savons d'après l'exposé 1, proposition 1, que $\overline{A}^p(h)$ est une fonctionnelle additive brute. D'après le théorème 1, le processus croissant $(\overline{A}_\cdot^p(h))^w$, que nous noterons

(2.16) $\tilde{A}^p(h)$ = projection duale bien-mesurable de $\overline{A}_\cdot^p(h)$

est une vraie fonctionnelle additive adaptée. Le point essentiel de cet exposé est le calcul de $\tilde{A}^p(h)$. On note $\approx{A}^p(h)$ l'analogue prévisible.

Nous commençons par expliciter (2.15). D'après la formule (1.11), si (Z_s) est un processus mesurable positif

(2.17) $\int_0^\infty Z_s d\overline{A}_s^p(h) = \int_0^\infty e^{-ps} e^{p\ell_s} Z_{\ell_s} h\circ X_s I_{\{\ell_s>0\}} ds$

Comme la mesure ds est diffuse, on peut d'ailleurs tout aussi bien remplacer ℓ_s par L_s . Cette formule donne naturellement aussi, si (Z_s) est <u>bien</u>-mesurable

(2.18) $E^\mu[\int_0^\infty Z_s d\tilde{A}_s^p(h)] = E^\mu[\int_0^\infty e^{-ps} e^{p\ell_s} Z_{\ell_s} I_{\{\ell_s>0\}} h\circ X_s ds]$

Nous calculons maintenant $\overline{A}^p(h)$ au moyen de la formule (1.7), en tenant compte de la décomposition de $\vec{M}$ en ses deux morceaux $\vec{M}_b$ et $\vec{M}_\pi$ au début de cet exposé. Nous obtenons trois termes, qui sont chacun une fonctionnelle additive brute.

D'abord le terme " continu banal"

(2.19) $d\overline{B}_t^p(h) = I_{M\setminus \overleftarrow{M}}(t) dA_t(h) = I_M(t) h\circ X_t dt$

Il ne dépend pas de p, et il est égal à sa projection duale bien-mesurable $\tilde{B}_t^p(h)$.

Ensuite, le terme "discontinu banal"

(2.20) $d\overline{\beta}_t^p(h) = \sum'_{g\in\vec{M}_b} e^{pg} \int_{]g,D_g]} e^{-ps} h\circ X_s ds \;.\; \varepsilon_g(dt)$

Etant donné que $\vec{M}_b$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, on peut décomposer $\overline{\beta}^p(h)$ suivant ces temps d'arrêt (ce qui bien sûr ne préserve pas l'additivité), et obtenir la valeur de la projection duale bien-mesurable

(2.21) $\qquad d\tilde{\beta}_t^p(h) = \sum'_{g\in \vec{M}_b} V_p h\circ X_g . \varepsilon_g(dt)$

On peut d'ailleurs remplacer $\vec{M}_b$ par $\vec{M}$ dans cette expression si on le désire, car $V_p h\circ X_g = 0$ si $g\in \vec{M}_\pi$.

Enfin, reste le dernier terme, discontinu "intéressant", qui contient toutes les difficultés de la question

(2.22) $\qquad d\bar{I}_t^p(h) = \sum'_{g\in \vec{M}_\pi} e^{pg}\int_{]g,D_g]} e^{-ps} h\circ X_s ds . \varepsilon_g(dt)^{(\times)}$

Comme $\bar{I}^p(h)$ ne charge aucun graphe de temps d'arrêt, sa projection duale bien-mesurable est une fonctionnelle additive continue $\tilde{I}^p(h)$, identique à sa projection duale prévisible. Le premier résultat important est alors le suivant :

PROPOSITION 3. $\tilde{I}^p(h)-\tilde{I}^q(h)=(q-p)\tilde{I}^p(V_q h)$. $\qquad$ (2.23)

DEMONSTRATION. Nous avons

(2.24) $\qquad \tilde{B}^p(h)-\tilde{B}^q(h) = (q-p)\tilde{B}^p(V_q h)$

les deux membres étant nuls : le premier de façon triviale (2.19), le second parce que $\tilde{B}^p(f)$ est portée, pour toute f, par M, donc par M', donc par ρ_F , et que $V_q h=0$ sur F. En projetant à nouveau sur les prévisibles, on obtient l'égalité correspondante pour les projections duales prévisibles $\approx{B}^p$.

Ensuite, nous avons

(2.25) $\qquad \tilde{\beta}^p(h)-\tilde{\beta}^q(h) = (q-p)\tilde{\beta}^p(V_q h)$

d'où encore, en reprojetant, l'égalité correspondante pour les projections duales prévisibles $\approx{\beta}^p$. C'est vraiment évident sur la forme explicite (2.21), où (2.25) se réduit à l'équation résolvante pour les V_p .

Dans ces conditions , la relation (2.23) - qui peut s'écrire avec des $\approx$ au lieu des $\sim$, puisque les $\tilde{I}^p$ sont déjà continues - est équivalente à l'égalité suivante, où figurent des projections duales <u>prévisibles</u> (et qui a, bien sûr, son intérêt propre)

(2.26) $\qquad \approx{A}^p(h) - \approx{A}^q(h) = (q-p)\approx{A}^p(V_q h)$ (*)

Les deux membres étant des fonctionnelles additives prévisibles, il suffit de vérifier l'égalité de leurs <u>espérances</u>, ou encore que l'on a

(2.27) $\qquad E^\bullet[(q-p)\bar{A}_t^p(V_q h)] = E^\bullet[\bar{A}_t^p(h)-\bar{A}_t^q(h)]$

Voici le calcul. Le premier membre vaut, d'après (2.17)

(*) Le calcul se remonte, et donne aussi (2.26) avec des $\sim$ au lieu de $\approx$.

(x) Sur ces trois formules on voit que $\bar{A}^p(h)=0$ si h=0 sur F^c.

$$E^{\bullet}[(q-p)\int_0^{\infty} e^{p\ell_s} I_{\{0<\ell_s\leq t\}} e^{-ps} V^q h\circ X_s ds]$$

Ceci est une intégrale du processus $(V^q h\circ X_s)$ par rapport au processus croissant adapté $dH_s = e^{p(\ell_s - s)} I_{\{...\}} ds$. Le théorème VII.T15 de MEYER [16] déjà cité nous permet d'écrire l'espérance

$$E^{\bullet}[(q-p)\int_0^{\infty} e^{p(\ell_s - s)} I_{\{0<\ell_s\leq t\}} ds \int_s^{D_s} h\circ X_u e^{-q(u-s)} du]$$

Fubinisons : l'intégrale double sur les (s,u) avec $s<u\leq D_s$ s'écrit aussi comme intégrale double sur les (s,u) avec $\ell_u \leq s<u$, et alors on peut remplacer ℓ_s par ℓ_u , d'où l'intégrale

$$E^{\bullet}[(q-p)\int_0^{\infty} e^{p\ell_u} I_{\{0<\ell_u\leq t\}} h\circ X_u e^{-qu} \int_{\ell_u}^{u} e^{(q-p)s} ds]$$

$$= E^{\bullet}[\int_0^{\infty} e^{p\ell_u} I_{\{0<\ell_u\leq t\}} h\circ X_u \; e^{-qu}[e^{(q-p)u} - e^{(q-p)\ell_u}] du]$$

et la fin du calcul est immédiate.

Nous arrivons maintenant au point crucial du travail de GETOOR-SHARPE, contenu dans les théorèmes 2 et 3 ci-dessous.

DEFINITION. <u>On désigne par</u> (K_t) <u>une fonctionnelle additive continue, telle que toutes les fonctionnelles additives</u> $\tilde{I}^p(h)$ <u>soient absolument continues par rapport à</u> K.

Par exemple, $K_t = \tilde{I}^1_t(1)$ possède cette propriété : en effet si $p\geq 1$ on a $\tilde{I}^p(1) \leq K$ (et donc $\tilde{I}^p(h)$ est absolument continue), et si $p<1$ on a $\quad \tilde{I}^p(1) = \tilde{I}^1(1) + (1-p)\tilde{I}^1(V_p 1) \leq \frac{1}{p}\tilde{I}^1(1)$

Noter que cette fonctionnelle K est portée par F, donc par $\hat{F}$ son noyau parfait, mais nous préférons ne pas imposer cette condition en général.

THEOREME 2. <u>Il existe des noyaux</u> $\hat{V}_p$ <u>sur</u> E, <u>transformant les fonctions boréliennes en fonctions</u> $\underline{\underline{B}}_u$<u>-mesurables</u>[1], <u>tels que</u> $\hat{V}_p(x,dy) = V_p(x,dy)$ <u>pour</u> $x\in F^c$, <u>et que</u>

1) <u>Les mesures</u> $\hat{V}_p(x,dy)$ <u>pour</u> $x\in F$ <u>soient bornées et portées par</u> F^c

2) <u>L'équation résolvante</u> $\hat{V}_p - \hat{V}_q = (q-p)\hat{V}_p\hat{V}_q$ <u>soit satisfaite sur</u> E <u>tout entier</u>

3) <u>Pour toute</u> h <u>bornée et tout</u> p <u>on ait</u>

(2.28) $$\tilde{I}^p_t(h) = \int_0^t \hat{V}_p h\circ X_s \, I_{\hat{F}}\circ X_s \, dK_s$$

4) <u>Pour tout</u> x <u>on ait</u> $\lim_{p\to\infty} \hat{V}_p(x,1) = 0$.

1. Nous établirons en fait un résultat un peu plus précis, qui sera signalé en cours de démonstration, et servira dans la suite

[la résolvante (V_p) ainsi modifiée n'est pas sous-markovienne en général, et dépend de la fonctionnelle (K_t) choisie].

DEMONSTRATION. Nous allons supposer, dans la première partie de la démonstration, que (K_t) <u>est strictement croissante et majore</u> $\tilde{I}^1(1)$. D'autre part, un lemme de l'exposé I, § 2 nous permet de choisir une version de (K_t) adaptée à la famille $(\underline{\underline{F}}^{oo}_{t+})$: nous ferons ce choix dans la suite.

Nous aurons besoin du théorème de MOTOO sur l'existence de densités de fonctionnelles additives continues, sans hypothèse (L) : rappelons en la démonstration très simple, due à GETOOR. Soit (A_t) une fonctionnelle additive continue, différence de deux fonctionnelles additives positives absolument continues par rapport à (K_t) : nous pouvons en prendre une version adaptée à $(\underline{\underline{F}}^{oo}_{t+})$. Soit (τ_t) le changement de temps associé à (K_t). Formons

$$\overline{\alpha}(\omega) = \limsup_{n\to\infty} A_{\tau_{1/n}}(\omega)/\tau_{1/n}(\omega) \qquad , \underline{\alpha}=\lim\inf\ldots$$

Alors $\overline{\alpha}$ et $\underline{\alpha}$ sont $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables, donc dégénérées pour toute mesure P^x. Posons $\overline{a}(x)=E^x[\overline{\alpha}]$, et de même $\underline{a}(x)=E^x[\underline{\alpha}]$: alors $\overline{a}$ et $\underline{a}$ sont égales K-p.p., et chacune d'elles est une version de la densité de A par rapport à K. De plus, $\overline{\alpha}$ <u>et</u> $\underline{\alpha}$ <u>sont</u> $\underline{\underline{F}}^{oo}$<u>-mesurables, et donc</u> $\overline{a}$ <u>et</u> $\underline{a}$ <u>sont</u> $\underline{\underline{B}}_e$<u>-mesurables</u>. Voir par ex. le séminaire V, p. 231 .

Nous pouvons alors dire tout de suite comment nous ferons pour lever la restriction relativement à K : nous poserons $K'_t= t+K_t+\tilde{I}^1(1)$, qui y satisfait, et nous noterons c une densité $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable de K par rapport à K'. Nous aurons d'autre part des densités $v'_p(h)$ des $I_p(h)$ par rapport à K', et il nous suffira de poser

$$v_p(x,dy)= \frac{1}{c(x)}v'_p(x,dy) \text{ si } c(x)\neq 0 \ , \ v_p(x,dy)=0 \text{ sinon.}$$

Passons à la démonstration proprement dite . Nous remarquons que $\tilde{I}^p(h)$ ne dépend que de la restriction de h à $G=F^c$, et nous allons construire des mesures $v_p(x,dy)$ <u>sur G</u> . Soit $\overline{G}$ le compactifié de RAY usuel de G par rapport à la résolvante (V_p) : la tribu induite par $\overline{G}$ sur G est plus riche que la tribu borélienne de G. Pour toute fonction universellement mesurable h <u>sur G</u> , appliquons le procédé ci-dessus à $\tilde{I}^p(h)$ relativement à (K_t) : cela nous fournit deux fonctions $\underline{\underline{B}}_e$-mesurables sur E, que nous notons $\overline{v}_p(h)$, $\underline{v}_p(h)$. Soit N l'ensemble

$$\{x\in E \ : \ \exists f\in\underline{\underline{C}}(\overline{G}) \ , \ \exists \ p \text{ rationnel}, \ \underline{v}_p f_G(x)<\overline{v}_p f_G(x) \text{ ou } \overline{v}_p|f_G|(x)=+\infty \ \}$$

où f_G est la restriction de f à G . Comme $\underline{\underline{C}}(\overline{G})$ est séparable, N est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable et K-négligeable. Pour $x \notin N$, nous noterons $v_p(x,f)$ la valeur commune de $\underline{v}_p(x,f_G)$ et $\overline{v}_p(x,f_G)$, pour $f \in \underline{\underline{C}}(\overline{G})$: $v_p(x,.)$ est alors pour tout p rationnel une mesure bornée sur $\overline{G}$. Si $x \in N$, nous poserons $v_p(x,.)=0$.

On vérifie alors aussitôt, par classe monotone et encadrement, que si h est universellement mesurable bornée sur $\overline{G}$, $v_p h$ est universellement mesurable sur E, et est une densité de $\widetilde{I}^p(h_G)$ p.r. à (K_t). Si h est borélienne sur $\overline{G}$, $v_p h$ est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable sur E.

Soit N_1 l'ensemble ($\overline{V}_q$ désignant la résolvante de RAY sur $\overline{G}$) :

$$\{ x \in E : \exists p,\ q \text{ rationnels },\exists f \in \underline{\underline{C}}(\overline{G}) \ ,\ v_p(x,f)-v_q(x,f) \neq (q-p)v_p(x,\overline{V}_q f) \}$$

Comme $\overline{V}_q$ applique $\underline{\underline{C}}(\overline{G})$ dans lui même, c'est un ensemble $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable, et il est K-négligeable . Remplaçant $v_p(x,.)$ par 0 (sans changer de notation) si $x \in N_1$, nous aurons partout la "relation résolvante"

$$v_p - v_q = (q-p)v_p\overline{V}_q$$

D'après la remarque précédant le théorème 2, nous pouvons supposer (quitte à annuler encore $v_p(x,.)$ pour certains x) que pour p rationnel on a

$$pv_p(x,1) \leq p \vee 1 \text{ partout}$$

la "relation résolvante" permet alors sans aucune difficulté, par convergence uniforme, le prolongement de v_p à toutes les valeurs réelles de p.

Lorsque p augmente, la "relation résolvante" entraîne que v_p diminue. $v_p(1)$ est la densité de $\widetilde{I}^p(1)$ par rapport à (K_t), et $\widetilde{I}^p(1) \downarrow 0$ lorsque $p \to \infty$, de sorte qu'avec encore une annulation supplémentaire on peut supposer que $\lim_{p\to\infty} v_p(1) = 0$ partout.

Nous savons que G est universellement mesurable dans $\overline{G}$, et si nous prenons $h=I_{\overline{G}\setminus G}$, nous avons $\widetilde{I}^p(h)=0$. Soit alors

$$J = \{ x : v_p(x,h)>0 \text{ pour un p rationnel } \} \text{ (ou pour un } p \in \mathbb{R} \text{)}$$

J est universellement mesurable et K-négligeable, mais non $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable en général. Si nous posons

$$(2.29) \qquad \hat{V}_p(x,dy) = I_{F^c}(x)V_p(x,dy)+I_{F\setminus J}(x)v_p(x,dy)$$

ces mesures sont portées par E, et satisfont à l'énoncé. Mais Nicole KAROUI m'a signalé que la perte de la $\underline{\underline{B}}_e$-mesurabilité présentait des inconvénients pour la suite. Que peut on dire ?

Soit μ une loi initiale, et soit λ une loi équivalente à la mesure $\mu U_K \hat{V}_p$. Il existe un ensemble borélien pour la topologie de E , $H \subset G$, tel que l'on ait $\lambda(G\backslash H)=0$, et que les fonctions universellement mesurables sur G, traces des éléments de $\underline{\underline{C}}(\overline{G})$, soient boréliennes sur H. Comme H est lusinien, et l'injection de H dans $\overline{G}$ est borélienne injective, H est borélien dans $\overline{G}$. Donc si l'on pose $h'=I_{\overline{G}\backslash H}$, $v_p(.,h')$ est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable dans E, l'ensemble $J'=\{x\in F : v_p(x,h')>0$ pour un p rationnel $\}$ est $\underline{\underline{B}}_e$-mesurable (on peut remplacer $p\in\mathbb{Q}$ par $p\in\mathbb{R}$), et les noyaux

$$(2.30)\qquad \hat{V}'_p(x,dy)=I_{F^c}(x)V_p(x,dy) + I_{F\backslash J'}(x)v_p(x,dy) = (1-I_{J\backslash J'}(x))\hat{V}_p(x,dy)$$

opèrent sur E, et transforment les fonctions boréliennes en fonctions $\underline{\underline{B}}_e$-mesurables. D'autre part, J' est μU_K-négligeable : pour le voir, il suffit de montrer que $<\mu U_K, I_F.v_p(.,h')>=0$, ou encore que

$$(2.31)\qquad E^{\mu}[\ \int v_p(X_s,h')I_F\circ X_s\ dK_s] = 0$$

(Ceci vaut d'ailleurs $E^{\mu}[\ \tilde{I}^p_{\infty}(h')]$ d'après (2.28)). Mais (2.31) est majorée par $<\mu U_K\hat{V}_p, h'>$, nul puisque $\lambda(h')=0$. Autrement dit, $\hat{V}_p$ et $\hat{V}'_p$ ne diffèrent que sur l'ensemble $J''=J\backslash J'$, et on a

$$(2.32)\qquad E^{\mu}[\ \int I_{J''}\circ X_s\ dK_s]=0$$

La formule (2.28) vaut aussi avec $\hat{V}'_p$ au lieu de $\hat{V}_p$, mais l'égalité doit être prise en ce sens que les deux membres sont <u>P^{μ}-indistinguables</u> (et $(\hat{V}'_p)$ dépend de μ). Nous avons tout ce qu'il nous faut pour la suite.

REMARQUE. Sous l'hypothèse (L), on peut prendre pour μ une mesure de référence, et l'indistinguabilité pour P^{μ} entraîne l'indistinguabilité pour toutes les lois initiales : il existe donc des densités $\underline{\underline{B}}_e$-mesurables.

INVERSION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

PROPOSITION 4. <u>Il existe une famille</u> $(\hat{Q}_t)_{t>0}$ <u>de noyaux sur</u> E, <u>transformant les fonctions boréliennes en fonctions</u> $\underline{\underline{B}}_u$<u>-mesurables, et possédant les propriétés suivantes</u>

a) <u>Pour tout</u> $x\in E$, $\hat{Q}_t(x,dy)$ <u>est portée par</u> F^c, <u>et bornée</u>. <u>Pour</u> $x\in F^c$ <u>on a</u> $\hat{Q}_t(x,dy)=Q_t(x,dy)$.

b) <u>On a</u> $\hat{Q}_s\hat{Q}_t=\hat{Q}_{s+t}$; <u>la famille</u> $(\hat{Q}_t(x,.))$ <u>est étroitement continue à droite pour tout</u> x, <u>et on a</u>

$$(2.33)\qquad \hat{V}_p(x,dy) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\hat{Q}_t(x,dy)dt$$

Tout revient en fait à trouver des mesures bornées $q_t(x,dy)$ pour $x\in F$, portées par F^c, et constituant pour tout x une <u>loi d'entrée</u> pour le semi-groupe (Q_t) :

(2.34) $$q_{s+t}(x,.)=\int q_s(x,dy)Q_t(y,.)$$

telles que pour $x\in F$ on ait, avec les notations de la démonstration du th.2

(2.35) $$v_p(x,dy) = \int_0^{\infty} e^{-pt}q_t(x,dy)dt$$

Les propriétés de continuité à droite appartiennent en effet à toutes les lois d'entrée pour (Q_t), constituées de mesures bornées[1] et la mesurabilité en x des formules usuelles d'inversion de Laplace.

DEMONSTRATION. Récrivons nos hypothèses avec des notations simplifiées : nous avons des mesures bornées v_p sur F^c, satisfaisant à

(2.36) $$v_p-v_q = -(p-q)v_pV_q$$

(2.37) $$\lim_{p\to\infty} \langle v_p,1\rangle = 0 \qquad \text{(th.2, 4))}$$

Prenons $a>0$, notons f la fonction V_a1 , partout >0 sur F^c, et notons

$$Q'_t(x,dy) = e^{-at}\frac{1}{f(x)} Q_t(x,dy)f(y) \quad , \quad V'_p(x,dy) = \frac{1}{f(x)}V_{a+p}(x,dy)f(y)$$

$$v'_p(dy) = \frac{1}{\langle v_a,1\rangle}v_{a+p}(x,dy)f(y)$$

Alors les v'_p satisfont à (2.36) et (2.37) relativement à la résolvante (V'_p). De plus, nous avons

$$\langle v_a,1\rangle - \langle v_{a+p},1\rangle = p\langle v_{a+p},f\rangle = p\langle v_a,1\rangle\langle v'_p,1\rangle$$

d'où l'on tire d'abord que $\langle pv'_p,1\rangle \leqq 1$ pour tout p, et ensuite lorsque $p\to\infty$ que $\lim_p \langle pv'_p,1\rangle = 1$.

Adjoignons à F^c un point g, ce qui nous donne un ensemble G, et identifions mesures sur F^c et mesures sur G portées par F^c. Définissons sur G une résolvante sous-markovienne en posant

$$W'_p(x,dy) = V'_p(x,dy) \text{ si } x\in F^c \ , \ W'_p(g,dy) = v'_p(dy)$$

Si (W'_p) ne sépare pas G, il existe $x\in F^c$ tel que $v'_p(dy)=V'_p(x,dy)$; alors $v_{a+p}(dy)=V_{a+p}(x,dy)$, et les $Q_t(x,dy)$ forment la loi d'entrée cherchée. Si (W'_p) sépare G, prenons un compactifié de RAY $\overline{G}$, le semi-groupe de RAY correspondant $(\overline{Q}_t)$, et posons $q'_t(dy)=\overline{Q}_t(g,dy)$.

La condition $\lim_p \langle pv'_p,1\rangle = 1$ entraîne que le processus de RAY issu de g rencontre immédiatement F^c. Or cet ensemble est absorbant, donc les mesures q'_t sont portées par F^c et forment une loi d'entrée pour (Q'_t). Si l'on pose $q_t(dy)= e^{at}\langle v_a,1\rangle q'_t(dy)/f(y)$, on a une loi d'entrée pour (Q_t), dont la transformée de Laplace est égale à v_p sur

---

1. Mais non bornées dans leur ensemble : en général $q_t(x,1)\underset{t\to 0}{\to} +\infty$.

$]a,\infty[$, donc partout. La fonction $\langle q_t,1\rangle$ est décroissante : sa transformée de Laplace étant finie, elle est partout finie, et les mesures q_t sont bornées.

En vue d'applications ultérieures, nous introduirons aussi (pour une mesure μ donnée, cf. la fin de la démonstration du th.2) le semi-groupe

(2.38) $\hat{Q}'_t(x,dy) = (1-I_{J\setminus J'}(x))\hat{Q}_t(x,dy)$

dont la transformée de Laplace est $(\hat{V}'_p)$ - cf. (2.30) - et qui transforme les fonctions boréliennes en fonctions $\underline{\underline{B}}_e$-mesurables.

Nous aurons un peu plus loin une inversion de Laplace beaucoup plus subtile à faire. En attendant, récapitulons tous les résultats obtenus :

FORMULE DONNANT LES BALAYEES BIEN-MESURABLES SUR M

(2.39) $$\tilde{I}^p_t(h) = \int_0^t \hat{V}_p h\circ X_s I_F\circ X_s dK_s = \int_0^\infty e^{-pu}du \int_0^t \hat{Q}_u h\circ X_s\, I_F\circ X_s\, dK_s\ .$$

Nous regroupons maintenant avec les expressions (2.19) et (2.21) pour obtenir la formule fondamentale

(2.40) $$\begin{aligned}\tilde{A}^p_t(h) &= \int_0^t I_M(s)h\circ X_s ds + \int_0^t \hat{V}_p h\circ X_s d\Gamma_s \\ &= \int_0^t I_M(s)h\circ X_s ds + \int_0^\infty e^{-pu}du\int_0^t \hat{Q}_u h\circ X_s\, d\Gamma_s\end{aligned}$$

où Γ est la mesure aléatoire

(2.41) $$d\Gamma_s = I_F\circ X_s dK_s + \sum_{g\in \overrightarrow{M}_b}{}' \varepsilon_g(ds)$$

CONDITIONNEMENT (CAS BIEN-MESURABLE)

THEOREME 3. Soit (Z_s) un processus bien-mesurable positif, et soit h une fonction positive sur E. On a alors pour tout $u>0$.

(2.42) $$E^\mu[Z_{L_u} h\circ X_u I_{\{L_u>0\}}]=E^\mu[Z_u I_M(u)h\circ X_u]+E^\mu[\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h)Z_s d\Gamma_s].$$

Au second membre, noter l'intégration sur $]0,u[$ ouvert : en particulier si u se trouve appartenir à $\overrightarrow{M}_b(\omega)$, il n'y a pas de terme en ε_u dans $d\Gamma_s$.

DEMONSTRATION. Nous montrons d'abord que les deux membres de (2.42) ont même transformée de Laplace. A cet effet, nous recopions la formule (2.18), appliquée au processus $(e^{-ps}Z_s)$, et en y remplaçant ℓ_s par L_s . Compte tenu de (2.40), il vient

$$E^\mu[\int_0^\infty e^{-pt} Z_{L_t} h\circ X_t I_{\{L_t>0\}} dt\ ] = E^\mu[\int_0^\infty e^{-pt} Z_t dA_t^p(h)\ ]$$

$$(2.43) \qquad = E^\mu[\int_0^\infty e^{-pt} I_M(t) Z_t dt] + E^\mu[\int_0^\infty e^{-pt} Z_t d\Gamma_t \int_0^\infty \hat{Q}_u(X_t,h) e^{-pu} du]$$

Nous écrivons le dernier terme

$$(2.44) \qquad E^\mu[\int_0^\infty Z_t d\Gamma_t \int_t^\infty \hat{Q}_{v-t}(X_t,h) e^{-pv} dv]$$
$$= E^\mu[\int_0^\infty e^{-pv} dv \int_{]0,v[} \hat{Q}_{v-s}(X_s,h) Z_s d\Gamma_s]$$

nous appelons t la variable v, et nous avons l'égalité cherchée. Ainsi <u>les deux membres de</u> (2.42) <u>sont égaux pour presque tout</u> u .

On remarque ensuite que (2.42) est évidente lorsque h est nulle hors de F. En effet, le dernier terme est nul , les mesures $\hat{Q}_r(.,.)$ étant portées par F^c. Au premier membre, on peut insérer $I_F\circ X_u$, mais $I_F\circ X_u \neq 0 \Rightarrow u\in\rho_F \subset M$, donc $L_u=u>0$, et le premier membre s'écrit $E^\mu[Z_u I_M(u) h\circ X_u]$, qui est aussi le premier terme du second membre.

Nous pouvons donc nous borner au cas où h est nulle sur F.

Je dis aussi que pour vérifier l'égalité (2.43) pour $u=u_0$, on peut se ramener au cas où $Z_s=0$ pour $s\geqq u_0$. En effet, un processus (Z_s) général se décompose en deux : $(Z_s I_{\{s<u_0\}})$ qui satisfait à l'hypothèse précédente, et $(Z_s I_{\{s\geqq u_0\}})$ pour lequel (2.42) est vraie : le premier membre vaut $E^\mu[Z_{u_0} I_M(u_0) h\circ u_0]$, et le second membre se réduit à son premier terme, qui vaut la même chose.

Dans ces conditions, un argument de classes monotones montre que l'on peut supposer Z borné, continu à droite, adapté, nul sur $[u_0,\infty]$, et h de la forme $V_p f$, $f\geqq 0$ bornée , $p>0$. Nous allons vérifier que les deux membres de (2.42) sont des fonctions continues à droite de u au point u_0, et leur égalité p.p. entraînera leur égalité en u_0.

Dans ces conditions, nous allons vérifier que les deux membres de (2.42) sont des fonctions continues à droite de u au point u_0 , et leur égalité p.p. entraînera alors leur égalité en u_0.

Pour le premier membre, c'est évident : M étant fermé, la fonction $L_.$ est continue à droite. De même, $L_u>0 \iff u\geqq D$, et $I_{\{L_u>0\}}$ est continue à droite en u. Enfin, Z est continu à droite et $h=V_p f$ est finement continue .

En ce qui concerne le second membre, la relation $u\geqq u_0$ entraîne $Z_u=0$, donc le premier terme reste identiquement nul. Le second terme s'écrit aussi, pour la même raison

$$E^\mu[\int_{]0,u_0[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h) Z_s\, d\Gamma_s]$$

Lorsque $u \downarrow u_0$, $\hat{Q}_{u-s}(X_s,h)$ tend vers $\hat{Q}_{u_0-s}(X_s,h)$, et il faut seulement vérifier une condition de domination. Or nous avons supposé que $h=V_p f$, $f \geqq 0$, de sorte que la fonction $e^{-pt}\hat{Q}_t(x,h)$ est <u>décroissante</u> pour tout $x \in E$. On a donc pour tout u compris entre u_0 et $u_0+\varepsilon$

$$\hat{Q}_{u-s}(X_s,h) \leqq e^{p(u-u_0)}\hat{Q}_{u_0-s}(X_s,h) \leqq e^{p\varepsilon}\hat{Q}_{u_0-s}(X_s,h)$$

dont l'intégrale est au plus $e^{p\varepsilon}E^{\mu}[Z_{L_{u_0}} h{\circ}X_{u_0} I_{\{L_{u_0}>0\}}]$ (lemme de Fatou), quantité évidemment finie. Le théorème est établi.

Le corollaire suivant est une " last exit decomposition" :

COROLLAIRE 1 . <u>On a</u>

$$(2.45) \qquad P_u h^x = Q_u h^x + E^x[h{\circ}X_u I_M(u)] + E^x[\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h)d\Gamma_s]$$

DEMONSTRATION. On prend $Z=1$, $\mu=\varepsilon_x$ dans la formule (2.42), en remarquant que $L_u>0 \Leftrightarrow u \geqq D$, de sorte que le côté gauche vaut $P_u h^x - Q_u h^x$.

Un autre corollaire, qui est le principal résultat de conditionnement. Je dois à N. KAROUI de m'avoir signalé une erreur dans la rédaction précédente, qui est ici rectifiée.

Rappelons qu'une v.a. Z est dite $\underline{\underline{F}}_{L_u}$-mesurable s'il existe un processus bien mesurable (Z_t) tel que $Z=Z_{L_u}$. Les v.a. L_u et X_{L_u} sont $\underline{\underline{F}}_{L_u}$-mesurables, avec respectivement $Z_t=t^u$, $Z_t=X_t$.

COROLLAIRE 2 . <u>Posons</u> $k_t(x,h) = \dfrac{\hat{Q}_t(x,h)}{\hat{Q}_t(x,1)}$ (0/0=0). <u>Alors</u>

$$(2.46) \qquad E^{\mu}[h{\circ}X_u | \underline{\underline{F}}_{L_u}] = k_{u-L_u}(X_{L_u},h) \quad P^{\mu}\text{-}\underline{\text{p.s. sur}} \ \{0<L_u<u\} .$$

DEMONSTRATION. Soit (Z_t) un processus bien-mesurable borné, et soit $Z=Z_{L_u}$. Si le processus $(k_{u-s}(X_s,h))$ était bien-mesurable sur $[0,u]$, nous pourrions écrire d'après la formule (2.42), en remplaçant Z_s par $Z_s k_{u-s}(X_s,h)I_{\{s<u\}}$ et h par 1

$$E^{\mu}[Z.k_{u-L_u}(X_{L_u},h)I_{\{0<L_u<u\}}] = E^{\mu}[\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,1)k_{u-s}(X_s,h)Z_s d\Gamma_s]$$

Mais le second membre vaut aussi

$$E^{\mu}[\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h)Z_s d\Gamma_s] = E^{\mu}[Z.h{\circ}X_u.I_{\{0<L_u<u\}}]$$

d'après la même formule. C'est à dire (2.46).

Malheureusement, le processus $(k_{u-s}(X_s,h))$ <u>n'est pas</u> bien-mesurable. Nous tournons la difficulté de la manière suivante. La mesure μ étant fixée, nous considérons les noyaux $\hat{V}'_p$ de la formule (2.30), l'ensemble J" de la formule (2.32), les noyaux $\hat{Q}'_t$ de la formule (2.38), à partir desquels nous construisons des $k'_t(x,h)$ comme ci-dessus.

Puis nous remarquons que le théorème 3 vaut tout aussi bien avec les $\hat{Q}'_t$ qu'avec les $\hat{Q}_t$, puisque toutes les fonctionnelles correspondantes sont P^{μ}-indistinguables. D'autre part, si h est borélienne, le processus $(\hat{k}'_{u-s}(X_s,h))$ est , lui, bien-mesurable par suite de la $\underline{\underline{B}}_e$-mesurabilité des noyaux $\hat{Q}'_t$, et nous avons donc

$$E[h\circ X_u|\underline{\underline{F}}_{L_u}] = k'_{u-L_u}(X_{L_u},h) \text{ sur } \{0<L_u<u\}$$

et il reste seulement à voir , comme $k'_{\cdot}(x,.)=k_{\cdot}(x,.)$ pour $x\notin J''$, si $P^{\mu}\{X_{L_u}\in J'' ,0<L_u<u\}=0$. Or nous savons par (2.32) que

$$E^{\mu}[\int_0^{\infty} I_{J''}\circ X_s dK_s] = 0$$

Comme $J''\subset F$, nous avons le même résultat avec $d\Gamma_s$ au lieu de dK_s. Enfermons J" dans un borélien N possédant la même propriété. La formule (2.42) nous donne, avec $Z_s=I_N\circ X_s I_{\{s<u\}}$, h=1

$$P^{\mu}\{X_{L_u}\in N ,0<L_u<u\}=E^{\mu}[\int_0^{u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,1)I_N\circ X_s d\Gamma_s] = 0$$

Le corollaire est établi.

La rédaction précédente comportait le calcul des balayées prévisibles des fonctionnelles $A^p(h)$, et des indications sur le conditionnement dans le cas prévisible. Il s'agit d'une question sur laquelle GETOOR et SHARPE obtiennent de très jolis résultats, mais qui est assez étrangère au sujet de ces exposés : les ensembles homogènes . Aussi ne reprendrons nous pas cette partie de l'exposé.

[Cette suppression entraîne un " trou" dans le numérotage des formules] .

II. COMPLEMENTS À GETOOR-SHARPE

Nous allons mettre le résultat principal de GETOOR-SHARPE sous une autre forme, qui se prêtera à une extension très plaisante. Les méthodes seront une extension immédiate de celles de GETOOR-SHARPE.

Nous commençons par mettre le th.2 et la prop.4 sous la forme "délaplacifiée" suivante . On notera que l'inversion de transformation de Laplace n'a pas un aspect aussi compliqué que celle du théorème 3.

PROPOSITION 5.- Pour tout $u>0$, toute h positive , la projection duale bien-mesurable de la mesure aléatoire

(2.52) $$dJ_t^u(h) = \sum_{g\in M_\pi^-}{}' h\circ X_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}} \varepsilon_g(dt)$$

est la mesure aléatoire

(2.53) $$d\tilde{J}_t^u(h) = \hat{Q}_u(X_t,h) I_F\circ X_t dK_t$$

DEMONSTRATION. Il faut remarquer que (2.52) admet comme " fonction de répartition" une vraie fonctionnelle additive non adaptée : $J_\cdot^u(h)$ admet en effet au plus $\frac{a}{u}$ masses unité sur l'intervalle $[0,a]$, la sommation portant sur des intervalles contigus à M de longueur > u .

Nous avons à vérifier que , si Z est bien-mesurable positif

(2.54) $$E^\mu[\sum_{g\in M_\pi^-}{}' Z_g h\circ X_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}}] = E^\mu[\int_0^\infty Z_t \hat{Q}_u(X_t,h) I_F\circ X_t dK_t]$$

On peut supposer Z_t nul pour $t>a$, Z positif borné, h positive bornée. Il est facile de voir alors, par classes monotones, qu'on peut se borner au cas où (Z_t) est continu à droite, h continue bornée sur E. D'autre part, le résultat est trivial (0=0) pour hI_F , donc il suffit de le démontrer pour hI_{F^c} , puis pour $qV_q(hI_{F^c})$ $(q>0)$. Autrement dit, on peut se ramener au cas où $h=V_q g$, g positive bornée, $q>0$.

Il est alors évident que le côté gauche est une fonction continue à droite de u sur $]0,\infty[$ (rappelons que la somme n'a qu'un nombre fini de termes !). Pour voir qu'il en est de même du côté droit, on note que la fonction $e^{-qu}\hat{Q}_u(X_t,V_q g)$ est décroissante, et on applique le théorème de Lebesgue.

Il ne reste plus alors qu'à vérifier que les deux membres ont même transformée de Laplace en u : c'est la formule (2.28).

Dans le résultat suivant, la proposition 5 ne joue qu'un rôle très accessoire. Nous revenons en fait au principe même de la démonstration de GETOOR-SHARPE.

PROPOSITION 6 . <u>Soit</u> c <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}^*$-<u>mesurable positive sur</u> Ω. <u>Posons</u>

(2.55) $\quad k(x)=E^x[c] \qquad , \quad \bar{c}(\omega)=k\circ X_0(\omega)$

<u>Alors la mesure aléatoire suivante, où</u> u <u>est</u> >0

(2.56) $\quad dG_t^u(c) = \sum'_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} c\circ\theta_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}}\varepsilon_g(dt)$

<u>admet comme projection duale bien-mesurable</u>

(2.57) $\quad d\hat{G}_t^u(c) = \hat{Q}_u(X_t,k)I_F\circ X_t dK_t$

DEMONSTRATION. Compte tenu de la proposition 5, tout revient à montrer que les mesures aléatoires $dG_t^u(c)$ et $dG_t^u(\bar{c})$ ont même projection duale bien-mesurable. On peut évidemment supposer c (et $\bar{c}$) bornée. Tout revient à montrer que si Z est bien-mesurable, continu à droite, nul pour t>a fini, borné

$$E^\mu[\sum'_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g c\circ\theta_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}}]=E^\mu[\sum'_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g \bar{c}\circ\theta_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}}] \qquad (2.58)$$

On se ramène par complétion au cas où c est $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, puis par classes monotones au cas où c peut s'écrire $\gamma=h_1\circ X_{t_1}\ldots h_n\circ X_{t_n}$ ($h_1\ldots h_n$ continues sur E), de sorte que $\gamma\circ\theta_u$ est une fonction de u continue à droite. Puis, par passage à la limite, on se ramène à considérer $c=q\int_0^\infty e^{-qu}\gamma\circ\theta_u du$: alors les fonctions $c\circ\theta_u$ et $\bar{c}\circ\theta_u$ sont continues à droite en u. On se ramène alors à vérifier que les deux membres de (2.58) ont même transformée de Laplace en u.

Remarquons d'autre part que $M_b^{\rightarrow}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt : la propriété forte de Markov entraîne alors l'égalité correspondant à (2.58), avec $M_b^{\rightarrow}$ au lieu de $M_\pi^{\rightarrow}$. Pour finir, il nous suffit de vérifier l'égalité des transformées de Laplace des deux membres de (2.58), <u>avec</u> $M^{\rightarrow}$ <u>au lieu de</u> $M_\pi^{\rightarrow}$. Ne pas s'inquiéter : les quantités qu'on a ajoutées sont finies, et les transformées de Laplace seront finies.

L'égalité à démontrer s'écrit alors

(2.59) $\quad E^\mu[\sum'_{g\in M^{\rightarrow}} Z_g(\int_0^D c\circ\theta_u e^{-pu}du)\circ\theta_g] = E^\mu[\sum' ..(\int..\bar{c}..) ..]$

Remarquons que nous ne changeons rien dans cette formule en remplaçant $c(\omega)$ par $c(\omega)I_{F^c}\circ X_0(\omega)$, et donc $\bar{c}$ par $\bar{c}.I_{F^c}\circ X_0$. Ce changement fait, nous pouvons ajouter aux deux membres les quantités, toutes deux égales à 0, puisque les nouveaux $c\circ\theta_.$, $\bar{c}\circ\theta_.$ sont nuls p.p. sur M

$$E^\mu[\int_0^\infty I_{M\setminus M^{\leftarrow}}(s)c\circ\theta_s Z_s ds] \quad , \quad E^\mu[\int_0^\infty \ldots \bar{c}\circ\theta_s\ldots]$$

Cette addition faite, nous voyons apparaître des intégrales par rapport à des mesures p-transportées sur M (cf. (1.10),(1.11)).

D'après (1.11), l'égalité à démontrer s'écrit maintenant

(2.60) $E^{\mu}[\int_0^{\infty} Z_{\ell_s} e^{p\ell_s} I_{\{\ell_s>0\}} e^{-ps} c\circ\theta_s ds] = E^{\mu}[\int \dots \bar{c}\circ\theta_s ds]$

Or ℓ_s, Z_{ℓ_s} sont $\underline{\underline{F}}_s$-mesurables , et $E[c\circ\theta_s | \underline{\underline{F}}_s] = \bar{c}\circ\theta_s$.

On aura noté que cette démonstration est exactement la même que celle de la proposition 3.

La proposition analogue à la précédente pour $M_b^{\rightarrow}$ est triviale. On en déduit par addition

PROPOSITION 6' . La projection duale bien-mesurable de

(2.61) $\sum'_{g\in M^{\rightarrow}} c\circ\theta_{g+u} I_{\{g+u<D_g\}} \varepsilon_g(dt)$

est

(2.62) $\hat{Q}_u(X_t,k) d\Gamma_t$, où $d\Gamma_t = I_F\circ X_t dK_t + \sum'_{g\in M_b^{\rightarrow}} \varepsilon_g(dt)$

Nous en arrivons maintenant au résultat final, que nous énonçons pour $M^{\rightarrow}$ (il y a un énoncé analogue pour $M_{\pi}^{\rightarrow}$, laissé au lecteur). D'abord quelques notations : nous désignerons par E_Q^x les espérances sur Ω correspondant aux processus de Markov admettant (Q_t) comme semi-groupe de transition. Soit aussi $\overset{\times}{\Omega}$ l'ensemble des applications continues à droite de $]0,\infty[$ dans E, à durée de vie, muni de sa famille de tribus naturelle $(\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^{o}_t)$, engendrée par les coordonnées $(\overset{\times}{X}_t)$. Pour toute loi d'entrée $(\eta_t)_{t>0}$, il existe une mesure positive σ-finie et une seule sur $\overset{\times}{\Omega}$, donnant la masse finie $<\eta_t, 1>$ à $\{\zeta>t\}$ pour tout t>0 , et telle que pour tout t>0 le processus $(\overset{\times}{X}_{t+s})$ soit markovien avec (Q_t) comme semi-groupe de transition, η_t comme mesure initiale. En particulier, pour tout x∈E nous avons une mesure sur $\overset{\times}{\Omega}$ correspondant à la loi d'entrée $(\hat{Q}_t(x,.))$: nous noterons $\hat{E}_Q^x$ les espérances correspondantes.

Nous considérons Ω comme une partie de $\overset{\times}{\Omega}$, et nous prolongeons D (qui peut être supposé universellement mesurable : cf. l'exposé I) à $\overset{\times}{\Omega}$ par la formule $D(\omega) = \lim_{t\to 0} t+D(\theta_t\omega)$.

PROPOSITION 7. Soit C une fonction $\overset{\times}{\underline{\underline{F}}}{}^{o}$-mesurable positive, telle que $C([\partial]) = 0$, et soit $c = C\circ k_D$. Alors la projection duale bien-mesurable de

(2.63) $\sum'_{g\in M^{\rightarrow}} c\circ\theta_g \varepsilon_g(dt)$

est

(2.64) $\hat{E}_Q^{X_t}[c] d\Gamma_t$

DEMONSTRATION. Nous devons vérifier que si (Z_t) est bien-mesurable positif, borné, nul pour $t>a$, nous avons

$$E^{\mu}[\sum_{g\in M^{\to}}' Z_g c\circ\theta_g] = E^{\mu}[\int_0^{\infty}\hat{E}_Q^{X_t}[c]Z_t d\Gamma_t]$$

Commençons par le cas où , sur $\Omega^{\times}$

$$C = h_1\circ X_{t_1}^{\times}\dots h_n\circ X_{t_n}^{\times} \qquad (0<t_1\dots<t_n\ ,\ h_1\dots h_n \text{ bornées nulles en } \partial\ )$$

Posons $\quad \gamma = h_1\circ X_0\dots h_n\circ X_{t_n-t_1}\ I_{\{D>t_n-t_1\}}\quad$ sur Ω . Alors on a

$c\circ\theta_g = \gamma\circ\theta_{g+t_1}I_{\{g+t_1<D_g\}}$, et nous avons par (2.62) la projection duale cherchée : $E^{\bullet}[\gamma]$ vaut $E_Q^{\bullet}[h_1\circ X_0\dots h_n\circ X_{t_n-t_1}]$ (espérance pour (Q_t), sans chapeau) et $\hat{Q}_{t_1}(x,E_Q^{\bullet}[..])$ vaut $\hat{E}_Q^{x}[c]$. La formule est donc établie dans ce cas.

Nous choisissons maintenant un $\tau>0$, et remarquons que $I_{\{\zeta>\tau\}}= I_{E\setminus\{\partial\}}\circ X_\tau$, de sorte que si C est de la forme ci-dessus, il en est de même de $CI_{\{\zeta>\tau\}}$. Mais les deux membres de l'égalité, appliquée à $CI_{\{\zeta>\tau\}}$, sont des mesures bornées en C (du fait qu'il y a au plus a/τ intervalles contigus de longueur $>\tau$, et de l'égalité précédente pour $C=I_{E\setminus\{\partial\}}\circ X_\tau$, qui vaut 1 sur l'ensemble $\{\zeta>\tau\}$). Un raisonnement de classes monotones donne alors l'égalité désirée pour $CI_{\{\zeta>\tau\}}$, où C est $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable positive. Il ne reste plus qu'à faire tendre τ vers 0 , C étant nulle sur $\{\zeta=0\}$.

REMARQUE. On aimerait avoir[1] une formule donnant, sans trop de restrictions, la projection duale bien-mesurable de

$$\sum_{g\in M^{\to}}' c\circ\theta_g\varepsilon_g(dt)$$

lorsque c n'est pas de la forme $C\circ k_D$. C'est assez facile lorsque c est de la forme $\gamma\circ\theta_a$ ($a>0$, γ $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable). On écrit alors

$$\sum_{g\in M^{\to}}' c\circ\theta_g\varepsilon_g(dt) = \lim_{u<a,u\downarrow 0}\uparrow \sum(\gamma\circ\theta_{a-u})\circ\theta_{g+u}I_{\{g+u<D_g\}}\varepsilon_g(dt)$$

La projection duale bien-mesurable de cette dernière mesure aléatoire est, d'après (2.62)

$$\hat{Q}_u(X_t,P_{a-u}k)d\Gamma_t \qquad \text{où}\quad k=E^{\bullet}[\gamma]$$

Cette quantité croît lorsque $u\downarrow 0$. La projection duale bien-mesurable cherchée est donc $\lim_u \hat{Q}_u(X_t,P_{a-u}k)d\Gamma_t$. Quelle est l'interprétation de cette limite ?

Soit (η_t) une loi d'entrée pour (Q_t) ; $\eta_u P_{t-u}$ croît lorsque $u<t$ décroît et sa limite, que nous noterons $\overline{\eta}_t$, est une mesure positive (non nécessairement σ-finie), et on a $\overline{\eta}_{s+t}=\overline{\eta}_s P_t$. Supposons qu'il

1. Ces problèmes sont en partie résolus dans l'exposé IV, et des solutions complètes figurent dans un travail à paraître de N.KAROUI-H.REINHARD .

existe une mesure sur Ω^{x} , pour laquelle (X_t^x) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition et $(\overline{\eta}_t)$ comme loi d'entrée, et notons E l'intégrale correspondante. Si c est de la forme $\gamma\circ\Theta_a$, nous avons

$$E[c] = E[\gamma\circ\Theta_a] = < \overline{\eta}_a, E^{\cdot}[\gamma] > = < \overline{\eta}_a, k> = \lim_u < \eta_u, P_{a-u}k >$$

Cela s'applique en particulier à la loi d'entrée $(\hat{Q}_t(x,.))$, et on voit que la limite précédente s'interprète comme l'espérance $\hat{E}_P^x[c]$ pour une certaine"mesure" - lorsque $x\in F^c$, il est assez facile de voir que c'est en fait $E^x[c]$. Il y a là certainement une question intéressante.

REMARQUE. Si l'on prend pour c , dans toutes ces évaluations (2.61), (2.63)... une fonction de la forme $c'.I_{\{D=\infty\}}$, la somme ne comporte qu'un seul terme. Soit L le dernier point de M : on évalue des espérances de la forme $E^{\mu}[Z_L c'\circ\Theta_L I_{\{L<\infty\}}]$: le lien avec le théorème de WALSH , dans le dernier paragraphe de MEYER-SMYTHE-WALSH [??], est évident, et on peut en fait déduire le théorème de WALSH de la proposition 7. Indiquons sommairement le principe de la démonstration. WALSH introduit la fonction $g(x)=P^x\{D=\infty\}$, invariante pour (Q_t), et le semi-groupe " conditionné" $R_t=Q_t^g$. Le problème consiste à savoir si (Z étant bien-mesurable , et $t_1<\dots<t_n$ étant > 0)

$$E^{\mu}[I_{\{L<\infty\}}Z_L.h_1\circ X_{L+t_1}\dots h_n\circ X_{L+t_n}]$$
$$= E^{\mu}[I_{\{L<\infty\}}Z_L h_1\circ X_{L+t_1}\dots h_{n-1}\circ X_{L+t_{n-1}}.R_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},h_n)]$$

Pour cela, on évalue les deux membres au moyen de la prop.7, le premier valant par exemple

$$E^{\mu}[\int_0^{\infty} d\Gamma_s\ \hat{E}_Q^{X_s}[h_1\circ X_{t_1}\dots h_n\circ X_{t_n}I_{\{D=\infty\}}]]$$

Reste donc simplement à voir si

$$\hat{E}_Q^x[h_1\circ X_{t_1}\dots h_n\circ X_{t_n}I_{\{D=\infty\}}] =$$
$$\hat{E}_Q^x[h_1\circ X_{t_1}\dots h_{n-1}\circ X_{t_{n-1}}R_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},h_n)I_{\{D=\infty\}}]$$

Cela ne présente aucune difficulté.

PROBLEME. Le théorème de WALSH concerne en fait la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_{L+t}$, plus grande (en apparence ?) que celle que nous avons atteinte ici (engendrée par $\underline{\underline{F}}_L$ et les X_{L+s}, $s\leq t$). Pour atteindre directement $\underline{\underline{F}}_{L+t}$, il nous faudrait savoir projeter des mesures aléatoires de la forme

$$\sum_{g\in M^{\rightarrow}}' c\circ\Theta_{g+t}I_{\{g+t<D_g\}}\varepsilon_{g+t}(ds) \qquad (\text{ au lieu de } \varepsilon_g(ds))$$

Cela semble intéressant, de toute façon.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES (III)

par B. Maisonneuve et P.A. Meyer

Cet exposé est presque entièrement consacré à la démonstration de l'un des principaux résultats de MAISONNEUVE : le caractère fortement markovien (et même un peu mieux) du " processus d'incursion". Nous ferons en divers endroits des hypothèses simplificatrices, par exemple des hypothèses de mesurabilité. Si l'on tentait d'en donner une description axiomatique complète, la théorie deviendrait extrêmement lourde !

L'objet essentiel de l'exposé peut se décrire ainsi : étant donné un processus (X_t), et un ensemble aléatoire homogène M sur lequel (X_t) possède une sorte de propriété de renouvellement, décrire de manière intrinsèque (X_t) au moyen d'un couple de processus , dont l'un représente le comportement sur M , l'autre le comportement entre les passages dans M. Le cas le plus intéressant est celui où (X_t) tout entier est déjà un bon processus de Markov, qui se trouve ainsi"décomposé" de manière intrinsèque. Pour éviter des confusions, disons tout de suite que cette décomposition n'est pas la décomposition classique en " processus à la frontière et à l'intérieur" de la théorie des diffusions, car celle-ci comporte un changement de temps au moyen d'un temps local de la frontière (question que MAISONNEUVE étudie dans un autre chapitre).

I. NOTATIONS, AXIOMES, ETC.

Nous considérons un espace d'états E, borélien dans un compact métrisable $\hat{E}$ (hypothèse un peu trop restrictive, mais qu'importe ?) Comportant un point ∂ (qui sera supposé isolé pour la topologie de E). Nous désignons par Ω l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans E, continues à droite et à durée de vie (ce choix particulier de Ω est destiné surtout à nous éviter une théorie axiomatique mais nous nous permettrons d'en changer).Coordonnées X_t , durée de vie ζ , translation θ_t , opérateurs de meurtre k_t, tribus naturelles $\underline{\underline{F}}^o_t$, $\underline{\underline{F}}^o$. Si P est une loi de probabilité , $\underline{\underline{F}}^P$ est la complétée de $\underline{\underline{F}}^o$ pour P , $\underline{\underline{F}}^P_t$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ et les ensembles P-négligeables, $\underline{\underline{F}}^*_t$, $\underline{\underline{F}}^*$ sont les intersections de toutes les tribus $\underline{\underline{F}}^P_t$, $\underline{\underline{F}}^P$. On se donne aussi :

(*)Rédaction de P.A.Meyer

DONNEE 1 . Une famille $(P^x)_{x\in E}$ de lois sur E , telle que pour tout $A\in\underline{\underline{F}}^{o}$ (donc aussi $A\in\underline{\underline{F}}^{*}$) la fonction $P^{\cdot}(A)$ soit universellement mesurable sur E, et que $P^{\partial}=\varepsilon_{[\partial]}$.

On définit P^{μ} par intégration, si μ est une loi sur E, et on définit les notations abrégées $\underline{\underline{F}}^{\mu},\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t}$ (au lieu de $\underline{\underline{F}}^{P\mu}$, $\underline{\underline{F}}^{P\mu}_{t}$), $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_{t}$, comme d'habitude en théorie des processus de Markov. Nous dirons que nous sommes dans le "cas markovien" si la famille (P^x) est celle d'un processus de Markov droit (donc sans point de branchement, en particulier).

DONNEE 2. Un ensemble aléatoire homogène fermé M , progressivement mesurable par rapport à $\boxed{\text{toute}}$ famille $(\underline{\underline{F}}^{P}_{t})$.

Pour toutes les considérations élémentaires qui vont suivre, il suffirait d'avoir la progressivité pour les familles $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t})$, mais l'exigence ci-dessus se justifiera lorsque nous regarderons le semi-groupe du processus d'incursion. Rappelons que la (pénible) dernière partie de l'exposé I montre que cette hypothèse est anodine dans le cas markovien.

Nous ferons encore deux hypothèses, qui sont satisfaisantes pour l'esprit, et assez anodines . On rappelle que $D=D_0$ est le"début"de M.

1) $D\geq\zeta \Rightarrow D=+\infty$

2) $t>D(\omega) \Rightarrow D(k_t\omega)=D(\omega)$ (D est un"temps d'arrêt algébrique")

2) entraîne que si deux trajectoires ω et ω' coïncident sur un intervalle $[0,t[$, alors $M(\omega)\cap]0,t[= M(\omega')\cap]0,t[$.

On peut énoncer maintenant l'axiome fondamental, qui exprime une propriété de Markov forte du processus (X_t) à tout instant d'entrée dans M.

REGENERATION SUR M. Si S est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$, T le temps d'arrêt D_S (de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, ou même $(\underline{\underline{F}}^{*}_{t})$), φ une fonction $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable positive, on a pour toute loi μ sur E

(3.1) $\quad E^{\mu}[\varphi\circ\theta_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T] = E^{X_T}[\varphi]I_{\{T<\infty\}} \quad P^{\mu}$-p.s.(1)

Quelques extensions triviales : si S est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t})$, le résultat s'applique encore (prendre un t.d'a. S' de la famille $(\underline{\underline{F}}^{o}_{t+})$ égal P^{μ}-p.s. à S) ; de même, le résultat s'applique avec $\underline{\underline{F}}^{\mu}_{T}$ au lieu de $\underline{\underline{F}}_{T}$. Par complétion, il vaut aussi si φ est $\underline{\underline{F}}$-mesurable.

Voici une extension qui n'est pas triviale, et qui servira beaucoup dans la suite.

---

(1) Il faut aussi supposer $E^{\mu}[\varphi]=E^{\mu}[E^{X_0}[\varphi]]$, une sorte de régénération à l'instant 0.

DEFINITION. $(\hat{F}^{\mu}_t)$, $(\hat{\underline{\underline{F}}}^P_t)$, $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, $(\hat{\underline{\underline{F}}}^*_t)$ <u>désignent respectivement les familles de tribus</u> (continues à droite) $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{D_t})$, $(\underline{\underline{F}}^P_{D_t})$, $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, $(\underline{\underline{F}}^*_{D_t})$.

PROPOSITION 1. <u>Si</u> S <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, $T=D_S$ <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>et on a</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_S \subset \underline{\underline{F}}_T$. <u>La propriété de régénération</u> (3.1) <u>vaut encore sous ces hypothèses</u>.

DEMONSTRATION. Lorsque S est de la forme t_A $(t\in\mathbb{R}, A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{F}}_{D_t})$, T vaut $(D_t)_A$, et est bien un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$. On passe de là, par inf finis puis limites décroissantes, au cas général. Soit $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_S$; nous savons que S_A est un t.d'a. de $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, donc d'après ce qui précède $D_{(S_A)}$ est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$; or c'est aussi $(D_S)_A$, donc $A\in\underline{\underline{F}}_{D_S}$.

Il y a de petites variantes de cette première partie, lorsque S est un t.d'a. de l'une des autres familles. On laisse cela.

Passons à (3.1). Introduisons le processus de l'âge (a_t), adapté et continu à gauche. Pour $k\geq 1$, désignons par $(S_{km})_{m>0}$ les temps d'entrée successifs (définition récurrente habituelle...) de (a_t) dans l'intervalle $]\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}]$, et rangeons les en une suite unique (U_n). S étant un t.d'a. de $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, soient $T=D_S$, $A\in\hat{F}_S\subset\underline{\underline{F}}_T$, $B\in\underline{\underline{F}}^{\circ}$. Nous supposons $A\subset\{T<\infty\}$ et nous décomposons (3.1) en deux

$$(3.2)\qquad P^{\mu}(A\cap\theta_T^{-1}(B)\cap\{S=T\}) = \int_{A\cap\{S=T\}} P^{X_T}(B)\, dP^{\mu} \quad ?$$

$$(3.3)\qquad P^{\mu}(A\cap\ldots\ldots\cap\{S<T\}) = \int_{A\cap\{S<T\}}\ldots\ldots dP^{\mu} \quad ?$$

(3.2) est facile : soit $S'=T$, $T'=D_{S'}$; nous savons que S' est un t. d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$, donc nous pouvons lui appliquer directement (3.1). L'ensemble $A'=A\cap\{S=T\}$ est contenu dans $\{T'<\infty\}$, T' coïncide sur lui avec T , et on vérifie aussitôt qu'il appartient à $\underline{\underline{F}}_{T'}$; (3.2) se ramène alors à (3.1).

Passons à (3.3). Posons $V_n=D_{U_n}$, ce sont des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et nous pouvons leur appliquer (3.1). D'autre part, si $S<T$, il existe un S_{km} entre S et T pour k assez grand et m convenable , donc (changement de nom) un U_n, et alors $T=V_n$. Posons alors

$$A'_n = A\cap\{S<T\}\cap\{T=V_n\}$$

$$A_n = A'_n\setminus\bigcup_{p<n} A'_p$$

On vérifie sans peine que $A_n\in\underline{\underline{F}}_{V_n}$, on applique (3.1) à A_n et V_n , on somme sur n et on obtient (3.3).

La proposition 1 admet une extension , immédiate par classes monotones :

Si S est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$ et $T=D_S$; si G est une fonction positive $\underline{\underline{F}}_T\times\underline{\underline{F}}$-mesurable sur $\Omega\times\Omega$, on a P^μ-p.s.

$$(3.4)\quad E^\mu[G(\omega,\theta_T\omega)I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T] = E^{X_T(\omega)}[G(\omega,.)]I_{\{T<\infty\}}$$

POINTS DE BRANCHEMENT

Nous allons rencontrer un peu plus loin la notion de " processus droit avec points de branchements, à valeurs dans E " . Il s'agit d'une notion qui se réduit essentiellement à celle de processus droit ordinaire, et que nous décrirons ainsi.

L'espace d'états est partagé en deux morceaux B et D (points de branchement, points de non-branchement), tous deux universellement mesurables. Sur D, on se donne un processus droit ordinaire (ce qui sous-entend d'habitude que D est lusinien, mais cette hypothèse doit être affaiblie : cf. la fin de l'exposé I). Pour tout $x\in B$, on se donne une loi de probabilité $P_0(x,dy)$ sur D. On prolonge alors le semi-groupe à $E=B\cup D$ en convenant que pour $x\in D$ les $\varepsilon_x P_t$ restent les mêmes (i.e. ne chargent pas B), et que pour $x\in B$ $\varepsilon_x P_t=\int_D P_0(x,dy)P_t(y,.)$
La réalisation canonique du processus droit à points de branchement se construit ainsi : on considère les applications de $\mathbb{R}_+$ dans E (éventuellement à durée de vie ; on décide alors que $\partial\in D$) $\omega : t\mapsto \omega(t)= X_t(\omega)$

- continues à droite et à valeurs dans D pour $t>0$
- admettant une limite à droite $\omega(0+)=X_{0+}(\omega)\in D$ pour $t=0$
- telles que $X_0(\omega)=X_{0+}(\omega)$ si $X_0(\omega)\in D$

L'ensemble de ces applications s'identifie évidemment au sous-ensemble de $E\times\Omega_D$ formé de tous les couples (x,ω) tels que $X_0(\omega)=x$ si $x\in D$. On munit cet ensemble de lois P^x, etc. C'est vraiment évident.

De tels êtres n'ont jamais fait l'objet d'une véritable théorie. Ils ne sont dignes d'intérêt que lorsque les points de B sont bien liés au comportement " à gauche" , comme dans le cas des processus de RAY. Leur comportement " à droite" , en effet, se ramène à leur étude sur D, puisque le processus ignore complètement B après 0. Une remarque, cependant, qui fournit un guide pour les définitions des fonctionnelles additives, etc, sur cet espace canonique de trajectoires non continues à droite en 0 : de même que l'on n'a pas pris P_0=Identité, on ne doit pas prendre θ_0=Identité : $\theta_0(\omega)$ est la trajectoire continue à droite qui coïncide avec ω sur $]0,\infty[$. Les conditions usuelles d' additivité, etc, doivent être alors exigées pour Θ_0 aussi .

DEFINITIONS RELATIVES AU PROCESSUS D'INCURSION

Pour tout $\omega\in\Omega$, MAISONNEUVE appelle <u>incursion</u> à l'instant t la trajectoire

$$i_t(\omega) = a_D(\Theta_t\omega) = \Theta_t(a_{D_t}\omega)$$

où a désigne un opérateur d'arrêt. Nous modifierons légèrement cette définition, en gardant le terme d'incursion, mais en changeant de notation, en considérant plutôt comme incursion à l'instant t

(3.5) $$j_t(\omega) = k_D(\Theta_t\omega) = \Theta_t(k_{D_t}\omega)$$

Un avantage tout de suite : nous pouvons dire que ω <u>est une incursion</u> si $\omega=j_0(\omega)$ ce qui, compte tenu des conditions 1) et 2) page 2 de cet exposé, équivaut à $D(\omega)=+\infty$. Nous poserons

(3.6) $$\Omega_i = \{D=+\infty\} \quad (\text{ espace des incursions })$$

sous-ensemble universellement mesurable de Ω, stable par translation et meurtre. Nous noterons (avec la convention $X_\infty = \partial$)

(3.7) $$\hat{X}_t(\omega)=(R_t(\omega),X_{D_t}(\omega)) \text{ à valeurs dans } \hat{E}=\overline{\mathbb{R}}_+\times E$$

(3.8) $$\overline{X}_t(\omega)=(\hat{X}_t(\omega),j_t(\omega))=(R_t(\omega),X_{D_t}(\omega),j_t(\omega))$$

à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\Omega$. Cet ensemble est en fait un peu trop gros : nous remarquerons que $j_t(\omega)$ est une incursion, et que $R_t(\omega)\geqq\zeta(j_t(\omega))$ (en fait on a $R_t(\omega)=\zeta(j_t(\omega))$, sauf si $D_t(\omega)=+\infty$, $\zeta(\omega)<\infty$). Nous prendrons donc

(3.9) $$\overline{E} = \{(r,x,\omega)\in\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\Omega \,:\, D(\omega)=+\infty\,,\ r=\zeta(\omega) \text{ ou } r=+\infty\}$$

(nous avons réduit l'espace d'états le plus possible) . Notre but dans cet exposé est de montrer que (3.7) et (3.8) sont de bons processus de Markov, ce qui constitue le premier théorème important de MAISONNEUVE. Noter deux apports considérables de MAISONNEUVE à toute cette théorie : l'idée d'utiliser (R_t) au lieu de $(\mathcal{a}_t)$, processus traditionnellement employé, et doué de propriétés bien moins satisfaisantes ; l'idée des incursions employées <u>sans changements de temps</u>, alors que les processus dits traditionnellement " d'excursions" étaient toujours transformés au moyen d'un " temps local" de l'ensemble aléatoire M .

II. ETUDE DES PROCESSUS

Nous voulons considérer $(\overline{X}_t)$ comme un processus à valeurs dans $\overline{E}$. La première chose consiste naturellement à munir $\overline{E}$ d'une structure mesurable. Le choix est évident : la tribu trace de $\underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\times\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{F}}^\circ$. Dans ces conditions, $\overline{X}_t$ est évidemment une v.a. $\underline{\underline{F}}_{D_t}$-mesurable. Mais cela sera loin de nous suffire. Si nous voulons avoir de bons processus , il nous faut une topologie sur l'espace d'états. Tout revient en fait à munir Ω d'une topologie raisonnable.

TOPOLOGIE SUR Ω . E est toujours un espace métrisable : il est supposé universellement mesurable dans E^1 métrique compact, et rien ne nous empêche de déclarer que ∂ est un point isolé de E^1. Choisissons alors une distance d sur E^1, et définissons une distance sur Ω en posant

(3.9) $$d(\omega,\omega') = \int_0^{\infty} d(X_t(\omega),X_t(\omega'))e^{-t}dt$$

Autrement dit, la topologie sur Ω est celle de la <u>convergence en mesure</u> . Quelle est sa tribu borélienne ? Notons que la fonction $d(\omega,.)$ est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, donc $\underline{\underline{B}}(\Omega)\subset\underline{\underline{F}}^o$. Mais inversement, les fonctions $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\circ X_s(\omega)ds$, où $f\in\underline{\underline{C}}(E^1)$, sont continues, d'où il résulte lorsque $h\to 0$ que X_t est $\underline{\underline{B}}(\Omega)$-mesurable , et enfin que $\underline{\underline{B}}(\Omega)=\underline{\underline{F}}^o$.

L'ensemble de toutes les (classes d')applications mesurables de $\mathbb{R}_+$ dans E^1, muni de la convergence en mesure, est un espace polonais. Il n'est pas difficile de voir , en adaptant le raisonnement de la dernière proposition, Sém.V p.235, que l'ensemble des applications continues à droite est, dans cet espace, un complémentaire d'analytique (il faut se ramener au cas réel en considérant E^1 comme un compact de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, puis remplacer dans ce raisonnement les $\lim \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix}$ le long des rationnels par des $\lim \mathrm{ess} \begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix}$ le long de $\mathbb{R}_+$, avec la remarque de WALSH, qu'une fonction essentiellement continue à droite est continue à droite (Sém.V, p.292)). Un raisonnement de projection montre alors que l'ensemble des applications continues à droite à valeurs dans E borélien dans E^1 (ou même seulement complémentaire d'analytique...) est un complémentaire d'analytique. Ainsi nous avons démontré que Ω <u>est plongeable dans un métrique compact comme complémentaire d'analytique</u>.

Maintenant, je dis que <u>le processus</u> (j_t) <u>à valeurs dans</u> Ω <u>est continu à droite</u> pour cette topologie.

i) Si t est dans un intervalle $[a,b[$, où $]a,b[$ est contigu à $M(\omega)$, et h est assez petit, on a

$$d(j_t(\omega),j_{t+h}(\omega)) = \int_0^{b-t-h} d(X_{t+s}(\omega),X_{t+s+h}(\omega))e^{-s}ds + \int_{b-t-h}^{b-t} d(X_{t+s}(\omega),\partial)e^{-s}ds$$

qui tend bien vers 0 avec h (même si $b=+\infty$!).

ii) Sinon c'est que $t\in M(\omega)$ et n'est pas isolé à droite, donc $j_t(\omega)=[\partial]$, et l'on peut écrire

$$d(j_t(\omega),j_{t+h}(\omega)) = \int_0^{\zeta(j_{t+h}(\omega))} d(X_{t+s+h}(\omega),\ \partial)e^{-s}ds$$

quantité que l'on peut majorer au moyen de la durée de vie de $j_{t+h}(\omega)$, durée de vie qui tend évidemment vers 0.

Si Ω est un espace d'applications pourvues de limites à gauche, on vérifie de même que les processus d'incursion ont des limites à gauche pour cette topologie (et si E est polonais, Ω se trouve alors être lusinien, au lieu de complémentaire d'analytique).

OPERATEUR DE TRANSLATION. Nous n'allons pas nous borner à vérifier que le processus $(\overline{X}_t)$ est markovien pour les lois P^μ, nous allons construire une <u>réalisation</u> de son semi-groupe. L'espace de base (portant les lois) en sera le sous-ensemble $\overline{\Omega}$ de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ formé des (r,ω) tels que $r\leqq D(\omega)$, muni de la tribu induite $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+^+)\times\underline{\underline{F}}^\circ|_{\overline{\Omega}}$. Notre premier soin sera de le munir de l'opérateur de translation

$$(3.10)\quad \text{si } \overline{\omega} = (r,\omega)\in\overline{\Omega}\ ,\ \overline{\Theta}_t\overline{\omega} = (r-t,\Theta_t\omega)\in\overline{\Omega} \text{ si } t<r$$
$$= (R_t(\omega),\Theta_t\omega)\in\overline{\Omega} \text{ si } t\geqq r$$

On rappelle que $R_t=D_t-t$. Il faut noter que la dernière parenthèse s'écrit aussi $(R_{t-r}(\Theta_r\omega),\Theta_{t-r}(\Theta_r\omega))$. Egalement, que $\overline{\Theta}_0$ n'est pas l'identité

$$(3.11)\quad \overline{\Theta}_0(r,\omega) = (r,\omega) \text{ si } r>0\ ,\ \text{si } r=0 \text{ c'est } (R(\omega),\omega)$$

Calculons $\overline{\Theta}_s\overline{\Theta}_t(r,\omega)$: il y a quatre cas à distinguer

i) $s+t<r$: c'est $(\ r-t-s,\ \Theta_{s+t}\omega\ )$

ii) $t<r,\ s\geqq r-t$: c'est $(R_s(\Theta_t\omega),\ \Theta_{s+t}\omega)$

iii) $t\geqq r,\ s<R_t(\omega)$: c'est $(R_t(\omega)-s,\ \Theta_{s+t}\omega)$

iv) $t\geqq r,\ s\geqq R_t(\omega)$: c'est $(R_s(\Theta_t\omega),\ \Theta_{s+t}\omega)$

Les trois dernières expressions valent bien $(R_{s+t}(\omega),\Theta_{s+t}\omega)$, et on en déduit aussitôt l'égalité $\overline{\Theta}_s\overline{\Theta}_t=\overline{\Theta}_{s+t}$.

VARIABLES ALEATOIRES. Nous posons sur $\overline{\Omega}$

$$(3.12)\quad \overline{X}_0(r,\omega)=(r,X_r(\omega),k_r(\omega))\in\overline{E} \text{ si } r>0\ ,(R(\omega),X_R(\omega),k_R(\omega))\in\overline{E} \text{ si } r=0$$

et pour $t>0$

$$(3.13)\quad \overline{X}_t(r,\omega)=\overline{X}_0(\overline{\Theta}_t\overline{\omega}) = \begin{cases}(r-t,X_r(\omega),k_{r-t}\Theta_t\omega) & \text{si } t<r\\ (R_t(\omega),X_{D_t}(\omega),j_t(\omega)) & \text{si } t\geqq r\end{cases}$$

Définitions analogues pour $\hat{X}_t(r,\omega)$, constitué par les deux premières coordonnées de $\overline{X}_t(r,\omega)$. Ces fonctions sont continues à droite sur $[0,\infty[$ pour la topologie choisie sur $\overline{E}$: en toute rigueur, $\overline{X}_0$ devrait s'appeler $\overline{X}_{0+}$, avec

$$(3.14)\quad [\ \overline{X}_0(r,\omega) =(r,X_r(\omega),k_r(\omega)) \text{ pour tout } r, \text{ notation non uti-utilisée dans la suite}]$$

Soit $\underline{\underline{\bar{F}}}^*$ la complétion universelle de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ|_{\bar{\Omega}}$ qui est aussi celle de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^*|_{\bar{\Omega}}$. Montrons que $\bar{X}_t$ est mesurable de $\underline{\underline{\bar{F}}}^*$ dans $\underline{\underline{B}}_u(\bar{E})$. Par complétion, il suffit de montrer que si h est borélienne sur $\bar{E}$, $h\circ\bar{X}_t$ est $\underline{\underline{\bar{F}}}^*$-mesurable. La tribu borélienne de $\bar{E}$ étant induite par $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{F}}^\circ$, nous pouvons supposer h de la forme $(r,x,\omega)\longmapsto a(r)b(x)c(\omega)$, et alors c'est évident :

$$h\circ\bar{X}_t(r,\omega) = a(r-t)b(X_r(\omega))c(k_{r-t}(\theta_t\omega))I_{\{t<r\}}$$
$$+ a(R_t(\omega))b(X_{D_t}(\omega))c(j_t(\omega))I_{\{t\geq r\}}$$

MESURES. Soit $(r,x,w)\in\bar{E}$. L'application $\omega\mapsto(r,w/r/\omega)$ de Ω dans $\bar{\Omega}$ [1] est mesurable pour les tribus $\underline{\underline{F}}^\circ$, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$, donc aussi pour $\underline{\underline{F}}^*,\underline{\underline{\bar{F}}}^*$, d'où l'existence d'une loi image de P^x pour cette application, qu'on notera $\bar{P}^{r,x,w}$. Si $\varphi(r,\omega)$ est une fonction $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable de la forme $a(r)c(\omega)$, on a

$$\bar{E}^{r,x,w}[\varphi] = a(r)E^x[c(w/r/.)]$$

fonction $\underline{\underline{B}}_u(\bar{E})$-mesurable ; cela s'étend par classes monotones et complétion au cas où φ est $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable positive ou bornée sur $\bar{\Omega}$. En particulier, si f est $\underline{\underline{B}}_u(\bar{E})$-mesurable sur $\bar{E}$, cela s'applique à $\varphi = f\circ\bar{X}_t$, et la fonction

(3.16) $\qquad \bar{P}_t(.,f) = \bar{E}^\cdot[f\circ\bar{X}_t]$

est universellement mesurable sur $\bar{E}$: $\bar{P}_t$ est un noyau sur $\bar{E}$.

Cela se verra encore mieux sur l'expression explicite de $(\bar{P}_t)$, et d'une manière qui ne fait pas intervenir le caractère <u>universellement</u> progressivement mesurable de M : peut être ce caractère est il inutile ? On a

$$\bar{P}_t((r,x,w),f) = \bar{E}^{r,x,w}[f\circ\bar{X}_t] = E^x[f\circ\bar{X}_t(r,w/r/.)]$$

Si $t<r$, $\bar{X}_t(r,w/r/.) = (r-t,\ X_r(w/r/.), k_{r-t}\circ\theta_t(w/r/.))$. Comme $r\geq\zeta(w)$, $k_{r-t}\circ\theta_t(w/r/.)=\theta_t w$; $X_r(w/r/.)=X_0(.)$ si $r<\infty$, ∂ si $r=+\infty$.
Si $t\geq r$, $\bar{X}_t(r,w/r/.) = (R_t(w/r/.),X_{D_t}(w/r/.),\ j_t(w/r/.))$. Noter que r doit être fini, donc cela s'écrit $(R_{t-r}(.),X_{D_{t-r}}(.),j_{t-r}(.))$.
Ainsi

(3.17) Si $r<\infty$, $\bar{P}_t((r,x,w),f)= I_{\{t<r\}}E^x[f(r-t,X_0(.),\theta_t w)]$
$\qquad + I_{\{t\geq r\}}E^x[f(R_{t-r},X_{D_{t-r}},j_{t-r})]$

Si $r=\infty$, $\bar{P}_t((\infty,x,w),f) = f(\infty,\partial,\theta_t w)$

1. Si $r=+\infty$, $w/r/\omega=w$ et $X_r(w/r/\omega)=\partial$

Si f ne dépend pas de w, mais seulement de (r,x), on constate que $\overline{P}_t(.,f)$ n'en dépend pas non plus. Aussi pose t'on sur $\hat{E}$

(3.18) $$\text{Si } r<\infty,\ \hat{P}_t((r,x),f) = I_{\{t<r\}}E^x[f(r-t,X_0(.))] + I_{\{t\geq r\}}E^x[f(R_{t-r},X_{D_{t-r}})]$$
$$\text{Si } r=\infty,\ \hat{P}_t((r,x),f) = f(\infty,\partial).$$

TRIBUS. Faute d'une meilleure notation, nous noterons $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times}$ la tribu sur $\overline{\Omega}$ de la manière suivante : une fonction réelle $\varphi(r,\omega)$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times}$-mesurable si et seulement si elle est $\overline{\underline{\underline{F}}}^*$-mesurable , et

(3.19) Pour tout $r\leq t$, $\varphi(r,.)$ est $\underline{\underline{F}}^*_{D_t}$-mesurable
Pour tout $r>t$, $\varphi(r,.)$ est $\underline{\underline{F}}^o_{r+}$-mesurable

Cette famille est continue à droite, et le calcul fait plus haut montre que $\overline{X}_t$ est mesurable de $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times}$ dans $\underline{\underline{B}}(\overline{E})$. Si l'on identifie Ω à $\{0\}\times\Omega\subset\overline{\Omega}$, les notations (3.12-13) s'identifient aux notations (3.7-8), et la tribu trace de $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times}$ sur Ω est $\underline{\underline{F}}^*_{D_t}$.

Voici l'énoncé du théorème de MAISONNEUVE.

THEOREME 1. <u>Les noyaux</u> $(\overline{P}_t)$ <u>sur</u> $\overline{E}$ <u>forment un semi-groupe markovien. Pour toute loi</u> $\overline{P}^{r,x,w}$, <u>le processus</u> $(\overline{X}_t)$ <u>est fortement markovien par rapport à la famille</u> $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times})$, <u>avec</u> $(\overline{P}_t)$ <u>comme semi-groupe, et</u> $(\varepsilon_{(r,x,w)}\overline{P}_t$ <u>comme loi d'entrée. De même , les noyaux</u> $(\hat{P}_t)$ <u>forment un semi-groupe sur</u> $\hat{E}$, <u>et pour</u> $\overline{P}^{r,x,w}$ <u>le processus</u> $(\hat{X}_t)$ <u>est fortement markovien, avec</u> $(\hat{P}_t)$ <u>comme semi-groupe et</u> $(\varepsilon_{(r,x)}\hat{P}_t)$ <u>comme loi d'entrée</u>[1] .

Compte tenu des dernières lignes précédant l'énoncé, ce théorème appliqué à $\overline{P}^{0,x,[\partial]}$ nous donne le caractère markovien de $(\overline{X}_t)$ et $(\hat{X}_t)$ sur Ω , pour la loi P^x, et par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^*_{D_t})$. Nous laisserons de côté ici ce qui touche à $(\hat{X}_t)$, en signalant toutefois que MAISONNEUVE traite ce processus par une méthode directe, qui ne semble pas exiger que M soit <u>universellement</u> progressivement mesurable.

DEMONSTRATION. Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\times})$. Comme d'habitude, la possibilité de remplacer S par des temps d'arrêt S_A $(A\in\overline{\underline{\underline{F}}}_S^{\times})$ rend inutile la manipulation d'èspérances conditionnelles, et nous nous trouvons ramenés à prouver les deux égalités

1. C'est à dessein qu'on parle de loi d'entrée. On décrira plus tard ce qui se passe pour t=0. Il peut y avoir branchement .

(3.20) $\bar{E}^{r,x,w}[h\circ\bar{\Theta}_S I_{\{r\leq S<\infty\}}] = \bar{E}^{r,x,w}[\bar{E}^{\bar{X}_S}[h] I_{\{r\leq S<\infty\}}]$

(3.21) $\bar{E}^{r,x,w}[h\circ\bar{\Theta}_S I_{\{S<r\}}] \quad = \bar{E}^{r,x,w}[\bar{E}^{\bar{X}_S}[h] I_{\{S<r\}}]$

Nous pourrons toujours supposer que h est de la forme $h(s,\omega)=a(s)c(\omega)$ où c est $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable, le cas général s'en déduisant par classes monotones et complétion. Nous laisserons au lecteur le cas où $r=+\infty$, qui est à peu près trivial, et supposons donc que $r=\zeta(w)<\infty$.

Commençons par (3.21). Il nous suffit de voir que pour tout $t<r$

(3.22) $\bar{E}^{r,x,w}[h\circ\bar{\Theta}_S I_{\{S<t\}}] = \bar{E}^{r,x,w}[\bar{E}^{\bar{X}_S}[h] I_{\{S<t\}}]$

Rappelons que $\bar{E}^{r,x,w}[\varphi] = E^{x}[\varphi(r,w/r/.)]$. L'ensemble $\{S<t\}$ est $\underline{\underline{\bar{F}}}_{t}^{x}$-mesurable, donc l'ensemble $\{S(r,.)<t\}$ est $\underline{\underline{F}}_{t+}^{o}$-mesurable : comme $w/r/.$ et w sont égales jusqu'à l'instant r, la condition $S(r,w/r/.)<t$ équivaut à $S(r,w)<t$. Posons donc $S(r,w)=r'$: si $r'\geq t$, (3.22) se réduit à l'égalité 0=0 . Si $r'<t$, on a $S(r,w/r/.)=r'$, et elle s'écrit

$$E^{x}[h\circ\bar{\Theta}_{r'}(r,w/r/.)] \quad = \quad E^{x}[\bar{E}^{\bar{X}_{r'}(r,w/r/.)}[h]]$$

Mais $\bar{\Theta}_{r'}(r,w/r/.) = (r-r',\theta_{r'}(w/r/.)) = (r-r',w'/r-r'/.)$, où $w'=\theta_{r'}w$.
Le premier membre vaut donc

(3.23) $E^{x}[h(r-r',\ w'/r-r'/.)]$

Passons au second membre : $\bar{X}_{r'}(r,w/r/\omega) = (r-r',\ X_{r}\ (w/r/\omega),$ $k_{r-r'}\theta_{r'}(w/r/\omega)) = (r-r',\ X_0(\omega)\ ,\ k_{r-r'}w')$. Donc l'intégrale intérieure vaut

(3.24) $E^{X_0(\omega)}[h(r-r',\ k_{r-r'}w'/r-r'/.)]$

mais $k_{r-r'}w'/r-r'/. = w'/r-r'/.$, et d'autre part $E^{x}[\varphi]=E^{x}[E^{X_0(\cdot)}[\varphi]]$ (ici il est bon de rappeler que nos trajectoires sont continues à droite à l'instant 0, mais que l'on n'a pas nécessairement $P^{x}\{X_0=x\}$ =1 ; la relation ci-dessus a été rajoutée dans nos hypothèses, p.2 de cet exposé)

Passons à (3.20), qui est moins facile. Nous avons vu plus haut que la relation $S(r,w/r/\omega)<t$ équivaut à $S(r,w)<t$. Faisant tendre t vers r, on voit que $S(r,w/r/.)\geq r$ équivaut à $S(r,w)\geq r$. Si cette propriété n'est pas satisfaite, (3.20) se réduit à l'égalité 0=0. Supposons donc $S(r,w)\geq r$. Alors $S(r,w/r/\omega)\geq r$ pour tout ω. Je dis que

(3.25) $\qquad U(\omega) = S(r,w/r/\omega)-r$

est un temps d'arrêt de la famille ($\underline{\underline{F}}_{D_+}^{*}$) : nous démontrerons cela plus tard. Alors (prop.1), $T=D_U$ est un temps d'arrêt de la famille ($\underline{\underline{F}}_t$), et la propriété de régénération a lieu à l'instant T . Démontrons alors (3.20), en posant pour abréger $S(r,w/r/\omega)=S(\omega)$

Que vaut $\overline{\Theta}_{S(\omega)}(r,w/r/\omega)$? Comme $S(\omega)\geq r$, c'est

$$(R_{S(\omega)}(w/r/\omega),\Theta_{S(\omega)}(w/r/\omega))=(R_{U(\omega)}(\omega),\Theta_{U(\omega)}(\omega))$$

Nous pouvons alors - compte tenu du fait que $h(.,.)=a(.)c(.)$ et que la condition $S(r,w/r/.)\geq r$ est automatiquement satisfaite - écrire le côté gauche de (3.20) sous la forme

$$(3.26)\qquad E^x[a(R_U)c(\Theta_U)I_{\{U<\infty\}}]$$

Passons au côté droit. Il s'écrit $E^x[\overline{E}^{\overline{X}_{S(\omega)}(r,w/r/\omega)}[h]I_{\{S(\omega)<\infty\}}]$.

$$\overline{X}_{S(r,w/r/\omega)}(r,w/r/\omega)=(R_{U(\omega)}(\omega),X_{D_U(\omega)}(\omega),j_{U(\omega)}(\omega)$$

donc $\overline{E}^{\overline{X}_S}[h]$ s'écrit

$$E^{X_{D_U(\omega)}}[a(R_U(\omega))c(j_U(\omega)/R_U(\omega)/.)]$$

Posons $D_U=T$: il nous reste à vérifier

$$(3.27)\quad E^x[a(R_U)c(\Theta_U)I_{\{U<\infty\}}]=E^x[a(R_U)I_{\{U<\infty\}}E^{X_T}[c(j_U/R_U/.)]$$

Or $a(R_U)I_{\{U<\infty\}}$ est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable. D'autre part, $\Theta_{U(\omega)}(\omega)=j_U(\omega)/-R_U(\omega)/\Theta_{T(\omega)}(\omega)$, de sorte que $c\circ\Theta_U$ s'écrit $G(\omega,\Theta_{T(\omega)}(\omega))$, où

$$G(\omega,\omega')=c(j_U(\omega)/R_U(\omega)/\omega')$$

est $\underline{\underline{F}}_T\times\underline{\underline{F}}^o$-mesurable. D'après la formule (3.4) on a aussitôt (3.27), et le théorème est établi, à l'assertion sur les temps d'arrêt près. Pour celle ci, de quoi s'agit il ? de démontrer que

$$\{\omega : S(r,w/r/\omega)<r+t\}\in\underline{\underline{F}}^*_{D_t}\text{ pour tout } t.$$

Soit ψ l'application $\omega\mapsto w/r/\omega$ de Ω dans lui-même, et soit A l'ensemble $\{\omega : S(r,\omega)<r+t\}$, qui appartient à $\underline{\underline{F}}^*_{D_{r+t}}$ par hypothèse. Notons aussi que $D_{r+t}=r+D_t\circ\Theta_r$. Nous sommes ramenés à prouver le lemme suivant

LEMME. <u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^*_t)$, <u>et soit</u> $T=r+S\circ\Theta_r$. <u>Alors si</u> $A\in\underline{\underline{F}}^*_T$ <u>on a</u> $\psi^{-1}(A)\in\underline{\underline{F}}^*_S$. [On rappelle que $r=\zeta(w)$]

DEMONSTRATION. Commençons par le cas où S est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$, de sorte que T l'est aussi, et où $A\in\underline{\underline{F}}^o_{T+}$; ψ étant mesurable de $\underline{\underline{F}}^o$ dans $\underline{\underline{F}}^o$, il suffit (d'après COURREGE et PRIOURET) de vérifier que

$$w/r/\omega\in A\ ,\ S(\omega)<t\ ,\ \omega=\omega'\text{ sur }[0,t[\ \Rightarrow w/r/\omega'\in A$$

Or $T(w/r/\omega)=r+S(\omega)<r+t$, $w/r/\omega=w/r/\omega'$ sur $[0,r+t[$, et $A\in\underline{\underline{F}}^o_{T+}$. Cela entraîne ce qu'on désire.

Passons aux familles complétées. Soit P une loi sur E, et soit Q la loi $\psi(P)$. Choisissons un t.d'a. S' de $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ égal à S P-p.s., et soit $T'=r+S'\circ\Theta_r$. On vérifie sans peine que T'=T Q-p.s.. Soit alors

$A'\in\underline{\underline{F}}^o_{T'+}$ égal à A Q-p.s. ; d'après ce qui précède on a $\psi^{-1}(A')\in\underline{\underline{F}}^o_{S'+}$, et $\psi^{-1}(A')=\psi^{-1}(A)$ P-p.s.. Le lemme est établi.

POINTS DE BRANCHEMENT . Cherchons les $(r,x,w)\in\overline{E}$ tels que l'on n'ait pas $\overline{P}^{r,x,w}$-p.s. $\overline{X}_0 = (r,x,w)$.

-Si $r=\infty$, on a $\overline{X}_0\ (\infty,\omega) = (\infty,\partial,\omega)$, et $\overline{P}^{\infty,x,w}\{\overline{X}_0=(\infty,x,w)\}$ $= P^x\{(\infty,\partial,w)=(\infty,x,w)\}$. Ainsi, tous les (∞,x,w) tels que $x\neq\partial$ sont des points de branchement , tandis que les (∞,∂,w) sont des points de non branchement. La mesure $\overline{P}^{\infty,c,w}$ correspondante est $\varepsilon_{\infty,w}$

Nous choisirons comme " cimetière de $\overline{E}$" le point $\overline{\partial}=(\infty,\partial,[\partial])$.

- Si $0<r<\infty$, nous avons $r=\zeta(w)$, et

$$\overline{P}^{r,x,w}\{\overline{X}_0=(r,x,w)\}=P^x\{(r,X_r(w/r/.),k_r(w/r/.))=(r,x,w)\}$$
$$=P^x\{X_0(.)=x\}$$

Nous voyons donc apparaître les points de branchement (r,x,w), où $r>0$, et x est un point de branchement pour (X_t).

- Enfin, si $r=0$, la condition $r=\zeta(w)$ entraîne $w=[\partial]$, et on a

$$\overline{P}^{0,x,[\partial]}\{\overline{X}_0=(0,x,[\partial])\}=P^x\{(R(.),X_R(.),k_R(.)=(0,x,[\partial])\}$$
$$= P^x\{X_0=x,R=0\}$$

D'où les nouveaux points de branchement $(0,x,[\partial])$, où x est soit un point de branchement pour (X_t), soit tel que $P^x\{R=0\}<1$. Il se peut naturellement qu'on ait $P^x\{R=0\}<1$ pour <u>tout</u> x : cela signifie simplement que le processus $(\overline{X}_t)$ passe sa vie dans l'ensemble où $r\neq 0$, et n'a rien de surprenant.

Noter aussi les points de branchement (r,x) pour $(\hat{X}_t)$: les (∞,x), $x\neq\partial$; les (r,x), $r\geqq 0$, x branchant pour (X_t) , enfin les $(0,x)$, $P^x\{R=0\}<1$.

LE PROCESSUS $\overline{X}_t$ EST IL DROIT ?

Nous venons de voir que le processus $(\overline{X}_t)$ est fortement markovien. Malheureusement, il n'existe pas de théorie approfondie des processus fortement markoviens, les hypothèses les plus faibles sous lesquelles on sait vraiment des choses précises étant les hypothèses droites. Nous allons montrer ici que <u>si</u> (X_t) <u>est un processus de Markov droit, il en est de même de</u> $(\overline{X}_t)$. Ce n'est pas du tout amusant, mais cela enlève tout souci pour la suite. Nous supposerons pour simplifier que l'espace d'états E est lusinien métrisable (alors que cette hypothèse, on l'a signalé dans l'exposé I, est un peu trop forte).

Nous avons deux questions à examiner : le caractère presque-borélien des fonctions p-excessives (qui entraîne leur continuité à droite sur les trajectoires) ; la possibilité de confiner le processus à des parties lusiniennes de l'espace d'états (cf. la remarque de MERTENS, exposé I p.11-12). Nous nous occupons d'abord de la première question.

Caractère presque borélien . Il nous suffit en fait de démontrer que si h est borélienne sur $\overline{E}$, positive et bornée, son p-potentiel est une fonction presque-borélienne. Il suffit d'ailleurs de prendre des h particulières, et de raisonner ensuite par classes monotones.

Nous commençons par traiter le cas du processus $(\hat{X}_t)$, h étant borélienne sur $\hat{E}$, de la forme a(r)b(x). Nous pouvons même nous borner au cas où $a(r)=e^{-\lambda r}$, $\lambda \geqq 0$. Dans ce cas

$$\hat{P}_t((r,x)\ ;\ h\ ) = e^{-\lambda(r-t)}b(x)I_{\{r>t\}}+I_{\{r\leqq t\}}E^x[e^{-\lambda R_{t-r}}\ b\circ X_{D_{t-r}}]$$

La contribution du premier terme dans $\hat{U}_p((r,x)\ ;\ h\ )$ est

$$-b(x)\frac{e^{-\lambda r}-e^{-pr}}{\lambda-p}$$

C'est une fonction borélienne, et il est inutile de s'en préoccuper. Nous écrirons le second terme sous la forme $I_{\{r\leqq t\}}P_{t-r}(x,P_T^\lambda b)$, de sorte que sa contribution dans le potentiel est

$$e^{-pr}U_p g(x) \qquad , \text{ où } g = P_T^\lambda b$$

Comme $(r,x)\mapsto e^{-pr}$ est déjà borélienne, il nous suffit de démontrer que si f (égale ici à $U_p g$) est presque-borélienne pour (X_t) , $(r,x) \mapsto f(x)$ est presque-borélienne pour $(\hat{X}_t)$. Démontrons un peu mieux : $(r,x,w)\longmapsto f(x)$ est presque-borélienne pour $(\overline{X}_t)$.

En effet, soit μ une loi initiale sur $\overline{\Omega}$, et soit λ la loi image de μ par l'application $(r,x,\omega)\longmapsto x$, et soit λ' la loi image de μ par $(r,x,\omega)\longmapsto X_D(\omega)$. Comme f est presque-borélienne, nous pouvons l'encadrer entre f_1 et f_2, boréliennes, telles que les processus $(f_1\circ X_t)$ et $(f_2\circ X_t)$ soient indistinguables pour P^λ et $P^{\lambda'}$. Il en est alors de même pour les processus $(f_1\circ X_{D_t})$ et $(f_2\circ X_{D_t})$. Or nous avons en notant $\overline{f}$ la fonction $(r,x,w)\longmapsto f(x)$

$$\begin{aligned}\overline{f}\circ\overline{X}_t(r,x,\omega) &= f(x) \text{ si } t<r\\ &= f(X_{D_{t-r}}(\omega)) \text{ si } t\geqq r\end{aligned}$$

D'où il résulte aussitôt que les processus$(\overline{f}_1\circ\overline{X}_t)$ et $(\overline{f}_2\circ\overline{X}_t)$ sont $\overline{P}^\mu$-indistinguables, et donc que $\overline{f}$ est presque-borélienne.

Ceci étant dit, nous en déduisons aussi le cas de $(\overline{X}_t)$: nous prenons h(r,x,w) de la forme a(r)b(x)c(w) , c $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable. Nous avons

$$\overline{P}_t((r,x,w)\ ;\ h\ ) = a(r-t)b(x)c(k_{r-t}\theta_t w)I_{\{t<r\}}$$
$$+E^x[\ a(R_{t-r})b(X_{D_{t-r}})c(j_{t-r})]I_{\{t\geqq r\}}$$

Le premier terme est une fonction borélienne, nous ne nous en occupons pas. Nous écrivons le second $P_{t-r}(x,k)I_{\{t\geqq r\}}$, où k est la fonction universellement mesurable $E^{\bullet}[a(R)b(X_D)c(j_0)]$; sa contribution dans le p-potentiel est donc $e^{-pr}U_pk(x)$, et le raisonnement précédent s' applique encore.

Propriétés de l'espace d'états. Il nous faut prendre garde ici au fait suivant : nous travaillons sur un processus fortement markovien à points de branchement. Si nous devons avoir un processus droit, ce ne peut être que $(\overline{X}_t)$ restreint à l'ensemble $\overline{D}$ des points de non-branchement de $\overline{E}$. Notre problème est donc le suivant : soit ν une loi initiale portée par $\overline{D}$. Peut on plonger $\overline{E}$ dans un lusinien métrisable H , de telle sorte (fin de l'exposé I) que le processus $(\overline{X}_t)$ reste $\overline{P}^\nu$-p.s. dans une partie borélienne A de H ? Nous savons

- que Ω se plonge dans un espace métrique compact $\overset{*}{\Omega}$, comme complémentaire d'analytique
- que si μ est une loi initiale sur E, il existe une partie Ω_μ de Ω, invariante par translation et meurtre, qui est un complémentaire d'analytique dans $\overset{*}{\Omega}$, qui porte P^μ, et telle que sur Ω_μ les v.a. $D_t, R_t\ldots$ soient $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurables (i.e. boréliennes).

Nous prendrons pour H l'espace lusinien $\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\overset{*}{\Omega}$, qui contient $\overline{E}$. Soit λ l'image de $\overline{P}^\nu$ sur $\overline{\Omega}$ par $(r,\omega)\mapsto X_r(\omega)$, soit λ' l'image de $\overline{P}^\nu$ par $(r,\omega)\mapsto X_D(\omega)$, et soit $\mu = (\lambda+\lambda')/2$; choisissons alors Ω_μ comme ci-dessus. Pour $\overline{P}^\nu$, le processus $(\overline{X}_t)$ reste confiné à

$$(\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\Omega_\mu)\cap\overline{E}\cap\overline{D}$$

Ω_μ étant un complémentaire d'analytique dans $\overset{*}{\Omega}$, $\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\Omega_\mu$ est un complémentaire d'analytique dans H. D'après le théorème de capacitabilité, il existe une partie borélienne K de H, contenue dans $\overline{\mathbb{R}}_+\times E\times\Omega_\mu$, telle que $(\overline{X}_t)$ reste $\overline{P}^\nu$-p.s. dans K. Sur K, D est une fonction borélienne, donc $K\cap\overline{E} = \{(r,x,w)\ :\ D(w)=+\infty\ ,\ r=\zeta(w)$ ou $r=+\infty\}$ est encore borélien. Reste à voir ce que dit la condition de non-branchement. Pour simplifier, nous supposerons que (X_t) est sans point de branchement. Alors $\overline{D}$ est réunion de trois ensembles : $\{(r,x,w)\in\overline{E}\ :\ r=+\infty\ ,\ x=\partial\}$ (borélien dans $\overline{E}$) ; $\{(r,x,w)\in\overline{E}\ :\ 0<r<\infty\}$ (borélien dans $\overline{E}$), enfin $\{(r,x,w)\in\overline{E}\ :\ r=0,\ P^x\{R=0\}=1\}$. Or l'ensemble $\{x\in E\ :\ P^x\{R=0\}=1\}$ est presque-borélien pour (X_t), donc il contient un ensemble borélien C

dans E, qui n'en diffère que par un ensemble μ-polaire. Le troisième ensemble ne diffère alors que par un ensemble ν-polaire de l'ensemble borélien $\{(r,x,w) : r=0, x\in C\}$ de $\overline{\overline{E}}$, et le résultat cherché en résulte aussitôt.

COMMENTAIRE FINAL. Il faut comparer cette rédaction à la première présentation (de Maisonneuve) pour mesurer à quel point il a fallu travailler pour franchir l'étroit fossé séparant les processus fortement markoviens des processus droits. Nous savons maintenant que les processus d'incursion sont droits, et que " tout est permis". La technique peut être oubliée.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972-73

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES (IV)

par B. Maisonneuve et P.A. Meyer

Cet exposé est consacré à des applications des résultats de l'exposé III sur le caractère markovien droit du processus d'incursion. Nous commençons par des remarques qui permettent de "faire descendre" certaines fonctionnelles additives du processus d'incursion sur l'espace Ω. Ensuite, nous donnons le résultat essentiel de l'exposé : le système de LEVY du processus d'incursion permet de retrouver directement (sans transformations de Laplace) les résultats de GETOOR-SHARPE, et aussi de résoudre les questions laissées en suspens à la fin de l'exposé II. Nous obtenons donc une seconde démonstration de tous ces résultats. Un appendice est consacré à la question du <u>temps local</u> d'un ensemble régénératif . <u>Dans tout l'exposé, à l'exception de cet appendice, nous supposons que le processus</u> (X_t) <u>est markovien droit sans branchement</u>.

I. FONCTIONNELLES ADDITIVES

Rappelons quelques notations de l'exposé III : l'espace d'états $\bar{E}$ du processus d'incursions était l'ensemble des

$$(r,x,\omega) \text{ tels que } D(\omega)=+\infty\,,\ r=\zeta(\omega) \text{ ou } r=+\infty$$

et admettait comme " cimetière" le point $\bar{\partial}=(\infty,\partial,[\partial])$. Il admettait des points de branchements de deux sortes :

$$\bar{B}_1 : \text{les } (\infty,x,w) \text{ avec } x\neq\partial \quad ; \ \bar{B}_2 : \text{les } (0,x,[\partial]) \text{ où } P^x\{R=0\}<1.$$

(il y avait d'autres points, correspondant aux points de branchement de (X_t) lui même, mais notre hypothèse simplificatrice les exclut). Nous noterons $\bar{D}$ l'ensemble des points de non-branchement, et F l'ensemble des x tels que $P^x\{R=0\}=1$.

Notre espace $\bar{\Omega}$ était formé des (r,ω) tels que $r\leqq D(\omega)$, avec l'opérateur de translation

$$\bar{\theta}_t(r,\omega) = (r-t,\theta_t\omega) \text{ si } t<r\ ,\ =(R_t(\omega),\theta_t\omega) \text{ si } t\geqq r$$

($\bar{\theta}_0$ n'est pas l'identité) et les variables aléatoires

$$\bar{X}_t(r,\omega)= (r-t,X_r(\omega),k_{r-t}\theta_t\omega) \text{ si } t<r\ ,\ (R_t(\omega),X_{D_t}(\omega),j_t(\omega)) \text{ si } t\geqq r$$

L'ensemble des $(r,\omega)\in\bar{\Omega}$ tels que $\bar{X}_t(\omega)\in\bar{D}$ pour tout t est alors formé des $(r,\omega)\in\bar{\Omega}$ tels que

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } R_t(\omega)=0, \text{ on a } X_t(\omega)\in F$$

Nous noterons Ω' l'ensemble des ω possédant cette propriété, qui est stable par translation et meurtre et porte toutes les lois P^μ. Nous noterons $\overline{\Omega}'$ l'ensemble des $\overline{\omega}$ dont la trajectoire ne rencontre jamais les points de branchement, c'est à dire $\{(r,\omega)\in\overline{\Omega}, \omega\in\Omega'\}$: on peut réaliser le semi-groupe $(\overline{P}_t)$ sur $\overline{\Omega}'$, qui porte toutes les mesures $\overline{P}^\mu$. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous réduisons $\overline{\Omega},\Omega$ à $\overline{\Omega}',\Omega'$.

Nous allons pouvoir alors utiliser la théorie des fonctionnelles additives, sans aucune difficulté : considérons par exemple la théorie de la représentation des fonctions excessives (on aurait des considérations tout à fait analogues pour le système de LEVY). Soit f une fonction p-excessive de la classe (D) sur $\overline{E}$. Nous regardons sa restriction à l'ensemble $\overline{D}$ des points de non-branchement. Construisons la réalisation continue à droite canonique $(\overline{W},\underline{\underline{G}}\ldots)$de $(\overline{P}_t)$ sur $\overline{D}$: la théorie de la représentation nous permet d'écrire, sur $\overline{D}$

$$f(x) = \overline{E}^x[\int_0^\infty e^{-ps}d\overline{\alpha}_s]$$

où $\overline{\alpha}$ est une fonctionnelle additive douée de toutes les qualités de la fin de l'exposé I (perfection...), et en outre prévisible par rapport aux tribus complétées. On a une application de $\overline{\Omega}'$ dans $\overline{W}$

$$\tau : \overline{\omega} \hookrightarrow \overline{X}_.(\omega) \in \overline{W}$$

et nous pouvons ramener $\overline{\alpha}$ sur $\overline{\Omega}'$ en posant

$$\overline{A}_t(r,\omega) = \overline{\alpha}_t(\tau(r,\omega)) \tag{4.1}$$

Notons les propriétés de $\overline{A}$:

a) Elle satisfait sans ensemble exceptionnel sur $\overline{\Omega}'$ à la croissance, la continuité à droite, la relation d'additivité.

b) La relation $\overline{X}_s(r,\omega)=\overline{X}_s(r',\omega')$ pour $s\leqq t+h$ $(h>0)$ entraîne $\overline{A}_t(r,\omega) =\overline{A}_t(r',\omega')$. Comme $\tau=\tau\circ\overline{\Theta}_0$, on a $\overline{A}_t=\overline{A}_t\circ\overline{\Theta}_0$

c) On a $f(x)=\overline{E}^x[\int_0^\infty e^{-ps}d\overline{A}_s]$ pour $x\in\overline{D}$: mais en réalité cela vaut aussi pour $x\in\overline{E}$ tout entier , car si x est un point de branchement, et $\mu=\varepsilon_x\overline{P}_0$, on a $f(x)= \lim_t e^{-pt}\overline{P}_tf(x) = \lim_t e^{-pt}\overline{P}_0\overline{P}_tf(x) = \overline{P}_0f(x) =\langle\mu,f\rangle = \overline{E}^\mu[\int e^{-ps}d\overline{A}_s]=\overline{E}^x[\int e^{-ps}d\overline{A}_s]$.

d) $\overline{A}$ est un processus prévisible pour toute $\overline{P}^\mu$-complétée de la famille naturelle de $(\overline{X}_t)$.

e) Toute v.a. $\overline{A}_t$ est universellement mesurable sur $\overline{\Omega}'$.

En fait, nous ne cherchons pas à travailler sur $\overline{\Omega}'$, mais sur Ω'. Nous " redescendons" donc sur Ω' en posant

(4.2) $\qquad A_t(\omega) = \overline{A}_t(0,\omega)$

Nous avons alors

$$A_{s+t}(\omega)= \overline{A}_{s+t}(0,\omega)= \overline{A}_s(\Theta,\omega)+\overline{A}_t(\overline{\Theta}_s(0,\omega))= A_s(\omega)+\overline{A}_t(R(\Theta_s\omega),\Theta_s\omega)$$
$$= A_s(\omega) + \overline{A}_t(\overline{\Theta}_0(0,\Theta_s\omega))= A_s(\omega)+\overline{A}_t(0,\Theta_s\omega)\simeq A_s(\omega)+A_t(\Theta_s\omega)$$

Nous avons donc affaire à une fonctionnelle additive brute sur Ω'. En ce qui concerne l'adaptation, la famille de tribus naturelle de $(\overline{X}_t)$ sur $\overline{\Omega}$ est contenue dans la famille $(\underline{\underline{F}}^{\times}_t)$ (cf. exposé III, formule (3.19)), et en revenant à la définition de cette famille on voit que $A_t=\overline{A}_t(0,.)$ est $\underline{\underline{F}}^*_{D_t}$-mesurable. On a même

si $X_s(\omega)=X_s(\omega')$ pour $0\leqq s\leqq D_t(\omega)+h$ $(h>0)$, alors $A_t(\omega)=A_t(\omega')$.

On a donc construit une fonctionnelle additive brute (A_t), adaptée à la famille $(\underline{\underline{F}}^*_{D_t})$. On a

(4.3) $\quad f(0,x,[\partial]) = E^x[\int_0^\infty e^{-ps}dA_s]$ pour tout $x\in E$

En ce qui concerne la prévisibilité, nous ferons la remarque suivante. Soit un processus prévisible élémentaire de la famille $(\underline{\underline{F}}^*_{D_t})$ sur $]0,\infty[$

$$Z_t(\omega) = Z(\omega)I_{]u,\infty[}(t) \quad \text{où } Z \text{ est } \underline{\underline{F}}^*_{D_u}\text{-mesurable}$$

Alors le processus $Z_{\ell_t} = ZI_{\{\ell_t>u\}} = ZI_{\{D_u<t\}}$ est continu à gauche, et adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}^*_t)$, donc prévisible pour cette famille. Noter qu'il est important de travailler sur $]0,\infty[$, car les processus prévisibles élémentaires du type $Z_t=ZI_{\{0\}}(t)$ sur $[0,\infty[$, avec Z $\underline{\underline{F}}^*_{D_0}$-mesurable, ne donnent rien de bon. Par classes monotones et passage aux processus indistinguables, on voit que <u>le processus (A_{ℓ_t}) est prévisible par rapport à toute tribu complétée</u> $(\underline{\underline{F}}^\mu_t)$. Le cas le plus important où l'on applique ce résultat est celui où les processus (A_t) et (A_{ℓ_t}) sont indistinguables, c'est à dire, où dA de charge aucun intervalle $]g,D_g]$. Cela se produit en particulier lorsque A est <u>continue et portée par M</u> .

Ceci conduit à une bonne théorie du temps local de M dans des cas où (X_t) n'est pas un processus de Markov droit : nous verrons cela en appendice. Nous allons plutôt examiner ici les applications aux processus droits.

II. SYSTEME DE LEVY DU PROCESSUS D'INCURSION

Rappelons un peu la théorie du noyau de LEVY d'un processus droit, telle qu'elle a été développée par BENVENISTE et JACOD sans hypothèse de continuité absolue. Considérons d'abord la réalisation canonique d'un processus droit $(\overline{Y}_t)$, à valeurs dans un espace d'états $\overline{D}$. Le théorème de BENVENISTE-JACOD affirme l'existence d'une fonctionnelle additive continue $(\overline{\alpha}_t)$, possédant toutes les propriétés de perfection désirables et ayant un 1-potentiel borné, et d'autre part d'un noyau N sur $\overline{E}$, tel que $N(x,\{x\})=0$ pour tout x, et que pour toute loi initiale μ, la projection duale prévisible de la mesure aléatoire

$$(4.4)\qquad \sum_{\substack{\text{sauts tot.}\\ \text{inacces.}}} f(\overline{Y}_{t-},\overline{Y}_t)\varepsilon_t(ds)$$

où f est borélienne positive sur $\overline{D}\times\overline{D}$, et où la somme sera expliquée dans un instant, est la mesure aléatoire

$$(4.5)\qquad (\int N(\overline{Y}_s\,,dy)f(\overline{Y}_s,y))\,d\overline{\alpha}_s$$

Que signifie la somme (4.4) ? Nous remarquons que l'ensemble des sauts du processus $(\overline{Y}_t)$, i.e. des instants t où, ou bien $\overline{Y}_{t-}$ n'existe pas, ou bien $\overline{Y}_{t-}$ existe et est différent de $\overline{Y}_t$, est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. Nous partageons ceux-ci en leurs parties totalement inaccessibles (T_n^i), et leurs parties accessibles (T_n^a) relativement à la mesure $\overline{P}^{\mu}$, et nous sommons seulement sur les (t,ω) de la réunion des graphes $[T_n^i]$. En fait, aux instants T_n^i la limite $\overline{Y}_-$ existe toujours, et la somme (4.4) a bien un sens.

Si maintenant nous avons affaire, non pas à la réalisation canonique, mais simplement à un processus de Markov continu à droite sur un espace $\overline{\Omega}'$, mettons $(\overline{X}_t)$, admettant ce semi-groupe de transition et la loi initiale μ , relativement à une famille de tribus $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$. Nous avons comme plus haut une application τ de $\overline{\Omega}'$ dans l'espace canonique, associant à $\omega\in\overline{\Omega}'$ la trajectoire $\overline{X}_.(\omega)$, et nous remontons $\overline{\alpha}_t$ en $\overline{A}_t=\overline{\alpha}_t\circ\tau$. Dans ces conditions, la projection duale prévisible de

$$(4.6)\qquad \sum_{\substack{\text{sauts tot.}\\ \text{inacces.}}} f(\overline{X}_{t-},\overline{X}_t)\varepsilon_t(ds)$$

relativement à la famille $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$ est

$$(4.7)\qquad (\int N(\overline{X}_s,dy)f(\overline{X}_s,y)d\overline{A}_s$$

Ce passage n'est pas absolument évident, à cause du rôle de la famille de tribus. Par exemple, en (4.6), l'inaccessibilité <u>paraît</u> dépendre de la famille de tribus choisie, et non seulement du processus $(\overline{X}_t)$: en fait, il n'en est rien, comme on peut le voir en utilisant une compactification de RAY (les sauts totalement inaccessibles sont ceux pour lesquels la limite à gauche dans le compactifié de RAY n'est pas un point de branchement). De même, la notion de processus prévisible dépend de la famille $(\overline{\underline{F}}_t)$: on commence par établir le résultat pour la famille naturelle de $(\overline{X}_t)$, et on l'étend à $(\overline{\underline{F}}_t)$ au moyen du théorème de projection.

Ceci étant rappelé, nous l'appliquons au processus d'incursion, et d'abord sur $\overline{\Omega}'$. Quels sont les sauts de $\overline{X}_{\bullet}(r,\omega)$? Nous en avons d'abord un à l'instant r, mais celui-ci sera toujours prévisible pour toute loi $\overline{P}^{r,x,w}$ (ce saut n'existe pas si r=0, bien sûr). Ensuite, nous avons tou les instants $t\geq r$ appartenant à $M^{\rightarrow}$, et un instant de réflexion montre que nous épuisons ainsi les sauts de la première et de la troisième composante de $\overline{X}_t$. Reste la seconde, X_{D_t} , et nous voyons apparaître tous les $t\in M$, qui ne sont isolés ni à droite ni à gauche et pour lesquels $X_{t-}\neq X_t$. Nous reverrons cela dans un instant, mais voici la conséquence importante pour tout de suite : considérons la première composante de $\overline{X}_t$:

$$\rho_t(r,\omega) = \begin{matrix} r-t & \text{si } t<r \\ R_t(\omega) & \text{si } t\geq r \end{matrix}$$

L'ensemble prévisible $\{\rho_{t-}=0\}$ contient les sauts, donc porte la mesure aléatoire (4.6) ; il porte donc aussi sa projection prévisible (4.7), et nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, qu'il porte la fonctionnelle additive continue $(\overline{A}_t)$; $\overline{A}_{\bullet}(r,\omega)$ <u>est donc nulle sur</u> $[0,r]$, <u>et constante dans les intervalles contigus à</u> $M(\omega)$.

Redescendons maintenant sur Ω', et posons $A_t(\omega)=\overline{A}_t(0,\omega)$ comme en (4.2) : on a $A_t=A_{\ell_t}$ identiquement, et nous avons vu dans ce cas que (A_t) est une vraie fonctionnelle additive de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ sur Ω'. Nous allons démontrer le résultat plus explicite suivant

THEOREME 1. <u>Il existe une fonctionnelle additive continue</u> (A_t) <u>sur</u> Ω[1], <u>adaptée à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>portée par</u> M, <u>ayant un 1-potentiel borné</u>, <u>et un noyau</u> M <u>sur</u> $\overline{D}$ (<u>tel que</u> $M(\overline{x},\{\overline{x}\})=0$ <u>et que</u> $M(\overline{x},.)$ <u>soit</u> σ-<u>finie</u>

---

(1) En fait, nous raisonnons sur Ω', mais nous écrivons Ω dans les énoncés pour ne pas dérouter un lecteur n'ayant pas lu tout ce qui précède : étant donné le sens usuel de l'expression fonctionnelle additive (parfaite), autorisant un ensemble exceptionnel, cela revient exactement au même puisque Ω' porte toutes les P^{μ}.

<u>pour tout $\bar{x}\varepsilon\bar{D}$), tels que pour toute loi P^{μ}, toute fonction borélienne positive</u> f <u>sur $\bar{D}$, la projection duale prévisible par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$ <u>de la mesure aléatoire</u>

(4.8) $$\sum_{g\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}} f(\bar{X}_{g-},\bar{X}_g)\varepsilon_g(dt)$$

<u>soit la mesure</u>

(4.9) $$(\int M(\bar{X}_t,d\bar{y})f(\bar{X}_t,\bar{y})).dA_t$$

DEMONSTRATION. Nous notons N un noyau de LEVY pour le processus d'incursion ; rappelons la notation $\bar{X}_t = (R_t,X_{D_t},j_t)$. On a vu les sauts du processus d'incursion : Nous avons d'abord tous les $t\varepsilon M^{\rightarrow}$, car on y a $j_{t-}=[\partial]$, tandis que $j_t\neq[\partial]$. Nous avons ensuite tous les points $t\varepsilon M\backslash M^{\rightarrow}$ où X_{t-} n'existe pas, ou bien où $X_{t-}\neq X_t$. Les sauts des deux types sont faciles à différencier , les premiers étant caractérisés par la condition $R_t>0$. Parmi ceux-ci, les $t\,\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}$ sont caractérisés par les conditions $R_{t-}=0$, $X_t\varepsilon F$ (condition qui s'écrit aussi $X_0(j_t)\ \varepsilon$ F). Considérons donc les sous-ensembles de $\bar{D}$

$$\bar{B} = \{(r,x,w):r=0\} \qquad , \ \bar{C} = \{(r,x,w)\ :\ r>0,\ X_0(w)\varepsilon F\}$$

nous avons

$$\sum_{\substack{g\ \text{tot.inacc.}\\ g\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}}} f(\bar{X}_{g-},\bar{X}_g)\varepsilon_g = \sum_{g\ \text{tot.in.}} I_{\bar{B}}(\bar{X}_{g-})f(\bar{X}_{g-},\bar{X}_g)I_{\bar{C}}(\bar{X}_g)\varepsilon_g \quad (4.10)$$

et ceci se calcule par le système de LEVY : posons $M(x,dy) = N(x,dy).I_{\bar{C}}(y)$, le processus $I_{\bar{B}}\circ\bar{X}_{t-}$ est prévisible[1] pour la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, et la projection prévisible du second membre s'écrit

$$(\int M(\bar{X}_t,d\bar{y})f(\bar{X}_t,\bar{y}))I_{\bar{B}}\circ\bar{X}_{t-}dA_t$$

Mais A est continue, portée par M, donc on a $I_{\bar{B}}\circ\bar{X}_{t-}=1$ A-presque partout, et on peut enlever ce facteur, de sorte que la projection duale prévisible du premier membre de (4.10) est bien (4.9). Reste à voir si ce premier membre est égal à (4.8). Comme $M_{\pi}^{\rightarrow}$ est une réunion de graphes de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, tout revient à montrer que ces t.d'a. sont totalement inaccessibles : ou encore, qu'un temps d'arrêt prévisible T de la famille $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{D_t})$ ne passe P^{μ}-p.s. pas dans $M_{\pi}^{\rightarrow}$. Or soit (T_n) une suite annonçant T . On sait que D_{T_n} est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t)$. Sur l'ensemble où $T\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}$, T est point d'accumulation à gauche de points de M, donc la relation $T_n<T$ entraîne $D_{T_n}<T$, et donc aussi $D_{T_n}\uparrow T$. Soit $T' = \lim_n D_{T_n}$, temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t)$: sur $\{T\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}\}$ nous avons aussi $T'\varepsilon M_{\pi}^{\rightarrow}$ P^{μ}-p.s. , et comme ce dernier ensemble est P^{μ}-négligeable par définition de $M_{\pi}^{\rightarrow}$, il en est de même du premier. Le théorème est établi.

1. Si $\bar{X}_{t-}$ n'existe pas, on convient que ce processus vaut 0 .

Regardons de plus près ce résultat : si $g\in\vec{M_\pi}$, nous avons $\overline{X}_{g-} = (0,X_{g-},[\partial])$, et $\overline{X}_g=(R_g,X_{D_g},j_g)$. De plus, comme il ne passe dans $\vec{M_\pi}$ aucun graphe de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$, nous avons $X_{g-}=X_g$. Introduisons donc le noyau (de mesures σ-finies) de E dans $\overline{D}$

$$(4.11) \qquad n(x,d\overline{y}) = M((0,x,[\partial]), d\overline{y})$$

Nous avons

THEOREME 2 . <u>Soit</u> f <u>une fonction borélienne positive sur</u> $E\times\overline{D}$. <u>La projection prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$ <u>de</u>

$$(4.12) \qquad \sum_{g\in\vec{M_\pi}} f(X_{g-},\overline{X}_g)\varepsilon_g(dt)$$

<u>est</u>

$$(4.13) \qquad (\int n(X_t,d\overline{y})f(X_t,d\overline{y})).\, dA_t$$

<u>De plus</u>, (4.13) <u>est aussi projection duale bien-mesurable et prévisible de</u> (4.12) <u>par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$

DEMONSTRATION. Le résultat relatif à $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$ n'est que la traduction du théorème 1. La mesure aléatoire (4.13) est sa propre projection duale prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ (elle a une densité adaptée par rapport à un processus croissant adapté continu), donc elle est aussi la projection prévisible de (4.12) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Soit (Z_t) un processus bien-mesurable par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, positif, et soit (Z'_t) sa projection prévisible. Il est bien connu que Z et Z' ne diffèrent que sur une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$: ils coincident donc presque partout pour chacune des mesures aléatoires (4.12) et (4.13), et le résultat relatif à la projection bien-mesurable en découle aussitôt.

APPLICATION AUX CALCULS DE LA FIN DE L'EXPOSE II

Nous allons maintenant revenir sur les calculs de projections bien-mesurables faits à la fin de l'exposé II. Nous allons voir que l'existence des mesures $n(x,d\overline{y})$, qui nous sont données " toutes cuisinées" par le système de LEVY du processus d'incursion, nous permet de retrouver directement les résultats de GETOOR-SHARPE, sans avoir à passer par les lois d'entrée. C'est avantageux, car nous pourrons alors pousser les calculs un peu plus loin , et vérifier la conjecture de l'avant dernière remarque de l'exposé II.

Nous commençons par remarquer que la fonctionnelle additive (K_t) de l'exposé II peut être prise égale à la fonctionnelle (A_t) de celuici, et que le facteur $I_F\circ X_t$ est inutile, (A_t) étant portée par M, donc par F. Soit c positive, $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable sur Ω. On voudrait calculer la projection duale bien-mesurable de la mesure aléatoire

(4.14) $\qquad \sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} c\circ\Theta_g \varepsilon_g(dt)$

par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Pour ce faire, on peut commencer par calculer sa projection duale bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, ce qui est facile, car $M_\pi^{\rightarrow}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt disjoints T_n de cette famille. Or si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, comment calculons nous $E[c\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}_{D_T}]$? Posons successivement

(4.15) $\qquad S=D_T$
$\qquad\qquad \Phi(w,r,\omega)= c(w/r/\omega)$
$\qquad\qquad \varphi(r,x,w)= E^x[\Phi(w,r,.)]$

Nous avons $\Theta_T(\omega)= j_T(\omega)/R_T(\omega)/\Theta_S(\omega)$, et $c\circ\Theta_T(\omega)=\Phi(j_T(\omega),R_T(\omega),\Theta_S(\omega))$. Donc $E[c\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}_S] = \varphi(R_T,X_{D_T},j_T) = \varphi\circ\overline{X}_T$, d'après la propriété de Markov forte du processus (X_t). Si le graphe de T passe dans $M_\pi^{\rightarrow}$, nous avons p.s. $X_0(j_T)=X_T\in F$, et nous obtenons comme projection intermédiaire

(4.16) $\qquad \sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} \varphi(\overline{X}_g)\varepsilon_g(dt)$

et maintenant nous appliquons (4.13), ce qui nous donne comme compensatrice (projection duale) bien-mesurable par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$

(4.17) $\qquad (\int n(X_t,d\overline{y})\varphi(\overline{y}))dA_t$

La comparaison avec les résultats de l'exposé II nous amène à définir, pour $x\in F$, une mesure $\hat{P}^x$ sur Ω (espérances $\hat{E}^x_P$) par la formule

(4.18) $\qquad \hat{E}^x_P[c] = \int_{\overline{D}} n(x,d\overline{y})\varphi(d\overline{y})$

On ignore a priori si cette mesure est σ-finie, mais comme n(x,dy) est somme d'une suite de mesures bornées, il en est de même pour $\hat{P}^x$, et cela suffit pour justifier les applications du th. de Fubini, etc.

Nous avons établi le résultat suivant

PROPOSITION 1. <u>La projection duale bien-mesurable</u> (<u>pour</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>de la mesure aléatoire</u> (4.14) <u>est</u>

(4.19) $\qquad \hat{E}_P^{X_t}[c]dA_t$

Nous abordons maintenant l'étude des propriétés des mesures $\hat{P}^x$. La présente rédaction (empruntée à un exposé de MAISONNEUVE) remplace une rédaction qui avait deux défauts : dépendre en partie de la théorie de l'exposé II, et être fausse. Celle ci n'utilise plus les formules de p-balayage, ni la transformation de Laplace.

PROPOSITION 2. Pour A-presque tout $x \in F$

1) $\zeta>0$ et $D>0$ $\hat{P}^x$-p.s.
2) $\hat{E}^x_p[1-e^{-D}]<\infty$ et $\hat{P}^x\{D>t\}<\infty$ pour tout $t>0$ (de sorte que $\hat{P}^x$ est σ-finie).

DEMONSTRATION. Explicitons la proposition 1 : si Z est un processus positif, bien-mesurable par rapport à toute famille $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t)$; si c est $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable positive sur Ω, on a pour toute loi μ

(4.20) $$E^{\mu}[\sum_{g \in M^{\rightarrow}_{\pi}} c \circ \theta_g . Z_g] = E^{\mu}[\int Z_s \hat{E}^{X_s}_P[c]\, dA_s]$$

La restriction à $\underline{\underline{F}}^{\circ}$ est un peu gênante : si c est seulement $\underline{\underline{F}}^*$-mesurable, comme $M^{\rightarrow}_{\pi}$ se laisse représenter comme une réunion dénombrable de graphes de v.a. positives, nous pouvons encadrer c entre deux v.a. c' et c'' positives, $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurables, telles que pour P^{μ}-presque tout ω on ait $c'(\theta_g\omega)=c''(\theta_g\omega)$ pour tout $g \in M^{\rightarrow}_{\pi}(\omega)$. On en déduit (4.20) pour c.

Prenons $Z=1$, $c=I_{\{\zeta=0\}}$; remarquons que $\zeta \notin M^{\rightarrow}_{\pi}$, et de même pour tout $t>\zeta$. Le côté gauche est donc nul, et le côté droit aussi par conséquent. De même avec $c=I_{\{D=0\}}$. Cela prouve 1).

Appliquons (4.20) avec $Z_s=e^{-s}$, $c=1-e^{-D}$. Le premier membre vaut

$$E^{\mu}[\sum_{g \in M^{\rightarrow}_{\pi}} \int_g^{D_g} e^{-u}du] \leqq 1$$

d'où aussitôt 2).

PROPOSITION 3. Pour A-presque tout $x \in F$, on a $\hat{P}^x\{X_0 \neq x\}=0$.

DEMONSTRATION. Nous aurons besoin de l'extension suivante de (4.20) : si h est une fonction $\underline{\underline{F}}^{\circ} \times \underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable positive sur $\Omega \times \Omega$ on a, k désignant un opérateur de meurtre[1]

(4.21) $$E^{\mu}[\sum_{g \in M^{\rightarrow}_{\pi}} Z_g(\omega)h(k_g(\omega),\theta_g\omega)]=E^{\mu}[\int Z_s(\omega)\hat{E}^{X_s(\omega)}_P[h(k_s\omega,.)]dA_s(\omega)]$$

Le résultat est immédiat lorsque $h(\omega,\omega')$ s'écrit $u(\omega)v(\omega')$, mais il faut prendre garde au raisonnement par classes monotones, les mesures n'étant pas bornées. La méthode consiste à établir la formule pour la fonction $h(\omega,\omega') \wedge (n.(1-e^{-R(\omega')}))$ en procédant par classes monotones sur h , puis à faire tendre n vers $+\infty$.

Ceci étant établi, on prend $Z=1$, $h(\omega,\omega')= 1$ si $X_{\zeta-}(\omega) \neq X_0(\omega')$ (et en particulier si $X_{\zeta-}(\omega)$ n'existe pas) , et 0 sinon. Comme les points de $M^{\rightarrow}_{\pi}$ sont des points de continuité, le côté gauche est nul. Du côté

1. (4.21) vaut aussi avec un opérateur d'arrêt.

droit, on voit apparaître $\hat{P}^{X_s(\omega)}\{X_{\zeta-}(k_s\omega)\neq X_0(.)\}$: mais A est portée par F et est continue, donc ne charge ni $[\zeta,\infty[$, ni l'ensemble des discontinuités de ω ; on peut donc remplacer cette fonction par $\hat{P}^{X_s(\omega)}\{X_s(\omega)\neq X_0(.)\}$. La fonction $x\mapsto\hat{P}^x\{X_0(.)\neq x\}$ est donc A-négligeable.

Nous démontrons maintenant un lemme, avant de passer au théorème principal.

LEMME 1. <u>Soient</u> $u>0$, a <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}^o_{u+}$<u>-mesurable positive</u>, b <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurable positive</u>, Z <u>un processus bien-mesurable positif.</u> <u>On a alors</u>

$$(4.22)\qquad E^{\bullet}\Big[\sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g(a.b\circ\theta_u)\circ\theta_g\Big] = E^{\bullet}\Big[\sum_{g\in M_\pi^{\rightarrow}} Z_g(a.E^{X_u}[b])\circ\theta_g\Big]$$

DEMONSTRATION. Soit $\varepsilon\in]0,u[$, et soit $]G_n^\varepsilon,D_n^\varepsilon[$ le n-ième intervalle contigu à M de longueur $>\varepsilon$: $G_n^\varepsilon+\varepsilon$ est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$, et il en est de même de $T_n^\varepsilon=G_n^\varepsilon+u$. La v.a. $Z_{G_n^\varepsilon}\, a\circ\theta_{G_n^\varepsilon} I_{\{X_{G_n^\varepsilon}\in F\}}$ est $\underline{\underline{F}}_{T_n^\varepsilon}$-mesurable, et la propriété de Markov forte de (X_t) donne alors

$$E^{\bullet}\Big[\sum Z_{G_n^\varepsilon} a\circ\theta_{G_n^\varepsilon} I_{\{X_{G_n^\varepsilon}\in F\}} b\circ\theta_{G_n^\varepsilon+u}\Big]=E^{\bullet}\Big[\sum Z_{G_n^\varepsilon}.a\circ\theta_{G_n^\varepsilon} I_{\{X_{G_n^\varepsilon}\in F\}} E^{X_{T_n^\varepsilon}}[b]\Big]$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 .

THEOREME 3. <u>Pour</u> A-<u>presque tout</u> x, <u>la mesure</u> $\hat{P}^x$ <u>est celle d'un processus fortement markovien pour</u> $t>0$, <u>admettant</u> (P_t) <u>comme semi-groupe de transition</u>.

DEMONSTRATION. Nous voulons dire par là : si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^*)$, partout >0, si a est $\underline{\underline{F}}_T^*$-mesurable, si b est $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, nous avons $\hat{E}_P^x[a.b\circ\theta_T]=\hat{E}_P^x[a.B\circ X_T]$, où $B=E^{\bullet}[b]$.

Commençons par remplacer $\hat{P}^x$ par 0 pour tous les x qui ne satisfont pas à la prop.2. Comme D est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^*)$, nous avons $\hat{P}^x\{D=0\}=0$, et il nous suffit de démontrer que pour tout n

$$\hat{E}^x[a.b\circ\theta_T I_{\{D\wedge T>1/n\}}]=\hat{E}^x[a.B\circ X_T.I_{\{D\wedge T>1/n\}}]$$

Mais la mesure $I_{\{D>1/n\}}.\hat{P}^x$ est <u>bornée</u> (Prop.2), et nous voulons démontrer que pour cette mesure le processus $(X_t)_{t>1/n}$ est fortement markovien, avec (P_t) comme semi-groupe de transition. Mais ce processus est continu à droite, et (P_t) est un semi-groupe droit. La propriété de Markov forte est alors une conséquence de la propriété de Markov simple, et il suffit même devérifier celle-ci sur les rationnels.

En définitive, il nous suffit de vérifier que pour tout n , pour tout u rationnel > 1/n , pour toute a $\underline{\underline{F}}^o_u$-mesurable, toute b $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable, on a pour A-presque tout x

$$\hat{E}^x[I_{\{D>1/n\}}a.b\circ\theta_u] = \hat{E}^x[I_{\{D>1/n\}}a.E^{X_u}[b]] \quad (\{D>1/n\}\in\underline{\underline{F}}^*_u)$$

Mais la mesure en question est <u>bornée</u> , et on peut donc faire un raisonnement par classes monotones : on fait parcourir à a une algèbre dénombrable engendrant $\underline{\underline{F}}^o_u$, pour tout u rationnel ; à b, une algèbre dénombrable engendrant $\underline{\underline{F}}^o$, et le lemme 1 nous dit qu'on a l'égalité pour A-presque tout x. Hors de la réunion des ensembles A-négligeables correspondants, la propriété désirée a lieu.

COROLLAIRE . <u>Pour</u> A-<u>presque tout</u> x∈F, <u>la mesure</u> $\hat{P}^x$ <u>est non bornée</u>.
DEMONSTRATION. Nous remarquons que la proposition 3 est aussi valable pour la topologie de RAY sur E(1). Soit alors un x satisfaisant à la fois aux propositions 2 et 3, et au th.3 . Si la mesure $\hat{P}^x$ était bornée, la loi d'entrée (η^x_t) du processus $(X_t)_{t>0}$ admettrait une limite vague η^x_0 dans le compactifié de RAY, et on aurait $\eta^x_t=\eta^x_0P_t$. Mais la proposition 3 nous donne $\eta^x_0=\varepsilon_x$: donc $\hat{P}^x$ serait proportionnelle à P^x. Comme x∈F, on aurait $\hat{P}^x\{R>0\}=0$, en contradiction avec la prop.2 .

THEOREME 4 . <u>Posons pour toute fonction</u> f, $\underline{\underline{F}}^o$-<u>mesurable positive</u>

(4.23) $\qquad \hat{E}^x_Q[f] = \hat{E}^x_P[f\circ k_R]$

<u>et notons</u> $\hat{Q}^x$ <u>la mesure correspondante</u>. <u>Posons aussi</u>, <u>si</u> g <u>est positive sur</u> E

(4.24) $\qquad q^x_t[g] = \hat{E}^x_Q[g\circ X_t]$

<u>Alors , pour</u> A-<u>presque tout</u> x∈F

1) $\hat{Q}^x$ <u>est une mesure non bornée</u>, <u>pour laquelle</u> (X_t) <u>est un processus de Markov admettant</u> (Q_t) <u>comme semi-groupe de transition</u>, (q^x_t) <u>comme loi d'entrée</u>.
2) <u>On a</u> $\hat{E}^x_Q[\int_0^\infty I_E\circ X_u e^{-u}du]<\infty$, <u>et</u> $q^x_t(1)<\infty$ <u>pour</u> $t>0$.
3) <u>Soit</u> C <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}^*$-<u>mesurable positive</u>, <u>et soit</u> $c=C\circ k_D$. <u>La projection duable bien-mesurable de la mesure aléatoire</u>

$$\sum_{g\in\vec{M}_\pi} c\circ\theta_g\varepsilon_g(dt) \text{ \underline{est la mesure} } \qquad \hat{E}^{X_t}_Q[c].dA_t$$

DEMONSTRATION. 3) résulte de (4.20) et de la définition même de $\hat{Q}^x$.
1) résulte du th.3, et le fait que $\hat{Q}^x$ soit non bornée se démontre comme le résultat analogue pour $\hat{P}^x$. La première quantité de l'assertion 2) est égale à $\hat{E}^x_P(1-e^{-D})$, elle est finie d'après la prop.2 .

---

(1). Plus généralement, on peut munir E d'une topologie rendant une fonction p-excessive f continue, et la prop.3 nous dit alors que pour A-presque tout x $f\circ X_t \to f(x)$ $\hat{P}^x$-p.s. lorsque $t\to 0$.

Enfin, la fonction $q^x_{\cdot}(1)$ est décroissante : le fait que sa transformée de Laplace soit finie entraîne qu'elle l'est elle même.

COMMENTAIRE. L'utilisation du système de LEVY du processus d'incursion nous a donné tous les résultats de la fin de l'exposé II, avec des compléments sur le comportement en 0 des processus. Nous n'avons pas essayé de passer de là, en sens inverse, aux résultats de conditionnement (exposé II, th.4).

Prolongeons les mesures hors de F , en notant $\hat{Q}^x$, pour $x\in F^c$, la loi du processus de Markov admettant (Q_t) comme semi-groupe de transition et ε_x comme loi initiale. Posons d'autre part

sur E : $v(x) = \hat{E}^x_Q[1-e^{-\zeta}]$

$$\hat{E}^{x/v}_Q[c] = \frac{1}{v(x)}\hat{E}^x_Q[\int_0^\infty e^{-u} c\circ k_u du] \quad \text{si } v(x)\neq 0$$

alors nous transformons les mesures non bornées $\hat{Q}^x$, pour $x\in F$, en mesures bornées, de vrais processus de Markov (y compris en 0) admettant la loi initiale ε_x , et un semi-groupe de transition qui est un v-transformé du semi-groupe $(e^{-t}Q_t)$. Les lois $\hat{Q}^{x/v}$ apparaissent alors sur F comme des limites des lois correspondantes sur F^c. C'est un point de vue très intéressant, utilisé par DYNKIN, et qui est développé de manière approfondie dans un travail à paraître de KAROUI et REINHARD.

III. DECOMPOSITION DE LA RESOLVANTE

Les résultats de ce paragraphe devraient, en toute logique, se placer à la fin de l'exposé II, car il s'agit en fait de conséquences des résultats de GETOOR-SHARPE. Nous ne les mettons ici que parce que leurs démonstrations ci-dessous sont empruntées au travail de MAISONNEUVE.

Nous travaillons ici sous les hypothèses suivantes

1) $M^{\rightarrow}_a = \emptyset$
2) M est parfait (donc $M=\overline{\rho_F}$, et F est finement parfait)

Rappelons alors les formules de GETOOR-SHARPE : soit (K_t) une fonctionnelle additive continue, portée par F, telle que toutes les

$d\tilde{I}^p_s(h)$ soient absolument continues par rapport à dK_s ; de même (H_t) continue telle que toutes les $d\tilde{\tilde{\delta}}^p_s(h)$ soient absolument continues par rapport à dH_s ((2.38) à (2.40)). On construit alors les lois d'entrée $(\hat{Q}_t(x,.))$, $x\in F$, le noyau Π , tels que l'on ait la formule (2.42) , simplifiée par la disparition de $M^{\rightarrow}_a$

$$(4.28)\quad d\tilde{\tilde{A}}^p_t(h) = I_F \circ X_t h \circ X_t dt + \Pi V_p h \circ X_t dH_t + \hat{V}_p(X_t,h) dK_t$$

Nous commençons par vérifier que cette fonctionnelle est portée par M, donc par F. Soit $Z_s = I_{\{0<s\leq D\}}$, processus prévisible. On a $E[\int_0^\infty Z_s d\bar{A}^p_s(h)]=0$, car $D\notin M^{\rightarrow}$ du fait que M est parfait. Par projection on a $E[\int Z_s d\tilde{\tilde{A}}^p_s(h)]=0$. On en déduit sans peine que $d\tilde{\tilde{A}}^p(h)$ ne charge aucun intervalle contigu à M, et enfin qu'elle est portée par M.

Nous introduisons maintenant le 1-temps local de M (ou de F), c'est à dire

$$(4.29)\qquad \Lambda_t = \tilde{\tilde{A}}^1_t(1)$$

Nous pouvons prendre, dans les formules précédentes, $H_t=K_t=\Lambda_t$. Posons

$$(4.30)\qquad \hat{W}_p = \Pi V_p + \hat{V}_p$$

$$(4.31)\qquad I_F \circ X_t dt = j \circ X_t d\Lambda_t$$

(pour voir qu'une telle densité existe, prendre h=1, p=1 dans (4.28))

Nous avons alors

$$(4.32)\quad d\tilde{\tilde{A}}^p_t(h) = (h \circ X_t j \circ X_t + \hat{W}_p(X_t,h)) d\Lambda_t$$

Pour tout $x,(\hat{W}_p(x,.))$ est une transformée de Laplace de loi d'entrée pour (Q_t). En faisant p=1, h=1, on arrive à la condition de normalisation

$$(4.33)\qquad j(x)+\hat{W}_1(x,1)=1 \quad \Lambda\text{-p.p.}$$

Intégrons maintenant, par rapport aux deux mesures aléatoires (4.32), le processus prévisible e^{-pt} : du côté gauche, par définition de la balayée prévisible , nous pouvons remplacer $\tilde{\tilde{A}}$ par $\bar{A}$

$$\int e^{-ps} d\bar{A}^p_s(h) = \int_M e^{-ps} h \circ X_s ds + \sum_{g\in M^{\rightarrow}} e^{-ps}.e^{ps} \int_{]g,D_g]} e^{-pu} h \circ X_u du$$
$$= \int_D^\infty e^{-pu} h \circ X_u du$$

Du côté droit, nous introduisons l'opérateur

$$(4.34)\qquad R^p f = E^{\cdot}[\int_0^\infty e^{-ps} f \circ X_s d\Lambda_s]$$

dont nous donnerons l'interprétation dans un instant. Alors (4.32) nous donne la décomposition suivante de la résolvante (U_p) de (P_t), qui n'est autre que la forme intégrée des "last exit decompositions" de GETOOR-SHARPE

(4.35) $$U_p h - V_p h = R^p[jh+\hat{W}_p h]$$

Pour comprendre ce qu'est R^p, introduisons le changement de temps (c_t) inverse du temps local (Λ_t) : un tel changement de temps nous ramène sur F, et nous avons pour tout $p\geqq 0$ un semi-groupe sur E, à points de branchements

(4.36) $$C_t^p f = E^\bullet[\, e^{-pc_t} f\circ X_{c_t}]$$

dont R^p est le 0-potentiel : attention, ces semi-groupes ne forment pas une famille du type $e^{-pt}C_t$, et les R^p ne forment pas une résolvante ! On les appelle les semi-groupes <u>sur la frontière</u>, et en fait il suffit de les connaître <u>sur F</u> , car si x∈E on a $C_t^p = C_0^p C_t^p$, et les mesures $C_0^p(x,.)= P_F^p(x,.)$ (mesures p-harmoniques) sont portées par F.

Noter que si h est nulle sur F^c, la formule se réduit à $U^p h=R^p(jh)$. Cette formule est intéressante, car tous les termes en ont une signification probabiliste : $\hat{W}_p$ décrit la manière d'"entrer dans F^c" en venant de F ; R^p se décompose en sa restriction à F (qui est le potentiel du p-semi-groupe induit sur F) et le noyau de mesure p-harmonique $C_0^p = P_F^p$. Dans les descriptions classiques de formules de ce genre, en théorie des chaînes ou des diffusions, on ne dispose pas des $\hat{W}_p$ a priori, et il faut les construire, par exemple en cherchant les limites à la frontière de rapports de la forme $V_p(x,h)/V_1(x,1)$. C'est une question d'ailleurs fort intéressante par elle même.

APPENDICE A L'EXPOSE IV

Dans cet appendice, nous considérons le cas d'un système régénératif de type général (non nécessairement markovien), et nous faisons sur M les deux hypothèses suivantes

1) M est parfait
2) Pour toute loi initiale μ, toute suite $T_n\uparrow T$ de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\mu)$, on a $D_{T_n}\uparrow D_T$ P^μ-p.s.

Nous nous proposons dans cet appendice de développer , d'après MAISONNEUVE, la théorie du <u>temps local</u> de M. Ou plutôt, nous en indiquerons les idées fondamentales , en laissant les détails au lecteur.

La première conséquence que MAISONNEUVE tire de ces hypothèses, et que nous ne démontrerons pas, est la suivante : l'hypothèse 2) s'étend à une suite de temps d'arrêt T_n <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{D_t})$.

Nous introduisons maintenant la réalisation du semi-groupe $(\hat{X}_t)$ sur $\overline{\Omega}$ qui a été définie dans l'exposé III : la première coordonnée du processus est

$$\hat{X}^1_t(r,\omega) = r-t \text{ si } t<r \text{ , } R_t(\omega) \text{ si } t\geqq r$$

Le temps d'entrée du processus $(\hat{X}_t)$ dans l'ensemble $\{0\}\times E$ vaut donc

$$\hat{D}(r,\omega) = D(\omega)$$

D'où la fonction p-excessive $\hat{\varphi}_p(r,x)= \frac{1}{p}\overline{E}^{r,x,w}[e^{-p\hat{D}}]$ (ici, w est arbitraire tel que $(r,x,w)\in\overline{E}$) ; **cette quantité vaut** $E^x[\exp(-pD(w/r/.)]$. Il est clair que si $r<D(\omega)$ on a $D(w/r/\omega)=D(\omega)$, du fait que $D(w)=+\infty$ et des propriétés " algébriques" de M. Si $r=D(\omega)$, on a $D(w/r/\omega)=D(\omega)$, car $\theta_r(w/r/\omega)=\theta_r\omega$ et $D(\theta_r\omega)=0$ du fait que M est un ensemble parfait. Ainsi, si l'on pose $\varphi_p(x) = \frac{1}{p}E^x[e^{-pD}]$, on a tout simplement $\hat{\varphi}_p(r,x)= \varphi_p(x)$.

L'étape suivante peut consister à démontrer que cette fonction p-excessive est <u>régulière</u> : pour toute suite bornée $T_n\uparrow T$ de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^{\times}_t)$ (exposé III, formule (3.19)), pour tout (r,x,ω), $\overline{E}^{r,x,w}[\hat{\varphi}_p\circ\hat{X}_{T_n}] \rightarrow \overline{E}^{r,x,w}[\hat{\varphi}_p\circ\hat{X}_T]$. Cela se ramène à la propriété signalée plus haut, pour les temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$.

Dans ces conditions, il existe une fonctionnelle additive continue et parfaite $(\overline{A}_t)$, dont le p-potentiel est $\hat{\varphi}_p$: ce point n'est pas évident, car la théorie de la représentation des fonctions excessives n'a été développée que pour les processus droits, alors qu'ici le processus $(\hat{X}_t)$ est seulement fortement markovien (avec points de branchement). Cette représentation vient d'être étendue aux processus qui nous occupent par BENVENISTE et JACOD, et nous n'insisterons pas sur ce point (qui peut aussi se traiter au moyen d'une compactification de RAY de l'ensemble des points de non-branchement, au **moyen d'une** famille de fonctions contenant la fonction $\hat{\varphi}_p$). En posant $A_t(\omega)= \overline{A}_t(0,\omega)$ comme au début de cet exposé, on a alors le temps local désiré.

Il faut noter qu'il s'agit ici d'une fonctionnelle additive continue <u>du processus</u> $(\hat{X}_t)$: au moyen des procédés de la fin de l'exposé I, nous pouvons la choisir " algébriquement adaptée" à la famille naturelle de ce processus, continue, portée par M. On a donc $A_t=A_{\ell_t}$. On en déduit que

si $M(\omega)\cap[0,t[= M(\omega')\cap[0,t[$, $X_{\cdot}(\omega)=X_{\cdot}(\omega')$ sur $M(\omega)\cap[0,t[$, alors $A_t(\omega)=A_t(\omega')$

L'existence d'un temps local possédant cette propriété (i.e. ne dépendant que du comportement du processus <u>sur M</u> , et non des excursions hors de M) n'est pas évidente, même lorsque X est un processus droit ordinaire.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972-73

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES (V)

par P.A.Meyer

§ I. APPLICATION AUX CHAINES DE MARKOV "STANDARD"

La théorie des chaînes de Markov à temps continu a fourni les premiers exemples non triviaux de " last exit decompositions", qui ont fourni des modèles aux travaux de PITTENGER-SHIH et de GETOOR-SHARPE. Il est tout naturel de se demander si la théorie générale traitée dans les exposés I-IV est assez bonne pour entraîner les résultats fins connus sur les chaînes de Markov. Nous verrons que c'est le cas. Cela sera une bonne occasion d'exposer, à l'usage des auditeurs strasbourgeois qui n'ont pas assisté au cours de CHUNG de 1967-68, les questions relatives aux chaînes de Markov. Nos références renvoient au petit livre de CHUNG qui en est la rédaction : Lectures on boundary theory for Markov chains, Annals of Math. Studies, Princeton 1970.

DEFINITIONS .

I est un ensemble dénombrable discret. (P_t) est un semi-groupe markovien[1] sur I : il suffit naturellement de se donner les coefficients

(1) $$p_t(i,j) = P_t(i,\{j\})$$

sur lesquels nous ferons les hypothèses

(2) $$\lim_{t\to 0} \frac{1-p_t(i,i)}{t} = \pi_i < \infty \text{ pour tout } i$$

(3) si l'on pose pour $i\neq j$ $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{p_t(i,j)}{t} = \pi_{ij}$, on a $\displaystyle\sum_{j\neq i} \pi_{ij}=\pi_i$

On peut montrer que les limites π_i,π_{ij} existent pour tout semi-groupe markovien sur I . Quelle est la signification des hypothèses (2) et (3) ? Prenons n'importe quelle compactification de RAY E de I relativement à (P_t), et le processus de RAY (X_t) à valeurs dans E. Alors soit

(4) $$\tau(\omega) = \inf \{ t : X_{t-}(\omega)\in I^c\}$$

Pour la mesure P^i, $i\in I$, on a p.s. $\tau>0$; le processus (X_t) est p.s. continu à droite et pourvu de limites à gauche dans I sur l'intervalle $[0,\tau[$, de sorte qu'il ne présente qu'une infinité dénombrable de sauts successifs $\tau_1,\tau_2\ldots\tau_n \uparrow \tau$. Si $\pi_i=0$, l'état i est absorbant.

1. S'il ne l'est pas, on commence par le rendre markovien en adjoignant un nouvel état absorbant Δ , qu'on traite comme un état ordinaire

Sinon, on a les interprétations probabilistes suivantes des coefficients π_i, π_{ij}

(5) $\quad P^i\{\tau_1>t\} = e^{-\pi_i t}$

(6) $\quad P^i\{X_{\tau_1}=j\} = \pi_{ij}/\pi_i$

La propriété de Markov forte nous permet alors de reconstruire, connaissant les coefficients π_i,π_{ij} , toute l'évolution du processus jusqu'à l'instant τ . Celle ci se fait entièrement dans I, elle est gouvernée par le semi-groupe minimal sur I , semi-groupe sous-markovien sur I déterminé par les π_i,π_{ij}

(7) $\quad Q_t(x,f) = E^x[f\circ X_t,\ t<\tau] \quad (x\in I,\ f \geqq 0 \text{ sur } I\ )$

Nous noterons $q_t(i,j)$ les coefficients $Q_t(i,\{j\})$. C'est le premier élément de notre "démontage" du processus (X_t). A l'instant τ , sur l'ensemble $\{\tau<\infty\}$, il y a accumulation de sauts, explosion, et notre problème consiste à décrire l'évolution de (X_t) juste avant τ, et par la suite.

COMPACTIFICATION

Pour décrire (X_t), nous devons maintenant compactifier I. Plusieurs telles compactifications ont été décrites, citons par exemple celle de DOOB(*). Nous voudrions ici rattacher cette compactification à la théorie classique de RAY.

Avant toute chose, remarquons que nous voulons "démonter" (P_t) en éléments plus simples. Une compactification de RAY n'est pas un tel élément, puisqu'on ne peut la construire sans avoir à sa disposition le semi-groupe (P_t) tout entier ! La compactification ne peut donc avoir qu'une valeur d'étape intermédiaire.

Notons U_p (coefficients $u_p(i,j)$) la résolvante de (P_t), V_p (coefficients $v_p(i,j)$) la résolvante de (Q_t). Il est bien connu que les fonctions U_pf-V_pf ($f\geqq 0$ bornée) sont p-excessives pour (P_t). Nous noterons R_p le noyau U_p-V_p sur I (coefficients $r_p(i,j)$).

Nous noterons $\underline{\underline{S}}$ le plus petit cône convexe $\wedge$-stable, stable par tous les noyaux U_p et R_p , contenant la constante 1 et les fonctions $u_p(.,j)$ et $r_p(.,j)$. Nous noterons $\overline{\overline{E}}$ la compactification de I relativement à $\underline{\underline{S}}$: un raisonnement identique à celui que l'on fait pour la compactification de RAY classique montre que $\underline{\underline{S}}$ est séparable pour la convergence uniforme, donc $\overline{\overline{E}}$ est compact métrisable, et I y est dense. Comme dans le cas classique, on peut prolonger U_p et R_p en des noyaux de FELLER

(*)Compactification of the discrete state space of a Markov chain . Z.f.W. 10, 1968, p.236-251.

sur $\bar{E}$. On pose aussi $V_p=U_p-R_p$ sur $\bar{E}$. Il est bien connu que les noyaux U_p forment une résolvante sur $\bar{E}$, mais ici on a le même résultat pour (V_p), qui forme une résolvante subordonnée à (U_p).
On vérifie enfin que si $f\in\underline{\underline{S}}$, et si $\bar{f}$ est le prolongement de f à $\bar{E}$, il existe un $p>0$ tel que $\bar{f}$ soit p-surmédiane par rapport à (U_p) ; les $\bar{f}$ séparant $\bar{E}$, nous avons construit une compactification de RAY de I relativement à (P_t) . Mais d'autre part, la fonction $\bar{f}$ est p-surmédiane relativement à (V_p), donc notre compactification satisfait aux propriétés de RAY pour (V_p) aussi. Nous avons une <u>double</u> compactification, et cela présentera quelques avantages.
Nous notons E l'ensemble des $x\in\bar{E}$ tels que pour tout p (ou pour un p) la mesure $U_p(x,.)$ soit portée par I. Il en est alors de même de la mesure $V_p(x,.)$. Si nous notons encore (P_t), (Q_t) les semi-groupes de RAY sur $\bar{E}$ correspondant aux résolvantes (U_p),(V_p) respectivement, les mesures $P_t(x,.)$, $Q_t(x,.)$ sont alors portées par I pour presque tout t, et les mesures

$$\gamma_t(dy) = \int_0^t P_s(x,dy)ds$$

sont portées par I, et y satisfont à la relation $\gamma_{s+t}-\gamma_t = \gamma_s P_t$. La proposition 2 de CHUNG, p.4, entraîne l'existence d'une loi d'entrée <u>sur I</u> , $P'_t(dy)$, telle que $\gamma_t=\int_0^t P'_s ds$. Soit $f\in\underline{\underline{S}}$, et soit $\bar{f}$ son prolongement par continuité à $\bar{E}$. La fonction $t\mapsto\langle P_t(x,.),\bar{f}\rangle$ est continue à droite ; la fonction $t\mapsto e^{-pt}\langle P'_t,f\rangle = e^{-pt}\langle P'_t,\bar{f}\rangle$ (où p est choisi assez grand pour que f soit p-surmédiane) est s.c.i. à droite et décroissante, donc continue à droite. L'égalité des transformées de Laplace de ces deux fonctions entraîne alors leur égalité pour tout t, et il en résulte que

<u>pour tout</u> $x\in E$, <u>la mesure</u> $P_t(x,.)$ <u>est portée par I</u> <u>pour tout</u> $t>0$.
On posera $p_t(x,i)=P_t(x,\{i\})$. On a bien entendu le même résultat pour $Q_t(x,.)$.
L'ensemble E est le véritable espace d'états des processus : si l'on construit le processus de RAY (X_t) associé à (P_t), et si l'on prend comme loi initiale ε_x, $x\in E$, ni le processus (X_t) ni le processus (X_{t-}) ne rencontrent E^c : il suffit de poser $g=U_pI_{E^c}$; la surmartingale $(e^{-pt}g\circ X_t)$ est continue à droite, nulle pour t=0, donc identiquement nulle. Raisonnement analogue pour la surmartingale $(e^{-pt}g\circ X_{t-})$, qui est continue à gauche du fait que g est un p-potentiel.

Tout ce qui précède est adapté , de manière plus ou moins servile, de l'article de DOOB cité plus haut (et qui a fait beaucoup pour le développement de la théorie des résolvantes de RAY !), bien que DOOB utilise une autre compactification. Il faut signaler, d'ailleurs, que les résultats qui suivent sont inspirés par un autre article de DOOB " the structure of a Markov chain" , paru dans le volume III du 6-th Berkeley Symposium, p.131-141.

LA PREMIERE DECOMPOSITION

Le temps d'arrêt τ est <u>prévisible</u> . On a d'autre part $X_{\tau-}\notin I$ sur $\{\tau<\infty\}$, donc $P^x\{\tau=t\} \leq P^x\{X_{\tau-}\notin I\}=0$ pour tout $x\in E$. Nous en déduisons

$$(8) \qquad P_t(x,f)= E^x[f\circ X_t] = E^x[f\circ X_t,\ t<\tau] + E^x\{f\circ X_t,\ t>\tau]$$
$$= Q_t(x,f) + E^x[P_{t-\tau}(X_\tau,f)I_{\{t>\tau\}}]$$

Soit $A(x\ ;\ ds,dy\ )$ la loi du couple $(\tau,X_\tau\ )$ dans $\mathbb{R}_+\times E$: nous pouvons écrire cela sous la forme d'une décomposition

$$(9) \qquad p_t(i,j) = q_t(i,j) + \int_{]0,t[\times E} A(x\ ;\ ds,dy\ )p_{t-s}(y,j)$$

décomposition imparfaite à deux égards : E est un espace défini à partir de (P_t), non du semi-groupe minimal (Q_t) ; $(p_t(y,.))$ est une loi d'entrée relative à (P_t), non à (Q_t). Nous allons réduire successivement ces deux difficultés.

APPLICATION DE GETOOR-SHARPE

Définissons le temps terminal parfait exact τ sur l'espace Ω de la réalisation canonique du processus (X_t) en posant

$$(10) \qquad \tau(\omega) = \inf\ \{\ t>0\ :\ X_{t-}(\omega)\notin I\ \}$$

Lorsque $i\in I$, cette définition coincide P^i-p.s. avec la définition de τ donnée précédemment. Le semi-groupe (Q_t) coincide avec le semi-groupe $(\overline{Q}_t)$ obtenu en tuant (P_t) à l'instant τ , sur l'ensemble $D\cap E$ des points de non-branchement qui appartiennent à E. Il nous suffit en effet de vérifier que pour tout $y\in D\cap E$, toute $f\in\underline{\underline{S}}$, on a $Q_t(y,f)=\overline{Q}_t(y,f)$ pour tout t. Ces deux fonctions étant continues à droite, il suffit de vérifier que $V_p(y,f)=\overline{V}_p(y,f)$ pour tout p . Or la première fonction est continue sur E en y , la seconde finement continue, et elles sont égales sur I (auquel y est finement adhérent). Elles sont donc égales en y.

Appliquons alors la théorie de GETOOR-SHARPE : il existe pour tout $y\in D\cap E$ une loi d'entrée $\hat{q}_t(y,dz)$ pour (Q_t) - non nécessairement bornée, mais portée par I en vertu d'arguments vus plus haut - d'autre part une mesure aléatoire homogène $d\Gamma_s$ pour (P_t), telle que l'on puisse écrire

$$(11) \qquad p_t(y,i) = q_t(y,i) + E^y[\int_{]0,t[}\hat{q}_{t-s}(X_s,i)d\Gamma_s]$$

(exposé II, formule 2.45 : le terme du milieu, correspondant à $\tau=t$, y est nul). Définissons une mesure $B(y\ ;\ ds,dz)$ sur $\mathbb{R}_+\times(E\cap D)$ par

(12) $\int B(y\ ;\ ds,dz)g(s,z) = E^y[\int g(s,X_s)d\Gamma_s\ ]$

Nous avons alors pour $y\in D\cap E$

(13) $$p_t(y,i) = q_t(y,i) + \int_{]0,t[\times(D\cap E)} B(y;ds,dz)\hat{q}_{t-s}(z,i)$$

Cette représentation n'est pas satisfaisante, car elle fait intervenir l'espace $D\cap E$, qui dépend de (P_t). Considérons donc l'espace F_e de toutes les lois d'entrée, bornées ou non, $(\varkappa_t)_{t>0}$ pour (Q_t), telles que la mesure $\int_0^\infty e^{-t}\varkappa_t dt$ soit de masse 1, et <u>extrémales</u> . Si $\varkappa=(\varkappa_t)\in F_e$, nous noterons $\overline{q}_t(\varkappa,i)=\varkappa_t(i)$. Pour tout $z\in D\cap E$, la loi d'entrée $q_t(z,.)$ admet une représentation intégrale au moyen des éléments extrémaux

(14) $$\hat{q}_t(z,.) = \int_{F_e} H(z,du)\overline{q}_t(u,.)$$

D'autre part, $q_t(y,.)$ est une loi d'entrée extrémale, puisque y n'est pas un point de branchement pour (P_t) : la mesure $\varepsilon_y Q_0$ ne peut être que ε_y ou 0 . Nous pouvons donc écrire

(15) $$q_t(y,.) = c(y)\varepsilon_{h(y)}\quad ,\ h(y)\in F_e$$

Considérons alors les mesures sur $\mathbb{R}_+\times F_e$

(16) $$\beta(y\ ;\ dr,du) = c(y)\varepsilon_0(dr)\otimes\varepsilon_{h(y)}(du) + \int B(y\ ;\ ds,dz)\varepsilon_r(ds)\otimes H(z,du)$$

nous pouvons alors écrire (13) sous la forme "intrinsèque" suivante, qui ne fait intervenir pour y fixé que des éléments relatifs au semi-groupe minimal (mais dont l'interprétation probabiliste nous échappe complètement)

(17) $$p_t(y,j) = \int_{[0,t[\times F_e} \beta(y\ ;\ dr,du)\overline{q}_{t-r}(u,j)$$

Il nous reste maintenant à faire disparaître le paramètre $y\in D\cap E$, au profit d'un paramètre intrinsèque.

UTILISATION DU CARACTERE PREVISIBLE DE τ

Nous revenons à (9), en utilisant la propriété de Markov forte "à gauche" au temps d'arrêt prévisible τ : soit $\alpha(i\ ;\ ds,dz)$ la loi du couple $(\tau,X_{\tau-})$ lorsque Ω est muni de P^i ; nous avons pour la loi de $(\tau\ ,X_\tau\ )$

(18) $$A(i\ ;\ ds,dv) = \int \alpha(i\ ;\ dr,du)\varepsilon_r(ds)\otimes P_0(u,dv)$$

Nous pouvons alors récrire (9) sous la forme suivante : posons pour $x\in E$

(19) $\qquad \delta(x\ ,\ ds,du) = \int P_0(x,dz)\beta(z\ ;\ ds,du\ )$

Alors

(20) $\qquad p_t(i,j)=q_t(i,j) + \int_{]0,t[\times E} \alpha(i\ ;\ dr,dx)\int_{[0,t-r[\times F_e} \delta(x\ ;\ ds,du)\overline{q}_{t-r-s}(u,j)$

le seul terme gênant est maintenant $\alpha(i,.)$, qui est un noyau de I dans l'espace E, construit à partir de (P_t) et non du semi-groupe minimal. La dernière étape (et la plus longue) permet de l'éliminer.

UTILISATION DE LA FRONTIERE DE MARTIN

Nous notons ρ la fonction $P^{\bullet}\{\tau<\infty\}$ sur I, et I_ρ l'ensemble $\{\rho>0\}$. C'est une fonction Q-excessive et Q-harmonique, ce qui signifie que $E^{\bullet}[\rho\circ X_{\tau_n}]=\rho$ pour tout n . Elle est d'autre part Q-purement excessive, ce qui signifie que $Q_t\rho \to 0$ lorsque $t\to\infty$.

Nous choisissons une mesure bornée n sur I, qui charge tous les points de I, et telle que $<n,\rho>=1$; nous appelons espace de sortie pour (Q_t) l'ensemble F_s de toutes les fonctions y sur I, Q-purement excessives et Q-harmoniques extrémales telles que $<n,y>=1$. Nous munirons F_s de la topologie de la convergence simple. Nous adopterons la notation habituelle qui consiste à distinguer le "point" $y\in F_s$ et la "fonction excessive k_y sur I qui lui correspond" (et qui bien entendu n'est rien d'autre que y !). Comme $<n,k_y>=1$, k_y est partout finie sur I.

Dans la fin de ce paragraphe, l'espace Ω désigne l'ensemble de toutes les applications continues à droite et pourvues de limites à gauche ω de $\mathbb{R}_+$ dans le compactifié d'Alexandrov $I\cup\{\partial\}$ de I , absorbées en ∂ , à durée de vie $\tau(\omega)$, telles que $\omega(t-)\in I$ pour $t<\tau(\omega)$. Les applications coordonnées sont notées X_t , les tribus sont notées de la manière usuelle , la notation P^i représente la loi du processus de Markov issu de i, admettant (Q_t) comme semi-groupe de transition.

Si u est une fonction excessive pour (Q_t), finie sur I, nous noterons $P^{i/u}$ la loi sur Ω correspondant au processus issu de i , admettant $Q^u_t(x,dy)=\frac{1}{u(x)}Q_t(x,dy)u(y)$ comme semi-groupe de transition. Comme d'habitude, il y a une difficulté si $u(i)=0$: nous conviendrons qu'alors $P^{i/u}=\varepsilon_{[\partial]}$. Nous avons en particulier la notation $P^{i/y}$, correspondant à la fonction $k_y\in F_s$. Nous rappelons maintenant une liste de propriétés liées aux u-processus et à la théorie de Martin.

PROPRIETE 1. Si $A\in\underline{\underline{F}}^{\circ}$, on a $\rho(i)P^{i/\rho}[A] = P^i[A,\tau<\infty]$

PROPRIETE 2. La fonction harmonique purement excessive ρ admet une représentation intégrale au moyen des éléments extrémaux

(21) $$\rho(i) = \int_{F_s} k(i,y)\Theta(dy)$$

où Θ est une mesure de probabilité sur F_s, et où l'on a posé $k(i,y) = k_y(i)$.

PROPRIETE 3. On a alors pour $A \in \underline{\underline{F}}^o$

(22) $$P^i[A, \tau<\infty] = \rho(i)P^{i/\rho}[A] = \int_{F_s} k(i,y)P^{i/y}[A]\Theta(dy)$$

PROPRIETE 4. Soit $A \in \underline{\underline{F}}^o$ possédant la propriété suivante

(22) $$\text{si } t<\tau(\omega) \text{ , } I_A(\omega)=I_A(\theta_t\omega) \quad ; \; A\subset\{\tau<\infty\}$$

et soit $a = P^{\bullet}[A]$. La fonction a est alors Q-harmonique et Q-purement excessive, et on a

(23) $$A = \{ \lim_{t\uparrow\tau} a\circ X_t=1 \} \quad , \; A^c= \{ \lim_{t\uparrow\tau} a\circ X_t=0 \} \quad P^i\text{-p.s. pour tout } i$$

PROPRIETE 5. Soit A comme ci-dessus, et soit $y \in F_s$. Alors , ou bien $P^{i/y}[A] = 0$ pour tout i tel que $k(i,y)>0$, ou bien $P^{i/y}[A]=1$ pour tout i tel que $k(i,y)>0$.

Notre énumération est achevée, et il n'est pas mauvais de préciser la place de chacune de ces propriétés dans la théorie : 2 est purement analytique, c'est le théorème de représentation intégrale de CHOQUET. 1 et 3 sont des calculs élémentaires sur les u-processus. 4 n'est pas autre chose que le théorème de convergence des martingales. Enfin , 5 est la manière dont s'exprime l'<u>extrémalité</u> de k_y , qui n'est pas utilisée, en fait, pour la démonstration de (22).

Maintenant nous commençons à travailler. Nous remarquons d'abord que $P^{i/\rho}[\tau<\infty]=1$ pour tout i tel que $\rho(i)>0$, du fait que ρ est purement Q-excessive (ou de la propriété 1) ; de même, $P^{i/y}[\tau<\infty]=1$ pour tout y et tout i tel que $k_y(i)>0$.

Revenons pour un instant aux processus admettant (P_t) pour semi-groupe de t ransition : nous savons que la limite $X_{\tau-}$ existe p.s., et appartient à E, sur l'ensemble $\{\tau<\infty\}$. Passant à l'espace Ω, nous voyons que

(24) $$P^i\{ X_{\tau-} \text{ existe, } \tau<\infty \} = P^i\{\tau<\infty\}$$

où " $X_{\tau-}$ existe" est une abréviation pour " $X_{\tau-}$ existe dans E, pour la topologie définie au début de l'exposé" . Au moyen de la propriété 1, on écrit cela

(25) $$P^{i/\rho}\{\tau<\infty , \; X_{\tau-} \text{ existe}\} = 1 \quad \text{si } i \in I_\rho$$

et par conséquent, d'après les propriétés 3 et 5 : pour Θ-pr. tout y

(26) $$k_y(i) > 0 \Rightarrow P^{i/y}[\tau<\infty , \; X_{\tau-} \text{ existe} \} = 1$$

Nous noterons F'_s l'ensemble des $y\in F_s$ qui possèdent cette propriété, et nous appliquons la propriété 5 : si $y\in F'_s$, la loi de $X_{\tau-}$ pour une loi $P^{i/y}$, où i est tel que $k(i,y)>0$, est nécessairement dégénérée. Il existe donc un point $\varphi(y)\in E$ tel que l'on ait

(27) Pour tout i tel que $k_y(i)>0$, $P^i\{X_{\tau-}=\varphi(y)\} = 1$

Dans ces conditions, nous savons calculer les mesures $\alpha(i\ ;\ dr,dx\ )$:

$$\alpha(i\ ;\ J\times A) = P^i\{\tau\in J, X_{\tau-}\in A\} = \int k(i,y)P^{i/y}\{\tau\in J, X_{\tau-}\in A\}\Theta(dy)$$
$$= \int_{F'_s} k(i,y)P^{i/y}\{\tau\in J\}I_A\circ\varphi(y)\Theta(dy)$$

Pour finir, posons alors , sur $\mathbb{R}_+\times F_s$, et non plus $\mathbb{R}_+\times E$

(28) $\quad \overline{\alpha}(\ i,\ J\times B) = \int_B k(i,y)P^{i/y}\{\tau\in J\}\Theta(dy)$

et d'autre part, pour $y\in F_s$, et non plus E

(29) $\overline{\delta}(y\ ;\ ds,du\ ) = \delta(\varphi(y)\ ;\ ds,du)$ (mesures sur $\mathbb{R}_+\times F_e$)

si $y\in F'_s$, et dans le cas contraire $\overline{\delta}(y\ ;\ ds,du)=0$. Nous pouvons alors récrire la formule de décomposition (20) sous une forme où n'apparaissent plus que des espaces F_e,F_s, des lois d'entrée... relatifs au semi-groupe minimal (Q_t) :

(30) $\quad p_t(i,j) = q_t(i,j)+\int_{]0,t[\times F_s} \overline{\alpha}(i\ ;\ dr,dx)\int_{[0,t-r[\times F_e} \overline{\delta}(x\ ;\ ds,du)\overline{q}_{t-r-s}(u,j)$

Malheureusement, cette décomposition n'a guère de signification probabiliste immédiate, ce qui lui enlève beaucoup de charme par rapport aux décompositions données dans le livre de CHUNG.

§ 2. DECOMPOSITIONS POUR UNE FONCTIONNELLE MULTIPLICATIVE QUELCONQUE

Les résultats des exposés II et IV peuvent s'interpréter de la manière suivante : étant donné un semi-groupe (P_t) markovien sur $E\cup\{\partial\}$, un semi-groupe subordonné (Q_t) associé à un temps terminal parfait exact R, le processus (X_t) admettant (P_t) comme semi-groupe peut se construire en créant continuellement de la masse dans le processus (Y_t) admettant (Q_t) comme semi-groupe, pour compenser la destruction à l'instant R. Nous nous posons dans ce paragraphe le problème suivant : peut on faire la même chose lorsque (Q_t), au lieu d'être associé à un temps terminal, est associé à une fonctionnelle multiplicative quelconque.

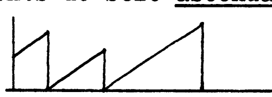
Ce problème vient d'être résolu par GETOOR-SHARPE, dans un remarquable article intitulé " balayage and multiplicative functionals" (à paraître). Comme le titre l'indique, la méthode utilisée est une généralisation de celle du balayage (exposé II). Nous allons présenter ici une méthode tout à fait différente, consistant à associer à la fonctionnelle un véritable ensemble régénératif.

Les notations $P_t, X_t, \Omega, \underline{\underline{F}}_t, \ldots$ auront dans ce paragraphe la même signification que dans les exposés précédents. Nous noterons (H_t) une fonctionnelle multiplicative ≤ 1, parfaite, parfaitement exacte,[1] dont le semi-groupe associé sera noté (Q_t). Les notations $V_p, F, \ldots$ auront le même sens que dans les exposés précédents, relativement à (Q_t).

En revanche, <u>nous n'utiliserons pas les notations relatives au processus d'incursion</u>, et les précieuses notations $\overline{\Omega}, \overline{X}_t \ldots$ seront donc disponibles pour d'autres usages.

CONSTRUCTION DE CERTAINS PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Nous désignons par W l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, en dents de scie <u>ascendantes</u> continues à droite. Si



$w \in W$, nous poserons $A_t(w)=w(t)$ [la notation de l'exposé I servait à noter une fonction continue à gauche, c'est pourquoi elle n'est pas reprise ici]. Nous munirons W de sa tribu naturelle $\underline{\underline{J}}^o$, engendrée par toutes les v.a. A_t, et nous aurons de même des tribus $\underline{\underline{J}}^o_{st}$ sur W : $\underline{\underline{J}}^o_{st} = \underline{\underline{T}}(A_r, s \leq r \leq t)$, et en particulier $\underline{\underline{J}}^o_{s\infty} = \underline{\underline{T}}(A_r, s \leq r < \infty)$, $\underline{\underline{J}}^o_s = \underline{\underline{J}}^o_{0s}$. On pose $D_t(w) = \inf\{s>t, A_s(w)=0\}$, $R_t(w)=D_t(w)-t$.

Nous nous donnons, pour tout couple (s,t) de nombres réels ≥ 0 tels que $s \leq t$, un nombre $m_{st} \in [0,1]$, en exigeant les propriétés suivantes :

(31) La fonction $m_{s.}$ est décroissante et continue à droite sur $[s,\infty]$, la fonction $m_{.t}$ est croissante et continue à droite sur $[0,t[$.

(32) Pour $s \leq t \leq u$ on a $m_{st}m_{tu}=m_{su}$ (en particulier, $m_{ss}=0$ ou 1).

Disons tout de suite que dans les applications, nous aurons $m_{st} = H_{t-s}(\Theta_s \omega)$.

Nous allons construire des processus non homogènes sur $\mathbb{R}_+$:

THEOREME 1 . <u>Il existe des lois</u> Π^x_s $(x \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}_+)$ <u>sur</u> $(W, \underline{\underline{J}}^o_{s\infty})$ <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

[1] aussi adaptée à la famille $\mathcal{F}^{oo}_{t+}$. Cf. la fin de l'exposé I.

1) Elles constituent un processus de Markov non homogène : si $s\leqq t$,

$A\in \underline{\underline{J}}^o_{st}$, $B\in\underline{\underline{J}}^o_{t\infty}$, on a

(33) $$\Pi^x_s(A\cap B) = \int_A \Pi^x_s(dw)\Pi_t^{A_t(w)}(B) .$$

2) Si $m_{ss}=1$, $\Pi^x_s\{A_s=x\}=1$. Si $m_{ss}=0$, $\Pi^x_s\{A_s=0\}=1$

3) $\Pi^x_s\{D_s>a\} = m_{sa}$ pour tout $a\geqq s$.

Les processus non homogènes considérés sont fortement markoviens, et les mesures Π^x_s sont uniquement caractérisées par ces propriétés.

PREMIERE ETAPE. Considérations sur la propriété de Markov forte.

Dans cette partie, nous allons démontrer que si nous savons construire un processus markovien satisfaisant aux propriétés ci--dessus, ce processus est fortement markovien.

On sait que les processus markoviens non homogènes se ramènent aux homogènes de la manière suivante : on prend ici comme espace d'états le produit $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, comme processus issu du point $y=(s,x)$ le processus $Y_t=(s+t,A_{s+t})$ pour la loi Π^x_s . Le semi-groupe correspondant est

$$P_t((s,x),f)=E^x_s[f(s+t,A_{s+t})] \qquad (f\geqq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$$

On sait que la propriété de Markov forte dépend de l'existence de suffisamment de fonctions f telles que, pour tout t, la martingale $P_{t-s}(Y_s,f)$ soit continue à droite sur l'intervalle $[0,t[$. Ici, cela s'énonce de la manière suivante : posons pour $s\in[0,t[$

$$P_{t-s}((s,x),f) = F(s,t)=E^x_s[f(t,A_t)]$$

Appelons voisinages fins du point (s,x) les ensembles qui contiennent un triangle

$$\Delta^\varepsilon_{s,x} = \{(t,y) : s\leqq t\leqq s+\varepsilon,\ x\leqq y\leqq x+\varepsilon\} \qquad (\varepsilon>0)$$

Les éléments de W sont des fonctions finement continues. Nous allons d'abord montrer que

Si f est bornée uniformément continue dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, la fonction $F(s,x)$ est finement continue dans $J=\{(s,x): 0\leqq s<t , x\geqq 0 , m_{ss}=1 \text{ ou } x=0\}$.

Nous supposerons f bornée par 1.

1) Nous faisons d'abord une comparaison verticale , en évaluant la différence $|F(s,x+\varepsilon)-F(s,x)|$ - pour simplifier les notations prenons $s=0$. Si $m_{00}=0$, cette différence est nulle. Si $m_{00}=1$, Π^x_0 est portée par l'ensemble $\{D_0>0\}$, et $\Pi^{x+\varepsilon}_0$ est l'image de Π^x_0 par l'application φ suivante de W dans W : le graphe de $\varphi(w)$ s'obtient à partir

du graphe de w en translatant verticalement de ε la partie du graphe correspondant à l'intervalle $[0,D_0[$, sans toucher au reste. Ainsi, dans tous les cas on a $|A_t(\varphi(w))-A_t(w)|\leqq\varepsilon$. La fonction f étant uniformément continue, on en déduit

Quel que soit $a>0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $|x-x'|<\varepsilon$ entraîne $|F(s,x)-F(s,x')|<a$ (ε <u>ne dépend pas</u> de s, mais seulement du module de continuité uniforme de f).

2) Appliquons la propriété de Markov simple entre les instants s et $s+\varepsilon$:

$$F(s,x) = E_s^x[f(t,A_t)] = \int \Pi_s^x(dw)E_{s+\varepsilon}^{A_{s+\varepsilon}(w)}[f(t,A_t)]$$

$$= F(s+\varepsilon,x+\varepsilon)\Pi_s^x\{D_s>s+\varepsilon\}+ \text{ un terme complémentaire}$$

$$= F(s+\varepsilon,x+\varepsilon)m_{s,s+\varepsilon} + \text{ un terme plus petit que } 1-m_{s,s+\varepsilon}$$

Ainsi $|F(s,x)-F(s+\varepsilon,x+\varepsilon)|\leqq 2(1-m_{s,s+\varepsilon})$. Si $m_{ss}=1$, c'est une propriété de continuité uniforme qui montre aussitôt, avec la propriété 1) ci-dessus, que

F est finement continue en tout point (s,x) tel que $m_{ss}=1$.

3) Il nous faut montrer que F est finement continue en un point (s,0), où $m_{ss}=0$. Pour alléger les notations, nous supposerons que $s=0$.

Nous commençons par remarquer que si s est tel que $m_{ss}=0$

$$\Pi_0^0\{A_s=0\} = \int \Pi_0^0(dw)\Pi_s^{A_s(w)}\{A_s=0\} = 1$$

S'il existe un intervalle $[0,c[$ sur lequel $m_{ss}\equiv0$, la fonction $A_.(w)$ s'annule Π_0^0-p.s. en tout point rationnel de $[0,c[$, donc sur l'intervalle par continuité à droite. Si s est dans l'intervalle, nous avons

$$F(0,0) = \int \Pi_0^0(dw)E_s^{A_s(w)}[f(t,A_t)] = F(s,0)$$

et cela prouve la continuité fine en (0,0), car F est constante le long des verticales.

Supposons ensuite qu'il n'existe pas de tel intervalle. Donnons nous un nombre $a>0$, prenons le nombre ε du 1), et choisissons un $s<\varepsilon$ tel que $m_{ss}=1$. Notons Δ le triangle formé des (r,x) tels que $r\leqq s$, $x\leqq s$: le processus issu d'un point de Δ reste entièrement dans Δ avant l'instant s. D'autre part, si $(r,x)\in\Delta$

$$F(r,x) = E_r^x[f(t,A_t)]=\int \Pi_r^x(dw)E_s^{A_s(w)}[f(t,A_t)]$$

L'espérance intérieure vaut $F(s,A_s(w))$, et $A_s(w)$ est entre 0 et s, de sorte que $F(s,A_s(w))$ diffère de $F(s,0)$ de moins de a. Donc aussi $F(r,x)$ diffère de $F(s,0)$ de moins de a, et $F(r,x)$ diffère de moins de 2a de $F(0,0)$. Δ étant voisinage fin de (0,0), c'est fini.

Nous n'avons pas encore achevé la démonstration de la propriété de Markov forte, car nous n'avons prouvé la continuité fine de $F(s,t)$ que sur J : il reste à voir que les trajectoires du processus restent dans J, i.e. ne rencontrent pas l'ensemble des (s,x) avec $m_{ss}=0$, $x>0$. C'est très facile : soit $G=\{s : m_{ss}=0\}$, ensemble fermé à droite, et soit D un ensemble dénombrable dense dans G pour la topologie droite. Nous avons vu plus haut que presque toutes les trajectoires du processus sont nulles sur D. Par continuité à droite, elles sont aussi nulles sur G, et donc restent dans J.

DEUXIEME ETAPE. <u>Construction du processus lorsque</u> $m_{0t}>0$ <u>pour</u> $t\in\mathbb{R}_+$

Alors on a aussi $m_{st}>0$ pour tout t fini $\geq s$. Nous construisons explicitement la mesure Π_s^x de la manière suivante. Nous prenons un espace probabilisé auxiliaire $(T,\underline{\underline{T}},\mu)$, sur lequel existe une suite (S_n) de v.a. indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour $\tau\in T$, nous posons

$$Z_1(\tau) = \inf \{ u>s : -\log m_{su} > S_1(\tau)\}$$

$$Z_2(\tau) = \inf \{ u>Z_1(\tau) : -\log m_{Z_1(\tau),u} > S_2(\tau) \} \quad \text{etc.}$$

Ensuite, nous définissons une application de T dans W de la manière suivante. Etant donné x, il existe une et une seule fonction de W qui à l'instant 0 vaut $(x-s)^+$, et dont les zéros sont exactement les points $Z_i(\tau)$ et le point s-x si $s\geq x$ (faire un petit dessin). Notons la $h_s^x(\tau)$. Alors par définition Π_s^x <u>sera l'image de la loi</u> μ <u>sur</u> T <u>par l'application mesurable</u> h_s^x <u>de</u> T <u>dans</u> $\underline{\underline{J}}^o_{s\infty}$.

Comment est faite cette loi ? Regardons par exemple Π_0^x . Elle est portée par l'ensemble des $w \in W$ n'admettant sur $\mathbb{R}_+^* =]0,\infty[$ que des zéros isolés $R_1,R_2,..R_n..$tendant vers l'infini (il n'est pas exclu, si $m_{0\infty}>0$, que tous les R_n soient égaux à $+\infty$ à partir d'un certain rang). Cet ensemble W' porte aussi toutes les lois Π_s^x, et nous nous y restreindrons dans le reste de cette étape. Les R_i sont des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{J}}^o_{0t})$, et nous avons sur W'

$$\underline{\underline{J}}^o_{0t} = \underline{\underline{T}}(A_0,R_1^t,\dots R_n^t..) \qquad (R_i^t=R_i \text{ si } R_i\leq t,\ +\infty \text{ si } R_i>t\ )$$

$$\Pi_0^x\{R_n>a|A_0,R_1,\dots R_{n-1}\} = m_{R_{n-1}a} \quad \text{sur } \{R_{n-1}<\infty\}$$

La seconde condition caractérise uniquement la loi du système $R_1,\ldots,$ $R_n\ldots$ et, avec la condition $\Pi_0^x\{A_0=x\}=1$, la loi Π_0^x sur $\underline{\underline{J}}_{0\infty}^o$.

Fixons t, et notons R_1' le premier zéro >t . Calculons $\Pi_0^x\{R_1'>t+a|\underline{\underline{J}}_{0t}^o\}$. Soit B_i l'événement $\{R_{i-1}\leq t, R_i>t\}$ (pour i=1, simplement $\{R_1>t\}$) qui appartient à $\underline{\underline{J}}_{0t}^o$. Cette probabilité conditionnelle vaut $\sum_i \Pi_0^x\{R_i>t+a, B_i|\underline{\underline{J}}_{0t}^o\}I_{B_i}$. Mais sur B_i la tribu $\underline{\underline{J}}_{0t}^o$

coïncide avec $\underline{\underline{H}}_i=\underline{\underline{T}}(A_0,R_1\ldots R_{i-1})$, de sorte que sur B_i

$$\Pi_0^x\{R_i>t+a, B_i|\underline{\underline{J}}_{0t}^o\} = \frac{\Pi_0^x\{R_i>t+a, B_i|A_0,\ldots R_{i-1}\}}{\Pi_0^x(B_i|A_0,\ldots,R_{i-1})} = \frac{m_{R_{i-1},t+a}}{m_{R_{i-1},t}}$$
$$= m_{t,t+a}$$

En sommant sur i, il vient

$$\Pi_0^x\{R_1'>t+a|\underline{\underline{J}}_{0t}^o\} = m_{t,t+a} = \Pi_t^{A_t}\{R_1'>t+a\}$$

Si l'on appelle R_2', R_3' ..les sauts suivants, qui sont des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{J}}_{0t}^o)$, il n'y a aucune difficulté à démontrer de même que la loi conditionnelle du système $(A_t, R_1',\ldots R_n')$ pour Π_0^x , connaissant $\underline{\underline{J}}_{0t}^o$, est la même que la loi absolue de ce système pour $\Pi_t^{A_t}$. On a donc établi la propriété de Markov .

L'unicité des mesures est ici très facile : la propriété de Markov entraîne, nous l'avons vu, la propriété de Markov forte. Compte tenu de la propriété 3) de l'énoncé, nous avons la loi de R_1. La propriété de Markov forte nous donne alors la loi de R_2 connaissant R_1, puis celle de R_3 connaissant $R_1, R_2\ldots$ toutes les mêmes que celles que nous avons construites plus haut. Et finalement, nous savons que les lois de A_0 et des R_i (sachant que $R_i \to +\infty$ p.s. avec i) déterminent la loi du processus.

TROISIEME ETAPE. Construction du processus lorsque $m_{st}>0$ pour $s>0,t>0$

Cette condition est un peu plus faible que la précédente, puisqu' elle permet que $m_{00}=0$. Naturellement, seul ce cas nous intéresse, et nous supposons $m_{00}=0$ maintenant. La construction précédente nous permet de construire les lois Π_s^x pour s>0, et il nous faut seulement construire Π_0^0 . Nous posons $\varepsilon_n=1/n$.

Nous notons m_{st}^n la fonction ainsi définie

- Pour $s\geq\varepsilon_n, t\geq\varepsilon_n$, $m_{st}^n = m_{st}$
- Pour $s<\varepsilon_n, t\leq\varepsilon_n$, $m_{st}^n = 1$, et pour $t\geq\varepsilon_n$, $m_{st}^n=m_{\varepsilon_n t}$.

Cette fonction satisfait aux conditions de la seconde étape, d'où des mesures Π_{ns}^x (il faut bien mettre le n quelque part !) qui coïncident d'ailleurs avec Π_s^x pour $s \geqq \varepsilon_n$.

Soit W_0 l'ensemble des applications en dents de scie ascendantes, nulles en 0. W_0 peut être identifié à l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 (en associant à $w \in W_0$ l'ensemble $F(w)=\{s:A_s(w)=0\}$, qui contient 0 et détermine uniquement w), ou encore à l'ensemble des compacts de $\overline{\mathbb{R}}_+$ contenant 0 et $+\infty$. Cet ensemble est compact pour la topologie naturelle sur les compacts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si l'on transporte cette topologie sur W_0 par l'identification précédente, on voit que <u>l'on peut extraire de la suite des mesures Π_{n0}^0 une suite qui converge étroitement vers une loi Π_0^0</u> . Quitte à changer le sens de la notation ε_n, nous pouvons supposer que la suite (Π_{n0}^0) toute entière converge.

Soit D l'ensemble (dénombrable) des t tels que pour un $s<t, m_{s.}$ ne soit pas continue en t. Pour $t>0, t \notin D$ on a $\Pi_0^0\{A_t=0\}=0$. En effet $\{A_t>0\}$ est contenu dans $\{ w : F(w) \cap]t-\varepsilon,t+\varepsilon[\neq \emptyset\}$, qui est ouvert pour la topologie de W_0. Par conséquent, pour tout $\varepsilon>0$

$$\Pi_0^0\{A_t=0\} \leqq \liminf_n \Pi_{n0}^0\{A_. \text{ s'annule entre } t-\varepsilon \text{ et } t+\varepsilon\}$$

Evaluons cette dernière quantité par la propriété de Markov : c'est

$$\int \Pi_{n0}^0(dw)\, \Pi_{nt-\varepsilon}^{A_{t-\varepsilon}(w)} \{D_{t-\varepsilon}<t+\varepsilon\}$$

qui vaut $1-m_{t-\varepsilon,t+\varepsilon}$ dès que $t>\varepsilon_n+\varepsilon$, et ceci tend vers 0 avec ε .

Ensuite, nous remarquons que pour tout $t>0, t \notin D$, la fonction $A_t(.)$ est continue pour la topologie de W_0 , en tout point w tel que $A_t(w) \neq 0$ - <u>donc presque partout pour la mesure Π_0^0</u> . Soient $f_1,f_2\ldots f_k$ des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$, $0<t_1 \ldots <t_k$ des instants $\in D^c$, g_k la fonction $x \longmapsto E_{t_{k-1}}^x[f_k \circ A_{t_k}]$ - nous avons vu dans la première étape qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour $\varepsilon_n<t_1$, la propriété de Markov nous dit que

$$E_{n0}^0[f_1 \circ A_{t_1} \ldots f_k \circ A_{t_k}] = E_{n0}^0[f_1 \circ A_{t_1} \ldots f_{k-1} \circ A_{t_{k-1}} g_k \circ A_{t_{k-1}}]$$

Cela passe à la limite lorsque $n \to \infty$ et nous donne la propriété de Markov de Π_0^0 sur D^c. L'extension à $\mathbb{R}_+$ est facile (cf.1e étape).

Ceci étant, la fonction de transition de ce processus est déterminée au point (0,0) par l'étape n°1 : si f est continue, $E_0^0[f \circ A_t]$ est limite fine de $E_s^x[f \circ A_t]$ au point (0,0). Comme il existe un seul processus de Markov admettant cette fonction de transition et issu de 0 à l'instant 0, nous avons l'unicité de la loi Π_0^0.

QUATRIEME ETAPE. C'est très court : nous remarquons que seule la structure d'ordre de $\mathbb{R}_+$ a été utilisée : de sorte que si nous avons seulement in intervalle $[a,b[$, avec la propriété que $m_{st}>0$ pour

$a<s\leqq t<b$, nous saurons construire les mesures Π_s^x pour $a\leqq s<b$, sur les tribus $\underline{\underline{J}}^o_{sb-}$.

CINQUIEME ETAPE : Cas général.

Nous notons M_o l'ensemble formé de 0 si $m_{00}=0$, et des $t>0$ tels que $m_{st}=0$ pour tout $s<t$. Il est fermé dans $\mathbb{R}_+$. Nous énumérerons l'ensemble (dénombrable) de ses intervalles contigus - ils sont de la forme $]a_i,b_i[$, sauf peut être le premier, qui est de la forme $[0,d[=[a_0,b_0[$ si $m_{00}=1$, $]0,d[$ si $m_{00}=0$. Nous supposerons par exemple $m_{00}=1$.

Pour tout i, soit W_i l'ensemble des applications en dents de scie ascendants sur l'intervalle $[a_i,b_i[$; si $i\neq 0$ nous leur imposerons d'être nulles en 0, mais nous laisserons libre la valeur initiale de w si i=0. Nous avons une application φ de $\prod_i W_i$ dans W, qui est une bijection de $\prod_i W_i$ sur l'ensemble des $w\in W$ nulles sur M_o : elle associe à $(w_i)_{i\in I}$ l'unique $w\in W$ nulle sur M_o, qui coïncide avec w_i sur $[a_i,b_i[$

Munissons W_i de la mesure $\Pi^0_{a_i}$ sur $\underline{\underline{J}}^o_{a_ib_i-}$ construite dans la 4e étape - sauf pour i=0, où nous prendrons Π_0^x . Puis prenons sur $\prod_i W_i$ la mesure produit, et envoyons le tout dans W par φ . La mesure image est alors la mesure Π_0^x du processus définitif. On procède de même pour les Π_s^x , mais ici nous laisserons les vérifications finales au lecteur.

CONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE REGENERATIF ASSOCIE A (H_t)

Nous revenons maintenant à nos processus de Markov sur E, mais nous allons changer de notations . En effet, les idées que nous allons appliquer sont celles de JACOD, exposées dans ce volume sous le titre "noyaux multiplicatifs". Plus exactement, nous n'allons pas du tout utiliser les résultats de cet exposé, car celui-ci vise à construire un noyau multiplicatif, ce que nous venons justement de faire, mais simplement le langage de JACOD.

Ainsi, nous reprenons nos notations des exposés précédents

$$E,(P_t),\Omega,\underline{\underline{F}}^o,X_t,P^\mu....$$

et nous les affublons de barres :

$$\overline{E},(\overline{P}_t),\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}}^o,\overline{X}_t,\ \overline{P}^\mu...\qquad(\text{ sauf } \theta_t)$$

De même, nous avons notre fonctionnelle multiplicative (H_t). Il est inutile de l'écrire $(\overline{H}_t)$, mais nous noterons $(\overline{Q}_t),(\overline{V}_p)$ le semi-groupe et la résolvante subordonnés correspondants, $\overline{F}$ l'ensemble des points non-permanents pour (H_t).

Soit W l'ensemble des fonctions en dents de scie ascendantes , avec les applications coordonnées A_t, les tribus $\underline{\underline{J}}^o,\underline{\underline{J}}^o_t=\underline{\underline{J}}^o_{0t}$.

Nous poserons $\Omega=\overline{\Omega}\times W$, avec les tribus $\underline{\underline{F}}^o=\overline{\underline{\underline{F}}}^o\times\underline{\underline{J}}^o$, $\underline{\underline{F}}_t^o=\overline{\underline{\underline{F}}}_t^o\times\underline{\underline{J}}_t^o$, et les variables aléatoires $X_t=(\overline{X}_t,A_t)$ à valeurs dans $E=\overline{E}\times\mathbb{R}_+$.

Il nous reste à définir les mesures sur Ω. Pour tout $\overline{\omega}\in\overline{\Omega}$, nous avons une fonction du type considéré dans le paragraphe précédent

$$m_{st}(\overline{\omega}) = H_{t-s}(\Theta_s\overline{\omega}) \qquad (s\leq t)$$

et par conséquent des mesures $\Pi_s^a(\overline{\omega},.)$ sur W. La première chose que nous remarquons, c'est que si $A\in\underline{\underline{J}}^o$ nous avons $\Theta_s^{-1}(A)\in\underline{\underline{J}}_{s\infty}^o$ et

(34) $$\Pi_s^a(\overline{\omega},\Theta_s^{-1}(A))=\Pi_0^a(\Theta_s\overline{\omega},A)$$

Ensuite, nous avons la dépendance en $\overline{\omega}$. Ici il faudrait reprendre la construction du paragraphe précédent, en étudiant sa mesurabilité en $\overline{\omega}$. On peut démontrer que

(35) Si $A\in\underline{\underline{J}}_t^o$, $(a,\overline{\omega})\longmapsto\Pi_0^a(\overline{\omega},A)$ est $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\overline{\underline{\underline{F}}}_{t+}^{o\,o}$-mesurable

ceci, en vertu de l'adaptation de la fonctionnelle à la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_{t+}^{o\,o})$.
Nous posons ensuite, si $x=(\overline{x},a)\in E$

(36) $$M^x(\overline{\omega},.) = \varepsilon_{\overline{\omega}}(.)\otimes\Pi_0^a(\overline{\omega},.) \quad \text{sur } \Omega$$

et (35) nous donne la propriété suivante (classes monotones)

(37) Si $A\in\underline{\underline{F}}_t^o$, $(x,\overline{\omega})\longmapsto M^x(\overline{\omega},A)$ est $\underline{\underline{B}}(E)\times\underline{\underline{F}}_{t+}^{o\,o}$-mesurable

tandis que la propriété de Markov non homogène s'écrit

(38) Si $A\in\underline{\underline{F}}_s^o$, $B\in\underline{\underline{F}}^o$, $$M^x(\overline{\omega},A\cap\Theta_s^{-1}(B))=\int_A M^x(\overline{\omega},dv)M^{X_s(v)}(\Theta_s\overline{\omega},B)$$

Dans ces conditions nous posons, toujours pour $x=(\overline{x},a)$

(39) $$P^x(d\omega) = \int_{\overline{\Omega}} P^{\overline{x}}(d\overline{v})M^x(\overline{v},d\omega)$$

et nous avons le théorème suivant :

THEOREME 2. <u>Le système</u> $(\Omega,X_t,\underline{\underline{F}}_t^o,P^x)$ <u>est une réalisation d'un semi-groupe markovien droit</u>[1] (P_t) <u>sur</u> E, <u>au dessus de</u> $(\overline{P}_t)$.

DEMONSTRATION. Nous utilisons les notations de l'article sur les noyaux multiplicatifs, en particulier, nous introduisons aussi les tribus $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^o$ <u>sur</u> Ω, engendrées par les applications $\overline{X}_t$ où $\overline{X}_t(\overline{\omega},w)=\overline{X}_t(\overline{\omega})$, et les tribus $\underline{\underline{G}}_t^o = \overline{\underline{\underline{F}}}^o\vee\underline{\underline{F}}_t^o$ sur Ω.
Nous commençons par démontrer

<u>Soit</u> g $\underline{\underline{F}}^o$<u>-mesurable positive. Alors pour tout</u> x <u>et tout</u> s

(40) $$E^x[g\circ\Theta_s|\underline{\underline{G}}_s^o] = M^{X_s(\omega)}(\Theta_s\overline{\omega},g)$$

(où $\overline{\omega}$ est la projection de ω sur $\overline{\Omega}$).
En effet, nous commençons par remarquer que (38) est vraie pour $A\in\underline{\underline{G}}_s^o$ (c'est une formule vraie pour $\overline{\omega}$ fixé quelconque).

1 Admettant les points de branchement $(\overline{x},a)$ où $\overline{x}$ est non-permanent pour (H_t) et $a>0$.

Nous prenons f $\underline{\underline{G}}_s^o$-mesurable , de la forme $\bar{u}.v\circ a_s$, où $\bar{u}$ est $\underline{\underline{\bar{F}}}^o$-mesurable et v $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable - toutes deux positives - et a_s est l'opérateur d'arrêt à s. Alors

$$\begin{aligned} E^x[\bar{u}.v\circ a_s.g\circ\Theta_s] &= \bar{\bar{E}}^x[\bar{u}.M^x(\bar{\omega},v\circ a_s.g\circ\Theta_s)] \\ &= \bar{\bar{E}}^x[\bar{u}.M^x(\bar{\omega},v\circ a_s.M^{X_s}(\Theta_s\bar{\omega},g))] \\ &= E^x[\bar{u}.v\circ a_s.M^{X_s}(\Theta_s\cdot,g)] \end{aligned}$$

Ensuite nous démontrons la <u>propriété de Markov simple</u>. Soit g $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable positive, et soit $G(x)=E^x[g]$. Avons nous $E^x[g\circ\Theta_s|\underline{\underline{F}}_s^o]=G\circ X_s$? Nous savons que

$$E^x[g\circ\Theta_s|\underline{\underline{F}}_s^o]=E^x[g\circ\Theta_s|\underline{\underline{G}}_s^o|\underline{\underline{F}}_s^o] = E^x[M^{X_s(\omega)}(\Theta_s\bar{\omega},g)|\underline{\underline{F}}_s^o]$$

Soit une fonction positive h sur $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}_+$, et soit H la fonction sur $E=\bar{E}\times\mathbb{R}_+$ définie par

$$H(\bar{x},a)= \bar{E}^x[h(\bar{\omega},a)]$$

Nous allons prouver

$$E^x[h(\Theta_s\bar{\omega},A_s(\omega))|\underline{\underline{F}}_s^o] = H(X_t) \tag{41}$$

et cela nous donnera ce que nous cherchons, car lorsque $h(\bar{\omega},a) = M^{X_0(\bar{\omega}),a}(\bar{\omega},g)$ nous avons $H(\bar{x},a)=G(\bar{x},a)$. Il nous suffit de raisonner dans <u>le</u> cas où $h(\bar{\omega},a)= j(\bar{\omega})k(a)$, de sorte que $H(\bar{x},a)=J(\bar{x})k(a)$, où $J(\bar{x})=\bar{E}^x[j]$. Nous avons si u est $\underline{\underline{F}}_s^o$-mesurable positive

$$\begin{aligned} E^x[u(\omega)h(\Theta_s\bar{\omega},A_s(\omega))] &= \bar{\bar{E}}^x[M^x(\bar{\omega},u.h(\Theta_s\cdot,A_s(.)))] \\ &= \bar{\bar{E}}^x[M^x(\bar{\omega},u.j(\Theta_s\cdot)) \\ &= \bar{\bar{E}}^x[M^x(\bar{\omega},u.k\circ A_s).j(\Theta_s\bar{\omega})] \end{aligned}$$

Seulement, la fonction $M^x(.,u.k\circ A_s)$ est $\underline{\underline{\bar{F}}}_s^o$-mesurable, et la propriété de Markov simple du processus $(\bar{X}_t)$ nous permet de remplacer $j\circ\Theta_s$ par $J\circ\bar{X}_s$. Il ne reste plus qu'à remonter les calculs.

Les raisonnements que nous avons faits pour la propriété de Markov simple s'étendent sans difficulté à la démonstration de la propriété de Markov <u>forte</u> : seules les notations se compliquent un peu.

Enfin, le semi-groupe (P_t) transforme les fonctions boréliennes sur E en fonctions $\underline{\underline{B}}_e(\bar{E})\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$-mesurables, et un raisonnement simple de classes monotones montre que ces fonctions sont presque-boréliennes pour le processus (X_t). Le théorème est établi.

Nous allons maintenant appliquer cette construction à la décomposition des semi-groupes subordonnés sur $\bar{E}$.

DECOMPOSITION DU SEMI-GROUPE RELATIVEMENT A (H_t)

Nous notons $\overline{F}$ l'ensemble des points non-permanents pour (H_t) (i.e., pour le semi-groupe $(\overline{Q}_t)$ associé), et $\overline{F}^c$ le complémentaire de $\overline{F}$ relativement à $\overline{E}$.

Nous considérons sur Ω l'ensemble aléatoire progressif fermé dans $\mathbb{R}_+^*$

(42) $$M=\{(t,\omega) : t>0, A_t(\omega)=0\}$$

le temps terminal R correspondant, les temps D_t, R_t considérés dans l'exposé II. Les points réguliers (non-permanents) pour R sont exactement - si l'on néglige les points de branchement $(\overline{x},a), x\in\overline{F}$, $a>0$ - les points de $\overline{F}\times\{0\}=F$.

Pour chaque $\omega=(\overline{\omega},w)$, $M(\omega)$ se compose de deux sortes de points.

1) Les points " fixes" , dépendant seulement de $\overline{\omega}$, qui forment un ensemble fermé M_o

(43) $$M_o=\{(t,\omega) : t>0, \forall s<t \ H_{t-s}(\Theta_s\overline{\omega})=0 \}$$

Comme M_o ne dépend que de $\overline{\omega}$, nous le considérerons aussi (sans changer de notation) comme ensemble aléatoire sur $\overline{\Omega}$. D'autre part, nous avons

2) Les points "mobiles" , qui forment un ensemble M_m contenu dans les intervalles contigus à M_o .

Soit $[R_1,U_1[$, $[R_2,U_2[$,... la suite des intervalles contigus à M_o de longueur $>\varepsilon$. On sait que les v.a. U_i et $T_i=R_i+\varepsilon$ sont des temps d'arrêt, et il est facile de représenter au moyen de temps d'arrêt les points de M_m situés entre T_i et U_i (ils forment un ensemble bien-ordonné). On en déduit que $M_m\subset \vec{M}_b$.

L'ensemble $\vec{M}_\pi$ est donc contenu dans M_o, donc dans $\vec{M}_{o\pi}$. Mais il n'y a pas identité entre ces deux ensembles en général. En effet, pour P^x-presque tout $\omega=(\overline{\omega},w)$, la relation $t\in\vec{M}_{o\pi}(\overline{\omega})$ entraîne $A_t(w)=0$ (donc $t\in M(\omega)$), $\overline{X}_t(\overline{\omega})\in\overline{F}$ (donc $X_t(\omega)\in F$), autrement dit $t\in\vec{M}_\pi(\omega)$ si l'on a $t\in\vec{M}(\omega)$, ce qui a lieu si $H_0(\Theta_t\overline{\omega})=1$, mais non si $H_0(\Theta_t\overline{\omega})=0$ - car alors des points de $M_m(\omega)$ viennent s'accumuler à droite de t.

Le point important pour nous est le fait que $\vec{M}_\pi(\omega)$ ne dépende que de $\overline{\omega}$. Nous avons en effet le lemme suivant

LEMME 1. La compensatrice bien-mesurable de la mesure aléatoire

(44) $$\sum_{g\in\vec{M}_\pi}\varepsilon_g(dt)$$

est la même (pour toute loi P^λ), que l'on projette sur $(\underline{\underline{F}}_t^\lambda)$ ou $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t^\lambda)$.

DEMONSTRATION. Notons μ cette mesure aléatoire - si le lecteur a peur des mesures non bornées, il remplacera $\mu(\omega,dt)$ par $e^{-t}\mu(\omega,dt)$. Rappelons que si Z est un processus mesurable positif sur Ω on pose (pour λ fixée) $<\mu,Z> = E^{\lambda}[\int\mu(\omega,dt)Z_t(\omega)]$. Nous notons

$Z \mapsto Z^1$ l'opérateur de projection bien-mesurable sur la famille constante $\underline{\underline{H}}_t=\overline{\underline{\underline{F}}}$

$Z \mapsto Z^2$ l'opérateur de projection bien-mesurable sur $(\underline{\underline{F}}_t^{\lambda})$

$Z \mapsto Z^3$ l'opérateur de projection bien-mesurable sur $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t^{\lambda})$

Nous utilisons les mêmes exposants pour noter les projections duales correspondantes de mesures aléatoires.

Nous remarquons d'abord que $Z^3=Z^{21}$ (*). Nous ne donnerons pas les détails, mais formellement cela signifie que pour tout t, si z est une v.a. $\underline{\underline{F}}_t^o$-mesurable, $E[z|\overline{\underline{\underline{F}}}^o]$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}_t^o$-mesurable, ce qui revient à (37) - après quoi on étudie les continuités à droite, etc.

Ensuite, le fait que μ ne dépende que de $\overline{\omega}$ entraîne que $\mu=\mu^1$: μ se décompose en effet en une somme de mesures portées par des temps d'arrêt de la famille (H_t).

Alors le lemme est facile : $< \mu^3,Z> = <\mu,Z^3> = < \mu,Z^{21}> = <\mu^1,Z^2 >$ $= <\mu,Z^2 > = < \mu^2,Z >$. cqfd.

Nous nous reportons maintenant au théorème 2 et à la proposition 4 de l'exposé II, que nous appliquons sur E à l'ensemble aléatoire M. Nous savons déjà que $F=\overline{F}\times\{0\}$. Le lemme 1 nous dit que nous pouvons prendre comme fonctionnelle (K_t) une fonctionnelle <u>dépendant seulement de $\overline{\omega}$</u> (par ex. $\tilde{I}^1(1)$). Il nous reste à regarder quelles sont les lois d'entrée qui interviennent : pour $(\overline{x},0)\in F$ nous avons une loi d'entrée pour le semi-groupe

(45) $$Q_t((y,a),.) = \overline{Q}_t(y,.)\otimes\varepsilon_{a+t}(.)$$

qui est d'ailleurs la loi d'entrée correspondant à une mesure $\hat{Q}^{\overline{x}a}$, non bornée, pour laquelle (X_t) est markovien avec (Q_t) comme s.g. et $X_0=(\overline{x},0)$ p.s.. La composante temporelle étant une pure translation, la loi d'entrée est tout simplement

(46) $$\hat{Q}_t((\overline{x},0),.) = \hat{\overline{Q}}_t(\overline{x},.)\otimes\varepsilon_t(.)$$

où $(\hat{\overline{Q}}_t(\overline{x},.)$ est une loi d'entrée pour $(\overline{Q}_t)$, correspondant à une mesure sur $\overline{\Omega}$, etc, etc.

(*) On a aussi $Z^3=Z^{12}$.

Nous avons identifié les divers éléments entrant dans les décompositions de GETOOR-SHARPE. Introduisons la mesure aléatoire homogène

(47) $$d\Gamma_s = I_F \circ X_s \, dK_s + \sum_{g \in M_0^{\to}} \varepsilon_g(ds)$$

et sa projection duale $d\overline{\Gamma}_s$ sur la famille $(\underline{\underline{F}}_s)$, qui est aussi une mesure aléatoire homogène ayant un 1-potentiel borné. Ecrivons le corollaire 1 du th.3 de l'exposé II au point $(\overline{x},0)$ de E, avec une fonction h sur E

(48) $$P_u((\overline{x}_0),h) = Q_u((\overline{x}_0),h) + E^{\overline{x}0}[h \circ X_u I_M(u)] + E^{\overline{x}0}[\int_{]0,u[} \hat{Q}_{u-s}(X_s,h)d\Gamma_s]$$

Prenons une fonction h qui ne dépend que de $\overline{x}$. Dans ce cas, les différents termes s'interprètent bien

- $P_u((\overline{x},0),h)$ et $Q_u((\overline{x},0),h)$ valent simplement $\overline{P}_u(\overline{x},h),\overline{Q}_u(\overline{x},h)$
- Le troisième terme s'écrit
$$E^{\overline{x}0}[\int_{]0,u[} \hat{\overline{Q}}_{u-s}(\overline{X}_s,h)d\Gamma_s] = E^{\overline{x}}[\int_{]0,s[} \hat{\overline{Q}}_{u-s}(\overline{X}_s,h)d\overline{\Gamma}_s]$$

et ici aussi le processus auxiliaire a complètement disparu.

- Le terme le plus nouveau est le second. Pour tout u et tout $\overline{\omega}$, nous définissons $\Delta_u(\overline{\omega})$ de la manière suivante
  1) si $u \in M_0(\overline{\omega})$, $\Delta_u(\overline{\omega})=1$
  2) sinon, nous prenons un s tel que $H_{u-s}(\Theta_s\overline{\omega})>0$, et nous posons

(49) $$\Delta_u(\overline{\omega}) = 1 - \frac{H_{u-s}(\Theta_s\overline{\omega})}{H_{(u-s)-}(\Theta_s\overline{\omega})} \quad (\text{ indépendant de s })$$

Alors un petit calcul sur les processus du renouvellement du début montre que
$$M^x(\overline{\omega}\ ,\{A_u(w)=0\}) = \Delta_u(\overline{\omega})$$

et nous aboutissons finalement à la formule de décomposition générale.

(50) $$\overline{P}_u(\overline{x},h) = \overline{Q}_u(\overline{x},h) + E^{\overline{x}}[h \circ \overline{X}_u \Delta_u] + E^{\overline{x}}[\int_{]0,u[} \hat{\overline{Q}}_{t-s}(\overline{X}_s,h)d\overline{\Gamma}_s]$$