SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE KAROUI
HERVÉ REINHARD

Processus de diffusion dans $\mathbf{R}^n$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 95-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__95_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971-72

PROCESSUS DE DIFFUSION DANS R^n

N. KAROUI (Paris XI), H. REINHARD (Paris VI)

Ière PARTIE - EXISTENCE ET UNICITE

Cette partie est centrée autour d'un théorème d'équivalence qui affirme qu'il y a existence et unicité de la diffusion associé à un opérateur elliptique L, si et seulement si, il y a existence et unicité des solutions d'une certaine équation stochastique. Ce théorème permet d'obtenir des résultats dans le cas où L est dégénéré mais aussi dans celui où il est strictement elliptique.

On appelle souvent diffusion un processus à trajectoires continues dont le générateur infinitésimal $[A,\mathcal{D}(A)]$ coïncide sur les fonctions de classe C^2 avec un opérateur elliptique. Il est malheureusement difficile de savoir si $\mathcal{D}(A)$ contient beaucoup de fonctions de classe C^2 de sorte que cette définition est généralement insuffisante pour construire une diffusion dont le générateur L est donné. Nous adopterons la définition de Krylov en appelant diffusion ce qu'il appelle quasi-diffusion [9].

DEFINITION 1. - <u>On appelle diffusion associée à l'opérateur elliptique</u> L <u>un processus de Markov à trajectoires continues dont le semi-groupe</u> P_t <u>est tel que</u>

$$\forall f \in C_K^\infty \qquad P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s Lf(x)\,ds$$

Cette définition est en quelque sorte la forme intégrée de la définition précédente, elle a l'avantage de concerner toutes les fonctions de C_K^2.

NOTATIONS. - L'opérateur L est de la forme suivante : $L = \frac{1}{2}\sum_1^n a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_1^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ on désignera par a la matrice symétrique, positive (a_{ij}) et par b le vecteur

(b_i), on supposera a_{ij} et b_j boréliens bornés. Nous dirons pour abréger que L est borélien borné. On dit que L est uniformément elliptique sur tout compact si il existe une suite de réels μ_r telle que $\forall x \in B(0,r) = \{x, |x| \leq r\}$ $\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \mu_r |\xi|^2$ $\forall \xi \in R^n$. Nous désignerons par σ une racine carrée de a, c'est-à-dire une matrice telle que $\sigma\sigma^* = a$.

Dynkin a montré que si L est uniformément elliptique et höldérienne il existe une diffusion et une seule associée à L, de semi-groupe de transition $P_t f(x) = \int p(t,x,y)\, f(y)dy$ où p est une solution fondamentale de $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$. L'unicité dont il est question est évidemment celle du semi-groupe.

Une deuxième méthode utilise les équations stochastiques : Ito a montré que si σ et b sont lipschitziens, la solution unique de l'équation stochastique $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s + \int_0^t b(X_s)ds$, où β est un brownien, est une diffusion de générateur L. Nous préciserons plus tard ce qu'on entend par solution et unicité dans ce cas.

Plus récemment, Stroock et Varadhan [19] ont posé le problème d'une façon différente, qui est celle que nous adopterons désormais.

DEFINITION 2. - Soit $\Omega° = C(R^+, R^n)$, $X_t(\omega)$ les coordonnées de ω, $\mathcal{F}_t^\circ = \sigma(X_s, s \leq t)$. On dit qu'une famille de probabilités P_x sur $(\Omega°, \mathcal{F}_\infty^\circ)$ $x \in R^n$, est une solution au problème des martingales si $\forall f \in C_K^\infty$; $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t L f(X_s)ds$ est une P_x-martingale.

Soit $(\Omega°, \mathcal{F}_t^\circ, X_t, P_x)$ une diffusion de générateur L, il suffit d'appliquer la propriété de Markov pour montrer que P_x est une solution au problème des martingales. Réciproquement Stroock et Varadhan ont démontré que si, P_x est une solution au problème des martingales, si cette solution est unique et si $E_x f(X_t)$ est mesurable pour toute f borélienne bornée $(\Omega°, \mathcal{F}_t^\circ, X_t, P_x)$ est une diffusion de générateur L.

Rappelons les équivalences suivantes : les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\quad \forall f \in C_K^\infty \quad f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t Lf(X_s)ds$ est une martingale continue

(2) $\quad \forall \theta \in R^n \quad < \theta, X_t - X_o - \int_o^t b(X_s)ds >$ est une martingale continue de processus croissant $\int_o^t < \theta, a(X_s)\theta > ds$

(3) $\quad \forall \theta \in R^n \quad \exp\{<\theta, X_t - X_o - \int_o^t b(X_s)ds> - \frac{1}{2}\int_o^t < \theta, a(X_s)\theta > ds$ est une martingale continue.

Ces propositions impliquent que si $\theta(u,\omega)$ est progressivement mesurable et satisfait $E\int_o^t <\theta(s), a(s)\theta(s)> ds < \infty$, $\forall t$; alors $\int_o^t <\theta_u, dX_u - b(X_u)du >$ est une martingale de processus croissant $\int_o^t <\theta(u), a\,\theta(u)> du$, d'une part et que si Y_t est tel que $\forall \theta \in R^n$ $<\theta, Y_t>$ est une martingale de processus croissant $|\theta|^2 t$ Y_t est un brownien, d'autre part. Avant d'établir le théorème fondamental d'équivalence nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Soit sur</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ <u>une martingale continue</u> $M_t = (M_t^1 \dots M_t^n)$ <u>de</u> R^n <u>où</u> M_t^i <u>est pour tout</u> i <u>une martingale réelle dont le processus croissant est absolument continu par rapport à</u> t ; <u>on désignera par</u> A <u>la matrice des densités</u> A_{ij} <u>définie par</u> $< M_i, M_j >_t = \int_o^t A_{ij}(\omega,s)ds$; <u>et par</u> Σ <u>une racine carrée de</u> A. <u>Soit</u> $(\Omega', \beta_t', \mathcal{F}_t', \omega)$ <u>un brownien</u> n <u>dimensionnel</u>.

<u>Posons</u> $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$; $\tilde{P} = P \otimes W$; $G_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}_t'$, <u>alors il existe sur</u> $(\tilde{\Omega}, G_t, \tilde{P})$ <u>un</u> G <u>brownien</u> $\tilde{\beta}(\omega,\omega')$ <u>tel que</u>

$$\tilde{M}_t(\omega,\omega') = \int_o^t \tilde{\Sigma}_s(\omega,\omega')\, d\tilde{\beta}_s(\omega,\omega') \quad \text{où} \quad \tilde{M}_t(\omega,\omega') = M_t(\omega)$$
$$\tilde{\Sigma}_t(\omega,\omega') = \Sigma_t(\omega)$$

Rappelons qu'on appelle G-Brownien sur $(\tilde{\Omega}, G_t, \tilde{P})$ une martingale continue adaptée aux tribus G_t, de processus croissant $t.\mathrm{Id}$, il se distingue d'un brownien par le fait que les tribus $\tau(\tilde{\beta}_s, s \leq t)$ peuvent être différentes des tribus G_t, nous noterons $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ces tribus.

DEMONSTRATION. - Soit $A_t^{1/2}$ la racine carrée symétrique de A_t. Il suffit de démontrer la proposition pour $A_t^{1/2}$; en effet, si Σ_t est une racine carrée quelconque de A_t, il existe une transformation orthogonale de matrice O_t telle que $\Sigma_t^* = O_t A_t^{1/2}$ et si $\tilde{\beta}^\circ$ est tel que $\tilde{M}_t = \int_0^t \tilde{A}_s^{1/2} d\tilde{\beta}_s^\circ$, il est immédiat de vérifier que $\tilde{M}_t = \int_0^t \tilde{\Sigma}_s^{1/2} d\tilde{\beta}_s$ où $\tilde{\beta}_s = \int_0^t O_s d\tilde{\beta}_s^\circ$ est un brownien.

Rappelons que si Z_t est une martingale telle que le processus croissant de $<\theta, Z_t>$ soit $\int_0^t <\theta, a\theta> ds$, si m est une matrice $n \times \sigma$ progressivement mesurable telle que $E\int_0^t (m\,a\,m^*)ds < \infty$ pour tout t, on peut définir le vecteur $\zeta(t) = \int_0^t m(s)dZ_s$ et pour tout θ de R^n $<\theta, Z_t>$ est une martingale dont le processus croissant est $\int_0^t <\theta, m\,a\,m^*\theta> ds$.

Envisageons d'abord le cas où $A_t = \begin{pmatrix} \lambda_t^1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_t^r & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ et où r est constant. Soit α_t l'image de R^n par A_t (c'est-à-dire le sous-espace $A_t\theta$, $\theta \in R^n$) soit I_{α_t} la matrice identité sur cet espace et $I_{\alpha_t^\perp}$ la matrice identité sur le supplémentaire $\alpha_t^\perp$.

On a $A_t^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_t^1} & & 0 \\ & \ddots \sqrt{\lambda_t^r} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ et soit $C_t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_t^1} & & 0 \\ & \ddots\ 1/\sqrt{\lambda_t^r} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A_t^{1/2} C_t = C_t A_t^{1/2} = I_{\alpha_t}$. Comme $E\int_0^t (C_s A_s C_s^*)ds = t$ est finie pour tout t, l'intégrale stochastique $\zeta_t = \int_0^t C_s(\omega)\, dM_s$ existe et $<\theta, \zeta_t>$ a pour processus croissant $\int_0^t <\theta, CAC^*\theta> ds = \sum_1^r \theta_i\, t$.

Si $r = n$ cela entraine que ζ_t est un brownien qui est celui cherché, Stroock et Varadhan avaient énoncés les premiers la proposition dans ce cas.

Si $r < n$ il faut ajouter $\sum_{r+1} \theta_i^2\, t$ au processus croissant de $<\theta, \zeta_t>$ pour obtenir un brownien, c'est ce que nous pouvons faire en posant :

$$\tilde{\beta}_t(\omega,\omega') = \int_0^t C_s(\omega)dM_s(\omega) + \int_0^t I_{\alpha_s^\perp}(\omega')d\beta'(\omega').^*$$

Calculons le processus croissant associé à $<\theta,\tilde{\beta}>$: c'est la somme de ceux associés à chacune des intégrales stochastiques puisque M et β' sont orthogonales ; le premier vaut $\sum_1^r \theta_1^2 t$ et le second $\int_0^t <\theta, I_{\alpha_s^\perp} I . I^*_{\alpha_s^\perp} \theta>ds = \sum_{r+1}^{r} \theta_i^2 t$ ce qui établit que $\tilde{\beta}$ est un brownien (en fait un G brownien). Passons au cas général : il existe une matrice C_t telle que $C_t A_t^{1/2} = A_t^{1/2} C_t = I_{\alpha_t}$ où cette fois α_t varie mais le calcul reste évidemment le même. Il reste à évaluer $\int_0^t A_s^{1/2} d\tilde{\beta}_s =$ $= \int_0^t A_s^{1/2} C_s dM_s + \int_0^t A_s^{1/2} I_{\alpha_s^\perp} d\beta'$, or $A_s^{1/2} I_{\alpha_s} = A_s^{1/2}$ et $A_s^{1/2} I_{\alpha_s^\perp} = 0 = A_s I_{\alpha_s^\perp}$. Donc $\int_0^t A_s^{1/2} d\tilde{\beta}_s = \int_0^t I_{\alpha_s} dM_s = M_s - \int_0^t I_{\alpha_s^\perp} dM_s$, le processus croissant associé à $<\theta, \int_0^t I_{\alpha_s^\perp} dM_s>$ est $<\theta, \int_0^t I_{\alpha_s^\perp} A_s I^*_{\alpha_s^\perp} \theta ds> = 0$, ce qui établit la proposition.

REMARQUE. - Il est clair que la démonstration est valable dès que tous les processus croissants $<M^i, M^i>$ sont absolument continus par rapport à un même processus croissant A_t à condition de remplacer $\tilde{\beta}$ par la martingale $\tilde{\beta}_{A_t}$.

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème d'équivalence entre existence et unicité de la solution du problème des martingales et de celle d'une équation stochastique. Remarquons pourtant que si on a deux solutions au problème des martingales la construction précédente donne deux browniens différents, il convient donc de préciser ce qu'on entend par existence et unicité de la solution d'une équation stochastique. C'est ce que nous faisons en empruntant les définitions suivantes à Watanabe et Yamada [21] .

---

* (que nous devrions noter conformément à l'énoncé $\int_0^t \tilde{C}_s(\omega,\omega')d\tilde{M}_s(\omega,\omega') + \int_0^t \tilde{I}_{\alpha_s^\perp}(\omega,\omega')d\tilde{\beta}'_s(\omega,\omega')$, ces notations étant seulement déstinées à rappeler qu'on considère toutes les variables comme des variables sur $\Omega \times \Omega'$ dès qu'on écrit $\tilde{\beta}$. Nous omettrons les $\sim$ quand il n'y aura pas d'ambiguité).

DEFINITION 4. - A. Soit $\sigma(x)$ une matrice borélienne $n \times n$ et b un vecteur borélien. On appelle solution de l'équation stochastique (I)
$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s + \int_0^t b(X_s) ds$ un terme $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \beta_t, P)$ tel que

a) X_t est continue, à valeurs dans R^n, adapté et $X_o = x$

b) $\beta_o = 0$ et β est un $\mathcal{F}$ mouvement brownien

c) $X_t - X_o = \int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s + \int_0^t b(X_s) ds$

B. On dit qu'il y a unicité en loi de (I) si, étant données deux solutions $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \beta_t, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}'_t, X'_t, \beta'_t, P')$ telles que $X_o = X'_o = x$, les lois de X_t et X'_t sur $\Omega°$ sont les mêmes

C. On dit qu'il y a unicité trajectorielle de (I) si, étant données deux solutions définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ avec le même $\mathcal{F}$-brownien et telles que $X_o = X'_o = x$, alors $X_t = X'_t$ P. ps $\forall t$.

La solution de (I) est dite canonique si $\Omega = \Omega°$, $\beta_t = \omega_t$ et $\mathcal{F}_t = \tau(\beta_s, s \leq t)$.

Watanabe et Yamada ont démontré le théorème fondamental suivant :

PROPOSITION 5. - L'unicité trajectorielle entraine l'unicité en loi.

Nous allons donner une petite idée de la démonstration. Soient $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \beta_t, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}'_t, X'_t, \beta'_t, P')$ deux solutions ; considérons $(\Omega° \times \Omega° \times \Omega°)$ muni de $Q(d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3) = P_{\omega_3}(d\omega_1) P'_{\omega_3}(d\omega_2) W(d\omega_3)$ où W est la mesure de Wiener, $P_\omega(d\omega_1)$ une version régulière de la loi conditionnelle de l'image de P par (X_t, β_t) sur $\Omega° \times \Omega°$, $P'_\omega(d\omega_2)$ la même expression relativement à P' et (X'_t, β'_t) ; on démontre alors que

ω_3 est un G brownien pour Q et que

$$\omega_1(t) = x + \int_0^t \sigma(\omega_1(s))\, d\omega_3 + \int_0^t b(\omega_1(s)) ds \qquad Q \text{ p.s}$$

$$\omega_2(t) = x + \int_0^t \sigma(\omega_2(s))\, d\omega_3 + \int_0^t b(\omega_2(s)) ds \qquad Q \text{ p.s}$$

de sorte que pour le même brownien ω_3, ω_1 et ω_2 sont deux solutions de (I) sur le même espace $\Omega° \times \Omega° \times \Omega°$, alors $\omega_1(t) = \omega_2(t)$ Q p.s. par hypothèse et donc les lois images de P et P' sur $\Omega°$ sont les mêmes.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème annoncé :

THEOREME 6. - *Soient* b *et* σ *boréliens bornés il y a équivalence entre*

1) *le problème des martingales relatif à* $\sigma\sigma^*$ *et* b *admet une solution unique*

2) *l'équation stochastique* (I) *a une solution unique en loi*.

DEMONSTRATION. - a) Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{X}_t, \tilde{\beta}_t, \tilde{P})$ une solution de l'équation (I) et P_x l'image sur $\Omega°$ de $\tilde{P}$, d'après la formule d'Ito P_x est une solution au problème des martingales (pour tout x).

b) Soit P_x une solution au problème des martingales, alors $X_t - x - \int_0^t b(X_s)\,ds$ est une P_x martingale sur $\Omega°$ pour tout x il existe donc d'après la proposition 3 un brownien $\tilde{\beta}$, un processus $\tilde{X}$ et une probabilité $\tilde{P}_x = P_x \otimes W$ tels que $X_t = \tilde{X}_t = x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s)\,d\tilde{\beta}_s + \int_0^t b(\tilde{X}_s)\,ds$, la loi de X_t sur $\Omega°$ est P_x : l'unicité en loi entraine donc celle de P_x (Remarquons que le brownien obtenu dépend de x et devrait être noté $\tilde{\beta}(x)$).

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

THEOREME 7. - *Il y a équivalence entre*

1) *Existence et unicité de la diffusion associée à* L

2) *Existence et unicité de la solution au problème des martingales relatif à* L.

3) *Existence et unicité en loi de la solution de l'équation stochastique* (I).

DEMONSTRATION. - Il reste seulement à vérifier que si P_x est une solution au problème des martingales $E_x f(X_t)$ est mesurable pour toute f borélienne bornée. Mais on vient de voir qu'on peut aussi bien calculer cette quantité en considérant sur $\Omega°$ la solution X_t de l'équation

$X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s)d\beta_s + \int_0^t b(X_s)ds$ où β est le brownien canonique pour la probabilité W. On sait qu'alors l'application $(x,t) \rightsquigarrow X_t(x)$ est continue sur $\Omega^\circ \times R^+$ (voir par exemple Neveu [16]), ce qui entraine immédiatement la mesurabilité annoncée.

Il faut remarquer que l'existence seule d'une solution au problème des martingales n'entraîne pas - ipso-facto - celle d'un processus de Markov.

En général c'est l'unicité trajectorielle des solutions de (I) qui est accessible, c'est ce fait qui donne son importance à la proposition 5, on obtient en particulier le théorème suivant, qui est le principal dans le cas dégénéré.

THEOREME 8. - <u>Si</u> σ <u>et</u> b <u>sont lipschitziens et croissent plus lentement que</u> $|x^2|$ <u>à l'infini, il y a existence et unicité de la diffusion associée à</u> L.

REMARQUES. - 1) On trouvera dans la deuxième partie de l'article de Watanabe et Yamada des conditions plus fixes - et plus compliquées - d'unicité trajectorielle.

2) Supposons qu'il existe un vecteur β borélien borné sur tout compact tel que $b(x) = a(x)\beta(x)$, si $P^\circ_.$ est une solution relative au problème des martingales associé à la matrice a et au vecteur $b \equiv 0$, il existe une solution P^b au problème relatif à a et b et

$$\frac{dP^b_x}{dP^\circ_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\{\int_0^t \beta(X_s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t <\beta(X_s),a\beta(X_s)>ds\} \qquad \forall t < \infty.$$

C'est la formule de Cameron-Martin.

Nous allons maintenant revenir au cas des diffusions associées à un opérateur L non dégénéré et montrer comment on peut exploiter dans ce cas l'équivalence que nous avons démontrée. Le résultat essentiel est le suivant :

THEOREME 9. - <u>Soient</u> σ <u>une matrice symétrique borélienne bornée strictement elliptique sur tout compact,</u> b <u>un vecteur borélien borné et</u> $(\Omega,\mathcal{F}_t,X_t,\beta_t,P)$

une solution de $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)d\beta_s + \int_0^t b(X_s)ds$. Alors pour toute f de $L^p(R^n)$ $p \geq n$, pour tout $\lambda > \lambda_o$, il existe N qui ne dépend que de p et de la suite $\{\mu_r\}^*$, tel que $E\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t(x))dt \leq N \|f\|_p$. Cette majoration s'applique en particulier aux solutions du problème des martingales.

Cette majoration repose sur des majorations de fonctions polyèdres convexes qu'on trouvera dans Krylov [10] ou Bakel'man [2]. L'appliquation aux équations stochastiques est de Krylov. On trouvera un exposé de ces faits dans Marchal [13].

THEOREME 10. - Si L est borélien borné strictement elliptique sur tout compact il existe une solution au problème des martingales.

DEMONSTRATION. - Il suffit de considérer une suite de matrices lipschitziennes a_n et b_n convergeant presque surement vers a et b, au couple (a_n, b_n) est associée une solution P_x^n, on montre - comme dans l'article de Stroock et Varadhan - que l'ensemble de ces solutions est relativement compact, puis, à l'aide de la majoration L^p, que tout point d'accumulation de cette suite est aussi solution tirant ainsi parti des deux formulations équivalentes du problème.

Avant d'envisager l'unicité nous allons signaler une conséquence du théorème 10. Soit P_x une solution au problème des martingales, $X_t(x)$ est solution de l'équation stochastique (I), en appliquant la formule d'Ito à une suite de fonctions de classe C^2 convergeant dans $W^{2,p}$ vers u on constate que $e^{-\lambda t} u(X_t) - u(X_o) - \int_0^t e^{-\lambda s}(L-\lambda)u(X_s)ds$ est une P_x martingale.
Si $u \in W_o^{2,p}[B(0,r)]$ (i e nulle sur ∂B) en fixant x et en faisant tendre t vers l'∞ on obtient que $u(x) = t_x \int_0^\infty e^{-\lambda s}(L-\lambda)u(X_s)ds$.

Ceci entraine le corollaire suivant :

---

* Voir définition d'un opérateur strictement elliptique sur tout compact.

THEOREME 11. - Soit L borélien borné strictement elliptique sur tout compact et (D) le problème de Dirichlet $\begin{cases} (L-\lambda)u = f & \text{sur } B(0,r) \quad f \in L^p\,(B(0,r)) \\ u=0 & \text{sur } \partial B(0,r) \end{cases}$

Si (D) a une solution dans $W^{2,p}[B(o,r)]$ celle-ci est unique.

Examinons maintenant le problème de l'unicité : si $u \in W_o^{2,p}$ $K^\lambda(\lambda - L)u = u = \tilde{K}^\lambda(\lambda - L)u$ si K^λ et $\tilde{K}^\lambda$ sont les transformées de Laplace correspondant à P et $\tilde{P}$ deux solutions du problème des martingales (on ne peut parler pour l'instant de résolvante car on ignore si X est un Markov!). Le problème consiste alors à trouver un ensemble de fonctions "grand" sur lequel on sait résoudre (D).

THEOREME 12. - Soit L borélien borné uniformément elliptique sur tout compact. Soit $A_r^{\lambda,p} = \{f \in L^p[B(0,r)] : \exists u \in W_o^{2,p}[B(0,r)]$ tel que $f = (L-\lambda)u\}$ Si $A_r^{\lambda,p}$ est dense dans $L^p\,[B(0,r)]$ pour un $p \geq n$, $\forall r$ et $\forall \lambda > \lambda_o \geq o$. Il existe une diffusion et une seule associée à L.

On démontre en plus que K^λ a une densité $g_\lambda^p\,(x,.)$ continue, qui est dans L^q et que si $\lambda_o = 0$ la résolvante est fortement fellerienne $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1)$.

DEUX APPLICATIONS DU THEOREME 12.

THEOREME 13. - Si L est strictement elliptique sur tout compact et continu il existe une diffusion et une seule associée à L qui est fortement fellerienne. C'est le théorème de Stroock et Varadhan qui résulte du théorème 12 grâce au théorème de Bony [4] :

THEOREME. - Si D est un ouvert borné de R^n de frontière ∂D de classe C^2, si $\gamma°$ désigne l'opérateur de restriction à ∂D et L un opérateur uniformément elliptique où a est continu et b borélien, alors $\forall \lambda \geq 0$ $u \rightsquigarrow \{[L-\lambda]u, \gamma° u\}$ est un isomorphisme de $W^{2,p}(D)$ sur $L^p(D) \times W^{n-\frac{1}{p},p}(\partial D)$ $\forall n < p < \infty$.

THEOREME 14. - Si L est un opérateur borélien borné dans R^2 uniformément elliptique sur tout compact il existe une solution et une seule au problème des martingales (resp. diffusion) et au problème de Dirichlet.

Ceci résulte d'un théorème de Ladyshenskaïa et Uraltseva [11] :

THEOREME. - Dans les conditions du théorème 14 , le problème de Dirichlet a une solution et une seule dans $W^{2,2}[B(0,r)]$ pour f de $L^2[B(0,r)]$ dès que l'affirmation de l'existence entraine celle de l'unicité.

Celle-ci est précisément affirmée au théorème 11.

IIè PARTIE - ETUDE DU PROCESSUS

Dans cette deuxième partie nous décrirons quelques unes des propriétés principales des diffusions dans R^n ; la plus grande partie des résultats ont été plus ou moins bien exposés dans [3]. Nous citerons également certains articles où on peut trouver d'autres propriétés importantes de ces diffusions. Les notations sont celles de la première partie on utilisera en plus pour L la notation suivante $L = \frac{1}{2} \Sigma X_k^2 + Y$ où X_k et Y sont des opérateurs différentiels du premier ordre. Nous nous plaçons dans les conditions d'unicité trajectorielle et plus précisément avec σ et b lipschitzien.

§ 1. ETUDE DES MARTINGALES-FONCTIONNELLES ADDITIVES DE $\mathcal{M}$.

Nous désignerons par $\mathcal{M}$ la famille des martingales fonctionnelles additives continues de la diffusion qui sont de carré intégrable : pour toute martingale M de $\mathcal{M}$ et pour tout x de R^n $E_x(M_t) = 0$, $E_x(M_t^2) < \infty$ pour $t > 0$.

Si Z_t désigne le vecteur $X_t - X_o - \int_o^t b(X_s)ds$, les coordonnées Z_t^i sont des exemples de telles martingales

Nous allons démontrer le théorème suivant qui généralise un résultat bien connu de Vent'cell .

THEOREME 1. - <u>Pour toute martingale</u> M <u>de</u> $\mathcal{M}$, <u>il existe</u> n <u>fonctions numériques</u>, <u>mesurables</u>, g_i, <u>sur</u> R^n <u>telles que pour tout</u> t <u>et tout</u> x

$$\int_o^t g_i^2(X_s)d\{z^i; z^i\}_s < \infty \quad P_x \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad M_t = \sum_{i=1}^n \int_o^t g_i(X_s)\, d Z_s^i \; .$$

Si X est un brownien $\{Z^i ; Z^i\}_s^* = s$ et $Z_s^i = \beta_s$ et le théorème précédent est exactement le théorème de Vent'cell. Pour établir la démonstration nous allons nous ramener à celui-ci.

---

* $\{M ; N\}_s$ est le produit scalaire attaché au processus croissant que nous noterons $\{M ; M\}$.

DEMONSTRATION. - Soit $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}}_t,\widetilde{\beta}_t,P)$ le brownien associé à X au théorème 1 de la première partie :

$$\widetilde{\beta}_t(\omega,\omega') = \int_o^t C_s(\omega)d\,Z_s(\omega) + \int_o^t I_{\alpha_s^{\perp}}(\omega')d\,\beta'(\omega')$$

$$X_t - x - \int_o^t b(X_s)ds = Z_t = \int_o^t \sigma(X_s)d\,\widetilde{\beta}_s$$

où $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \tau(\widetilde{\beta}_s, s \leq t)$, $\widetilde{P} = P \otimes W$, $(\Omega',\mathcal{F}'_s, \beta'_s, P')$ étant un brownien quelconque. Nous allons vérifier que M est une martingale de $\widetilde{\beta}$. Si $b \equiv 0$, $X_t = \int_o^t \sigma(X_s)d\,\widetilde{\beta}_s$ et comme cette équation a une solution unique trajectorielle-ment et qu'on sait construire par approximation une version $\widetilde{\mathcal{F}}$ mesurable $\tau(X_s, s \leq t) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ (cf [21]) comme en fait les tribus $\tau(X_s , s \leq t)$, d'après la formule de Cameron-Martin, ne dépendent pas de b, M_t est $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ mesurable. Il est par ailleurs immédiat de vérifier que pour tout Λ de $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t$ $\int_\Lambda M_t\, d(P_x \otimes W) = \int_\Lambda M_s\, d(P_x \otimes W)$; comme $\widetilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t$ M est bien une martingale de $\widetilde{\beta}$ de sorte que il existe n fonctions numériques h_i , mesurables sur R^n , telles que $\int_o^t h_i^2(\widetilde{\beta}_s)ds < \infty$ et $M_t = \sum_1^n \int_o^t h_i(\widetilde{\beta}_s(\omega,\omega'))d\,\widetilde{\beta}_s^i =$ $\sum_1^n \int_o^1 m_i(s,\omega,\omega')d\,Z_s^i + \sum_1^n \int_o^t n_j(s,\omega,\omega')d\,\beta'^j_s\,(\omega')$. Comme M_t est orthogonale à β' on peut choisir $n_j \equiv 0$ et m_i indépendants de ω'. Pour conclure on utilise la proposition suivante qui est une conséquence du théorème de Mokobodski sur les densités relatives de potentiels comparables [15]. Cette proposition permet d'exploiter le caractère de fonctionnelle additive de M et de prouver que $m_i(s,\omega)$ ne dépend que de $X_s(\omega)$, la démonstration de cette proposition et celle de la fin du théorème figurent dans [3].

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> ζ_t <u>une martingale - fonctionnelle additive d'un processus de Markov</u> $(\Omega , \mathcal{F}_t,X_t,P_x)$ <u>de processus croissant</u> $\int_o^t \varphi(X_s)ds$. <u>Pour toute martingale - fonctionnelle additive</u> M_t <u>de</u> X_t <u>telle que</u>

$$M_t = \int_o^t h(s,\omega)d\,\zeta_s \quad \underline{\text{et}} \quad E_x \int_o^t h^2(s,\omega)\,\varphi(X_s)\,ds < \infty ,$$

<u>il existe une fonction</u> g <u>mesurable, telle que</u> $M_t = \int_o^t g(X_s)d\,\zeta_s$.

§ 2. RANG DU PROCESSUS .

Nous allons d'abord rappeler les définitions suivantes, adaptées de Skorokhod [18] : Une famille $\{M_s \ldots M_p \ldots\}$ de martingales de $\mathcal{M}$ est dite subordonnée à une famille $\{N_1 \ldots N_p \ldots\}$ s'il existe, pour tout i, des fonctions mesurables $g_{i,p}$ telles que $M_i(t,\omega) = \sum_{p=1}^{n(i)} \int_0^t g_{i,p}(X_s)\, d\, N_p(s,\omega) (P_x\ p.s)$ Le premier système est dit subordonné au second, au voisinage de x, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que, P_x p.s pour tout x de $\mathcal{V}$ $M_i(t \wedge \tau) = \sum_{p=1}^{n(i)} \int_0^{t\wedge\tau} g_{i,p}(X_s) d\, N_p(s)$, où τ est le temps de sortie de $\mathcal{V}$.

Deux systèmes de martingales sont équipotents si le premier est subordonné au second et réciproquement.

Un système de martingale est complet si toute martingale de $\mathcal{M}$ orthogonale à chaque M_i est nulle et si, pour tout p, M_p n'est pas subordonnée au système $\{M_1, \ldots, M_{p-1}\}$. Il est clair que $\{Z_t^i = X_t^i - X_0^i - \int_0^t b^i(X_s) ds\ ;\ i = 1..n\}$ est un tel système.

Soient M_1 et M_2 deux martingales de $\mathcal{M}$, on sait que sous hypothèse (L) la mesure associée au processus croissant $\{M_1 ; M_2\}$ est absolument continue par rapport à celle associée à $\{M_2 ; M_2\}$, on peut, comme précédemment, étendre ce résultat grâce au théorème de Mokobodski déjà cité et montrer qu'il existe une fonction mesurable sur R^n notée $\frac{\partial M_1}{\partial M_2}$ telle que $d\{M_1 ; M_2\}_t = \frac{\partial M_1}{\partial M_2}(X_t)\, d\{M_2 ; M_2\}_t$.

Soit $D(x)$ la matrice $\{\frac{\partial M_i}{\partial M_j}(x)\}$, et r son rang, il est facile de vérifier que pour tout autre système complet $\{N_1, \ldots\}$ de matrice D'

$$0 = \int_0^t [r(D(X_s)) - r(D'(X_s))]\, d\{M ; M\}_s \quad \text{pour toute } M \text{ maximale}^*$$

on peut alors donner la définition suivante:

---

* Dans le cas d'un processus qui peut admettre un système complet comportant une infinité de martingales il faut intégrer l'indicatrice de l'ensemble $[r(D) \neq r(D')]$.

DEFINITION 3. - a) S'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_o, tel que pour toute martingale M maximale $\int_0^t 1_{\mathcal{V}}(X_s)d\{M;M\}_s = 0$ P_x. p.s pour tout x de $\mathcal{V}$, nous dirons que le processus est de rang 0 au voisinage de x_o.

b) S'il existe une martingale M de $\mathcal{M}$, un voisinage $\mathcal{V}$ de x_o de temps de sortie τ ; et un entier k strictement positif tels que P_x. p.s pour tout x de $\mathcal{V}$ $\int_0^t 1_{\mathcal{V}}(X_s)d\{M;M\}_s = 0$ et $\int_0^{t\wedge\tau} 1_{\{rD(X_u)\neq k\}}d\{M;M\}_u = 0$ nous dirons que le processus est de rang k au voisinage de x_o.

Dans [3], nous avons démontré le théorème suivant qui relie le rang de la matrice σ à celui du processus.

THEOREME 4. - Si le rang de la matrice σ est nul au voisinage de x_o le rang du processus est nul au voisinage de x_o et réciproquement.

Si le rang de σ est égal à $k\neq 0$ au voisinage de x_o, sauf peut-être sur un ensemble où le processus séjourne un temps presque surement nul, le rang du processus est k au voisinage de x_o ; si réciproquement le rang du processus est k au voisinage de x_o et si $b(x_o)=0$, le rang de σ est k au voisinage de x_o, sauf peut-être sur un ensemble où le processus ne séjourne qu'un temps presque surement nul.

On peut exprimer facilement en terme des champs X_i et Y, des conditions suffisantes pour que le rang du processus soit k au voisinage de x_o et en particulier pour que le processus reste sur une variété [3].

L'essentiel de la démonstration consiste à prouver que si le rang du processus est k, tout système complet de martingales est équipotent à un mouvement brownien jusqu'à τ *, k dimensionnel, c'est en particulier le cas pour $Z^1 \dots Z^n$.

---

* Soit sur $\Omega°$ des variables γ_t adaptées à $\mathcal{F}_t$ et τ un temps d'arrêt. On dira que γ_t est un brownien jusqu'à τ pour la probabilité P sur $\Omega°$ s'il existe un espace de probabilités (Ω',a',P') et un processus $\tilde{\gamma}_t$ sur $\Omega\times\Omega°$, $\mathcal{F}_t\otimes a'$ qui est un brownien pour $P\otimes P'$ et qui coïncide jusqu'à τ avec γ_i.

§ 3. DUALITE .

Nous supposerons dans ce paragraphe que les coefficients de L sont dans C_b^2 (bornés et à dérivées premières et secondes bornées). L'opérateur L possède alors un adjoint L^* défini par

$$L^* u = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} u) - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma b'_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u$$

c étant borné on peut choisir λ tel que $c(x) - \lambda \leq \lambda_o < 0$. A l'opérateur $L^* - c$ correspond une diffusion qu'on peut tuer par la fonctionnelle multiplicative $\exp \int_o^t [c(X_s) - \lambda] ds$, dont le générateur infinitésimal coïncide sur les fonctions de classe C^2 avec $L^* - \lambda$. Nous l'appelerons diffusion de générateur $L^* - \lambda$, de même que nous appelerons diffusion de générateur $L - \lambda$ le processus tué de la diffusion de générateur L par la fonctionnelle $e^{-\lambda t}$.

[Dans un article non encore paru Azencott [1], a étudié systématiquement les diffusions associé à un générateur dont le terme d'ordre zéro n'est pas nul, il a montré en particulier que si m est négative, borélienne et localement bornée il y a une bijection entre les solutions P et P^m au problème des martingales relatif à L et $L + m$ ainsi qu'entre les processus X et X^m correspondants]. Pour notre part nous allons démontrer le théorème suivant :

THEOREME 5. - <u>Soit</u> L <u>un opérateur dont les coefficients sont dans</u> C_b^2, L^* <u>son adjoint et</u> c <u>le terme d'ordre zéro de</u> L^* . <u>Soit</u> λ <u>tel que</u> $c(x) - \lambda \leq -\lambda_o < 0$. <u>Soit</u> $\mathcal{V}_\mu$ <u>la résolvante de la diffusion de générateur</u> $L - \lambda$ <u>et</u> $\mathcal{V}^*_\mu$ <u>celle de la diffusion de générateur</u> $L^* - \lambda$ <u>alors</u> $\mathcal{V}$ <u>et</u> $\mathcal{V}^*$ <u>sont en dualité au sens où pour toute</u> f <u>et toute</u> g <u>borélienne bornée</u>

$$\int f . U^* g = \int U f . g$$

DEMONSTRATION. - On sait que si L n'est pas dégénéré $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$ sont précisément en dualité, nous allons montrer comment on peut approcher $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$

par $\mathcal{V}_\epsilon$ et $\mathcal{V}_\epsilon^*$ non dégénrés et le résultat s'en déduira. Soit σ_ϵ la matrice $\sigma+\epsilon I$ et L_ϵ l'opérateur attaché à σ_ϵ et b. Soit (Ω°, X_t, P_x) la diffusion de générateur $L-\lambda$, on sait que $(\widetilde{\Omega} = \Omega^\circ \times \Omega', \widetilde{P}_x = P_x \otimes W,$ $X_t, \widetilde{\beta}_t(x))$ est une solution de l'équation

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,d\widetilde{\beta}_s + \int_0^t b(X_s)\,ds$$

Soit $(\Omega^\circ, X_t^\epsilon, P_x^\epsilon)$ la diffusion de générateur $L_\epsilon - \lambda$ on sait aussi que $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{P}_x^\epsilon, \widetilde{X}_t^\epsilon, \widetilde{\beta}_t^\epsilon)$ est une solution de

$$X_t^\epsilon = x + \int_0^t (\sigma+\epsilon I)(X_s^\epsilon)\,d\widetilde{\beta}_s^\epsilon + \int_0^t b(X_s^\epsilon)\,ds$$

Puisque ces deux équations ont des solutions uniques en loi, pour calculer $\mathcal{V}f(x)$ et $\mathcal{V}_\epsilon f(x)$, il suffit d'envisager le brownien canonique $(\Omega^\circ, \beta_t, W)$ et les solutions X_t et X_t^ϵ correspondantes sur Ω°.

Soit $A_u^x = \{ \sup\limits_{0\le t\le u} |X_t(x) - X_t^\epsilon(x)| > \sigma \}$; Dynkin ([6] p.341) a montré que $W(A_u^x) \le \frac{\epsilon^2\alpha(u)}{\delta^2}$ où $\alpha(u)$ tend vers zéro avec u (α dépend à priori de x mais il suffit de reprendre la démonstration pour vérifier qu'en fait il n'en est rien). Soit alors f et g dans $C_K(R^n)$ et δ tel que $|x-y| \le \delta$ entraine $|f(x)-f(y)| \le \epsilon$

$$|\mathcal{V}f(x) - \mathcal{V}_\epsilon f(x)| \le E^W \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, |f(X_t^\epsilon) - f(X_t)|\,dt$$

$$\le E^W \int_u^\infty e^{-\lambda t} 2\,\|f\|_\infty + \int_0^u e^{-\lambda t}|f(X_t^\epsilon)-f(X_t)|\,dt + \int_{(A_u^x)^c} \int_0^u e^{-\lambda t}|f(X_t^2)-f(X_t)|\,dt$$

$$\le \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda}\, 2\,\|f\|_\infty + \frac{2\,\epsilon^2\alpha(u)}{\delta^2}\|f\|_\infty + \epsilon\ ,$$ de sorte que $\mathcal{V}_\epsilon f(x)$ converge

uniformément vers $\mathcal{V}f(x)$ quand $\epsilon \to 0$, de même $\mathcal{V}_\epsilon^* f(x)$ converge vers $\mathcal{V}^* f(x)$ et comme $\int \mathcal{V}_\epsilon f.g = \int \mathcal{V}_2^* g.f$ la dualité est établie. Rappelons que dans le cas non dégénéré la dualité ne se limite pas à cette égalité mais qu'il y a également dualité par rapport à la mesure de Lebesgue au sens de Blumenthal et Getoor, il est clair que ça ne peut pas être ce cas en général, il suffit d'imaginer un processus qui ne "remplit" pas bien l'espace.

Nous allons précisément étudier le comportement des trajectoires au paragraphe suivant. Enonçons d'abord le corollaire intéressant :

COROLLAIRE 6. - Soit A le générateur infinitésimal dans C_o, de la diffusion associée à L. Pour toute $f \in \mathcal{D}(A)$. Af est égal au sens des distributions à Lf.

§ 4. ETUDE DES TRAJECTOIRES .

Un des renseignements les plus intéressants relatifs aux trajectoires est la connaissance du support des probabilités P_x. Considérons sur $\Omega°$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, la diffusion de générateur $L = \frac{1}{2} \sum_1^r X_i^2 + Y$ correspondant à σ et b ; Stroock et Varadhan [20] ont obtenu les résultats suivants :

THEOREME 7. - Si σ n'est pas dégénérée supp $P_x = \Omega° \cap \{X_o = x\}$

Si $\sigma \in C_b^2$ supp $P_x = S_{\sigma,b}(x)$

où $S_{\sigma,b} = \{\omega : \exists \psi : R^+ \to R^n$, continue par morceau et telle que

$$X_t(\omega) = x + \int_o^t \sigma(X_u(\omega))\,\psi(u)du + \int_o^t b(X_u(\omega))du$$

Si σ et C^∞, pour tout Z de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_1 \ldots X_r)$ engendrée par les vecteurs X_i ; $S_{\sigma,b}(X) \supset \{\omega ; X_t(\omega) = x + \int_o^t Z(X_u(\omega))du + \int_o^t Y(X_u(\omega))du\}$

La dernière partie de l'énoncé est une conséquence des théorèmes de Bony [5]. Si $\mathcal{L}(X_1 \ldots X_r)$ est de dimension n supp $P(x) = \Omega_o \cap \{X_o = x\}$. Dans [3] nous avons énonçé un théorème très voisin : si $\mathcal{L}(X_1 \ldots X_r)$ est de dimension n le plus petit fermé absorbant est R^n. Toujours sous la même hypothèse Bony [5] a montré que les solutions de $Lu = 0$ formaient une axiomatique de Brelot, nous allons montrer qu'il existe encore d'autres analogies entre le cas où L est non dégénéré et ce que nous appelerons le cas hypoelliptique.

CAS HYPOELLIPTIQUE . - On dit que L (à coefficients C^∞) est hypoelliptique si toute distribution telle que Lu soit C^∞ est elle-même C^∞. Si $\mathcal{L}(X_1 \dots X_r, Y)$ est de dimension n en tout point Hörmander a démontré que L est hypoelliptique. Nous ferons dans la suite l'hypothèse que $\mathcal{L}(X_1 \dots, X_r, Y)$ est en tout point de rang n bien qu'elle ne soit pas nécessaire pour les résultats obtenus.

THEOREME 8 (Densité de P_t) . - <u>On suppose que</u> $\mathcal{L}(X_1 \dots X_r)$ <u>est en tout point de rang</u> n , <u>il existe alors une fonction</u> $p_t(x,y)$ C^∞ <u>sur</u> $R^+ \times R^n \times R^n$ <u>telle que si</u> P_t <u>est le semi-groupe de transition associé à</u> L $P_t f(x) = \int p_t(x,y) f(y) dy$; <u>la fonction</u> $p_t(x,y)$ <u>est solution de</u> $\frac{\partial u}{\partial t} - L^* u = 0$ <u>comme fonction de</u> y <u>et de</u> $\frac{\partial}{\partial u} - Lu = 0$ <u>comme fonction de</u> x . <u>En conséquence la diffusion associée à</u> L <u>est fortement Fellerienne et l'équation</u> $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ <u>admet une solution fondamentale</u>.

DEMONSTRATION. - On reprend la méthode de Mackean en dimension 1 : si $f(t,x)$ est une fonction de $C_K^\infty(R^+ \times R^n)$ on applique la formule de changement de variables d'Ito à $f(t, X_t(x))$ où $X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s) d\beta_s + \int_0^t b(X_s) ds$, comme f est à support compact :

$$0 = f(0,x) + E_x \int_0^\infty (\frac{\partial}{\partial t} + L) f(s, X_s) ds = f(0,x) + \int \int_0^\infty P_s(x,dy) \{(\frac{\partial}{\partial t} + L) f\}(s,y) ds$$

$$= f(0,x) + \int \int_0^\infty (L^* - \frac{\partial}{\partial t}) P_s(x,dy) f(s,y) ds.$$

Il existe donc $p_s(x,y)$ C^∞ en s et y (sauf peut-être en $(0,x)$ où on peut la modifier) telle que

$$P_s(x,dy) = p_s(x,y) dy. .$$

Montrons que pour toute f de classe C^2 , $P_t f$ est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$, si $\mathfrak{a}$ est le générateur de Dynkin on sait que $P_t f$ est solution de $\frac{du}{dt} = \mathfrak{a} u$. Or on sait que si $\mathfrak{A}$ est un opérateur qui a le principe du maximum, si G est un ouvert quelconque de R^n , l'équation $\frac{du}{dt} = \mathfrak{A} u$, $u = \varphi$

sur ∂G a une solution unique (Dynkin [6], th. 5.6). D'après Bony, pour tout x_o on sait précisément trouver un ouvert $\mathcal{V}(x_o)$, une fonction $\tilde{u}$, C^∞ dans $\mathcal{V}(x_o)$ et continue sur $\partial\mathcal{V}$, telle que $\tilde{u} = e^{-t}P_t f$ sur $\partial\mathcal{V}$ et $L\tilde{u} - \tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$ dans $\mathcal{V}$, $\tilde{u}$ est donc solution de $\frac{du}{dt} = \mathfrak{A}u$ où $\mathfrak{A} = G - I$. Quelque soit x_o u et $\tilde{u}$ coïncident donc sur $\mathcal{V}(x_o)$ et $P_t f$ est C^∞ dans $R^+ \times R^n$ et solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$.

Pour montrer enfin que $P_t(x,y)$ est C^∞ dans $R^+ \times R^n \times R^n$ on considère la distribution qui à f,g,h de $C_K^\infty(R^n)$ et $C_K^\infty(R^+)$ pour h fait correspondre $\iint_0^\infty g(x)h(t)P_t f(x)dx\,dt$, on vérifie facilement que celle-ci est solution de $Ku = 0$ où $K = 2\frac{\partial}{\partial t} + L_x + L_y^*$, K étant hypoelliptique d'après le critère de Hörmander, il existe une version C^∞ de $P_t(x,y)$.

THEOREME 9 (Dualité). - <u>On suppose que</u> $\mathcal{L}(X_1,\ldots X_r,Y)$ <u>est en tout point de rang</u> n <u>et que</u> $X_1\ldots X_r$ <u>n'ont pas de zéro commun</u>*. <u>Les résolvantes</u> $\mathcal{V}_\mu$ <u>et</u> $\mathcal{V}_\mu^*$ <u>sont alors en dualité, au sens de Blumenthal et Getoor, par rapport à la mesure de Lebesgue.</u>

DEMONSTRATION. - En plus de la dualité exprimée au § 3, il s'agit de démontrer que $f \rightsquigarrow \mathcal{V}f(x)$ et $g \rightsquigarrow \mathcal{V}^* g(x)$ sont des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. L'application $f \rightsquigarrow \mathcal{V}f(x)$ est une forme linéaire positive sur $C_o(R^n)$, il lui correspond donc une mesure μ_x et pour toute $f \in C_K^\infty(R^n)$ $-f(x) = \mathcal{V}(L-\lambda I)f(x) = \mu_x(L-\lambda I)f = \{(L^*-\lambda I)\mu_x\}f$ c'est-à-dire que $(L^*-\lambda I)\mu_x = -\delta_x$, $L^*-\lambda I$ étant hypoelliptique (Hörmander), il existe une fonction $h_x(y)$ de $L^1(R^n)$ C^∞ hors de x et une constante k tels que $\mu_x = h_x + k\,\delta_x$ donc que $kL^*\delta_x = \lambda h_x + (\lambda k - 1)\delta_x - L^* h_x$, la transformée de Fourier du premier membre est $k e^{itx} P(t)$ P polynôme du 2e degré car L^* est NTD, tandis que celle du second est $O(|t^2|)$ à l'infini : $k = 0$. Ainsi $\mathcal{V}f(x) = \int f(y)h(x,y)dy$; de la même façon $\mathcal{V}^* g(x) = \int g(y)h^*(x,y)dy$.

---

*Si en tout point la matrice de la forme quadratique de L est non nulle on dit que L est non totalement dégénéré (NTD)

Montrons maintenant que $h(x,y) = h^*(y,x)$.

Soit g positive C_K^∞ et φ positive telle que $(\lambda I - L^*)\varphi = g$ alors $(\lambda I - L^*)(\varphi - U^*g) = 0$ comme $\varphi \geq U^*g$ à l'infini $\varphi \geq U^*g$ d'après le principe du maximum : $\mathcal{V}^*g$ est la plus petite $\varphi > 0$ telle que $(\lambda I - L^*)\varphi = g$. Or si $\varphi(x) = \int h(y,x)g(y)\,dy$ $(\lambda I - L^*)\,\varphi(x) = g(x)$ donc

$$\forall g \text{ positive } C_K^\infty \quad \int h(y,x)\,g(y)dy \geq \int h^*(x,y)\,g(y)dy$$

On obtient évidemment l'inégalité inverse qui permet de conclure. On vérifie enfin comme précédemment que $h(x,y)$ est C^∞ sur $R^n \times R^n$.

Signalons que dans le cas de la dimension 2, Roynette [17] a trouvé des conditions pratiquement minimales pour qu'un processus dont l'algèbre de Lie n'est pas de dimension 2 partout conserve les propriétés de principe du maximum dans tout ouvert, résolvante fortement fellerienne, dualité par rapport à la mesure de Lebesgue. Le théorème principal affirme que ces propriétés sont réalisées dès que l'ensemble des points où l'algèbre de Lie n'est pas de dimension 2 est d'intérieur fin vide.

Dans le même article et dans un article non publié encore Roynette étudie également les ensembles polaires des diffusions. En ce qui concerne certains problèmes de récurrence on pourra consulter la thèse de 3è cycle de Ha . Duong . Cette thèse contient également des indications sur le problème de Dirichlet mais celui-ci se rattache plutôt à l'étude des diffusions sur un domaine, au reste il existe une litterature très abondante sur le sujet. La bibliographie la plus complète sur les diffusions, pour les articles antérieurs à 1969, est publiée à la fin d'un article de Freidlin : "Markov Processes and differential équations" dans le volume 3 des Progress in Mathematics. (Plenum Press NY 1969).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZENCOTT — Methods of localization and diffusions on manifolds.

[2] BAKEL'MAN — Méthodes géométriques de solutions des équations elliptiques, Izv. Nauk. 1965 .

[3] BONAMI, KAROUI, REINHARD, ROYNETTE, — Processus de diffusion de générateur dégénéré, Ann IHP, vol.VII n°1, 1971.

[4] BONY — Un lemme d'Analyse fonctionnelle, CRAS 265, série A, 1967 .

[5] BONY — Principe du maximum... pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Séminaire de Théorie du Potentiel (Brelot, Choquet, Deny) 1967-68.

[6] DYNKIN — Markov Processes , Springer Verlag, Berlin, 1965.

[7] FREIDLIN — Markov processes and differential équations Progress in Mathematics.(Plenum Press NY 1969).

[8] HÖRMANDER — Hypoelliptic second order differential équations, Acta Math. Uppsala, t.119, 1967.

[9] KRYLOV — Quasi diffusion Processes, Teoria, 1966,11.2.

[10] KRYLOV — On an inequality in the theory of stochastic integrals, Teoria, 16, 1971.

[11] LADYSHENKAIA et VRALTSEVA, — Linear and quasi linear équations of elliptic type, Math. in Science and Enginering. Academic Press.

[12] MAC KEAN — Stochastic Integrals. Academic Press , New-York, 1969.

[13] MARCHALL — Processus de diffusion à coefficients discontinus, Thèse 3è cycle, 1971, Paris VI.

[14] MEYER — Séminaire de Probabilité I, Springer Verlag, Lectures Notes.

[15] MOKOBODSKI — Séminaire de Proba IV. Densité relative de 2 potentiels comparables.

[16] NEVEU — Intégrales Stochastiques, Notes de cours multigraphiées, 1972.

[17] ROYNETTE — Sur les processus de diffusion de dimension 2 Thèse, Paris, 1971.

[18] SKOROKHOD — On the local construction of a Markov Process, Teoria, t.3, 1966.

[19] STROOCK - VARADHAN — Diffusions Processes with contineous coefficients, Comm. in Pure and appl. Math. vol.22, 1969.

[20] STROOCK - VARADHAN — On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle à paraître au VI symposium de Berkeley.

[21] WATANABE YAMADA — On the uniqueness of solutions of stochastic differential équations, Kyoto, vol.11, n°1 1971.