SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SHRISHTI DHAV CHATTERJI

# Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 6 (1972), p. 72-89
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__72_0>

# UN PRINCIPE DE SOUS-SUITES DANS LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

*S. D. Chatterji*

## INTRODUCTION

Le principe dont il est question dans le titre est l'énoncé "métamathématique" suivant : soit $\pi$ une propriété quantitative asymptotique valable pour toute suite des variables aléatoires indépendantes, également réparties, appartenant à une classe d'intégrabilité $L$ déterminée par la finitude d'une norme $\| \|_L$ . Alors pour toute suite $f_n$ des variables aléatoires quelconques assujetties à la seule condition $\sup_n \|f_n\|_L < \infty$ , on peut choisir une sous-suite appropriée $f_{n_k}$ de telle manière qu'une propriété $\tilde{\pi}$ tout à fait analogue à $\pi$ est vérifiée pour $f_{n_k}$ et pour toute autre sous-suite de $f_{n_k}$ . Illustrons ce principe par quelques exemples.

Soit $\pi$ la propriété suivante d'une suite des variables aléatoires $\{X_n\}$ :

$$\lim n^{-1} (X_1 + \dots + X_n) \text{ existe p.p.}$$

On sait que $\pi$ est valable si les $X_n$ sont indépendantes et également réparties et si de plus $\int | X_1 | < \infty$ c. à d. $X_n \in L^1$ . C'est la loi forte des grands nombres de Kolmogorov. Dans ce cas, le principe est vérifié en prenant $\tilde{\pi} = \pi$ . Autrement dit, on peut démontrer que :

Théorème 1 (Komlòs) [9]

Si $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ , il existe $n_1 < n_2 < \dots$ et $f \in L^1$ tels que

$$\lim N^{-1} (f_{n_1} + \dots + f_{n_N}) = f \text{ p.p.}$$

On peut choisir $n_k$ tels que la même relation soit vraie pour toute autre sous-suite de $\{ n_k \}$ et avec la même fonction $f$.

C'est ce théorème remarquable de Komlòs qui m'a conduit à formuler le principe susmentionné. Lors d'un colloque de C.N.R.S. (1969) [5] , j'ai présenté deux autres vérifications de ce même principe en m'inspirant, entre autres, d'un théorème classique de Marcinkiewicz qui généralise la loi forte des grands nombres de Kolmogorov pour les $X_n \in L^p$ , $0 < p < 2$ . Plus précisément, on a les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème 2</u> [5, 6]

Si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ , $0 < p < 2$ , il existe $n_1 < n_2 < \dots$ et $f \in L^p$ tels que

$$\lim_{N \to \infty} N^{-p} \sum_{i=1}^{N} (f_{n_i} - f) = 0 \quad \text{p.p.}$$

On peut choisir $n_k$ tels que la même relation sera vraie pour toute autre sous-suite de $n_k$ et avec la même fonction $f$ . D'ailleurs, on peut toujours choisir $f \equiv 0$ si $0 < p < 1$ .

<u>Théorème 3</u> (Révész) [11] ; cf aussi [5, 6]

Si $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$ , il existe $n_1 < n_2 < \dots$ et $f \in L^2$ tels que $\sum_k a_k (f_{n_k} - f)$ converge p.p. et dans $L^2$ dès que $\sum |a_k|^2 < \infty$

En ce qui concerne la convergence dans $L^p$ dans les théorèmes 1 et 2, il y a une petite différence de la situation classique d'indépendance. Etant également réparties, les variables aléatoires $X_n$ dans le cas classique sont telles, que $\{|X_n|^p\}$ est uniformément intégrable. En faisant la même hypothèse sur une suite $\{f_n\}$ quelconque, on peut renforcer les théorèmes 1 et 2 en déduisant aussi la convergence dans $L^p$. Sur cette question, on peut consulter CHATTERJI [4, 6] .

Ces réalisations du principe des sous-suites m'avaient encouragé à tel point que j'ai même formulé ce principe, bien que timidement, à la fin de mon exposé au Colloque de 1969 [5] . Entre temps, ayant eu plus de précisions sur ce principe, je me suis permis de le formuler dans la forme générale donnée ici. Les vérifications concernent les deux autres théorèmes classiques de la théorie des probabilités : la loi limite centrale et la loi du logarithme itéré. Les démonstrations étant longues et compliquées, je me contente de donner ici seulement les idées principales des démonstrations. Je présente aussi le théorème 4 comme une variation des théorèmes 2 et 3 qui ouvre la possibilité d'une généralisation du principe pour les double-suites des variables aléatoires, conduisant ainsi aux théorèmes concernant les lois infiniment divisibles. Il faut souligner ici que les théorèmes concernant les lois stables sont les propriétés asymptotiques qui doivent être étudiées aussi, dans le but de vérifier le principe des sous-suites. J'ai l'intention de le faire prochainement.

Une dernière remarque concernant la généralisation de ce principe aux variables vectorielles. Tous les théorèmes de cet exposé restent valables pour les espaces de dimension finie et même pour les espaces hilbertiens. Le problème de généraliser les théorèmes 1, 2 et 3 pour les espaces de Banach appropriés (car ces théorèmes ne peuvent pas être vrais pour les espaces quelconques) reste posé. Mes articles [5, 6] donnent quelques renseignements sur ce sujet.

## § 1.- PRELIMINAIRES

Tout ce que nous allons faire dans cet exposé reste valable pour un espace mesuré quelconque. La seule modification nécessaire est de demander dans l'énoncé du théorème 5 que $P(E)$ soit fini. Pourtant, afin de faciliter l'exposition, nous allons supposer que tout se passe dans un espace de probabilité $(S, \Sigma, P)$ de sorte que les notions courantes de la théorie des probabilités soient applicables dans les démonstrations, sans modification aucune. Une fois démontrées dans un espace de probabilité, on peut les généraliser successivement aux espaces de mesure $\sigma$ - finie et aux espaces quelconques — ce dernier parce que les énoncés ne contiennent qu'un nombre dénombrable des fonctions.

Le lemme important ci-dessous nous sera utile.

Lemme 0 :

Si $\{\xi_k\}$ est une suite des v.a. dans $L^p$ $(p \geq 1)$ qui forment les accroissements d'une martingale, c. à d.

$$E\,(\xi_n | \xi_1 \dots \xi_{n-1}) = 0$$

alors

$$\text{(a)} \quad E \left| \sum_1^n \xi_k \right|^p \leq C \sum_1^n E\, |\xi_k|^p \qquad \text{si} \quad 1 \leq p \leq 2$$

$$\text{(b)} \quad E \left| \sum_1^n \xi_k \right|^p \leq C\, E \left( \sum_1^n \xi_k^2 \right)^{p/2} \qquad \text{si} \quad p > 2$$

Dans la suite, $C$ représentera toujours une constante positive qui n'aura pas d'importance dans le raisonnement et qui pourra se varier d'une apparition à l'autre. La formule (a) du lemme est due à Esseen et von Bahr. Une démonstration très courte se trouve dans Chatterji [4] . La formule (b) est une partie d'une importante inégalité de Burkholder [2] . L'inégalité de Hölder pour les nombres réels donne

$$\left( \sum_1^n \xi_k^2 \right)^{p/2} \leq n^{(p-2)/2} \sum_1^n |\xi_k|^p \qquad (p > 2)$$

d'où la formule (b) donne $(p > 2)$

$$E \left| \sum_1^n \xi_k \right|^p \leq C\, n^{(p-2)/2} \sum_1^n E\, |\xi_k|^p \quad .$$

C'est dans cette forme que nous appliquerons (b).

## § 2.- LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Le théorème suivant généralise un théorème de Banach et Saks [Th. I, p.52; 1] et de Morgenthaler [Th. 1, p.284; 10] . La démonstration de ce théorème illustre bien la méthode principale dont nous nous servons pour établir le principe des sous-suites dans les différents cas. L'idée principale est de réduire l'énoncé à un théorème concernant des martingales convenables. Cette méthode donne une démonstration d'une extrême simplicité pour le théorème qui suit, par contraste avec les calculs pénibles de [1] et [10] .

Théorème 4

Soit $F$ une suite bornée des éléments de $L^p$ , $p > 1$ . Il existe une fonction $f \in L^p$ et une sous-suite $\{f_n\}$ de $F$ telles que pour toute sous-suite $\{f_{n_k}\}$ et toute matrice $(a_{nk})$ $n \geq 1$ , $k \geq 1$ avec

$$\text{(a)} \quad \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$\text{(b)} \quad \sup_k |a_{nk}| = \gamma_n \to 0$$

on a la relation suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \|\sum_k a_{nk} (f_{n_k} - f)\|_p = 0$$

Démonstration

En choisissant d'abord une sous-suite qui converge faiblement dans $L^p$ vers une fonction $f$ , et en retranchant cette dernière de chaque élément de la sous-suite, on réduit le problème au cas d'une suite $g_n$ qui tend vers $0$ faiblement dans $L^p$. Choisissons maintenant une fonction simple $h_n$ (c. à d. $h_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes) telle que $\sum \|g_n - h_n\|_p < \infty$ . Il suffit de démontrer le théorème pour $h_n$ parce que

$$\|\sum_k a_{nk} g_k\|_p \leq \sum_k a_{nk} h_k\|_p + \gamma_n \sum_k \|g_k - h_k\|_p \quad .$$

Evidemment, $h_n \to 0$ faiblement aussi. Par récurrence, on peut choisir une sous-suite $n_1 < n_2 < \ldots$ telle que $n_1 = 1$ et

$$|E(h_{n_k} | h_i , i \in I)| < 2^{-k} \quad ,$$

pour tout $I \subset \{n_1 , n_2 , \ldots, n_{k-1}\}$ .

Cela est possible parce que la $\sigma$ - algèbre engendrée par $h_i$ , $i \in I$ , est formée d'une partition finie de l'espace et $\int_A h_n \to 0$ à cause de la convergence faible de $h_n$ . Nous allons démontrer que $h_{n_k}$ est une sous-suite voulue. En effet,

$$h_{n_k} = \xi_k + \xi'_k$$

où

$$E(\xi_k | \xi_1 \ldots \xi_{k-1}) = 0 \quad \text{et} \quad |\xi'_k| < 2^{-k} \quad .$$

Donc

$$|\sum_k a_{nk} \xi'_k| \leq \sum_k |a_{nk}| 2^{-k} < \gamma_n$$

et

$$\|\sum_k a_{nk} \xi'_k\|_p \leq \gamma_n \to 0$$

Si $1 < p < 2$ , par lemme 0 ,

$$E |\sum_k a_{nk} \xi_k|^p \leq C \sum_k |a_{nk}|^p E |\xi_k|^p$$

$$\leq C \sum_k |a_{nk}|^p$$

$$\leq C\ \gamma_n^{p-1} \sum_k |a_{nk}|$$

$$\leq C\ \gamma_n^{p-1} \to 0$$

Si $p > 2$ , encore en vertu du lemme 0 ,

$$E\ |\sum_k a_{nk}\ \xi_k|^p \leq C\ E\ |\sum_k a_{nk}^2\ \xi_k^2|^{\frac{p}{2}}$$

(Hölder)
$$\leq C\ E\ |\sum_k a_{nk}^2\ \xi_k^p| \cdot (\sum_k a_{nk}^2)^{(p-2)/2}$$

$$\leq C\ (\sum_k a_{nk}^2)^{p/2}$$

$$\leq C\ \gamma_n^{p/2}\ (\sum_k |a_{nk}|)^{p/2} \to 0$$

Cela établit que $\|\sum_k a_{nk}\ \xi_k\|_p \to 0$

et on voit alors que

$$\|\sum_k a_{nk}\ h_{n_k}\|_p \leq \|\sum_k a_{nk}\ \xi_k\|_p + \|\sum_k a_{nk}\ \xi'_k\|_p \to 0$$

De par le choix de $h_{n_k}$ il est clair aussi que n'importe quelle autre sous-suite de $h_{n_k}$ aura la même propriété. Ainsi, le théorème 4 est complètement démontré.

Remarque 1

En mettant $a_{nk} = 1/n$ pour $k \leq n$ et $a_{nk} = 0$ pour $k > n$, on retrouve le théorème de Banach et Saks, qui était le premier théorème établissant l'équivalence de la fermeture faible et la fermeture forte pour les ensembles convexes d'un espace vectoriel topologique localement convexe (Mazur). Le théorème de Morgenthaler correspond à : $a_{nk} = \lambda_k/(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ pour $k \leq n$ et $a_{nk} = 0$ pour $k > n$ avec $\lambda_k \geq 0$, $\sum \lambda_k = \infty$ et $\lambda_n/(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \to 0$. Notons que ceci implique que :
$\max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k/(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \to 0$ de sorte que la condition (b) du théorème 4 est valable.

Remarque 2

Il n'est pas question d'obtenir la convergence presque partout dans le théorème 4, comme on a pu l'établir dans les théorèmes 1 - 3. En effet, même pour une suite de variables aléatoires $X_n$, indépendantes et également réparties avec $a_{nk}$ comme dans le théorème de Morgenthaler ci-dessus, on n'aura pas toujours la convergence p.p. On trouve un contre-exemple dans Salem et Zygmund [Th. 1.5.1; 13] même dans le cas $X_n = \pm 1$ avec probabilités égales. L'exemple qui suit n'est pas aussi fin que celui de [13] mais démontre bien l'impossibilité d'avoir la convergence p.p. dans l'énoncé du théorème 4.

Soit $\{X_n\}$ une suite des v.a. indépendantes avec la même répartition. Mettons $G(x) = P(|X_n| > x)$ et supposons que $\int_0^\infty G(x)\,dx < \infty$ (c. à d. $X_n \in L^1$) et $G(x) > 0$. Si $x_n = G^{-1}(1/n)$, $\varepsilon_n = 1/x_n$ on a $1/n = G(x_n) < C/x_n$ et $\sum \varepsilon_n = \sum 1/x_n > C \sum \frac{1}{n} = \infty$.

On peut supposer $0 < \varepsilon_n < 1$ pour tout $n$ sans perte de généralité.

Définissons maintenant

$$B_n = \left\{ (1 - \varepsilon_1) \ldots (1 - \varepsilon_n) \right\}^{-1} \uparrow \infty$$

$$\lambda_n = B_n - B_{n-1}$$

$$\lambda_n / B_n = 1 - B_{n-1} / B_n = \varepsilon_n \to 0$$

Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k / B_n \to 0$ p.p. on obtiendra aussi que $\lambda_n X_n / B_n \to 0$ p.p.

Cette dernière équivaut à $\sum G(t\, B_n/\lambda_n) < \infty$ pour tout $t > 0$. Mais de notre choix de $\lambda_n$ et $B_n$, on a

$$\sum G\,(B_n / \lambda_n) = \sum G\,(1 / \varepsilon_n)$$

$$= \sum G\,(x_n) = \sum 1/n = \infty$$

<u>Remarque 3</u>

Evidemment, le th. 4 donne le résultat suivant sur $X_n \in L^p$, v.a. indépendantes et également réparties $(p > 1)$ :

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_k a_{nk} \, (X_k - \mu) \right\|_p = 0$$

où $\mu = E\,(X_k)$ et $\{a_{nk}\}$ sont comme dans le th. 4.

Remarque 4

Nous pouvons aussi généraliser convenablement le th. 4 au cas $0 < p \leq 1$ en utilisant les inégalités récentes de Burkholder et Gundy [3] et de Davis [7] . Nous n'entrons pas dans les détails ici.

## § 3.- LA LOI LIMITE CENTRALE

Nous abordons maintenant la loi limite centrale. Le théorème principal ici est le suivant :

Théorème 5

Soit $F$ une suite bornée dans $L^2$ . Il existe une sous-suite $F_o$ de $F$ , une fonction $f \in L^2$ et une fonction $\theta \in L^1_+$ telles que pour chaque sous-suite $\{f_n\}$ tirée de $f_o$ on a la relation suivante :

$$\lim_{n \to \infty} P \left\{ E, n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} (f_k - f) \leq x \right\}$$

$$= P(E) F_\theta (x) \qquad (x \neq 0)$$

où
$$P(E) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, dF_\theta(x) = \int_E \exp(-\theta t^2/2)\, dP .$$

Notons que $\theta$ peut être identiquement zéro et, dans ce cas, la loi $F_\theta$ est concentrée à zéro.

Comme la démonstration de ce théorème est très longue, nous nous bornerons ici à donner quelques remarques sur le contenu de celui-ci. La fonction $f$

joue le rôle de la moyenne de la théorie classique et $\theta$ celui de la variance. En fait, on choisit $f$ comme une limite faible de la suite donnée et $\theta$ comme la limite p.p. de $\{(f_1 - f)^2 + \ldots + (f_n - f)^2\}/n$ après avoir choisi une sous-suite $f_n$ convenablement. Dans le cas des v.a. $X_n \in L^2$ indépendantes et également réparties, $f \equiv E(X_n)$ et $\theta \equiv$ Variance $(X_n)$, on retrouve le théorème classique même dans la forme moderne où l'on note la propriété mélangeante de la suite $(X_1 - \mu) + \ldots + (X_n - \mu)/n^{\frac{1}{2}}$ $(\mu = E(X_1))$. D'autre part, on voit dans ce cas classique que l'on ne peut pas se passer des fonctions $f$ et $\theta$ ni espérer avoir, en général, la loi normale classique au lieu de la loi $F_\theta$. En effet, si l'on considère $f_n = g\cdot(X_n + f)$ où $X_n \in L^2$ sont indépendantes avec la même répartition, $f \in L^2$ quelconque et $g$ choisi de sorte que $f_n$ reste une suite bornée dans $L^2$, on voit que la loi normale classique doit être remplacée par une loi qui est celle d'une v.a. $\xi$ qui est normale avec variance $\theta$ qui est elle-même une v.a.

Remarquons qu'au fond, la méthode de démonstration est toujours celle de réduire la situation à une martingale convenable. Ensuite, on utilise une méthode due à Salem et Zygmund [12] pour établir une loi limite centrale généralisée pour ces martingales. Nous constatons que cette méthode donne presque tous les résultats sur les lois limites centrales connues pour les martingales — y compris celles de Billingsley-Lévy — même dans une forme généralisée. Il semble aussi tout à fait clair que l'on puisse obtenir les sous-suites qui soient plongeables, en limite, dans les processus de diffusion. Ainsi, on obtiendra d'un coup une vérification du principe des sous-suites dans tous les cas associés aux v.a. indépendantes, dans $L^2$

et de même loi. Notons enfin que le théorème concerne seulement la normalisation $n^{-\frac{1}{2}}$ , dite normale, où l'on sait que la condition d'appartenance à $L^2$ est optimale. Le problème de normalisation quelconque avec les suites "bornées" de la classe associée aux répartitions $G(x)$ telles que $\int_{-x}^{x} u^2\, dG(u)$ est une fonction de variation lente, reste posé.

La proposition suivante donne une loi limite centrale plus générale, mais pour les fonctions bornées.

Théorème 6

Soit $F$ une suite des fonctions mesurables uniformément bornées. Il existe $f \in L^\infty$ , $\theta \in L_+^\infty$ et une sous-suite $F_o$ de $F$ telles que pour une sous-suite $\{f_n\}$ quelconque de $F_o$ et une matrice $(a_{nk})$ $n \geq 1$ , $k \geq 1$ quelconque avec les propriétés

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_k |a_{nk}|^2 = 1$$

$$\text{(b)} \qquad \max_{k \geq 1} . |a_{nk}| = \gamma_n \to 0$$

on a la relation suivante :

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ E; \sum_k a_{nk}\, f_k \leq x \right\} = P(E)\, F_\theta(x) \ , \quad (x \neq 0)$$

où $F_\theta$ est comme dans le th. 5.

Le théorème 6 généralise le théorème principal de Morgenthaler [10] qui ne considère que les fonctions orthonormales bornées. Il faut souligner que, parce que nous réduisons le théorème à un cas où interviennent seulement les martingales, ou plus précisément les v.a. $\xi_n$ telles que $E(\xi_n | \xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = 0$ et parce que ces dernières forment une suite orthonormale, nous pouvons déduire le th. 6 de celui de Morgenthaler, quitte à généraliser ce dernier pour les matrices plus générales qui interviennent ici. Mais du fait de l'orthogonalité forte des $\xi_n$, notre démonstration est beaucoup moins laborieuse.

## § 4.- LA LOI DU LOGARITHME ITERE

Nous arrivons maintenant à notre dernier sujet — la loi du logarithme itéré. Ici, le théorème de Hartman-Wintner [8] d'un côté et le résultat de Strassen [15] de l'autre nous enseignent que, pour les v.a. $X_n$ indépendantes et également réparties, la condition asymptotique

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)/(2n \log \log n)^{\frac{1}{2}} = \sigma < \infty \quad \text{p.p.}$$

est équivalente aux existences de $E(X_k)$ $(=\mu)$ et $\mathrm{Var}(X_k)$ $(=\sigma^2)$. Suivant le principe des sous-suites, on est donc amené au "théorème" suivant : si $F$ est une suite bornée dans $L^2$, il existe une sous-suite $F_o$, $f \in L^2$, $\theta \in L^1_+$ telle que pour chaque sous-suite $f_n$ de $F_o$ on a

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (f_k - f)/(2n \log \log n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\theta} \quad \text{p.p.}$$

Les résultats de Stout [14] donnent à penser que l'énoncé est certain. Pour le moment, je ne peux établir que le théorème suivant.

Théorème 7

Soit $F$ une suite bornée dans $L^\infty$. Il existe une sous-suite $F_0$, $f \in L^\infty$, $\theta \in L^\infty_+$ telle que pour chaque sous-suite $\{f_n\}$ de $F_0$ et chaque suite $\{a_k\}$ de nombres réels tels que

$$\text{(a)} \quad A_n = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

$$\text{(b)} \quad \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \Big/ \left\{ A_n (\log \log A_n)^{\frac{1}{2}} \right\} \to 0$$

on a la relation suivante :

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (f_k - f) \,/\, (2 A_n^2 \log \log A_n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\theta} \quad \text{p.p.}$$

Une démonstration très courte est celle qui dépend d'un théorème de Mary Weiss [16] qui démontre l'énoncé qui précède pour les fonctions orthonormales. En réduisant le problème comme précédemment à un problème pour une suite des v.a. $\xi_n$ telles que $E(\xi_n | \xi_1 \dots \xi_{n-1}) = 0$, il ne reste qu'à démontrer le théorème pour ces suites très fortement orthogonales. Le théorème de Mary Weiss achève maintenant la démonstration. Il faut noter que les détails de la preuve de Mary Weiss deviennent plus simples si l'on ne considère que les suites centrées comme $\xi_n$. Nous donnerons les détails une autre fois.

# REFERENCES

[1] Banach, S. et Saks, S. (1930)
Sur la convergence forte dans les champs $L^p$
Studia Math. 2, 51-67.

[2] Burkholder, D. L. (1966)
Martingales transforms. Ann. Math. Statist. 37, 1494-1504.

[3] Burkholder, D. L. et Gundy R. F. (1970)
Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. 124, 249-304.

[4] Chatterji, S. D. (1969)
An $L^p$ - convergence theorem.
Ann. Math. Statist. 40, 1068-1070.

[5] Chatterji, S. D. (1969)
Un théorème général de type ergodique.
Colloque C.N.R.S. Probabilités sur les structures algébriques.

[6] Chatterji, S. D. (1970)
A général strong law.
Inventiones Math. 9, 235-245.

[7] Davis, B. (1970)
On the integrability of the martingale square function.
Israel J. Math. 8, 187-190.

[8] Hartman, P. et Wintner, A. (1941)
On the law of the iterated logarithm.
Amer. J. Math. 63, 169-176.

[9] Komlòs, J. (1967)
A generalization of a problem of Steinhaus.
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18, 217-229.

[10] Morgenthaler, G. (1955)
A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems.
Trans. Amer. Math. Soc. 79, 281-311.

[11] Révész, P. (1965)
On a problem of Steinhaus.
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16, 310-318.

[12] Salem, R. et Zygmund, A. (1947)
On lacunary trigonometric series I.
Proc. Nat. Acad. Sci. 33, 333-33

[13] Salem, R. et Zygmund, A. (1954)
Some properties of trigonometric series whose terms have random signs.
Acta Math. 91, 245-301.

[14] Stout, W. F. (1970)
A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm.
Z. Wahr. verw. Geb. 15, 279-290.

[15] Strassen, V. (1966)
A converse to the law of the iterated logarithm.
Z. Wahr. verw. Geb. 4, 265-268.

[16] Weiss, Mary (1959)
On the law of the iterated logarith for uniformly bounded orthonormal systems.
Trans. Amer. Math. Soc. 92, 531-553.

S. D. CHATTERJI

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Av. de Cour 26

1007 Lausanne / Suisse