JEAN BRETAGNOLLE

p-variation de fonctions aléatoires. 1ère partie : séries de Rademacher

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 51-63
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__51_0>

Université de Strasbourg 1970/71

Séminaire de Probabilité

p-VARIATION DE FONCTIONS ALÉATOIRES

$1^{\text{ère}}$ partie: SÉRIES DE RADEMACHER

par Jean Bretagnolle

I. Introduction : Soit f une fonction réelle définie sur R ou Z , $[a,b]$ un intervalle (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$); on note $\mathcal{P}_{a,b}$ la famille des partitions finies de $[a,b]$, soit des $P=\{t_o,t_1,..,t_k | k=k(P)\in\mathbb{N}; a=t_o<<t_1<..<t_k=b\}$, avec $t_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ suivant le cas; on définit alors , pour $p>0$, la p-variation de f sur $[a,b]$, notée $W^p(f)_a^b$ par:

$$\text{(I)}\quad W^p(f)_a^b = \sup_{P\in\mathcal{P}_{a,b}} \Big\{ \sum_{t_i\in P;\, 0\leqq i<k(P)} |f(t_{i+1})-f(t_i)|^p \Big\}.$$

Si la fonction n'est définie que sur $[a_o,b_o]$, on peut toujours la prolonger par constance et continuité en dehors de $[a_o,b_o]$, de sorte que la p-variation est définie pour tout couple a,b, avec a<b.

Dans cette première partie, on se donne une suite ε_i de Rademacher (variables indépendantes, $P\{\varepsilon_i=1\}=P\{\varepsilon_i=-1\}=\frac{1}{2}$), une suite de réels a_i ($i\varepsilon$ N), et on définit la fonction aléatoire S par $S(n) = \sum_{i\leqq n} a_i.\varepsilon_i$; la p-variation de cette fonction est alors une v.a. et

Théorème 1 :si $p \in\,)0,2($,il existe une constante M_p, ne dépendant que de p, telle que:

$$\sum_{a<i\leqq b} |a_i|^p \leqq E\{ W^p(S)_a^b \} \leqq M_p.\Big[\sum_{a<i\leqq b} |a_i|^p \Big] .$$

<u>Remarques</u> : le résultat est faux pour p=2, comme on le verra dans la deuxième partie. Il est évident pour $0<p\leqq 1$, avec $M_p=1$, car dans ce cas $|a+b|^p \leqq |a|^p+|b|^p$, donc la partition qui réalise le sup est la partition <u>certaine</u> la plus fine possible. Donc dans la suite, $1<p<2$.

***

II.Notations et résultats préliminaires

- i,j,k,m,n,u,v, sont des entiers positifs ou nuls ;
- la notation $f(a,b,..) \lesssim g(a,b,..)$ signifie qu'il existe une constante C ne dépendant pas de $a,b,..$ telle que $f(a,b,..) \leqq Cg(a,b,..)$ et $f \approx g$ que $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$.(les constantes peuvent dépendre de p)
- si M et N sont deux fonctions aléatoires définies sur le même espace de probabilité, on a l'inégalité

$$(W) : \quad W^p(M+N)_a^b \text{ et } W^p(M+N)_a^b \lesssim W^p(M)_a^b + W^p(N)_a^b \quad .$$

(pour chaque partition, on utilise terme à terme l'inégalité $|a\pm b|^p \leqq 2^{p-1}[|a|^p+|b|^p]$, on prend le sup à droite, puis à gauche).

- <u>Inégalités de Paul Lévy</u> : les $a_i\varepsilon_i$ sont des v.a. symétriques, indépendantes, et si désormais on note S_i^j la quantité $S(j)-S(i)$, S^{*j}_i la quantité $\sup\limits_{i<k\leqq j} |S_i^k|$, on a les inégalités suivantes:

$$(P.L.1): \quad P\{ S^{*j}_i > x\} \leqq 2P\{ |S_i^j| > x\} \qquad \text{d'où}$$

$$(P.L.2): \quad E\{(S^{*j}_i)^p\} \lesssim E\{ |S_i^j|^p\} \; .$$

- <u>Inégalité de Bienaymé-Tchébichev</u> : on l'utilisera sous la forme :

$$(B.T.): \quad P\{ |S_i^j|^p > 2^v\} \leqq \sum_{i<k\leqq j} \omega_v(a_k), \text{ où } \omega_v(a)=\operatorname{Inf}(a^2 2^{-2v/p}, 1)$$

où les ω ont les propriétés suivantes :

$$(\Omega.1) : \omega_v(a+b) \lesssim \omega_v(a) + \omega_v(b)$$

$$(\Omega.2) : \text{si } a \geq 1, \sum_{v\geq 0} 2^v.\omega_v(a) \lesssim |a|^p$$

$$(\Omega.3) : \omega_v(a) \gtrsim \omega_{v+1}(a) \ .$$

- En complétant éventuellement par des 0 la suite des a_i, $a<i\leq b$, on peut toujours supposer, ce qu'on fait dans la suite, que i varie entre 0 et 2^n pour un n de $\mathbb{N}$.

- <u>L'inégalité fondamentale</u> : Ecrivons maintenant W_i^j au lieu de $W^p(S)_i^j$ Les partitions de $[0,2^n]$ étant en nombre fini, le sup dans la formule (I) est atteint par une partition <u>aléatoire</u> $P(\omega)$ dont je privilégie l'intervalle $t_g(\omega), t_d(\omega)$ contenant le milieu 2^{n-1} $(t_g \leq 2^{n-1} < t_d)$: ainsi

$$W_0^{2^n} = \sum_{0=s_0(\omega)<s_1(\omega)<\ldots<s_k(\omega)=t_g(\omega)} |S_{s_i}^{s_{i+1}}|^p + |S_{t_g(\omega)}^{t_d(\omega)}|^p + \sum_{t_d(\omega)=t_0(\omega)<t_1(\omega)<\ldots<t_m(\omega)=2^n} |S_{t_j}^{t_{j+1}}|^p = G(\omega) + |S_{t_g}^{t_d}|^p + D(\omega)$$

Mais $G(\omega) + |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p \leq W_0^{2^{n-1}}$ et aussi $G(\omega) + \Sigma_{t_g}^{2^{n-1}} |a_i|^p \leq W_0^{2^{n-1}}$, puisque dans les deux cas il s'agit de partitions particulières de $[0,2^{n-1}]$; on a des inégalités semblables à droite et il vient:

$$(\text{IIa}) \quad W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n} \leq |S_{t_g}^{t_d}|^p - |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p - |S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p.$$

$$(\text{IIb}) \quad W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n} \leq |S_{t_g}^{t_d}|^p - \Sigma_{t_g}^{t_d} |a_i|^p \quad .$$

L'idée de la démonstration est de découper le segment initial en 2 morceaux, puis en 4, etc , en majorant la somme des espérances des termes résiduels en utilisant soit (IIa) soit (IIb).

<u>III. Un cas particulier</u> : C'est celui où les a_i sont tous égaux à 1. Dans (IIa) on majore le membre de droite par $2^p[S^{*2^n}_0]^p$, dont l'espérance se majore, d'après (P.L.2), par $E\{\ |S_0^{2^n}|^p\}$, ce dernier majoré par $2^{np/2}$(pour une v.a. $||X||_p \leqq ||X||_2$ si $p<2$). On a donc :

$$E\{\ W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n}\} \lesssim 2^{np/2}.$$ Pour $n=0$, $W=1$; maintenant on découpe chaque moitié en deux,..., au rang k on a 2^k termes correctifs, chacun majoré par $2^{(n-k)p/2}$, et donc

$$E\{W_0^{2^n}\} - 2^n \lesssim \sum_{1\leqq k\leqq n} 2^k . 2^{(n-k)p/2} \leqq 2^n . \sum_{v\geqq 0} 2^{-v(1-p/2)} .$$

On a bien montré que pour $p < 2$, pour les a tous égaux (on passe de 1 à une valeur commune quelconque par homogénéité de la fonction puissance), il existe une constante C_p telle que

$$E\{\ W_0^{2^n}\} \leqq C_p . \sum_{0<i\leqq 2^n} |a_i|^p .$$

<u>IV.Majoration dans le cas général</u> : En fait, on suppose ici que les a_i sont positifs, ce qui n'est pas une limitation, et tous minorés par 1. Définissons maintenant la v.a. entière $\bar{T}$ par

$$\{\ \bar{T} = 2^n\} = \{\ |S^{2^n}_{2^{n-1}}|^p \geqq 2^{n-2}\} \quad \text{sinon}$$
$$\{\ 2^{n-1} < \bar{T} \leqq m\} = \bigcap_{m<j\leqq 2^n} \{\ |S^j_{2^{n-1}}|^p < \tfrac{1}{2}(j-2^{n-1})\} \quad \text{pour } 2^{n-1} \leqq m < 2^n.$$

$\bar{T}$ n'est pas un temps d'arrêt, c'est le <u>dernier</u> instant où une famille d'inégalités est vérifiée; $\bar{T}$ ne dépend que des ε_i d'indice $> 2^{n-1}$ et est en particulier indépendant de $\underline{T}$ défini par symétrie autour du milieu : $\{\underline{T}=0\} = \{\ |S_0^{2^{n-1}}|^p \geqq 2^{n-2}\}$, $\{m \leqq \underline{T} < 2^{n-1}\} = \bigcap_{0<j<m} \{|S_j^{2^{n-1}}|^p < \frac{1}{2}(2^{n-1}-j)\}$ pour $0<m<2^{n-1}$, qui lui ne dépend que des 2^{n-1} premières Rademachers.

Notons C_n l'évenement $\{ \underline{T} > 0\} \cap \{ \overline{T} < 2^n\}$, et V_n la quantité $W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n}$, dont on se propose d'évaluer l'espérance.

A. Evaluation de $E\{V_n . 1_{C_n}\}$: reprenons le second membre de (IIb): $|S_{t_g}^{t_d}|^p - \Sigma_{t_g}^{t_d} a_i^p \leqq 2[\;|S_{2^{n-1}}^{t_d}|^p - \frac{1}{2}(t_d - 2^{n-1}) + |S_{t_g}^{2^{n-1}}|^p - \frac{1}{2}(2^{n-1} - t_g)]$, d'après l'inégalité $|a+b|^p \leqq 2|a|^p + 2|b|^p$ et le fait que les a_i sont tous plus grands que 1; si $t_d > \overline{T}$, $|S_{2^{n-1}}^{t_d}| - \frac{1}{2}(t_d - 2^{n-1}) \leqq 0$, d'après la définition de $\overline{T}$, donc un majorant de cette quantité est toujours $|S^{*\,\overline{T}}_{2^{n-1}}|^p$, de même à gauche: on est ramené à l'évaluation de

$E\{ 1_{C_n} . |S^{*\,\overline{T}}_{2^{n-1}}|^p\}$; pour ce terme droit, on majore 1_{C_n} par $\Sigma 1_{B_k}$, $B_k = \{2^{n-1} + 2^k \leqq \overline{T} < 2^{n-1} + 2^{k+1}\}$ $(0 \leqq k \leqq n-2)$;

- Sur B_k et $|S^*\quad|^p \lesssim 2^{k+3}$, on majore ($\lesssim$) par $2^k P\{B_k\}$, mais B_k entraîne que $|S^{*\,2^{n-1}+2^{k+1}}_{2^{n-1}}|^p \geqq 2^{k-1}$ (sinon $\overline{T}$ déja supposé inférieur à $2^{k+1} + 2^n$, le serait aussi à $2^{n-1} + 2^k$); en utilisant PL2 et BT on obtient la majoration

$$(1) \qquad \sum_{k<n-1} 2^k \, . \sum_{2^{n-1} \leqq i \leqq 2^{n-1} + 2^{k+1}} \omega_k(a_i) \quad .$$

- Sur B_k et $|S^*\quad|^p > 2^{k+3}$, si on appelle R_v le temps d'arrêt $R_v = \mathrm{Inf}\,\{j \mid |S^j_{2^{n-1}}|^p > 2^v\}$, pour $v \geqq k+3$ on a la chaîne d'implications : $B_k \cap \{|S^*_{2^{n-1}}\quad|^p > 2^v\} \Rightarrow \{|S^{2^{n-1}+2^{k+1}}_{2^{n-1}}|^p < 2^k\} \cap \{R_v < 2^{n-1} + 2^{k+1}\}$ $\Rightarrow \{R_v < 2^{n-1} + 2^{k+1}\} \cap \{|S_{R_v}^{2^{n-1}+2^{k+1}}|^p > 2^{v-1} - 2^k \geqq 2^{v-2}\}$ (en utilisant l'inégalité $|a-b|^p \geqq \frac{1}{2}|a|^p - |b|^p$) ; pour évaluer la probabilité de ce dernier évenement, on remarque que R_v et $S_{R_v}^{2^{n-1}+2^{k+1}}$ sont indépendants: cette probabilité $P = \sum_m P\{R_v = m\}.P\{\ |S_m^{2^{n-1}+2^{k+1}}|^p \geq 2^{v-2}\} \lesssim$

$\sum_m P\{R_v = m\}. \sum_{m+1 \leq j \leq 2^{n-1}+2^{k+1}} \omega_v(a_j)$ (d'après BT et $\Omega 3$) $=$

$\sum_m \omega_v(a_{m+1}).P\{R_v \leq m\}$: on réutilise BT pour obtenir tout compte fait

$$(2) \quad \sum_{k<n-1,\, k<v} 2^v . \sum_{i \neq j,\, 2^{n-1} \leq i,\, j \leq 2^{n-1}+2^{k+1}} \omega_v(a_i)\omega_v(a_j) .$$

(Le point délicat était d'écarter en vue de la suite les termes carrés $i=j$). Naturellement, il faudra rajouter tout à l'heure les termes symétriques correspondant à $S^{2^{n-1}}_{t_g}$.

<u>B.Evaluation de $E\{V_n.1_{C'_n}\}$</u> : on va supposer que $|S^{t_d}_{2^{n-1}}|^p \geq |S^{2^{n-1}}_{t_g}|^p$, (on rétablira ensuite la symétrie) et utiliser (IIa) combinée avec l'inégalité $|a+b|^p - |a|^p - |b|^p \lesssim |b|.|a|^{p-1}$, si $|b| \lesssim |a|$.

- sur $|S^{t_d}_{2^{n-1}}|^p \leq 2^n$, on majore par $2^n.P\{\overline{T}=2^n\} + 2^n P\{\underline{T} = 0\}$ puisqu'on est sur C'_n complémentaire de C_n, soit par $2^n . \sum_i \omega_n(a_i)$
- sur $|S^{2^{n-1}}_{t_g}|^p \leq 2^n$ <u>et</u> $|S^{t_d}_{2^{n-1}}|^p \in]2^v, 2^{v+1}]$, de probabilité majorée par $P\{|S^{*2^n}_{2^{n-1}}|^p > 2^v\}$, soit, d'après PL2 et BT , par $\sum_{2^{n-1} \leq i \leq 2^n} \omega_v(a_i)$, par $2^{n/p+v-v/p} . \sum_i \omega_v(a_i)$.
- sur $|S^{2^{n-1}}_{t_g}|^p \in]2^k, 2^{k+1}]$ <u>et</u> $|S^{t_d}_{2^{n-1}}|^p \in]2^v, 2^{v+1}]$, avec $n \leq k \leq v$, on remarque que cet évenement entraîne l'évenement $|S_0^{*2^{n-1}}| \geq 2^n$ <u>et</u> $|S^{*2^n}_{2^{n-1}}|^p \geq 2^n$, mais maintenant les deux facteurs sont indépendants, on majore la probabilité par $\sum_{i \neq j} \omega_v(a_i)\omega_k(a_j)$, la valeur par $2^{k/p+v-v/p}$

<u>C.Total général</u> : Il vient en regroupant tous les termes:

$$(\mathrm{III}) : E\{ W_0^{2^n} - W_0^{2^{n-1}} - W_{2^{n-1}}^{2^n} \} \lesssim P_n + Q_n + R_n + S_n \quad \text{où}$$

$$P_n = \sum_{k \leqq n;\, |i-2^{n-1}| \leqq 2^k} 2^k . \omega_k(a_i) \,.$$

$$Q_n = \sum_{k \leqq n; k \leqq v; i \neq j,\, |i,j-2^{n-1}| \leqq 2^k} 2^v . \omega_v(a_i) . \omega_v(a_j) \,.$$

$$R_n = \sum_{n \leqq v;\, 0 < i \leqq 2^n} 2^{n/p+v-v/p} . \omega_v(a_i) \,.$$

$$S_n = \sum_{n \leqq k \leqq v;\, 0 < i \neq j \leqq 2^n} 2^{k/p+v-v/p} . \omega_v(a_i) . \omega_k(a_j) \,.$$

tout ceci valable pour $a_i \geqq 1$ pour touti

(on a regroupé certains termes, et fait usage d'équivalences multiplicatives du genre $2^k \omega_k(a) \approx 2^{k+1} \omega_{k+1}(a)$ ...)

***

<u>V Régularisation de la suite a_i</u>: la majoration précédente ne peut être appliquée telle quelle à la suite $A=\{a_i\}$

- On commence par supposer que i varie entre 1 et $2^{n'}$, que les a_i sont positifs et que $\Sigma\, a_i^{\,p} = 2^{n'}$ (on peut toujours se ramener à ce cas en les multipliant par un même nombre) et on se propose de démontrer qu'alors $E\{ W^p(A)_0^{2^{n'}} \} \leqq M_p . 2^{n'}$, ce qui démontre le Théorème.
- On construit maintenant la suite $B=\{b_i\}$ de même longueur $2^{n'}$ en posant $b_i = 1 + a_i$; alors $b_i \geqq 1$ et $\sum_i b_i^{\,p} \in [\, 2^{n'},\, 2^{n'+2}]$ (évident).
- On plonge B dans la suite C ainsi fabriquée: si $b_i^{\,p} \in]2^k, 2^{k+1}]$, on entoure b_i de chaque coté de 2^{k+1} termes supplémentaires égaux à 1, tout en respectant l'ordre des b_i : par exemple, si $B=\{1, 3^{1/p}, 4^{1/p}, 1\}$ alors $C=\{\underbrace{1,\underline{1},1,}\underbrace{1,1,1,1,\underline{3^{1/p}},1,1,1,1,}\underbrace{1,1,1,1,\underline{4^{1/p}},1,1,1,1,}\underbrace{1,\underline{1},1,}$;

Comme on rajoute au plus $2.2.\Sigma b_i{}^p$ termes égaux à 1, soit moins de $2^{n'+4}$, on complète par des 1 à la longueur $2^{n'+4}$; on notera dans la suite $\underline{B}$ (termes exceptionnels) l'image de B par ce plongement, en remplaçant par des 0 les 1 ajoutés:ainsi dans l'exemple, $\underline{B}=\{0,1,0,0,0,0,0,3^{1/p},0,\dots,0,1,0,\dots\}$;$\underline{B}$ désigne aussi les numéros d'ordre des termes exceptionnels : $\underline{B} = 2,8,17,23$.

Propriétés de $C = \{c_j\}$:sa longueur est $2^{n'+4}$($0<j\leqq 2^{n'+4}$); $\sum_j c_j{}^p \in [2^{n'+4},2^{n'+5}]$, $c_j \geqq 1$, et les valeurs exceptionnelles sont <u>séparées</u> au sens suivant :

si $j \in \underline{B}$, $A \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{|k-j|\leqq A;k\neq j} c_k{}^p \lesssim A$, et donc $\sum_{|k-j|\leqq A;k\neq j} c_k^2 \lesssim A^{2/p}$.

<u>dém</u>:la seconde vient de $\| \|_2 \leqq \| \|_p$ pour $p\leqq 2$ dans ℓ^p ; la première de ce que deux valeurs exceptionnelles b_1^p et b_2^p, d'ordre approximatif 2^{k_1} et 2^{k_2} sont séparées par au moins $2^{k_1} + 2^{k_2}$ valeurs 1.

- Maintenant, on prend un paramètre u entier, aléatoire, équiréparti entre 1 et $2^{n'+4}$, et on construit la suite D^u, aléatoire, ainsi: $d_i^u = c_{i+u(\text{ modulo } 2^{n'+4})}$; alors $P_{\underline{u}}\{d_i^u = c_j\} = 2^{-n'-4}$, $\sum_i d_i^{u\ p} = \sum_j c_j{}^p$, $d_i^u \geqq 1$, et la séparation des valeurs exceptionnelles prend la forme suivante: pour tout $t \leqq 2^{n'}$, tout $i \leqq 2^{n'+4}$, tout A,

$$1_{\{d_i^u = b_t\}} \cdot \sum_{|j-i|\leqq A;j\neq i} |d_j^u|^2 \lesssim 1_{\{d_i^u = b_t\}} \cdot A^{2/p} .$$

On se donne maintenant des ε_i en nombre suffisant, indépendantes de l'aléatoire u, on note S(A),S(B),S(C),S(D) les sommes des $a\varepsilon$,$b\varepsilon$,$c\varepsilon$,

$d\varepsilon$, et on a le

<u>Lemme</u> : Pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$E_u E_\varepsilon\{ W^p(S(D))_0^{2^{n'+4}} \} \lesssim 2^{n'+4} .$$

<u>démonstration</u> : Appelons $S(1)$ le processus des sommes partielles des ε_i ; $S(A) = S(B-1)$ et donc d'après (W) de II, $E\{ W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E\{ W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \} + E\{W^p(S(1))_0^{2^{n'}}\}$ soit, d'après le résultat du paragraphe III, $E\{W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E\{W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \}+2^{n'}$. Maintenant, en loi, la variation de 0 à $2^{n'}$ est la même que celle de 0 à $2^{n'+4}$ du processus des sommes des $\underline{b}_i\varepsilon_i$, les 0 intercalés n'intervenant pas; mais $c_i = \underline{b}_i + 1_i$, ou $1_i = 0$ si $i \in \underline{B}$, 1 sinon; les 0 intercalés dans 1_i n'intervenant pas non plus; d'après le résultat de III, et (W): $E\{W^p(S(B))_0^{2^{n'}} \} \lesssim E\{W^p(S(C))_0^{2^{n'+4}} \} + 2^{n'+4}$

- soit f une fonction définie sur $[0,a]$, b tel que $0<b<a$, et $\underline{f}$ définie par $\underline{f}(i) = f(i+b \pmod a)$; comme on a les inégalités: $W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a \leqq W^p(f)_0^a \lesssim W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a$ (la 2^e conséquence de (W) appliquée aux restrictions de f à $[0,b]$ et $[b,a]$), comme $W^p(f)_0^b + W^p(f)_b^a = W^p(\underline{f})_{a-b}^a + W^p(\underline{f})_0^{a-b} \lesssim W^p(\underline{f})_0^a$, on a $W^p(f)_0^a \lesssim W^p(\underline{f})_0^a$ - en posant $a = 2^{n'+4}$, $b = u$, nous pouvons affirmer que pour tout u, $E_\varepsilon\{W^p(S(C))_0^{2^{n'+4}} \} \lesssim E_\varepsilon\{W^p(S(D^u))_0^{2^{n'+4}} \}$ (ici E_ε signifie espérance en les Rademacher ε_i). En prenant l'espérance en u, en écrivant la chaîne d'inégalités démontrées plus haut, il vient sous l'hypothèse du lemme: $E\{W^p(S(A))_0^{2^{n'}} \} \lesssim 2^{n'+4} \lesssim 2^{n'}$.

VI. Calcul final. : On pose $n'+4 = n$; puisque $d_i^u \geqq 1$, on peut écrire pour chaque suite D^u les majorations (III) correspondant au découpage de $]A2^m,(A+1)2^m]$ en $]A2^m,A2^m+2^{m-1}]$ et $]A2^m+2^{m-1},(A+1)2^m]$, ceci pour $0 \leqq m \leqq n$, $0 \leqq A < 2^{n-m}$; la somme en A et m, sommée en u et multipliée par 2^{-n} (ce qui représentera E_u) majorera alors la quantité $E_u E_\varepsilon\{W^p(S(D^u))_0^{2^n} - \Sigma_{0<i<2^n} d_i^{u\ p}\}$ (car, pour $m = 0, W_A^{A+1} = d_{A+1}^{u\ p}$)et comme $\Sigma_i d_i^{u\ p} \lesssim 2^n$, compte tenu du lemme du paragraphe V, il suffit donc de montrer que 2^{-n}.somme en A,m,u est majorée ($\lesssim$) par 2^n . si donc

$$P_{A,m}^u = \overline{\sum_{k\leqq m-1;\,|i-A2^m-2^{m-1}|\leqq 2^{k+1}}} 2^k\omega_k(d_i^u) ,$$

$$Q_{A,m}^u = \overline{\sum_{k\leqq m-1;\,k\leqq v;\,i\neq j;\,|i,j-A2^m-2^{m-1}|\leqq 2^{k+1}}} 2^v\omega_v(d_i^u)\omega_v(d_j^u)$$

$$R_{A,m}^u = \overline{\sum_{m-1\leqq v;\,A2^m<i\leqq (A+1)2^m}} 2^{m/p+v-v/p}\omega_v(d_i^u)$$

$$S_{A,m}^u = \overline{\sum_{m-1\leqq k\leqq v;\,A2^m<i\neq j\leqq (A+1)2^m}} 2^{k/p+v-v/p}\omega_v(d_i^u)\omega_k(d_j^u) ,$$

il faut montrer que pour $Z = P,Q,R,S$, $\overline{\sum_{m\leqq n;\,A\leqq 2^{n-m};\,0<u\leqq 2^n}} 2^{-n}Z_{A,m}^u =$

$$E_u\{ \overline{\sum_{m\leqq n;\,A\leqq 2^{n-m}}} Z_{A,m}^u \} \lesssim 2^n .$$

Avant de commencer le calcul, introduisons un paramètre t qui numérote les valeurs exceptionnelles b_t de $\underline{B}$; rappelons que si $x \geqq 1$ (c'est le cas pour les d_i^u et les b_t), $\omega_k(x) = x^2 2^{-2k/p} \wedge 1$ et $\Sigma_k \omega_k(x)2^k \lesssim x^p$;comme $\Sigma_t b_t^{\ p} = \Sigma_{i\leqq 2^n}$, $b_i^{\ p} \lesssim 2^n$, $\Sigma_{k,t} 2^k\,\omega_k(b_t) \lesssim 2^n$; enfin, pour

$x>0$, $a,b \in \mathbb{N}$, remarquons que $\sum_{a\leqq b} 2^{xa} \lesssim 2^{xb}$ et que $\sum_{a\leqq b} 2^{-xb} \lesssim 2^{xa}$.

<u>-Termes de type P</u>

comme $d_i^u \leqq 1 + \sum_t 1_{\{d_i^u=b_t\}} b_t$, d'après $\Omega.1$ $E_u\{\omega_k(d_i^u)\} \lesssim \omega_k(1)+2^{-n}\sum_t \omega_k(b_t)$ puisque $P_u\{d_i^u=b_t\} = 2^{-n}$; m et A étant fixés, il y a 2^{n-m} tranches <u>disjointes</u> de longueur 2^{k+1} pour la variable i; s'introduit donc devant chaque i un facteur 2^{k+1}, et, le E_u étant indépendant de i variant de 1 à 2^n, A variant de 0 à 2^{n-m}, une fois sommé en i et A,

$$E_u\{\Sigma\} \lesssim 2^{k+n-m} \sum_{k\leqq m\leqq n} 2^k[\omega_k(1)+2^{-n}\sum_t \omega_k(b_t)] ;$$

$\sum_m$ donne $\lesssim 2^{n+k-k+k}[\omega_k(1)+2^{-n}\sum_t \omega_k(b_t)]$

$\sum_k$ donne $\lesssim 2^n[1+2^{-n}\sum_t b_t^p]$

or $\sum_t b_t^p \lesssim 2^n$ donc $\boxed{\lesssim 2^n}$.

<u>-Termes de type Q</u>

dans Q, comme il y a symétrie entre i et j distincts, on écrit

$$\omega_v(d_i^u)\omega_v(d_j^u) \lesssim \omega_v(1)^2 + \sum_t 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)\omega_v(d_j^u);$$

<u>Le premier terme</u> ne dépend pas de u, donc E_u est sans objet; les autres paramètres étant fixés, $\sum_{i\neq j}$ fait apparaître un facteur $\lesssim 2^{2k}$; $\sum_A$ un facteur 2^{n-m}; reste donc :

$\sum_{k\leqq m\leqq n;k\leqq v} 2^{2k+n-m+v}[\omega_v(1)^2=2^{-4v/p}]$; $\sum_v$ donne $\lesssim 2^{2k+n-m+k-4k/p}$;

$\sum_m$ donne $\lesssim 2^{2k+n-\cancel{k}+\cancel{k}-4k/p}$

$\sum_k$ donne $\lesssim \boxed{2^n}$ puisque $2-4/p < 0$.

<u>Le deuxième terme</u> : $\sum_t 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)\omega_v(d_j^u) \lesssim \sum_t 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)2^{-2v/p}d_j^{u2}$

et en appliquant la propriété de <u>séparation</u> de la fin de la page 8 , comme $\{j \mid |j-i-A2^m-2^{m-1}| \leqq 2^{k+1}\} \subset \{j \mid |j-i| \leqq 2^{k+2}\}$, on a

$$\sum_{\substack{i,j,t \text{ tels que } |j-i-A2^m-2^{m-1}| \leqq 2^{k+1}}} 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)\omega_v(d_j^u) \lesssim \sum_{\substack{i,t \text{ tels que } |i-A2^m-2^{m-1}| \leqq 2^{k+1}}} 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)2^{-2v/p+2k/p} \text{ ; soit}$$

$$E_u\{\Sigma\} \lesssim \sum_{t;A\leqq 2^{n-m};k\leqq m\leqq n;k\leqq v;|i-A2^m-2^{m-1}|\leqq 2^{k+1}} 2^{v-n+2(k-v)/p}\omega_v(b_t)$$

$\sum_i$ introduit le facteur 2^{k+1} ; $\sum_A$ introduit le facteur 2^{n-m};

$\sum_m$ donne $\lesssim 2^{v-2v/p+2k/p}\omega_v(b_t)$;

$\sum_k$ donne $\lesssim 2^v\omega_v(b_t)$; $\sum_v$ donne b_t^p donc enfin $\boxed{\sum_t \lesssim 2^n}$.

-<u>Termes de type R</u> : Quand A varie, les paquets étant disjoints, $\sum_A$ se transforme en $\sum_{0<i\leqq 2^n}$; $\sum_m$ donne $\lesssim 2^v\omega_v(d_i^u)$; $\sum_v$ donne $\lesssim (d_i^u)^p$; $\sum_i$ donne $\lesssim 2^n$, donc aussi $\boxed{E_u \lesssim 2^n}$.

-<u>Termes de type S</u> : Si on somme d'abord en A, les paquets étant disjoints, on majore en sommant sur $|j-i| \leqq 2^{m+1}$; on écrit ici encore $\omega_v(d_i^u) \lesssim \omega_v(1) + 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t)$, en séparant les deux termes:

pour le <u>premier terme</u>, il faut évaluer

$$E_u\{\sum_{m\leqq n;m-1\leqq k\leqq v;j\neq i;|j-i|\leqq 2^{m+1}} 2^{k/p+v-v/p}\omega_v(1)\omega_k(d_j^u)\};$$

$\sum_i$ donne $\lesssim 2^{m+k/p+v-v/p}\ \omega_k(d_j^u).[\omega_v(1)=2^{-2v/p}]$;

$\sum_v$ donne $\lesssim 2^{m+k/p+k-k/p-2k/p}\omega_k(d_j^u)$ puisque $1-3/p<0$;

$\sum_m$ donne $\lesssim 2^{2k-2k/p}\omega_k(d_j^u) \lesssim 2^k\omega_k(d_j^u)$ puisque $2-2/p<1$;

$\sum_k$ donne $\lesssim {d_j^u}^p$, $\sum_j$ donne $\lesssim 2^n$, donc $\boxed{E_u \lesssim 2^n}$.

dans le <u>deuxième terme</u>, on majore $\omega_k(d_j^u)$ par $2^{-2k/p}(d_j^u)^2$, et, (encore la séparation des valeurs exceptionnelles) $\sum_{|j-i|\leq 2^m} 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_k(d_j^u)$ par ($\lesssim$) $1_{\{d_i^u=b_t\}} 2^{2m/p-2k/p}$; reste à évaluer:

$$E_u\{ \sum_{m<n;m-1<k<v;0<i<2^n;t} 2^{k/p+v-v/p+2m/p-2k/p} . 1_{\{d_i^u=b_t\}}\omega_v(b_t) \quad ;$$

E_u donne $2^{-n+v-v/p+2m/p-k/p}\omega_v(b_t)$; $\sum_i$ introduit le facteur 2^n ;

$\sum_m$ donne $\lesssim 2^{v-v/p+k/p}\ \omega_v(b_t)$; $\sum_k$ donne $\lesssim 2^v\omega_v(b_t)$;

$\sum_v$ donne $\lesssim b_t^{\,p}$ $\qquad$ $\sum_t$ donne $\boxed{\lesssim 2^n}$.

La démonstration du théorème est terminée (l'inégalité de gauche est évidente, $\Sigma\ |a_i|^p$ étant atteinte par la partition la plus fine possible) .