PAUL-ANDRÉ MEYER

Note sur l'interprétation des mesures d'équilibre

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 210-216

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__210_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

NOTE SUR L'INTERPRETATION DES MESURES D'EQUILIBRE

P.A.Meyer

Au Printemps 1972, K.L.CHUNG a écrit une courte note (qu'il a exposée à Paris) qui donne une interprétation probabiliste de la mesure d'équilibre d'un ensemble : alors que le potentiel d'équilibre, et plus généralement la mesure harmonique, s'interprètent au moyen de répartitions d'entrée, la mesure d'équilibre, elle, est liée aux répartitions de sortie. La note de CHUNG paraîtra, sans doute prochainement, sous forme d'article. Mon but ici consiste à donner une autre démonstration du théorème de CHUNG, sous des hypothèses assez différentes (moins analytiques, plus probabilistes). Surtout, cela m'amène à parler du remarquable théorème de REVUZ sur les mesures associées aux fonctionnelles additives, qui n'est certainement pas assez bien connu, en tout cas des participants à ce séminaire.

Il faut encore signaler que GETOOR et SHARPE travaillaient sur ces questions au même moment que CHUNG : CHUNG m'a signalé dans une lettre que les commentaires de GETOOR sur sa note étaient très proches de cette démonstration. L'article de GETOOR et SHARPE " Last exit times and additive functionals" vient de parvenir à Strasbourg au moment où cet exposé est tapé. Il repose effectivement sur des méthodes très proches, mais il va beaucoup plus loin que cet exposé dans l'étude du balayage.

NOTATIONS

Nous partons d'un processus de Markov satisfaisant aux hypothèses droites , et admettant des limites à gauche sur $]0,\zeta]$ dans son espace d'états E. Nous construisons sa réalisation canonique

$$\Omega,\underline{\underline{F}}^{o},X_t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \theta_t$$

Ω étant l'espace des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$, à durée de vie ζ, admettant des limites à gauche dans E sur $]0,\zeta]$. Aucune quasi-continuité à gauche n'est exigée.

Soit L un temps de retour, que nous supposerons parfait :

(1) L est $\underline{\underline{F}}$-mesurable ; $L\leq\zeta$; $L\circ\theta_t=(L-t)^+$ identiquement

et soit c_L la fonction excessive associée

(2) $c_L = P^\bullet\{0<L<\infty\}$

Par exemple, si A est une partie borélienne de E, telle que les trajectoires de X quittent définitivement A au bout d'un temps fini, et si L est le temps de sortie de A

(3) $L(\omega) = \sup\{\, t : X_t(\omega)\in A \,\}$ (0 si cet ensemble est vide)

alors c_L est aussi le potentiel d'équilibre $e_A=P^\bullet\{T_A<\infty\}$.

L'identité des temps de retour (1) entraîne que $P_tc_L= P^\bullet\{t<L<\infty\} \to 0$ lorsque $t\to\infty$: donc c_L est un potentiel borné, et il existe une fonctionnelle additive (A_t) tel que $c_L=E^\bullet[A_\infty]$. Nous définissons alors le noyau potentiel sur E

(4) $U_Af = E^\bullet[\int_0^\infty f\circ X_{s-}dA_s]$

Si l'on remplace la fonctionnelle additive A par une autre fonctionnelle qui engendre le même potentiel c_L, le résultat reste le même : cela tient à la présence du s- , et au théorème VII.17 de [1]. Noter que si G est un ouvert, et si f est nulle hors de G, on a $P_GU_Af = U_Af$: le noyau précédent est donc tout simplement le " noyau associé à c_L" au sens d'AZEMA [2].

Introduisons le processus croissant non adapté $B_t=I_{\{0<L<t\}}$. Un calcul immédiat montre que $E[A_\infty-A_t|\underline{\underline{F}}_t]=E[B_\infty-B_t|\underline{\underline{F}}_t] = c_L\circ X_t$. Alors le théorème VII.17 de [1] nous donne

(5) $E^\bullet[f\circ X_{L-},0<L<\infty] = E^\bullet[\int_0^\infty f\circ X_{s-}dB_s]=E^\bullet[\int_0^\infty f\circ X_{s-}dA_s]= U_Af$.

C'est la " formule d'AZEMA" . A droite, nous avons le noyau U_A, à gauche son interprétation probabiliste au moyen du temps de retour L. C'est là le "squelette" du théorème de CHUNG. Cependant celui-ci concerne des potentiels de mesures, non de fonctionnelles additives, et le passage exige un peu de dualité.

LA FONCTIONNELLE L

(On espère que le fait que L désigne à la fois une fonctionnelle et un temps de retour n'embrouillera pas trop le lecteur).

Rappelons quelque faits concernant la dualité entre mesures excessives et fonctions excessives, qui sont établis dans

[3], p.56, sous une forme légèrement différente.

Soit ξ une mesure excessive <u>sans partie invariante</u>[1]. Supposons que le processus soit <u>transient</u> , i.e. que le noyau potentiel U sur E soit propre. Alors, si u est une fonction excessive

$$p < \xi - p\xi U_p \, , \, u > \text{ croît avec } p$$

Le crochet est l'intégrale de u par rapport à une mesure positive, et ne doit pas être interprété comme une différence ! Pour le voir, on commence par le cas où $u=Uf$, f positive ξ-intégrable : alors $< \xi U_q , f > < \infty$ pour $q>0$, et on obtient (la manipulation de différences étant légitime)

$$< \xi - p\xi U_p , U_q f > \; = \; < \xi \, , \, (I-pU_p)U_q f >$$

Lorsque $q \to 0$, le premier membre croît vers $< \xi - p\xi U_p , u >$, le second vaut $< \xi , U_p f > - q < \xi U_q , U_p f >$: mais ξ est purement excessive, donc $q < \xi U_q , g > \to 0$ si g est positive ξ-intégrable, et c'est le cas pour $U_p f$. En définitive $< \xi - p\xi U_p , u > = < \xi , U_p f >$, et $p < \xi - p\xi U_p , u > = < p\xi U_p , f >$, qui croît bien avec p. On passe de là à u excessive quelconque en prenant des sup de potentiels. Cela permet de poser

(6) $\quad L(\xi,u) = \lim\limits_{p \to \infty} p < \xi - p\xi U_p , u >$ (u excessive)

Nous avons les propriétés suivantes

(7) $\quad L(\xi,Uf) = < \xi , f >$ si f est positive

(8) $\quad u \leqq v \Rightarrow L(\xi,u) \leqq L(\xi,v)$ (évident sur la définition (6))

(9) $\quad u_n \uparrow u \Rightarrow L(\xi,u_n) \uparrow L(\xi,u)$

enfin, il faut noter une propriété d'additivité " continue" de la fonctionnelle L : soit $(u_t)_{t \in T}$ une famille de fonctions excessives , l'ensemble d'indices T étant muni d'une tribu et d'une mesure $\lambda \geqq 0$, la fonction $(t,x) \mapsto u_t(x)$ étant mesurable (on prend sur E la tribu presque-borélienne). Soit u la fonction excessive $\int u_t \lambda(dt)$. Alors $t \mapsto L(\xi,u_t)$ est mesurable et

(10) $\quad L(\xi,u) = \int L(\xi,u_t)\lambda(dt)$

On voit, à partir de (7), et d'un passage à la limite monotone, que

(11) $\quad \xi \leqq \xi' \Rightarrow L(\xi,u) \leqq L(\xi',u)$

1. On dit aussi : purement excessive.

et aussi que si ξ est purement excessive

(12) $\xi_n \uparrow \xi \Rightarrow L(\xi_n,u) \uparrow L(\xi,u)$

Lorsque la fonction u est purement excessive, mettons finie, on sait que $pU_p u = U(p(u-pU_p u))$. Comme $L(\xi,u) = \lim_{p\to\infty} L(\xi, pU_p u)$ d'après (9), et que $L(\xi,Uf) = <\xi,f>$, on a

(13) si u est purement excessive, $L(\xi,u) = \lim_{p\to\infty}\sup p<\xi, u-pU_p u>$

Cette formule n'a été établie que pour u finie, mais il suffit par exemple que $pU_p u$ soit finie pour $p>0$.

Nous n'avons pas tout à fait fini : dans $\mathbb{R}^3$ avec le semi-groupe brownien, la mesure de Lebesgue ne veut pas être purement excessive, de sorte que la principale application nous échappe encore ! Lorsque ξ est excessive quelconque, on définit $L(\xi,u)$ comme $\sup_\eta L(\eta,u)$, η parcourant l'ensemble des mesures purement excessives $\leqq \eta$. Les propriétés (7)(8)(9)(11)(12)(13) s'étendent aisément par convergence monotone, et (10) comme application de (7).

Nous conclurons ce paragraphe en signalant que la fonctionnelle L figure déjà (bien déguisée) dans le mémoire de HUNT, et que bien des gens l'ont redécouverte.

LA MESURE DE REVUZ

Nous rappelons que le processus est supposé <u>transient</u> . La définition suivante n'est pas exactement celle de REVUZ. Elle coincide avec elle lorsque le semi-groupe est de HUNT, et la fonctionnelle A naturelle.

DEFINITION. Soit A une fonctionnelle additive dont le potentiel $E^{\bullet}[A_\infty]$, et soit ξ une mesure excessive. La mesure associée à A (relativement à ξ) est la mesure $f \mapsto L(\xi,U_A f)$.

Comme $U_A f$ est purement excessive si f est bornée, la formule (13) nous donne, en notant μ la mesure associée à A

(14) $$\mu(f) = \lim_{p\to\infty}\sup E^{\xi}[\, p\int_0^\infty e^{-ps} f\circ X_{s-}\, dA_s]$$

Si nous définissons $g\cdot A$ comme la fonctionnelle $\int_0^t g\circ X_{s-} dA_s$, il est évident sur cette formule que la mesure associée à $g\cdot A$ est $g.\mu$.

La fonction $U_A f$ étant purement excessive, on a aussi $U_A f =$

$\lim_n U(n(U_A f - P_{1/n} U_A f))$, fonction croissante de n , d'où d'après (9) et (7), la formule

$$(15) \qquad \mu(f) = \limsup_{n\to\infty} nE^{\xi}[\int_0^{1/n} f\circ X_{s-} dA_s]$$

On y reconnaît la définition originale de REVUZ.

LE THEOREME DE REVUZ

Nous allons maintenant faire des hypothèses de dualité très faibles. Nous supposons que la mesure ξ est une mesure excessive de référence pour le processus, et que les mesures $U(x,dy)$ s'écrivent

$$(16) \qquad U(x,dy) = u(x,y)\xi(dy)$$

où la fonction $u(.,.)$ est mesurable sur $E\times E$, où

(17) $\qquad u(.,y)$ est excessive pour tout y

posons alors pour toute φ borélienne positive

$$(18) \qquad \varphi\hat{U} = \int \xi(dx)\varphi(x)u(x,.)$$

Soit $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des φ boréliennes bornées ≥ 0 telles que $\varphi\hat{U}=v$ soit bornée, et que le processus $(v\circ X_{t-})$ soit continu à gauche (p.s.) sur $]0,\infty[$: notre dernière hypothèse est

(19) Si λ et λ' sont des mesures positives, et $\lambda(\varphi)=\lambda'(\varphi)$ pour $\varphi\in\underline{\underline{H}}$, alors $\lambda=\lambda'$ (" $\underline{\underline{H}}$ est suffisamment riche"

Sous ces hypothèses, nous avons le théorème de REVUZ .

THEOREME. Soient A une fonctionnelle additive, μ la mesure associée, supposée σ-finie. Alors $U_A f = U(\mu f)$ pour tout f .

Comme d'habitude , $U(\mu f)$ désigne $\int u(.,y)f(y)\mu(dy)$. Le théorème est vraiment remarquable : il nous dit que $U_A 1$, si elle est finie, est un potentiel de mesure ; il nous dit de quelle mesure, et il nous donne le noyau U_A.

Il nous suffira d'établir le théorème en supposant μ bornée (autrement dit, $L(\xi,U_A 1) < \infty$), et pour f = 1 : il suffit en effet de l'établir pour f μ-intégrable, mais alors la relation $U_A f = U(\mu f)$ s'écrit $U_{A'}1=U(\mu')$, où $A'=f\cdot A$, et $\mu'=f.\mu$ est bornée et associée à A' . Nous ferons donc ces hypothèses, et nous poserons $U_A 1 = w$.

Comme $\underline{\underline{H}}$ est " suffisamment riche" , il nous suffit de montrer que l'on a pour $\varphi\in\underline{\underline{H}}$, en posant $\varphi\hat{U}=v$

(20) $\quad < v,\mu > = < \varphi,U\mu >_\xi = < \varphi,\ U_A1 >_\xi$

Cela entraînera en effet que $U\mu=U_A1$ ξ-p.p., donc partout (ce sont deux fonctions excessives)

Le membre de gauche de (20) est (par définition de μ) égal à $\lim_p E^\xi[\int_0^\infty pe^{-ps}v\circ X_{s-}dA_s]$. Du côté droit, nous écrivons que $w=U_A1$ est limite croissante de $U(n(w-P_{1/n}w))$. Ainsi notre problème se pose ainsi :

Si v est bornée, et le processus $(v\circ X_{s-})$ est p.s. continu à gauche, a t'on

(21) $\quad \lim\limits_{p\to\infty} E^\xi[\int_0^\infty pe^{-ps}v\circ X_{s-}dA_s] = \underline{\lim}_{n\to\infty} < v,\ n(w-P_{1/n}w)>_\xi$

(la $\underline{\lim}$ au second membre étant en réalité une lim). Or il suffit, sous ces hypothèses , de montrer que le membre de gauche est <u>au plus égal</u> au membre de droite. On ne restreint en effet pas la généralité en supposant $0\leqq v\leqq 1$; 1-v satisfait alors aux mêmes hypothèses, d'où une seconde inégalité analogue pour 1-v , et la somme de ces deux inégalités est l'égalité

$$\lim_{p\to\infty} E^\xi[\int_0^\infty pe^{-ps}dA_s\ ] = \lim_{n\to\infty} < 1,\ n(w-P_{1/n}w) >_\xi$$

qui est un déguisement de (15) : les deux membres valant $L(\xi,w)$ $=\mu(1)<\infty$, chacune des deux inégalités doit être une égalité, d'où le résultat cherché.

Nous écrivons le premier membre de (21) comme limite de sommes de Riemann

$$\lim_p \lim_n E^\xi[\sum_k pe^{-pk/n}v\circ X_{k/n}(A_{(k+1)/n}-A_{k/n})]$$

$$= \lim_p \lim_n \sum_k pe^{-k/n} < v,\ w-P_{1/n}w >_{\xi P_{k/n}}$$

Comme ξ est excessive, nous majorons cela en remplaçant cela par la somme analogue , avec ξ partout au lieu de $\xi P_{k/n}$, d'où la majoration suivante du premier membre de (21)

$$\underline{\lim}_p\ \underline{\lim}_n \frac{p/n}{1-e^{-p/n}} < v,\ n(w-P_{1/n}w >_\xi$$

mais la $\underline{\lim}_n$ est indépendante de p , et est égale au second membre de (21) . CQFD .

APPLICATION AU RESULTAT DE CHUNG

Reprenons la formule (5) : on a

(22) $E^{\bullet}[f_{o}X_{L-}, 0<L<\infty] = U_A f = U(\mu f) = \int u(x,y)f(y)\mu(dy)$

Lorsque L est le temps de sortie (temps de dernier passage) dans un ensemble A, que les trajectoires quittent définitivement au bout d'un temps fini, μ est la " mesure d'équilibre" de A. Ainsi, nous avons la répartition de dernier passage

$$P^{\bullet}\{X_{L-}\in B\ ,\ 0<L<\infty\} = \int u(x,y)f(y)\mu(dy)$$

C'est le résultat de CHUNG. Il faut noter que, formellement, c'est une extension d'une formule de la théorie de MARTIN : supposons en effet que la durée de vie ζ soit p.s. finie, et prenons A=E. Alors la formule nous donne la répartition de $X_{\zeta-}$, que l'on comparera avec le th.9, p.99 de [ ]. Le cas général semble se ramener à celui-ci, en tuant le processus X au temps de retour L , ce qui en fait un c_L-processus (cf [ ], p.229). Cependant, la théorie de MARTIN s'applique à une situation un peu différente, les limites à gauche étant prises, non dans E, mais dans un compactifié. Je ne pense pas que la question doive être tirée au clair dans cet exposé.

Une dernière remarque : les hypothèses de l'exposé ne contiennent pas le cas du mouvement brownien dans une boule ouverte E de $\mathbb{R}^n$, la limite $X_{\zeta-}$ n'existant pas dans E. Mais les raisonnements ci-dessus s'appliquent aux fonctionnelles additives qui ne sautent pas à l'instant ζ , et on obtient le théorème de CHUNG, par exemple, pour les temps de dernier passage dans les boréliens relativement compacts.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. P.A.MEYER. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, Blaisdell, Boston, 1966.

[2]. J.AZEMA. Noyau potentiel associé à une fonction excessive. Ann. Inst. Fourier, 19-2, 1969, p.495-526.

[3]. P.A.MEYER. La frontière de Martin. Lecture Notes in M. 77, Springer-Verlag 1968.

[4]. P.A.MEYER. Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH Sém.Strasbourg V, 1971, p. 213-236 (Lecture Notes 191)