

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur les désintégrations régulières de L. Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 217-222

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__217_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES DESINTEGRATIONS REGULIERES DE L.SCHWARTZ

P.A. Meyer

Je me propose de présenter ici l'un des résultats importants du mémoire de L.SCHWARTZ Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. Il me semble que ce théorème est beaucoup plus facile à comprendre si l'on fait appel à la notion de projection bien-mesurable d'un processus mesurable.

NOTATIONS

G est un espace polonais, et Ω est l'ensemble de toutes les applications ω de \mathbb{R}_+ dans G , qui sont continues à droite et pourvues de limites à gauche (càdlàg). Nous posons $\xi_t(\omega) = \omega(t)$, et nous munissons Ω des tribus

$$\underline{\underline{F}}^0 = \underline{\underline{T}}(\xi_s, s \in \mathbb{R}_+)$$

$$\underline{\underline{F}}_t^0 = \underline{\underline{T}}(\xi_s, s \leq t)$$

Nous désignons par P une loi de probabilité sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^0)$, par $\underline{\underline{F}}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^0$ pour P , par $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_t^0$ tous les ensembles de mesure nulle de $\underline{\underline{F}}$.

Nous ne faisons aucune différence entre un processus (i.e. une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de v.a. sur Ω) et la fonction $(t, \omega) \mapsto$

$X_t(\omega)$ qui lui correspond sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$: nous passerons d'un point de vue à l'autre sans même le dire. Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est dite évanescence si sa projection sur Ω est P -négligeable, et que deux processus qui ne diffèrent que sur un ensemble évanescent sont dits indistinguables.

Nous notons $\underline{\underline{M}}$ la tribu produit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}^0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, et $\underline{\underline{b}}$ la tribu bien-mesurable sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$: elle est engendrée (sans aucune complétion) par les processus (X_t) , adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^0)$ et à trajectoires càdlàg. Les processus bien-mesurables (resp. mesurables) au sens usuel sont les processus indistinguables de processus $\underline{\underline{b}}$ -mesurables (resp. $\underline{\underline{M}}$ -mesurables).

Rappelons l'un des théorèmes importants de la théorie générale des processus : le théorème de projection bien-mesurable :

THEOREME 1. Etant donné un processus M-mesurable^{réel} borné X, il existe un processus \underline{b} -mesurable borné Y tel que l'on ait

$$(1) \quad Y_T = E[X_T | \underline{F}_{T+}^0] \text{ p.s. pour tout temps d'arrêt } \\ \text{borné T de la famille } (\underline{F}_{t+}^0)$$

Y est défini à un processus évanescent près . On l'appelle la projection bien-mesurable de X.

Nous noterons \bar{X} la classe de processus indistinguables, \underline{b} -mesurables, possédant la propriété (1). Nous nous proposons, d'après SCHWARTZ, de construire un bon noyau markovien N tel que $NX \in \bar{X}$ pour tout processus mesurable borné X .

CONSTRUCTION DU NOYAU DE PROJECTION

L'ensemble Ω se plonge de manière évidente dans l'ensemble produit G^Q , qui peut être muni d'une topologie d'espace polonais. Il n'est pas difficile (cf. [1], p. 100) de voir que Ω est borélien dans G^Q , et que \underline{F}^0 est alors sa tribu borélienne. Ainsi, l'espace mesurable $(\Omega, \underline{F}^0)$ est celui d'un espace luslinien métrisable.

Une conséquence qui nous servira dans la suite : il existe un noyau markovien h de $(\Omega, \underline{F}_{t+}^0)$ dans $(\Omega, \underline{F}^0)$, tel que l'on ait pour toute v.a. X sur $(\Omega, \underline{F}^0)$, positive ou bornée

$$(2) \quad \int h(\cdot, d\omega') X(\omega') = E[X | \underline{F}_{t+}^0] \text{ p.s.}$$

C'est un résultat classique : nous allons en fait en reprendre la démonstration pour établir l'existence du noyau de projection. Puis nous améliorerons ce noyau .

PROPOSITION 1. Il existe un noyau markovien N de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{b})$ dans $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{M})$ tel que l'on ait $NX \in \bar{X}$ pour tout processus mesurable réel borné X .

DEMONSTRATION. Nous pouvons identifier $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{M})$ à un sous-ensemble borélien d'un espace compact métrisable E, muni de sa tribu borélienne. Choisissons un sous-ensemble dénombrable dense D dans $\underline{C}(E)$, qui soit un espace vectoriel sur Q, contienne la fonction 1, et soit \wedge -stable. Pour toute fonction $f \in D$, choisissons arbitrairement un processus \underline{b} -mesurable Y(f), appartenant à la classe $\overline{f | \mathbb{R}_+ \times \Omega}$ de la restriction de f à

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Soit U l'ensemble des points (t, ω) où

$$Y(1)=1$$

$$Y(af+bg)=aY(f)+bY(g) \quad (a, b \text{ rationnels, } f, g \in D)$$

$$Y(f) \geq 0 \text{ pour toute } f \in D \text{ positive}$$

Comme D est dénombrable, U est \underline{b} -mesurable et U^c est évanescent. L'application $f \mapsto Y(f)|_U$ se prolonge de D à $\underline{C}(E)$ par continuité, et de $\underline{C}(E)$ aux fonctions boréliennes bornées en un noyau markovien N^1 de U dans E , que nous prolongerons par 0 hors de U . Un argument de classe monotone montre alors que

Si f est borélienne bornée sur E , la fonction $N^1 f$ est une projection \underline{b} -mesurable du processus $f|_{\mathbb{R}_+ \times \Omega}$.

Appliquons cela à la fonction borélienne f , indicatrice de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega)^c$ dans E , il vient que le processus $N^1 f$ est évanescent. Soit V l'ensemble $\{(t, \omega) : N^1((t, \omega), f) = 0\}$. Si nous remplaçons N^1 par 0 hors de V , nous obtenons un noyau N^2 dont toutes les mesures sont portées par $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Nous pouvons donc oublier E , et considérer N^2 comme un noyau de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{b})$ dans $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{M})$. N^2 satisfait à toutes les propriétés exigées, sauf celle d'être markovien.

Nous le rendons markovien de la manière suivante : si X est un processus mesurable et borné, nous posons

$$\int N(t, \omega, dt', d\omega') X_{t'}(\omega') = \int N^2(t, \omega, dt', d\omega') X_{t'}(\omega')$$

si $\omega \in U \cap V$, et sinon

$$\int N(t, \omega, dt', d\omega') X_{t'}(\omega') = \int h(\omega, d\omega') X_{t'}(\omega')$$

où h est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à \underline{F}_{t+}^0 choisi plus haut. On a bien alors $N1=1$.

LEMME. Soit une fonction bornée $X((t, \omega), (t', \omega'))$, mesurable sur l'espace $(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times (\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, $\underline{b} \times \underline{M}$. Alors la fonction

$$(t, \omega) \mapsto \int N(t, \omega, dt', d\omega') X(t, \omega, t', \omega')$$

est \underline{b} -mesurable, et c'est une projection bien-mesurable du processus $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega, t, \omega)$.

DEMONSTRATION. On se ramène, par un argument de classes monotones, au cas d'une fonction X de la forme $b(t, \omega)c(t', \omega')$, où b est \underline{b} -mesurable, c \underline{M} -mesurable. Le lemme est alors évident.

Nous donnons maintenant des applications de ce lemme.

1) Prenons pour X la fonction

$$X(t, \omega, t', \omega') = I_{\{t \neq t'\}}$$

Le processus $X(t, \omega, t, \omega)$ est nul, et il vient que l'ensemble U^C des (t, ω) tels que $N((t, \omega), dt', d\omega')$ ne soit pas portée par $\{t\} \times \Omega$ est \underline{b} -mesurable, et évanescent.

Nous modifierons N comme nous l'avons fait plus haut (et sans changer de notation) : nous conservons la mesure $N(t, \omega ; \cdot)$ si $(t, \omega) \in U$, et sur U^C nous posons

$$N(t, \omega ; X) = \int h(\omega, d\omega') X_t(\omega')$$

Dans ces conditions, la propriété est satisfaite identiquement, et nous pouvons écrire

$$\int N(t, \omega, dt', d\omega') X_{t'}(\omega') = \int N_t(\omega, d\omega') X_t(\omega')$$

où N_t est un noyau de $(\Omega, \underline{F}_{t+}^0)$ dans $(\Omega, \underline{F}^0)$.

2) Fixons un s rationnel, et prenons

$$X(t, \omega, t', \omega') = 1 \text{ si } s < t, \xi_s(\omega') \neq \xi_s(\omega) \\ 0 \text{ sinon}$$

Le processus $X(t, \omega, t, \omega)$ est nul. Comme l'ensemble des rationnels est dénombrable, et les trajectoires sont continues à droite, il vient que

sauf pour des (t, ω) qui forment un ensemble \underline{b} -mesurable évanescent, on peut affirmer que la mesure $N_t(\omega, \cdot)$ est portée par l'ensemble des ω' tels que $\xi_s(\omega') = \xi_s(\omega)$ pour tout $s < t$.

3) Prenons enfin $X(t, \omega, t', \omega') = I_{\{\xi_t(\omega) \neq \xi_t(\omega')\}}$: nous voyons que la propriété précédente vaut encore avec l'inégalité large $s \leq t$.

En définitive, nous avons démontré le théorème suivant, dû à SCHWARTZ

THEOREME 2. Il existe une famille $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de noyaux markoviens N_t de $(\Omega, \underline{F}_{t+}^0)$ dans $(\Omega, \underline{F}^0)$, et un ensemble P-négligeable U^C , possédant les propriétés suivantes.

1) Pour tout processus mesurable borné X , le processus

$$Y_t(\omega) = \int N_t(\omega, d\omega') X_t(\omega')$$

est \underline{b} -mesurable, et l'on a pour tout temps d'arrêt T fini de la famille (\underline{F}_{t+}^0)

$$Y_T = E[X_T | \underline{F}_{T+}^0] \text{ p.s.}$$

(autrement dit, Y est projection bien-mesurable de X).

2) Pour tout $\omega \in U$, on peut affirmer que

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la mesure $N_t(\omega, d\omega')$ est portée par l'ensemble des ω' tels que $\xi_t(\omega) = \xi_t(\omega')$ sur $[0, t]$.

Cette dernière propriété est vraiment remarquable !

Rappelons, pour être complet, que si X est un processus mesurable continu à droite (resp. càdlàg), sa projection bien-mesurable est indistinguable d'un processus continu à droite (resp. càdlàg) : cela s'applique en particulier à la version de la projection bien-mesurable construite dans l'énoncé.

VARIANTES, EXTENSIONS

1) A côté de la notion de projection bien-mesurable, nous avons la notion de projection prévisible du processus mesurable X .

La tribu prévisible \underline{p} étant engendrée par les processus adaptés à la famille (\underline{F}_t^0) et continus à gauche, la projection prévisible de X est le processus prévisible Y (défini à un processus évanescent près) tel que $Y_T = E[X_T | \underline{F}_{T-}]$ p.s. pour tout temps d'arrêt prévisible fini de la famille (\underline{F}_t) . Dans ces conditions, toute la théorie précédente s'étend en remplaçant "bien-mesurable" par "prévisible", à l'exception de l'application 3) du lemme : $N_t(\omega, d\omega')$ est portée par l'ensemble des ω' qui coïncident avec ω sur $[0, t[$, non $[0, t]$.

2) Si l'on revient à la projection bien-mesurable, mais que l'on remplace dans la définition de Ω les applications càdlàg par les applications continues à droite de \mathbb{R}_+ dans G, on rencontre une difficulté : Ω n'est plus borélien dans $G^{\mathbb{Q}}$, mais seulement complémentaire d'analytique. De même $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ n'est plus qu'un complémentaire d'analytique dans un espace métrique compact E : pour tout cela, voir [2] , p.235 . Construisons comme nous l'avons fait plus haut un noyau N^1 de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{p})$ dans E, tel que pour toute fonction borélienne bornée f sur E, $N^1 f$ soit projection bien-mesurable du processus $f|_{\mathbb{R}_+ \times \Omega}$. Si f est alors universellement mesurable bornée sur E, le processus $N^1 f$ est

bien défini, on a pour tout temps d'arrêt fini T , en notant X le processus $f|_{\mathbb{R}_+ \times \Omega}$

$$N^1(T(\omega), \omega ; f) = E[X_T | \underline{F}_T] \text{ p.s.}$$

mais on ignore en général si $N^1 f$ est bien-mesurable, de sorte qu'on ne peut le considérer comme "projection bien-mesurable" de X .

Prenons cependant pour f l'indicatrice de l'ensemble $(\mathbb{R}_+ \times \Omega)^c$. Cet ensemble étant analytique, il n'est pas difficile de voir que l'ensemble $\{(t, \omega) : N^1(t, \omega ; f) > 0\}$ est \underline{b} -analytique. Le fait qu'il n'y passe aucun graphe de temps d'arrêt, d'après la formule précédente, entraîne alors qu'il est évanescent. On l'enferme alors (théorème de capacitabilité) dans un ensemble \underline{b} -mesurable V^c , également évanescent, et on poursuit le raisonnement comme dans la démonstration du théorème 1, dont l'énoncé reste vrai sans modification.

3) Il en est de même si Ω est l'espace des trajectoires càdlàg à valeurs, non pas dans un espace polonais G , mais dans un espace lusinien métrisable, i.e. un sous-ensemble borélien d'un espace métrique compact H : J.TAYLOR en effet nous a fait remarquer que Ω est alors un complémentaire d'analytique dans le compact H^Q , et $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est, comme ci-dessus, un complémentaire d'analytique dans un espace métrique compact E .

BIBLIOGRAPHIE

L'article de L.SCHWARTZ paraît dans le Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem. En attendant, il existe sous forme photocopiée (Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique).

Les autres références sont

- [1]. C.DELLACHERIE. Ensembles aléatoires I. Sémin. Prob. Strasb. III, 1969, Lecture Notes in M. vol.88.
- [2]. P.A.MEYER. Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH. Sem. Prob. Strasbourg. V, 1971, Lecture Notes in M. vol. 191.