PAUL-ANDRÉ MEYER

Application de l’exposé précédent aux processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 172-179
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__172_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

APPLICATIONS DE L'EXPOSE PRECEDENT AUX PROCESSUS DE MARKOV

P.A. Meyer

Nous allons nous servir dans cet exposé du premier paragraphe de l'exposé précédent ("réduites et jeux de hasard") , ainsi que de l'exposé fait l'an dernier sur les travaux de ROST [1] ([2], "le schéma de remplissage en temps continu") pour présenter un certain nombre de résultats très intéressants sur les fonctions <u>fortement surmédianes</u> , dus à J.F.MERTENS [3]. Le lecteur désireux de faire la comparaison avec l'article de MERTENS doit être prévenu tout de suite que la différence de longueur entre l'article et cet exposé tient, non seulement au fait que l'exposé n'est pas "self contained" tandis que l'article l'est, mais aussi à diverses hypothèses simplificatrices qui allègent la technique (nous supposons l'espace d'états lusinien, et la résolvante borélienne).

HYPOTHESES

On suppose que l'espace d'états E est un sous-ensemble borélien d'un espace métrique compact E' (i.e., E est un espace lusinien métrisable). On se donne sur E un semi-groupe sous-markovien (P_t) de résolvante (U_p), transformant les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, et on suppose que (P_t) admet une réalisation, à valeurs dans l'espace augmenté $E\cup\{\partial\}$, qui satisfait aux <u>hypothèses droites</u>. On suppose aussi que le noyau potentiel U est <u>borné</u> sur E. Ce n'est pas réellement moins général que de le supposer propre, puisqu'on se ramène du cas propre au cas borné par un changement de temps.

Nous aurons besoin d'une compactification de E. Le plus simple consiste à utiliser la théorie de RAY (d'une façon légèrement différente de celle de [4], afin de tenir compte du caractère borné de U) . Notons $\underline{\underline{C}}$ l'ensemble des restrictions à E des éléments de $\underline{\underline{C}}(E')$, puis $\underline{\underline{S}}$ le plus petit cône convexe fermé $\wedge$-stable, stable pour les noyaux U_p et U, contenant la fonction 1 et les fonctions U_pf, Uf ($f\in\underline{\underline{C}}^+$). Nous compactifions alors E relativement à $\underline{\underline{S}}$ par le procédé habituel, et prolongeons les résolvantes au compactifié

F, pour $p\geqq 0$, à la façon de [4] . Notant encore U_p,U les noyaux ainsi définis sur F, il est facile de vérifier que les U_p forment une résolvante de RAY sous-markovienne dont U est le potentiel, et que U applique $\underline{\underline{C}}(F)$ dans $\underline{\underline{C}}(F)$. On rend markoviens les noyaux pU_p $(p>0)$ sur F au moyen du même point ∂ que ci-dessus, adjoint à F comme point isolé.

Sauf mention explicite de la compactification, nous travaillons toujours <u>sur E</u>

DEFINITIONS

- <u>Si</u> λ <u>et</u> μ <u>sont des mesures positives bornées sur</u> E, <u>la relation</u> $(\lambda\dashv\mu)$ <u>signifie</u> $(\lambda(f)\leqq\mu(f)$ <u>pour toute</u> f <u>excessive sur</u> E).

- <u>Si</u> f <u>est une fonction universellement mesurable</u> >0 <u>sur</u> E, <u>on pose</u>

(1) $$\overline{f}(x) = \sup_{\mu\dashv\varepsilon_x} < \mu,f >$$

- <u>Une fonction universellement mesurable positive</u> f <u>est dite fortement surmédiane si l'on a</u> $P_T f \leqq f$ <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de la réalisation canonique</u> $(\Omega,X_t\ldots)$ <u>de</u> (P_t).

Quelques commentaires immédiats : tout d'abord, la relation $\lambda\dashv\mu$ équivaut à $\lambda U\leqq\mu U$: il en résulte aussitôt que le sous-ensemble de $E\times\underline{\underline{M}}^+(E)$

(2) $$J = \{(x,\mu) : \mu\dashv \varepsilon_x \}$$

est borélien. Ensuite, sur les fonctions fortement surmédianes. Ce sont des objets que l'on rencontre tout naturellement en théorie du potentiel : par exemple, dans les travaux de ROST, ou de MOKOBODZKI. Citons par exemple un résultat de CHUNG [5] : soit f une fonction fortement surmédiane, et soit f' sa régularisée excessive. Soit A l'ensemble $\{f \geqq f'+\varepsilon\}$, et soit B un borélien contenu dans A : alors B est sans point régulier (si l'on sait que f est presque-borélienne, A est alors semi-polaire). Cela jouera un rôle dans la suite.

APPLICATION DES RESULTATS SUR LES JEUX DE HASARD

Reprenons l'ensemble J de la formule (2) : c'est une <u>maison de jeu</u>, au sens de l'exposé sur les jeux de hasard, à une toute petite nuance près : les $\mu \dashv \varepsilon_x$ ne sont pas des lois de probabilité en général, leur masse est seulement $\leqq 1$. On lève cette difficulté en ajoutant à chacune d'elles une masse convenable au point ∂ . La fonction $\overline{f}$ est alors exactement celle que nous avons notée Jf dans l'exposé précédent. Deux notions de l'exposé précédent méritent d'être recopiées ici :

<u>fonction J-surmédiane</u> : fonction universellement mesurable $g \geqq 0$, telle que $\mu(g) \leq g(x)$ pour tout x et tout $\mu \dashv \varepsilon_x$

<u>noyau permis</u> : noyau Q de E dans E, tel que $\varepsilon_x Q \dashv \varepsilon_x$ pour tout x.

Dans la situation qui nous occupe, si Q est un noyau permis et μ une mesure positive, on a $\mu Q \dashv \mu$, et on en déduit que <u>le composé de deux noyaux permis est encore un noyau permis</u>. Nous renvoyons alors le lecteur au th.1 de l'exposé précédent, et à sa démonstration : l'approximation de $J^n f$ qui y est donnée lui montrera , pour n=2, que $J^2 f \leq Jf$, donc $J^2 f = Jf$, et finalement $J^{\infty} f = Jf = \overline{f}$. Nous avons donc établi, compte tenu du th.1 de l'exposé précédent, le résultat suivant :

THEOREME 1. <u>Si</u> f <u>est borélienne</u>, $\overline{f}$ <u>appartient à la classe</u> (S). <u>On a pour toute mesure positive bornée</u> θ

(3) $$< \theta, \overline{f} > \ = \ \sup_{\mu \dashv \theta} < \mu, f >$$

<u>La fonction</u> $\overline{f}$ <u>est J-surmédiane</u>, <u>et c'est la plus petite fonction J-surmédiane majorant</u> f.

$\overline{f}$ est , en particulier, fortement surmédiane. Nous allons montrer qu'elle est, de plus, <u>presque-borélienne</u>.

Comme $\overline{f}$ appartient à la classe (S), l'ensemble $\{\overline{f}>a\}$ est analytique pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Soit alors $\overline{f}'$ la régularisée excessive de $\overline{f}$: elle est presque-borélienne, et l'approximation usuelle par des fonctions presque-boréliennes étagées montre que l'ensemble A= $\{\overline{f} > \overline{f}' + \varepsilon\}$ est presque-analytique (pour toute loi initiale μ, A est encadré entre deux ensembles analytiques qui ne diffèrent que par un ensemble μ-polaire). Construisons par récurrence transfinie les fonctions T_α suivantes sur Ω, pour tout ordinal dénombrable α

$$T_0 = 0$$

$$T_\alpha(\omega) = \inf \{ t > T_{\alpha-1}(\omega) : X_t(\omega) \in A \} \text{ si } \alpha \text{ est de première espèce}$$

$$T_\alpha(\omega) = \sup_{\beta < \alpha} T_\beta(\omega) \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

Il résulte du théorème de capacitabilité que T_1 est un temps d'arrêt, et qu'il existe pour toute loi μ un borélien $B \subset A$ tel que $T_1 = T_B$ P^μ-ps. Mais le théorème de CHUNG cité plus haut entraîne que B est sans point régulier, donc $T_1>0$ P^{μ}-p.s.. Par récurrence transfinie, on voit que $T_{\alpha+1}>T_{\alpha}$ p.s. sur l'ensemble $\{T_{\alpha}<\infty\}$, et par conséquent il existe, pour toute loi μ, un ordinal dénombrable γ tel que $T_{\gamma}=+\infty$ P^{μ}-p.s.. Choisissons alors un borélien $B\subset A$, tel que $A\setminus B$ soit négligeable pour toutes les mesures $\mu P_{T_{\alpha}}$: $A\setminus B$ est alors presque-analytique, μ-négligeable et μ-polaire, il peut (encore par le théorème de capacitabilité) être enfermé dans un borélien possédant ces deux propriétés. Donc A est presque borélien. Comme ε est arbitraire, $\overline{f}-\overline{f}'$ et $\overline{f}$ sont presque-boréliennes.

APPLICATION D'UN THEOREME DE MOKOBODZKI

Nous allons utiliser maintenant le théorème suivant de MOKOBODZKI :

THEOREME. <u>Soit</u> θ <u>une mesure positive bornée</u>, <u>et soit</u> $A_{\theta}=\{\mu:\mu\dashv\theta\}$. <u>Alors les points extrémaux de</u> A_{θ} <u>sont les mesures</u> θH_B, <u>où</u> B <u>est borélien dans</u> E .

Ici H_B désigne l'opérateur de réduite relatif au temps d'entrée non régularisé :

$$H_B(x,f)=E^x[f\circ X_{D_B}\ ,\ D_B<\infty]\quad ,\quad D_B(\omega)=\inf\{t\geqq 0\ ,\ X_t(\omega)\in B\}$$

Le lecteur pourra consulter à ce sujet, soit l'article original de MOKOBODZKI [7] , soit la démonstration de [2], p.141 (voir à ce propos la <u>note</u> suivant la bibliographie), qui utilise le schéma de remplissage. Nous allons prouver

THEOREME 2. <u>Si</u> f <u>est borélienne positive sur</u> E, <u>on a pour toute mesure positive bornée</u> θ

$$(4)\qquad <\theta,\overline{f}> = \sup_{B\text{ borélien}} <\theta, H_Bf> = \sup_{K\text{ compact}} <\theta, P_Kf>$$

DEMONSTRATION. Nous allons supposer f bornée : le cas général se ramène à celui-ci en tronquant à n , puis en faisant $n\to\infty$.

Démontrons la première formule. <u>Plaçons nous dans le compactifié</u> F et considérons deux mesures $\mu\dashv\theta$ sur E, identifiées à des mesures sur F portées par E. Soit A^F_{θ} l'ensemble des mesures λ <u>sur F</u> telles que $<\lambda,Uf>\leqq<\theta,Uf>$ pour $f\in\underline{\underline{C}}^+(F)$ (ce qui entraîne $\lambda(1)\leqq\theta(1)$) : A^F_{θ} est vaguement compact, et A_{θ} est l'ensemble des éléments de A^F_{θ} portés par E. D'après le théorème de CHOQUET, l'ensemble T des éléments extrémaux de A^F_{θ} est borélien, et μ admet une représentation intégrale vague

$$\mu=\int_T\tau\, m(d\tau)$$

où m est une loi de probabilité sur T. On a donc pour $f \in \underline{\underline{C}}(F)$, puis (par classes monotones) pour f borélienne bornée sur F

$$\mu(f) = \int_T \tau(f)\, m(d\tau)$$

Donc si μ est portée par E, τ l'est aussi m-p.s., et elle est bien entendu point extrémal de A_Θ. Le théorème de MOKOBODZKI nous donnant tous ces points extrémaux, nous avons

$$\mu(f) \leqq \sup_B < \Theta H_B, f >$$

Passant au sup sur $\mu \in A_\Theta$, il vient $< \Theta, \bar{f} > \leqq \sup_B < \Theta H_B, f >$: l'inégalité inverse est évidente, et le résultat cherché est établi. On n'a pas eu vraiment besoin des compactifications de RAY , et une compactification plus simple (relativement à U seulement) aurait fait aussi bien l'affaire.

Pour la seconde égalité, il suffit de montrer que pour tout B borélien on a $< \Theta H_B, f > = \sup_K < \Theta P_K, f >$. Soit Θ_1 la partie de Θ portée par $B \cap \mathrm{irreg}(B)$, et soit $\Theta_2 = \Theta - \Theta_1$. D'après un lemme de HUNT (cité dans [8], p.6 , étendu à la situation générale qui nous occupe par SHIH , cf [9] et [10]), il existe des ensembles presque-boréliens B_n contenant B, décroissant de telle sorte que $T_{B_n}(\omega) \downarrow T_B(\omega)$ avec stationnarité pour n grand, P^{Θ_2}-p.s., et tels que tout point de B_n soit régulier pour B_n. On a donc $T_{B_n} = D_{B_n}$. D'autre part, on a Θ_1-p.s. $D_{B_n} = D_B = 0$. Ainsi, on a P^Θ-p.s. $D_{B_n} = D_B$ pour n assez grand, et $<\Theta H_B, f > = \lim_n < \Theta H_{B_n}, f >$: il suffit donc de montrer que $< \Theta, H_{B_n} f > \leqq \sup_K < \Theta, P_K f >$. C'est très facile, car $D_{B_n} = T_{B_n}$: nous choisissons des compacts K_m contenus dans la fermeture fine de B_n , et portant à 1/m près la mesure ΘP_{B_n}. Alors $T_{K_m} \uparrow T_{B_n}$ avec stationnarité P^Θ-presque sûre, et $<\Theta P_{K_m}, f>$ tend vers $<\Theta P_{B_n}, f > = < \Theta H_{B_n}, f >$. Le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> f <u>presque-borélienne positive</u>. <u>Alors</u> $\bar{f}$ (<u>définie par</u> (1)) <u>est presque-borélienne</u>, <u>c'est la plus petite fonction</u> J-<u>surmédiane majorant</u> f, <u>et on a la relation</u> (4).

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que $\bar{f}$ est universellement mesurable, et que l'on a (4). On peut supposer f bornée. Soit une mesure bornée Θ . f étant presque-borélienne, choisissons deux fonctions boréliennes bornées $f_1 \leqq f \leqq f_2$ telles que l'ensemble $\{f_1 < f_2\}$ soit

Θ-négligeable et Θ-polaire. Alors $f_1 \circ X_{T_K} = f_2 \circ X_{T_K}$ pour tout compact K, P^Θ-p.s., donc $\langle \Theta, P_K f_1 \rangle = \langle \Theta, P_K f_2 \rangle$, et d'après (4) $\langle \Theta, \overline{f}_1 \rangle = \langle \Theta, \overline{f}_2 \rangle$, ce qui entraîne que $\overline{f}$ est Θ-mesurable, et la seconde égalité (4). Raisonnement identique pour la première.

Le raisonnement précédent nous donne en fait davantage : on a $\sup_K \langle \Theta, P_K(f_2 - f_1) \rangle = 0$, donc $\overline{f_2 - f_1}$, qui est presque-borélienne et fortement surmédiane, est Θ-négligeable. On a donc aussi $P_T\overline{(f_2-f_1)} = 0$ Θ-p.p., pour tout temps d'arrêt T, et l'ensemble $\{\overline{f_2-f_1} > 0\}$ est Θ-négligeable et Θ-polaire. Comme $\overline{f}_2 \leqq \overline{f}_1 + \overline{f_2 - f_1}$, on voit que l'ensemble $\{\overline{f}_2 > \overline{f}_1\}$ possède aussi ces propriétés. Il en résulte que $\overline{f}$ est presque-borélienne.

Soit ensuite $x \in E$, et supposons $\Theta \dashv \varepsilon_x$. Nous avons $\langle \Theta, \overline{f} \rangle = \langle \Theta, \overline{f}_1 \rangle \leqq \overline{f}_1(x)$ puisque $\overline{f}_1$ est J-surmédiane. Mais $\overline{f}_1(x) \leqq \overline{f}(x)$, et il en résulte que $\overline{f}$ est J-surmédiane. Il est clair que toute fonction J-surmédiane majorant f majore $\overline{f}$, donc $\overline{f}$ est bien la plus petite fonction J-surmédiane majorant f.

COROLLAIRE 2 . <u>Soit</u> f <u>une fonction presque-borélienne positive</u>. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) $P_K f \leqq f$ <u>pour tout compact</u> K
2) f <u>est fortement surmédiane</u>
3) f <u>est</u> J-<u>surmédiane</u>

DEMONSTRATION. Il est clair que 3)=>2)=>1). D'autre part 1) entraîne que $\overline{f} \leqq f$, donc $f = \overline{f}$ est J-surmédiane.

COROLLAIRE 3. <u>Soit</u> f <u>une fonction fortement surmédiane</u>, <u>et soit</u> T <u>un temps d'arrêt d'une réalisation quelconque du semi-groupe</u> (P_t). <u>On a alors</u> $P_T f \leqq f$.

En effet, $\varepsilon_x P_T \dashv \varepsilon_x$, donc $\langle \varepsilon_x P_T, \overline{f} \rangle \leqq \overline{f}(x)$, mais $\overline{f} = f$. Le même raisonnement montre que

COROLLAIRE 4. <u>Soit</u> f <u>une fonction fortement surmédiane</u>, <u>et soient</u> μ, Θ <u>deux mesures positives bornées telles que</u> $\mu \dashv \Theta$. <u>Alors</u> $\mu(f) \leqq \Theta(f)$.

BIBLIOGRAPHIE

Les articles sont cités dans l'ordre où ils apparaissent dans le texte.

[1]. ROST (H.). The stopping distribution of a Markov process. Invent.Math. [illegible], 197[illegible], p.

[2]. MEYER (P.A.). Le schéma de remplissage en temps continu. Sém. de Prob. VI, Lect. Notes 258, Springer 1972, p.130.

[3]. MERTENS (J.F.). Optimal stopping and strongly supermedian functions. A paraître dans le Z.W.

[4]. WALSH (J.B) et MEYER (P.A.). Quelques applications des résolvantes de RAY. Invent.Math. 14, 1971, p.143-166.

[5]. CHUNG (K.L.). A simple proof of DOOB's convergence theorem. Sém. de Prob. V, Lect. Notes 191, Springer 1971, p.76.

[6]. MEYER (P.A.). Processus de Markov. Lecture Notes 26, 1967.

[7]. MOKOBODZKI (G.). Elements extrémaux pour le balayage. Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY, théorie du potentiel, Paris, 13e année, 1969/70, exposé n°5.

[8]. MEYER (P.A.). La frontière de MARTIN. Lect. Notes 77, 1968.

[9]. SHIH (C.T.). On extending potential theory to all strong Markov processes. Ann. Inst. Fourier 20, 1970, p.303-315.

[10].MEYER (P.A.).Balayage pour les processus de Markov d'après SHIH. Sém. Prob. V, Lect. Notes. 191, Springer 1971, p.270.

[11].MEYER (P.A.). Deux petits résultats de théorie du potentiel. Sém. de Prob. V, Lect. Notes 191, Springer 1971, p.211-213.

Note sur l'article [2]

Le schéma de remplissage n'est pas réellement utilisé dans cet exposé : nous n'avons utilisé la référence [2] que pour le théorème de MOKOBODZKI, qui peut se démontrer directement, et dont la démonstration dans [2] n'utilise qu'une partie des résultats de ROST (le cas transient seulement). Voici cependant, à l'intention du lecteur qui voudrait utiliser [2], l'éclaircissement de certaines obscurités.

Le point crucial est la prop.9, p.141, où l'on renvoie au §3 pour la vérification du fait que $\mu\in A_\lambda \Rightarrow \mu=\lambda P_T$: au paragraphe 3, il faut appliquer la proposition 16, précisément le fait que 1)$\Rightarrow$ 2), et on sait ici que la propriété 1) est satisfaite d'après la prop.6, p.136. La démonstration de cette prop.6 est trop rapide sur un point : si h est telle que $nU_nh \leqq h$, et positive, alors U_nh est excessive. Il suffit de vérifier cela lorsque h est un potentiel

$$h = g + nU_n g + (nU_n)^2 g + \dots \qquad (g \geqq 0)$$

Alors $nU_n h = \sum_1^\infty (nU_n)^k g$, et cela vaut nUg, qui est bien excessive (voir : Probabilités et potentiel, IX.T55).

Enfin, la définition des fonctions fortement surmédianes donnée p.138, ligne 12 du bas n'est pas logiquement correcte : elle parle de " tous les temps d'arrêt" sans préciser pour quelle réalisation, et dans [2] il ne s'agit pas en fait de la réalisation canonique, comme ici, mais d'une réalisation un peu élargie. Le présent exposé montre que si la propriété est satisfaite pour la réalisation canonique, alors elle l'est aussi pour toutes les réalisations.

Dans les travaux de MOKOBODZKI, les fonctions fortement surmédianes apparaissent sous la forme des fonctions " J-surmédianes" de l' exposé. Pour la compréhension de la prop.16 de [2], il convient de souligner que les ordres sur l'ensemble des mesures associés aux fonctions excessives et aux fonctions fortement surmédianes ne coïncident que dans le cas transient. Pour le mouvement brownien à 2 dimensions, par exemple, l'ordre associé aux fonctions excessives est tout à fait trivial, alors que l'ordre associé aux fonctions fortement surmédianes ne l'est pas (par exemple, l'indicatrice d' un ensemble polaire est fortement surmédiane).

Enfin, il faut noter que l'exposé qui précède est incomplet sur deux points importants. Il ne montre pas que si f est fortement surmédiane presque-borélienne (mettons finie pour simplifier), la différence entre f et sa régularisée f' est encore fortement surmédiane (et MERTENS décrit la structure de telles fonctions fortement surmédianes " purement discontinues"). Surtout, il ne démontre pas le théorème suivant : si f est fortement surmédiane presque borélienne, et μ est une mesure sur E, il existe des f_n excessives telles que $f = \inf_n f_n$ sauf sur un ensemble μ-négligeable et μ-polaire. Lorsqu'on applique ce résultat à $H_B g$, la réduite non régularisée de g excessive sur B presque-borélien, et aux mesures $\mu = \varepsilon_x$, on obtient le célèbre théorème du balayage de HUNT, et les deux théorèmes ont des démonstrations très voisines . Bien entendu, comme pour le théorème de HUNT il faut des hypothèses de transience assurant l'existence de suffisamment de fonctions excessives.