

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA

Une remarque sur les temps de retour. Trois applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 35-50

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__35_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES TEMPS DE RETOUR

TROIS APPLICATIONS

par J. AZÉMA

8.0. - DEFINITIONS ET NOTATIONS. - Soit $(\Omega, X_t, \theta_t, \underline{F}_t, \zeta, P_x)$ un processus de Hunt à valeurs dans l'espace d'états E , localement compact à base dénombrable. On utilisera dans ce travail des résultats de la théorie générale des processus dus à différents Strasbourgeois. Je me référerai à l'exposé de Dellacherie (qui est à paraître chez Springer) pour ce qui concerne ces résultats. Les références à ce travail seront notées [TGP]. Je renvoie aussi à la bibliographie de ce livre pour l'attribution des différents résultats utilisés à leurs pères respectifs. Je pense que les lecteurs Strasbourgeois s'y retrouveront d'eux-même.

Comme il est courant dans la théorie des processus de Markov, nous aurons à considérer l'espace $(\Omega, \underline{F}_\infty)$, muni d'une famille de probabilités. Nous ferons donc les conventions suivantes :

Soit m une probabilité sur E . Nous dirons que deux processus Z et Z' sont P_m -indistinguables si Z et Z' sont indistinguables par rapport à l'espace probabilisé $(\Omega, \underline{F}_\infty, P_m)$. Nous dirons que deux processus Z et Z' sont indistinguables si, quelle que soit la mesure initiale m , Z et Z' sont P_m -indistinguables. On fera une convention analogue pour la notion d'ensemble négligeable : deux variables aléatoires sont dites presque sûrement égales si, quelle que soit la mesure initiale m , elles sont P_m -presque sûrement égales.

Les tribus \underline{H}^g et \underline{H}^d . Nous appellerons \underline{H}^g (resp. \underline{H}^d) la tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ engendrée par les processus mesurables/continus à gauche et limités à droite (resp. continus à droite), nuls sur $] \zeta, \infty[$ (resp. sur $[\zeta, \infty[$) et vérifiant la propriété suivante

(*) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, les processus $s \rightarrow Z_{s+t}$ et $s \rightarrow Z_s \circ \theta_t$ sont indistinguables sur $]0, \infty[$.

(resp. (**)) les processus $s \rightarrow Z_{s+t}$ et $s \rightarrow Z_s \circ \theta_t$ sont indistinguables). On remarquera que si Z est $\underline{\mathbb{H}}^g$ (resp. $\underline{\mathbb{H}}^d$)-mesurable, Z est constant sur $] \zeta, \infty[$ (resp. sur $] \zeta, \infty[$), et que $Z 1_{]0, \zeta]}$ (resp. $Z 1_{[0, \zeta[}$) vérifie la propriété (*) (resp. (**)). Dans la suite tous les processus $\underline{\mathbb{H}}^g$ (resp. $\underline{\mathbb{H}}^d$)-mesurables seront supposés être à support dans $]0, \zeta]$ (resp. dans $[0, \zeta[$).

On définirait de même les processus $\underline{\mathbb{H}}^g$ et $\underline{\mathbb{H}}^d$ mesurables parfaits : ce sont les processus engendrés par les processus mesurables continus à gauche limités à droite (resp. continus à droite) nuls sur $] \zeta, \infty)$ (resp. sur $[\zeta, \infty)$) et vérifiant la propriété suivante :

Il existe un sous-ensemble N de Ω tel que si $\omega \notin N$, alors $\forall t \geq 0 \forall s > 0 Z_{s+t}(\omega) = Z_s \circ \theta_t(\omega)$ (resp. $\forall t \geq 0 \forall s \geq 0 Z_{s+t}(\omega) = Z_s \circ \theta_t(\omega)$).

TEMPS DE RETOUR. Nous modifierons un peu la définition, due à NAGASAWA [6], d'un temps de retour. On appellera temps de retour une v.a. τ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\tau \circ \theta_t = (\tau - t)^+$. p.s.

et on appellera temps de retour parfait ce que l'on appelle usuellement un temps de retour : il existe N , sous-ensemble négligeable de Ω , tel que

$$\forall \omega \notin N, \tau(\theta_t(\omega)) = (\tau(\omega) - t)^+ \text{ quelque soit } t \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

PROPOSITION. - Une variable aléatoire τ est un temps de retour $\leq \zeta$ si et seulement si τ est la fin *) d'un ensemble $\underline{\mathbb{H}}^g$ mesurable (resp. $\underline{\mathbb{H}}^d$ -mesurable).

DEMONSTRATION. - Si τ est un temps de retour $\leq \zeta$, les ensembles $]0, \tau]$ et $[0, \tau[$ sont respectivement $\underline{\mathbb{H}}^g$ et $\underline{\mathbb{H}}^d$ -mesurables. Réciproquement il est facile de voir que la fin d'un ensemble $\underline{\mathbb{H}}^g$ ou $\underline{\mathbb{H}}^d$ mesurable est un temps de retour.

Remarque. - On peut énoncer la même proposition avec des ensembles $\underline{\mathbb{H}}^g$ et $\underline{\mathbb{H}}^d$ mesurables parfaits et des temps de retour parfaits.

*) La fin τ d'une partie A de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\tau(\omega) = \sup \{t \geq 0 : (\omega, t) \in A\} \text{ (avec } \sup \emptyset = 0)$$

c'est une variable aléatoire si A est mesurable.

DEFINITION. - Si τ est un temps de retour, la tribu \hat{F}_τ des événements postérieurs à τ sera la classe des événements A de F_∞ tels que

$$\forall t \in R_+ \quad \theta_t^{-1}(A) \cap \{\tau > t\} = A \cap \{\tau > t\} \quad \text{p.s.}$$

Si τ est un temps de retour $\leq \zeta$ et Z un processus H^d ou H^g mesurable (ou même simplement vérifiant la propriété (*)), Z_τ et \hat{F}_τ -mesurable ; en effet

$$Z_\tau \circ \theta_s^{-1} \{ \tau > s \} \stackrel{\text{p.s.}}{=} Z_{(\tau-s)^+ + s} \{ \tau > s \} \stackrel{\text{p.s.}}{=} Z_\tau^{-1} \{ \tau > s \}$$

DEFINITIONS. - Si $A \in \hat{F}_\tau$ et si τ est un temps de retour, $\tau 1_A$ est un temps de retour, que l'on notera τ^A . Si τ et τ' sont deux temps de retour $\leq \zeta$ on appellera cointervalle stochastique $]\tau, \tau']$ le sous-ensemble $\{(\omega, t) : \tau(\omega) < t \leq \tau'(\omega)\}$ de $\Omega \times R_+$; on définit de même les intervalles $[\tau, \tau'[$, $]\tau, \tau'[$, etc... On peut toujours supposer $\tau \leq \tau'$ quitte à remplacer τ par τ^A ; avec $A = \{\tau \leq \tau'\}$.

8.1. - UNE HYPOTHESE DE TRANSIENCE

On fera l'hypothèse suivante :

Il existe une suite croissante σ_n de temps de retour parfaits tels que

$$\text{a) } \forall_n \sigma_n < \infty \quad \text{p.s.} \quad \text{b) } \lim_n \uparrow \sigma_n = \zeta \quad \text{p.s.} \quad \text{c) } \{\sigma_n < \zeta < \infty\} \neq \emptyset \quad \text{p.s.}$$

Il est clair que cette hypothèse est vérifiée dès que ζ est fini (prendre $\sigma_n = \zeta$ pour tout n) ou même dès que le processus transie dans les compacts (prendre les derniers temps de visite d'une suite K_n de compacts convenable).

PROPOSITION. - La tribu H^g (resp. H^d) est engendrée par les co-intervalles stochastiques fermés à droite ouverts à gauche (resp. fermés à gauche ouverts à droite) et par l'intervalle $]\zeta, \infty)$ (resp. $[\zeta, \infty)$).

DEMONSTRATION. - Etudions le cas de \underline{H}^g ; il est clair que les co-intervalles $]\tau, \tau']$ sont dans \underline{H}^g ; il nous reste à montrer que tout processus \underline{H}^g -mesurable Z continu à gauche, limité à droite, est engendré par les co-intervalles. Etudions tout d'abord le cas particulier suivant :

$$A \in \hat{\underline{F}}_{\tau} \quad \text{et} \quad Z = (A \times R_+) \cap]0, \tau]$$

Dans ce cas $Z =]0, \tau^A]$, c'est donc un co-intervalle convenable ; on tire de là sans difficulté que si $(\tau_n)_{0 \leq n \leq \infty}$ est une suite décroissante de temps de retour et (Y_n) une suite de variables aléatoires $\hat{\underline{F}}_{\tau_n}$ -mesurables, le processus $Z = \sum_n Y_n \mathbb{1}_{] \tau_{n+1}, \tau_n]}$ est dans la tribu engendrée par les co-intervalles stochastiques fermés à droite ouverts à gauche. Donnons nous alors un processus \underline{H}^g -mesurable Z continu à gauche et limité à droite, et définissons par récurrence les temps de retour suivant :

$$\tau_0 = \sigma_0 \dots \tau_{n+1} = \sup \{t ; t \leq \tau_n ; |Z_t - Z_{\tau_n}| > \varepsilon\}.$$

Le fait que les τ_n sont des temps de retour peut se montrer par récurrence de la manière suivante : supposons que τ_n soit un temps de retour et considérons τ_{n+1} . Le processus $|Z - Z_{\tau_n}| \mathbb{1}_{]0, \tau_n]}$ est \underline{H}^g -mesurable ; τ_{n+1} est alors la fin d'un ensemble \underline{H}^g -mesurable et est un temps de retour d'après la proposition 8.0. Comme Z est continu à gauche, $\tau_n > 0 \Rightarrow \tau_{n+1} < \tau_n$ p.s., et puisque Z est limité à droite, on a $\lim_n \tau_n = 0$ p.s. Posons $Z^\varepsilon = \sum_n Y_{\tau_n} \mathbb{1}_{] \tau_{n+1}, \tau_n]}$; Z^ε étant mesurable par rapport à la tribu engendrée par les co-intervalles, il en est de même pour le processus $Z \mathbb{1}_{]0, \sigma_0]} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z^\varepsilon$. Un raisonnement analogue prouverait le même résultat pour $Z \mathbb{1}_{]0, \sigma_n]}$ quelque soit n , donc pour $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} Z \mathbb{1}_{]0, \sigma_n]}$.

b) En ce qui concerne le tribu \underline{H}^d , la démonstration est plus simple : si Z est continu à droite \underline{H}^d -mesurable on posera

$$Z^\varepsilon = \sum_n Y_{(\sigma_0 - n\varepsilon)^+} \mathbb{1}_{[(\sigma_0 - (n+1)\varepsilon)^+, (\sigma_0 - n\varepsilon)^+]} , \quad \text{puis on montre que}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z^\varepsilon = Z \mathbb{1}_{]0, \sigma_0]} , \quad \text{d'où le résultat .}$$

Remarque. - On montrerait de même que la tribu des ensembles $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurables parfaits est engendrée par les co-intervalles stochastiques formés de temps de retour parfaits.

COROLLAIRES. - 1) Soit Z un processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurable ; il existe un processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurable Y parfait et prévisible tel que, quelle que soit la mesure initiale m , la projection prévisible de Z relativement à $(\Omega, (\underline{\underline{F}}_t^m), P_m)$ soit P_m -indistinguable de Y .

DEMONSTRATION. - Etudions d'abord le cas où $Z = 1_{]0, \tau]}$ où τ est un temps de retour. Désignons par $e^\tau(x)$ la fonction excessive $x \rightarrow P_x[\tau > 0]$; je dis que le processus $Y(\omega, t) = e^\tau(X_t)_-$ répond à la question : il est bien clair que Y est prévisible, $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurable, parfait ; il reste à montrer que si m est une mesure initiale, la projection prévisible de Z est indistinguable de Y . Plaçons nous donc dans $(\Omega, (\underline{\underline{F}}_t^m), P_m)$ et considérons le potentiel d'équilibre de charge τ , c'est-à-dire la version continue à droite χ^t du potentiel $P[\tau > t \mid \underline{\underline{F}}_t^m]$. Pour tout t on a $\chi_t^\tau = e^\tau(X_t)$. p.s. et, comme les deux membres sont continus à droite, χ^τ est indistinguable du processus $t \rightarrow e^\tau(X_t)$. On a donc pour tout temps d'arrêt T , $\chi_T^\tau = e^\tau(X_T)$; mais d'après la proposition 1.2. de [1] $\chi_T^\tau = P_m[\tau > T \mid \underline{\underline{F}}_T^m]$. Soit maintenant T un temps d'arrêt prévisible ; il est clair que $\chi_{T-}^\tau = e^\tau(X_{T-}) = P_m[\tau \geq T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}^m]$, ce qui montre bien que Y est la projection prévisible de $1_{]0, \tau]}$; terminons alors la démonstration : l'ensemble des processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurables Z auxquels on peut associer un processus Y possédant les propriétés de l'énoncé est un espace vectoriel stable pour l'opération de limite croissante et contenant les co-intervalles stochastiques ; c'est donc l'ensemble de tous les processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurables. Il résulte en particulier du corollaire 1 que tout processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurable prévisible est indistinguable d'un processus $\underline{\underline{H}}^g$ -mesurable prévisible parfait.

2) Si Z est H^d -mesurable, il existe une fonction presque borélienne f telle que, quelle que soit la mesure initiale m , la projection de Z sur la

tribu des bien mesurables est indistinguable des processus $(\omega, t) \rightarrow f(X_t(\omega))$.

DEMONSTRATION. - On refait le mouvement précédent avec cette fois ci des intervalles stochastiques de la forme $[0, \tau[$ dont la projection bien mesurable est $e^\tau(X)$

3) la restriction de \underline{H}^d à $\Omega \times]0, \infty[$ est contenue dans \underline{H}^g .

DEMONSTRATION. - On peut en effet approcher un co-intervalle de la forme $[\tau, \tau'[,$ par la suite $](\tau - \frac{1}{n})^+, (\tau' - \frac{1}{n})^+]$.

* 8.2. - LE THEOREME DE SECTION

Soit Γ un ensemble \underline{H}^g -mesurable, ϵ un réel > 0 , et m une mesure initiale ; il existe un temps de retour τ tel que

- 1) le graphe de τ soit contenu dans Γ
- 2) $P[\pi(\Gamma)] < P\{\tau > 0\} + \epsilon$

où π désigne la projection de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ sur Ω .

DEMONSTRATION. - On recopie la démonstration donnée par Dellacherie dans (TGP IV paragraphe 2) pour les théorèmes de section par des temps d'arrêt, en remplaçant début par fin.

a) on appelle \underline{J} le pavage sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ constitué par les réunions finies de co-intervalles stochastiques $]\tau, \tau']$; \underline{J} est une algèbre de Boole sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Puis on montre que la fin d'un élément de \underline{J}_δ est un temps de retour. Le théorème IV - T 9 de [TGP] est encore valable :

il existe une variable aléatoire Y positive vérifiant les conditions suivantes :

- a) $[Y] \subset \Gamma$
- b) $P_m[\pi(\Gamma)] = P_m\{Y < +\infty\}$.

On désigne par μ la mesure bornée sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ définie par la formule

$$\mu(f) = \int_{\{Y < \infty\}} f(\omega, Y(\omega)) P_m(d\omega)$$

où f est un processus mesurable borné.

La mesure μ , portée par Γ , a pour masse $\mu(\Gamma) = P_m [Y < \infty]$, et si B est \underline{H}^g -mesurable $\mu(B) = P_m [\pi(\Gamma \cap B)]$. Comme \underline{J} engendre \underline{H}^g , il existe $B \in \underline{J}_\delta$ inclus dans Γ tel que $\mu(\Gamma) < \mu(B) + \epsilon$; on a alors $P[\pi(\Gamma)] = \mu(\Gamma) < \mu(B) + \epsilon = P[\pi(B)] + \epsilon$. La fin τ de B est un temps de retour et son graphe $[\tau]$ est inclus dans B puisque B est intersection dénombrable d'ensembles qui sont des réunions finies de co-intervalles $]\tau' \tau'']$; τ vérifie les conditions du théorème.

Remarque. - On aurait un théorème analogue avec un ensemble \underline{H}^g -mesurable parfait et des temps de retour parfaits.

COROLLAIRE 1. - Plaçons nous sous l'hypothèse d'absolue continuité (L) de Meyer, et désignons par ξ la mesure de base.

Soient Z^1 et Z^2 deux processus \underline{H}^g -mesurables, et supposons que Z^1 et Z^2 soient P^ξ -indistinguables, alors les processus Z^1 et Z^2 sont indistinguables. (Nous supposons, comme il a été indiqué, que $Z_0^1 = Z_0^2 = 0$).

DEMONSTRATION. - Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $x \in E$ tel que l'ensemble aléatoire $\{Z^1 \neq Z^2\}$ ne soit pas P_x -évanescent. Il existerait d'après le théorème de section un temps de retour τ tel que $[\tau] \subset \{Z^1 \neq Z^2\}$ et $P_x \{\tau > 0\} > 0$. Mais d'après l'hypothèse faite, on a $P_\xi \{\tau > 0\} = 0$; comme la fonction $x \rightarrow P_x \{\tau > 0\}$ est excessive, on a en vertu de l'hypothèse (L) $P_x \{\tau > 0\} = 0$ pour tout $x \in E$, d'où la contradiction.

COROLLAIRE 2. - Soient Z^1 et Z^2 deux processus \underline{H}^g -mesurables bornés, m une mesure initiale. Si $E_m[Z_\tau^1; \tau > 0] = E_m[Z_\tau^2; \tau > 0]$, quelque soit le temps de retour τ , Z_τ^1 et Z_τ^2 sont P_m -indistinguables.

8.2. - PROPOSITION. - Soient m une mesure initiale, A et B deux fonctionnelles additives (non nécessairement adaptées) P^m -intégrables telles que, pour tout temps

de retour τ , $E_m(A_\tau) = E_m(B_\tau)$; alors A et B sont P_m -indistinguables.

DEMONSTRATION. - Les processus $A - A_-$ et $B - B_-$ sont H^g -mesurables, et l'on a pour temps de retour τ ,

$$E_m(A_\tau - A_{\tau-}; \tau > 0) = E_m(A_\tau - A_{\tau-}) = E_m(B_\tau - B_{\tau-}) = E_m(B_\tau - B_{\tau-}; \tau > 0)$$

$A - A_-$ est donc indistinguishable de $B - B_-$ et A et B ont donc même partie purement discontinue; on peut donc se ramener au cas où A et B sont continues. Soit σ un temps de retour pris dans la suite σ_n introduite en 8.1.; introduisons les tribus $\hat{F}_t = \hat{F}_{(\sigma-t)^+}$, et posons $\hat{A}_t = A_\sigma - A_{(\sigma-t)^+}$, $\hat{B}_t = B_\sigma - B_{(\sigma-t)^+}$. \hat{A} et \hat{B} sont deux processus croissants continus adaptés à la famille (\hat{F}_t) . D'autre part si T est un temps d'arrêt de la famille (\hat{F}_t) , $(\sigma - T)^+$ est un temps de retour; on peut donc écrire

$$E_m[\hat{A}_T] = E_m(A_\sigma - A_{(\sigma-T)^+}) = E_m[B_\sigma - B_{(\sigma-T)^+}] = E_m[\hat{B}_T].$$

On a alors $A = B$ d'après [TGP] V-T 36 et T 37. Faisons tendre t vers l'infini, il vient $A_\sigma = B_\sigma$ P_m -presque sûrement. Les processus A et B coïncident alors sur $]0, \sigma]$, et ceci quelque soit σ pris dans la suite (σ_n) ; d'où le résultat.

8.3. - THEOREME DE MOTOO. - Plaçons nous sous l'hypothèse (L) de Meyer et appelons ξ la mesure de base

Soient A et B deux fonctionnelles additives naturelles admettant des potentiels U_A et U_B ξ -presque partout finis. Supposons que U_B soit spécifiquement majoré par U_A . Il existe un processus $Z \leq 1$, H^g -mesurable et prévisible parfait, tel $B_t = \int_0^t Z(\omega, s) dA_s$. Si A est continue, il existe une fonction f, presque borélienne, telle que $B_t = \int_0^t f(X_s) dA_s$.

DEMONSTRATION. - On peut remplacer la mesure de base ξ par une probabilité équivalente à ξ telle U_A et U_B soient intégrables. Nous appellerons toujours ξ cette nouvelle mesure. On peut associer à A et B deux mesures sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \underline{H}^g)$ en posant, si Y est \underline{H}^g -mesurable,

$$\int Y d\mu = E_\xi \left[\int_0^\infty Y(\omega, t) dA_t \right] \quad \text{et} \quad \int Y d\nu = E_\xi \left[\int_0^\infty Y(\omega, t) dB_t \right].$$

Appelons Z' une densité de Randon-Nikodym \underline{H}^g -mesurable inférieure à 1 de ν par rapport à μ , et comparons les fonctionnelles additives B et $Z' * A = C^*$). On a $E_\xi [C_\tau] = E_\xi [B_\tau]$ pour tout temps de retour; d'après la proposition précédente $B = C = (Z' * A) = (Z' * A)^3 = {}^3Z' * A^*$). Enfin, en appliquant le corollaire 1) de la proposition 8.1., il existe un processus prévisible \underline{H}^g -mesurable Z, parfait, indistinguable de ${}^3Z'$; Z répond à la question.

Il reste à examiner le cas où A (et donc B) est continue; on peut alors faire le raisonnement précédent sur \underline{H}^d au lieu de \underline{H}^g ; on aura encore

$$\begin{aligned} E_\xi [C_\tau] &= E_\xi \left[\int_0^\infty 1_{[0, \tau]}(t) dC_t \right] = E_\xi \left[\int_0^\infty 1_{[0, \tau]}(t) dC_t \right] \\ &= E_\xi \left[\int_0^\infty 1_{[0, \tau]}(t) dB_t \right] = E_\xi \left[\int_0^\infty 1_{[0, \tau]}(t) dB_t \right] = E_\xi [B_\tau] \end{aligned}$$

Projetant la densité \underline{H}^d -mesurable Z' ainsi construite sur la tribu des bien-mesurables, on obtient le théorème de Motoo d'après le corollaire 2 de la proposition 8.1.

*) Rappelons les notations de [TGP]: $Z' * A$ désigne le processus croissant défini par $(Z' * A)_t = \int_0^t Z'_s A_s$, $(Z' * A)^3$ désigne la projection duale de ce processus croissant sur la tribu \underline{T}_3 des ensembles prévisibles, et, enfin, ${}^3Z'$ désigne la projection du processus borné Z' sur \underline{T}_3 .

8.4. - UNE REMARQUE SUR LE RETOURNEMENT

Soit σ un temps de retour fini ; on peut définir une famille croissante et continue à droite de $\hat{\underline{F}}_t^\sigma$ de la manière (classique) suivante

$$A \in \hat{\underline{F}}_t^\sigma \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}_+ \quad \theta_s^{-1}(A) \cap \{\sigma > s+t\} \underset{p.s.}{=} A \cap \{\sigma > s+t\}$$

(l'ensemble exceptionnel de mesure nulle sur lequel l'égalité précédente n'a pas lieu pouvant éventuellement dépendre de t) ; on appellera $(\hat{\underline{F}}_t^{\sigma,m})$ la famille de tribus obtenue en complétant la famille $(\hat{\underline{F}}_t^\sigma)$ par rapport à \underline{F}_∞ et à la probabilité P_m ; si Z est un processus mesurable, on notera \hat{Z} le processus

$$Z_{(\sigma(\omega) - t)^+}(\omega)$$

on a la proposition suivante :

PROPOSITION. - Soit Z un processus mesurable ; supposons que $Z \cdot 1_{]0,\sigma]}$ soit H^g -mesurable ; alors \hat{Z} est bien-mesurable relativement à la famille de tribus $(\hat{\underline{F}}_t^\sigma)$. Si $Z \cdot 1_{]0,\sigma]}$ est H^d -mesurable, le processus $\hat{Z} \cdot 1_{]0,\infty]}$ est prévisible relativement à la famille $(\hat{\underline{F}}_t^\sigma)$.

Réciproquement soit m une mesure initiale, et Z' un processus bien mesurable (resp. prévisible) relativement à la famille $(\hat{\underline{F}}_t^{\sigma,m})$; il existe un processus $Z \cdot P_m$ - indistinguable de Z' tel que \hat{Z} soit H^g (resp. H^d -mesurable).

DEMONSTRATION. - Soit Z un processus tel que $Z \cdot 1_{]0,\sigma]}$ soit H^g -mesurable. Il suffit de raisonner dans le cas où Z est continu à gauche et limité à droite, \hat{Z} est alors continu à droite limité à gauche ; montrons qu'il est adapté à la famille $(\hat{\underline{F}}_t^\sigma)$; on a

$$(\hat{Z}_t \circ \theta_s)^1 \{\sigma > s+t\} = (Z_{(\sigma-t)^+} \circ \theta_s)^1 \{\sigma > s+t\} \underset{p.s.}{=} \hat{Z}_t^1 \{\sigma > s+t\}$$

Le processus \hat{Z} est donc bien-mesurable ; on démontrerait de même que

si $Z^1_{[0, \sigma[}$ est \underline{H}^d -mesurable, $\hat{Z}^1_{]0, \infty]}$ est prévisible relativement à la famille (\hat{F}_t^σ) .

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons tout d'abord que Z' soit un intervalle stochastique $[T'_1, T'_2[$ (T'_1 et T'_2 sont deux temps d'arrêt de la famille $(\hat{F}_t^{\sigma, m})$); il existe deux temps d'arrêt T_1 et T_2 de la famille (\hat{F}_t^σ) tels que $P_m[T_1 \neq T'_1] = P_m[T_2 \neq T'_2] = 0$. Les variables aléatoires $(\sigma - T)^+$ et $(\sigma - T_2)^+$ sont des temps de retour, et le processus $^1]_{(\sigma - T_2)^+}, (\sigma - T_1)^+]$ répond à la question.

Remarque. - On peut évidemment déduire le théorème de section 8.2. de la proposition précédente.

8.5. - PROPOSITION. - Soit A une fonctionnelle additive (non nécessairement adaptée) intégrable. Le processus croissant continu à gauche \hat{A} défini par l'égalité $\hat{A}_t = A_\sigma - A_{(\sigma - t)^+}$ est adapté à la famille (\hat{F}_t^σ) . Réciproquement si un processus croissant \hat{A} , continu à gauche, intégrable, est adapté à $(\hat{F}_t^{\sigma, m})$, alors le processus croissant A défini par la formule $A_t = \hat{A}_\sigma - \hat{A}_{(\sigma - t)^+}$ est P_m -indistinguable d'une fonctionnelle additive.

DEMONSTRATION. - La première partie de cette proposition a déjà été vue en 8.2.

Pour démontrer la réciproque, considérons le processus $A_\infty - A_t$; on a

$A_\infty - A_t = \hat{A}_\sigma - (\hat{A}_\sigma - \hat{A}_{(\sigma - t)^+}) = \hat{A}_{(\sigma - t)^+}$. D'après la proposition précédente $A_\infty - A_t$ est P_m -indistinguable d'un processus \underline{H}^d -mesurable, ce qui montre que A est indistinguable d'une fonctionnelle additive.

8.6. - PROPOSITION. - Soit A une fonctionnelle additive non adaptée admettant un potentiel fini. Il existe une fonctionnelle additive naturelle B telle que, quelle que soit la mesure initiale, la projection duale prévisible du processus croissant A soit indistinguable de B.

DEMONSTRATION. - Cette proposition n'est rien d'autre que le théorème de représentation de Meyer : la fonction $x \rightarrow E_x[A_\infty]$ est un potentiel fini de la classe (D). La fonctionnelle additive naturelle B engendrant ce potentiel répond à la question.

8.7. - THEOREME. - Plaçons nous sous l'hypothèse (L) de Meyer, et désignons par ξ la mesure de base. Soit B un borélien finement parfait de l'espace d'état E d'un processus de Hunt ; B est le support fin d'une fonctionnelle additive continue, adaptée, de potentiel borné.

DEMONSTRATION. - Considérons l'ensemble aléatoire Γ fermeture de l'ensemble aléatoire $\{(\omega, t) ; X_t(\omega) \in B\}$ des impacts de X dans B . Il est facile de voir que Γ est \underline{H}^ξ -mesurable. Raisonnons alors sur le triplet $(\Omega, (\hat{F}_t^\zeta, \xi), P_\xi)$ où ζ est la durée de vie du processus que l'on supposera finie, quitte à raisonner sur un λ -processus. L'ensemble $\hat{\Gamma}$ est alors bien mesurable relativement à la famille (\hat{F}_t^ζ, ξ) , et est parfait. D'après un théorème de Dellacherie (TGP, VI-T 38) il existe un processus croissant \hat{A} continu, borné, adapté à la famille (\hat{F}_t^ζ, ξ) et admettant $\hat{\Gamma}$ pour support ; la proposition 8.5. nous dit alors que le processus $A'_t = A_\sigma - A_{(\sigma-t)^+}$ est P_ξ -indistinguable d'une fonctionnelle additive A non adaptée. Comme \hat{A} est borné, A' est borné et l'on peut prendre A bornée. On applique alors la proposition 8.6., et l'on voit qu'il existe une fonctionnelle additive naturelle C indistinguable de la projection duale prévisible de A . Regardons alors quelles sont les propriétés de C .

a) Il est clair que le processus croissant A' est P^ξ -presque sûrement continu ; il en est donc de même du processus A . Le processus $(A - A_-)$ est donc P^ξ indistinguable de 0 et est \underline{H}^ξ -mesurable ; d'après le corollaire 1 du théorème de section il est évanescent, ce qui montre que la fonctionnelle additive A est continue. Le potentiel $x \rightarrow E_x[A_\infty]$ est alors régulier ; il en résulte que C est continue.

b) Comme A est continue, C est aussi la projection duale bien mesurable de A ; on peut en effet écrire si Z est un processus bien mesurable borné

$$E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} Z_t dA_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} {}^3Z_t dA_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} {}^3Z_t dC_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} Z_t dC_t \right]$$

(La première et la dernière égalité résultant du fait que l'ensemble $\{Z \neq {}^3Z\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt). Montrons alors que C admet Γ pour support, P_{ξ} -presque sûrement :

On a $1_{\Gamma} * A = A$. Projetons cette égalité sur la tribu des bien-mesurables et utilisons le théorème (V-T31) de TGP, il vient : $1_{\Gamma} * C = C$, ce qui montre que C est porté par Γ . D'autre part si Γ' est un fermé bien mesurable strictement inclus dans Γ on a

$1_{\Gamma-\Gamma'} * A \neq 0$ d'où $1_{\Gamma-\Gamma'} * C \neq 0$, ce qui montre que Γ est bien le support de C relativement à P_{ξ} . Il en résulte que Γ et le support de C sont $P_{\xi}^{\mathbb{G}}$ -indistinguables ; comme il s'agit de deux $\underline{H}^{\mathbb{G}}$ -mesurables, c'est qu'ils sont indistinguables.

Il en résulte aisément que C admet B pour support fin.

8.8. - ENSEMBLES PROJECTIFS

Rappelons que Motoo a défini comme suit les ensembles projectifs : un sous-ensemble presque borélien Γ de E est dit projectif si la réduite sur Γ de tout λ -potentiel régulier de la classe (D) est encore régulière ; on sait que tout compact K tel que $K = K_{\Gamma}$ à un ensemble polaire près est projectif (cf. [3]). Nous allons supposer ici qu'il y a deux processus de Hunt X et \hat{X} en dualité, et nous allons donner une condition plus faible pour qu'un ensemble soit projectif, et qui sera nécessaire et suffisante.

LEMME. - Soit A un ensemble presque borélien finement fermé de E . ; notons A^C la fermeture cofine de A , et Γ l'ensemble aléatoire $\{(\omega, t) ; X_{t-}(\omega) \in A\}$.

L'ensemble aléatoire $\Gamma' = \{(\omega, t) : X_{t-}(\omega) \in A^C\}$ est alors le plus petit ensemble $\underline{H}^{\mathbb{G}}$ -mesurable contenant la fermeture à gauche de Γ .

DEMONSTRATION. - On sait d'après un résultat de Weil [8] que Γ' est fermé à gauche. Appelons Γ^g la fermeture à gauche de Γ ; on a donc $\Gamma' \supset \Gamma^g$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'énoncé du lemme soit en défaut pour une mesure P_{x_0} . Il existerait alors un temps de retour τ dont le graphe serait contenu dans $\Gamma' - \Gamma^g$ et tel que $P_{x_0} \{\tau > 0\} > 0$; considérons alors la fonctionnelle additive naturelle B engendrant le potentiel $u(x) = P_x \{\tau > 0\}$. D'après les résultats de [1], B est portée par $A^C - A$; en effet on peut écrire

$$E_x \left[\int_0^\infty 1_{A^C}(X_t) dB_t \right] = P_x [X_{\tau^-} \in A^C; \tau > 0] = u(x)$$

$$\text{et } E_x \int_0^\infty 1_A(X_t) dB_t = P_x [X_{\tau^-} \in A; \tau > 0] = 0.$$

Or, d'après un résultat de Azéma - Duflo - Revuz [2] dont on trouvera une démonstration détaillée dans [7], on peut associer à B une mesure ν_B sur E telle que u soit le potentiel de la mesure ν_B . D'après ce qui précède ν_B est portée par les points co-réguliers de A ; il en résulte que $P_A u$ qui, d'après la formule de dualité de Hunt, est le potentiel de la mesure $\nu_B \hat{P}_A$, est égale à u ; à fortiori $\bar{P}_A u = u$ ($\bar{P}_A u$ désigne la réduite extérieure de u sur A). Mais si l'on se reporte à l'interprétation de la réduite extérieure donnée précédemment dans [1], on voit que u est le potentiel d'équilibre de charge \bar{L}_τ^A où l'on a posé

$$\bar{L}_\tau^A(\omega, t) = \sup \{s; s \leq t; X_{s-}(\omega) \in A\}.$$

u serait donc à la fois le potentiel d'équilibre d'un temps de retour τ dont le graphe n'appartiendrait pas à Γ^g , et d'un temps de retour \bar{L}_τ^A dont le graphe est contenu dans Γ^g ; on en tire une contradiction, puisqu'on aurait alors pour la loi

P_{x_0}

$$0 = E_{x_0} \left[\int_0^\infty 1_{\Gamma^g}(\omega, t) dB_t(\omega) \right] = P_{x_0} \{ \bar{L}_\tau^A \in \Gamma^g; \bar{L}_\tau^A > 0 \} = P_{x_0} \{ \tau > 0 \} > 0.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui caractérise les ensembles projectifs.

THEOREME. - Soit Γ un sous-ensemble presque-borélien de E ; Γ est projectif si et seulement si la fermeture cofine de sa fermeture fine ne diffère de l'ensemble Γ_r que par un ensemble polaire.

DEMONSTRATION. - Si $\tilde{\Gamma}$ est la fermeture fine de Γ la réduite d'une fonction excessive sur Γ est égale à la réduite sur $\tilde{\Gamma}$. D'autre part $\tilde{\Gamma}_r = \Gamma_r$; de ces deux remarques il résulte qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où Γ est un fermé fin ; ce que nous supposons.

a) Supposons que la fermeture cofine Γ^c de Γ ne diffère de Γ_r que pour un ensemble polaire ; soit u un potentiel de fonctionnelle additive continue. D'après le résultat de Azéma - Duflo - Revuz rappelé précédemment u est le potentiel d'une mesure ν et $P_\Gamma^\lambda u$ est le potentiel de la mesure $\nu \hat{P}_\Gamma^\lambda$. Il en résulte que la fonctionnelle B associée à P_Γ^λ est portée par Γ^c et donc par Γ (d'après l'hypothèse). Il suffit alors d'appliquer le théorème 7-12 de [1] : Γ_r est contenu dans $\{P_\Gamma^\lambda u = u\}$, donc B est continue.

b) Réciproquement supposons que Γ soit un fermé fin projectif, montrons qu'il satisfait aux conditions de l'énoncé. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Gamma^c - \Gamma_r$ n'est pas polaire ; comme on est sous l'hypothèse (B), cet ensemble n'est pas non plus polaire à gauche ; autrement dit, il existe $x_0 \in E$ tel que pour la loi P_{x_0} , l'ensemble aléatoire $C = \{(\omega, t) ; X_{t-}(\omega) \in \Gamma^c - \Gamma\}$ ne soit pas évanescant. Appelons alors e_Γ^λ la fonction $x \rightarrow E_x e^{-\lambda T_\Gamma}$. D'après l'hypothèse e_Γ^λ est un potentiel régulier de la classe (D).

On a vu que la surmartingale $e^{-\lambda t} e_\Gamma^\lambda(X_t)$ était la réduite extérieure de $e^{-\lambda t}$ sur l'ensemble aléatoire $H = \{(\omega, t) ; X_{t-}(\omega) \in \Gamma^c - \Gamma\}$; c'est donc aussi la réduite extérieure de $e^{-\lambda t}$ sur la fermeture à gauche H^g de H .

On sait alors d'après [1] que $e_\Gamma^\lambda(X_t)_- = 1$ sur H^g et, d'après le lemme précédent, cela entraîne $\{e_\Gamma^\lambda(X)_- = 1\} \supset \{X_- \in \Gamma^c\}$, puisque $e_\Gamma^\lambda(X)_-$ est $\underline{H^g}$ -mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AZÉMA - Quelques applications de la théorie générale des processus
(à paraître)
- [2] J. AZÉMA, M. KAPLAN-DUFLO, D. REVUZ - Comptes rendus T-267 p. 313-315
(19 Août 1968)
- [3] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETTOOR - Markov Processes and potential theory
(Academic Press 1968)
- [4] C. DELLACHERIE - La théorie générale des processus. (à paraître)
Springer
- [5] P.A. MEYER - Processus de Markov. Lecture notes in Mathematics 26.
Springer Heidelberg 1967
- [6] NAGASAWA - Nagoya Journal of Mathematics T. 24 p. 177-204 (1964)
- [7] D. REVUZ - Trans. Amer Math. Soc 148 1970 p. 517
- [8] M. WEIL - Z. Wahrscheinlichkeits theorie Geb - 12 (1969) 75-86