SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Quelques autres applications de la méthode de Walsh (« La perfection en probabilités »)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 243-252

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__243_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilité 1970/71

LA PERFECTION EN PROBABILITÉ

exposé de P.A.Meyer

Sous ce titre (dû à Michel WEIL) on trouvera quelques variations sur le thème de l'exposé précédent, de J.WALSH. En voici l'idée : considérons un processus (M_t) à valeurs dans $[0,1]$, satisfaisant à la relation de multiplicativité $M_{s+t}=M_s.M_t\circ\theta_s$ p.s. , l'ensemble de mesure nulle dépendant de (s,t) . Posons alors $\overline{M}_t = \limsup \text{ess}\ M_{t-s}\circ\theta_s$ pour $s\to 0$. Alors $(\overline{M}_t)$ est devenu "parfait" , i.e. l'ensemble exceptionnel ne dépend plus de (s,t). L'exposé cherche à délayer ce résultat, qui présenté de cette manière n'est pas très compréhensible, en le rapprochant d'autres résultats analogues : temps d'arrêt, temps de retour, processus cooptionnels, et pour finir fonctionnelles non nécessairement ≤ 1. Mais il faut bien dire que ce n'est là que de la pédagogie, et que tout est dans l'idée de WALSH.

NOTATIONS. CAS DES TEMPS D'ARRET

E est un sous-espace borélien d'un espace métrique compact ; (P_t) un semi-groupe sous-markovien sur E, que l'on rend markovien au moyen d'un point ∂ de la manière usuelle. On suppose qu'il satisfait aux hypothèses droites, et on désigne sa réalisation continue à droite canonique (à durée de vie) par $(\Omega,\underline{\underline{F}},\ldots X_t\ldots)$ comme d'habitude. Nous la pourvoirons aussi des opérateurs de meurtre

$$X_s(k_t\omega) = X_s(\omega) \text{ si } s<t\ ,\quad \partial \text{ si } s\geq t$$

Rappelons que $\underline{\underline{F}}^\circ$, $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ sont engendrées sans complétion par les X_s ($s\in\mathbb{R}$, ou $s\leq t$) , $E\cup\{\partial\}$ étant muni de la tribu borélienne ; nous désignerons par $\underline{\underline{F}}^\times, \underline{\underline{F}}^\times_t$ les tribus analogues relatives à la tribu universellement mesurable sur l'espace d'états. On désigne par $\underline{\underline{F}}^\mu$ la P^μ-complétion de $\underline{\underline{F}}^\circ$, par $\underline{\underline{F}}^\mu_t$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ et les ensembles P^μ-négligeables dans $\underline{\underline{F}}^\mu$, enfin par $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_t$ les tribus intersectionsdes $\underline{\underline{F}}^\mu$, $\underline{\underline{F}}^\mu_t$; ces familles de tribus sont continues à droite.

On rappelle un résultat classique :

LEMME 1. Tout temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}^\mu_t)$ est égal P^μ-p.s. à un temps d'arrêt $\tilde{T}$ de la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$

Ce lemme anodin est à sa manière un résultat de perfection : en effet supposons $T \leqq \zeta$; nous pouvons supposer aussi $\tilde{T} \leqq \zeta$, et $\tilde{T}$ satisfait alors à l'identité

(1) $$\tilde{T} \circ k_t = \tilde{T} \wedge t$$

Ce lemme se laisse un peu améliorer de la façon suivante :

LEMME 2. <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$; <u>il existe un même temps d'arrêt</u> $\tilde{T}$ <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^{\times}_{t+})$ <u>tel que</u> $T=\tilde{T}$ P^{μ}-<u>p.s. pour toute loi</u> μ.

DEMONSTRATION . Il suffit de démontrer cela lorsque T est de la forme $T=t$ sur $A \in \underline{\underline{F}}_t$, $T=+\infty$ sur A^c. Tout revient alors à trouver $\tilde{A} \in \underline{\underline{F}}^{\times}_{t+}$ tel que $A=\tilde{A}$ P^{μ}-p.s. pour tout μ. C'est facile. On considère les mesures $Q^x = I_A . P^x$ sur la tribu séparable $\underline{\underline{F}}^o_t$, et grâce à un théorème de DOOB on construit une densité $Q^x(d\omega)/P^x(d\omega) = a(x,\omega)$ qui est $\underline{\underline{B}}_u \times \underline{\underline{F}}^o_t$-mesurable. Comme A est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable on a $I_A=a(x,.)$ P^x-p.s. pour tout x. Puis on pose $\tilde{a}(\omega)=a(X_0(\omega),\omega)$, et enfin $\tilde{A}=\{\tilde{a}=1\}$.

<u>TEMPS DE RETOUR</u>

Rappelons la définition d'un <u>temps de retour</u> : c'est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}$-mesurable L sur Ω, telle que $0 \leqq L \leqq \zeta$, et que pour tout t on ait

(2) $$L \circ \theta_t = (L-t)^+ \ P^{\mu}\text{-p.s.} \ ,$$

l'ensemble exceptionnel pouvant dépendre de t . S'il peut être pris indépendamment de t, nous dirons que L est parfait. Nous allons montrer que tout temps de retour est indistinguable d'un temps de retour parfait.

Nous voudrions montrer que ce résultat est tout à fait intuitif, même trivial : par retournement du temps, c'est tout simplement le lemme 2 sur les temps d'arrêt ! Malheureusement, le retournement du temps suppose une durée de vie finie. Nous commencerons donc par supposer la durée de vie finie puis, plutôt que d'adapter la démonstration au cas général, nous donnerons une démonstration "non intuitive" à la WALSH.

Nous désignons donc maintenant par Ω l'ensemble des trajectoires continues à droite <u>à durée de vie finie</u>, et nous supposons que le semi-groupe est réalisable sur cet espace. Nous construisons le processus retourné $(\hat{X}_t)_{t>0}$, continu à gauche

$$\hat{X}_t(\omega) = X_{\zeta(\omega)-t}(\omega) \text{ si } 0<t \leqq \zeta(\omega)$$
$$= \partial \text{ si } t>\zeta(\omega)$$

et sa famille de tribus naturelle

$$\hat{\underline{\underline{F}}}^o_t = \underline{\underline{T}}(\hat{X}_s \ , \ 0<s \leqq t \ )$$

Noter que les $\hat{X}_t$ sont $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables, et que $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{\infty} = \underline{\underline{F}}^o$.

PROPOSITION 1 (durée de vie finie !) . ζ-L <u>est égal</u> P^μ-<u>p.s. à un temps d'arrêt</u> $\hat{T}$ <u>de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+})$ <u>tel que</u> $\hat{T}\leq\zeta$, <u>et</u> $\zeta-\hat{T}=L'$ <u>est un temps de retour parfait, égal à</u> L P^μ-<u>p.s</u>..

DEMONSTRATION. Nous posons $\lambda=\mu+\mu U_1$, et nous encadrons L entre deux variables aléatoires M et M', $\underline{\underline{F}}^o$-mesurables et égales P^λ-p.s.. Nous pouvons les supposer $\leq\zeta$. D'après le théorème de Fubini, il existe un ensemble mesurable H portant P^μ tel que pour $\omega\in H$ on ait

$$L(\omega)=M(\omega)=M'(\omega)$$

$$L(\theta_u\omega)=M(\theta_u\omega)=M'(\theta_u\omega) \quad \text{pour presque tout } u$$

L'ensemble (plein pour la mesure de Lebesgue) des u possédant cette propriété sera noté $C(\omega)$.

Quitte à diminuer un peu H, nous pouvons supposer que c'est une réunion dénombrable de compacts de Ω (pour l'une des métriques compatibles avec la structure mesurable de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$). Alors H est un espace de BLACKWELL.

Soit $A=\{\zeta-L\leq t\}$; nous voulons montrer que A appartient à la tribu $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+r}$, aux ensembles P^μ-négligeables près, pour tout r>0. Or $A\cap H$ appartient à la tribu-trace $\hat{\underline{\underline{F}}}^o|H$, qui est une tribu de BLACKWELL ; la tribu trace $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+r}|H$ est aussi une tribu de BLACKWELL. Il nous suffit donc de montrer que $A\cap H$ est réunion d'atomes de $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+r}$. Autrement dit, tout revient à montrer que si $\omega\in A\cap H$, si $\omega'\in H$ appartient au même atome de $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+r}$ que ω, alors $\zeta(\omega')-L(\omega')\leq t$.

D'abord, si $\zeta(\omega)\leq t$, l'ensemble $\{\zeta\leq t\}$ appartient à $\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+r}$ et contient ω, donc ω' ; on a de même $\hat{X}_s(\omega)=\hat{X}_s(\omega')$ pour $s\leq t+r$, et il en résulte que $\omega=\omega'$: il n'y a rien à démontrer.

Ensuite, supposons $\zeta(\omega)>t$, donc aussi $\zeta(\omega')>t$. Choisissons un nombre u tel que $t<u<t+r$, $u<\zeta(\omega)$, $u<\zeta(\omega')$, $\zeta(\omega)-u\in C(\omega)$, $\zeta(\omega')-u\in C(\omega')$ (il en existe, car l'intersection de deux ensembles pleins est dense). Posons $\zeta(\omega)=v$, $\zeta(\omega')=v'$. Comme $u<t+r$, nous avons

$$\theta_{v-u}\omega = \theta_{v'-u}\omega'$$

(faire un dessin). D'autre part, $v-L(\omega)\leq t$; comme $v-u\in C(\omega)$, nous avons $L(\theta_{v-u}\omega)= (L(\omega)-v+u)^+= L(\omega)-v+u$ (puisque $u>t$) $\geq u-t$. Donc aussi $L(\theta_{v'-u}\omega')\geq u-t$, et comme $v'-u\in C(\omega')$ on peut revenir à $v'-L(\omega')\leq t$, le résultat cherché.

Pour construire $\hat{T}$, on applique alors le lemme 1 . Rien n'empêche de tronquer $\hat{T}$ à ζ.

La vérification du fait que L' est un temps de retour parfait sera laissée au lecteur. Noter que si $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}^o_{t+}$ on a identiquement

$$A\cap\{\zeta>u+t\} = \theta_u^{-1}(A)\cap\{\zeta>u+t\}$$

En fait, L' satisfait à (2) sans aucun ensemble exceptionnel.

La proposition 1 n'est pas tout à fait satisfaisante : en effet, L' dépend de μ. Nous ferons deux remarques à ce sujet.

1) D'abord, si l'hypothèse de continuité absolue est satisfaite, prenons pour μ une mesure de référence : la fonction excessive $P^{\cdot}\{L \neq L'\}$ est nulle μ-p.p., donc partout, et le temps de retour parfait L' est P^{λ} indistinguable de L, quelle que soit la loi λ.

2) Dans le cas général, soit $\lambda=\mu+\mu U_1$, et soit L' un temps de retour parfait P^{λ}-indistinguable de L. Nous avons alors pour presque tout ω

$$L\circ\theta_t(\omega) = L'\circ\theta_t(\omega) \equiv (L'(\omega)-t)^+ \text{ presque partout}$$

Faisons tendre t vers u, il vient

$$L'\circ\theta_u(\omega) = \lim_{t\downarrow\downarrow u} \text{ess } L\circ\theta_t(\omega) \qquad (\ t\downarrow\downarrow u \text{ signifie que u est exclu })$$

Mais ceci ne fait plus intervenir μ . Autrement dit, posons pour tout $\omega\in\Omega$

$$\overline{L}(\omega) = \limsup_{t\downarrow\downarrow 0} \text{ess } L\circ\theta_t(\omega)$$

alors les processus $(\overline{L}\circ\theta_s)$ et $(L'\circ\theta_s)$ sont P^{μ}-indistinguables quelle que soit μ . Autrement dit , $\overline{L}$ est un temps de retour parfait. Ceci suggère une démonstration à la WALSH :

PROPOSITION 1'(durée de vie quelconque). Tout temps de retour L est indistinguable d'un temps de retour parfait L' (même, on peut supprimer complètement l'ensemble exceptionnel).

DEMONSTRATION. Nous définissons

$$\overline{L}(\omega) = \limsup_{t\downarrow\downarrow 0} \text{ess } L\circ\theta_t(\omega)$$

de sorte que nous avons pour tout u, en appliquant cela à $\theta_u\omega$

$$\overline{L}(\theta_u\omega) = \limsup_{t\downarrow\downarrow u} \text{ess } L\circ\theta_t(\omega)$$

Soit U l'ensemble des ω tels que pour presque tout $u\in\mathbb{R}_+$ on ait $(L\circ\theta_u(\omega))=(L(\omega)-u)^+$; d'après le théorème de Fubini, U est P^{μ}-plein quelle que soit μ , donc $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Si $\omega\in U$, on a pour tout u

$$\overline{L}(\theta_u\omega) = \limsup_{t\downarrow\downarrow u} \text{ess } (L(\omega)-t)^+ = (L(\omega)-u)^+$$

en particulier, pour u=0 il vient $\overline{L}(\omega)=L(\omega)$ - donc $L=\overline{L}$ p.s. - et ensuite $\overline{L}(\theta_u\omega)= (\overline{L}(\omega)-u)^+$ identiquement. Le tour est joué.

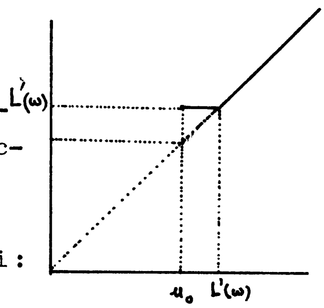
Pour se débarrasser de tout ensemble exceptionnel, il suffit de faire ainsi. Soit V l'ensemble des ω tels que $\overline{L}(\theta_t\omega)\equiv(\overline{L}(\omega)-t)^+$: il est P^{μ}-plein quel que soit μ, et $\omega\in V \Rightarrow \theta_u\omega\in V$. Posons pour tout ω

$$L'(\omega) = u+\overline{L}(\theta_u\omega) \text{ s'il existe un u tel que } \theta_u\omega\in V,\ \overline{L}(\theta_u\omega)>0$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

Cette définition a un sens, car à la première ligne $u+\overline{L}(\theta_u\omega)$ ne dépend pas du u choisi.

Dans le premier cas, soit u_0 la borne inférieure des u tels que

$\Theta_u\omega\in V$. Le graphe de la fonction $u\mapsto\overline{L}(\Theta_u\omega)$ pour $u\geqq u_0$ se présente ainsi :



$$\left(\ \overline{L}(\Theta_{u_0}\omega) = \overline{\lim\ \mathrm{ess}}_{u\downarrow\downarrow u_0}\ \overline{L}(\Theta_u\omega)\right)$$

d'où une autre définition : $L'(\omega) = \sup\ \{\ v : \Theta_u\omega\in V,\ \overline{L}\circ\Theta_u(\omega)>0\}$. Il est facile de voir que L' satisfait à l'énoncé.

PROCESSUS CO-OPTIONNELS

La classe de ces processus a été **introduite par AZEMA** [*]. Elle **correspond par retournement** du temps, lorsque la durée de vie est finie, à la classe des processus bien-mesurables (on dit aussi "optionnels") pour la famille de tribus $(\hat{\underline{\underline{F}}}^{\mu}_{t+})$ du processus retourné.

Nous commençons par considérer un processus $(Z_t)_{t>0}$ qui possède les propriétés suivantes :

1) Z_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour tout $t>0$

2) pour toute mesure μ, et P^{μ}-presque tout ω, l'application $Z_{\bullet}(\omega)$ est continue à gauche sur $]0,\infty[$

3) pour toute mesure μ, tout $s\geq 0$, les processus $(Z_{s+t})_{t>0}$ et $(Z_t\circ\Theta_s)_{t>0}$ sont P^{μ}-indistinguables.

Nous allons associer à $(Z_t)_{t>0}$ un second processus $(\overline{Z}_t)_{t>0}$ qui en sera P^{μ}-indistinguable pour toute loi μ, et possédera une propriété meilleure que 3). Posons pour tout ω

$$\overline{Z}_t(\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow 0}\ \mathrm{ess}\ \ Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$$

Nous avons alors identiquement

$$\overline{Z}_{t-u}(\Theta_u\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u}\ \mathrm{ess}\ Z_{t-s}(\Theta_s\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u}\ \mathrm{ess}\ \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega)$$

(la dernière égalité est purement topologique : la régularisée scs d'une régularisée scs est **égale à** celle-ci).

Montrons ensuite que pour t fixé, **la fonction** $(s,\omega)\mapsto Z_{t-s}(\Theta_s\omega)$ est mesurable pour la mesure produit $ds\otimes dP^{\mu}(\omega)$ sur $[0,t[$; par continuité à gauche on se ramène à $Z_{t-s^n}(\Theta_s\omega)$ où s^n est la n-ième approximation dyadique de s , et alors on se ramène à vérifier que pour tout u fixe $(s,\omega)\mapsto Z_u\circ\Theta_s\omega$ est $ds\otimes dP^{\mu}(\omega)$-mesurable, ce qui est facile.

Ceci étant établi, soit U_t l'ensemble des ω tels que

$$Z_t(\omega) = Z_{t-s}(\Theta_s\omega)\ \text{pour presque tout}\ s\in[0,t[$$

Le théorème de Fubini et la propriété 3) montrent que U_t est P^{μ}-plein pour toute loi μ - donc U_t est $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Soit U l'intersection des U_t pour t rationnel ; par continuité à gauche, il vient que

* Dans ce volume.

si $\omega\in U$ on a pour <u>tout</u> $t\in\mathbb{R}_+^*$

$$Z_t(\omega) = Z_{t-s}(\Theta_s\omega) \text{ presque partout sur } [0,t[$$

Mais alors, si $\omega\in U$, on a aussi

(*) pour <u>tout</u> t et <u>tout</u> $s<t$ $\quad Z_t(\omega) = \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega)$

En particulier en prenant s=0, il vient que $Z_t(\omega)=\overline{Z}_t(\omega)$ pour tout t, donc les processus $(Z_t)_{t>0}$ et $(\overline{Z}_t)_{t>0}$ sont indistinguables.

Soit maintenant V l'ensemble des ω tels que $\Theta_\varepsilon\omega\in U$ pour presque tout $\varepsilon>0$; comme U est plein pour toute loi P^μ, il en est de même de V (Fubini). Soit $\omega\in V$, et soit $\varepsilon<t$ tel que $\Theta_\varepsilon\omega \in U$; appliquons (*) à $t-\varepsilon$, $s-\varepsilon$ et $\Theta_\varepsilon\omega$, il vient

$$Z_{t-\varepsilon}(\Theta_\varepsilon\omega) = \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega)$$

Faisons tendre ε vers 0 (limite essentielle), il vient

$$\omega\in V \Rightarrow \overline{Z}_t(\omega) = \overline{Z}_{t-s}(\Theta_s\omega) \text{ pour tout t et tout } s<t .$$

Soit W l'ensemble des ω possédant cette propriété ; W est plein, et $\omega\in W \Rightarrow \Theta_u\omega\in W$. En procédant comme à la fin de la proposition 1', on construit un processus Z' qui coincide avec $\overline{Z}$ sur W et satisfait identiquement à 3).

On appelle <u>processus co-optionnels</u> les processus mesurables par rapport à la tribu engendrée, sur $]0,\infty[\times\Omega$, par les $(Z_t)_{t>0}$ satisfaisant à (1),(2),(3). On a **établi** :

PROPOSITION 2. <u>Tout processus co-optionnel est indistinguable d'un processus</u> (co-optionnel) <u>parfait</u> (<u>et même</u>, <u>satisfaisant identiquement à</u> (3)).

Lorsque la durée de vie est finie, la tribu co-optionnelle est engendrée par les intervalles stochastiques]0,L], où L est un temps de retour. La proposition 2 apparaît alors comme une conséquence immédiate de la proposition 1-1' (qu'elle entraîne, d'ailleurs, sans aucune difficulté).

TEMPS TERMINAUX

Un temps terminal R est une variable aléatoire positive $\underline{\underline{F}}$-mesurable, qui est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et qui satisfait en outre à

(3) $\qquad R\circ\Theta_t = R-t \quad \text{sur } \{t<R\} \quad P^\mu\text{-p.s.}$

quelle que soit la loi μ . L'ensemble exceptionnel dépend de t en général ; s'il n'en dépend pas, le temps terminal est dit parfait.

Il n'est pas vrai que tout temps terminal soit indistinguable d'un temps terminal parfait, mais nous allons voir que cette propriété a lieu pour les temps terminaux <u>exacts</u> , qu'on va définir à présent.

Nous remarquons d'abord que si $t<R$ on a (p.s.) $t+R\circ\theta_t=R$, tandis que si $t\geqq R$ on a $t+R\circ\theta_t\geqq t\geqq R$. Ainsi, $t+R\circ\theta_t \geqq R$ (p.s.) dans tous les cas. Il en résulte que $s<t$ entraîne $s+R\circ\theta_s \leqq t+R\circ\theta_t$ p.s..

Soit D un ensemble dénombrable dense quelconque ; la fonction $s+R\circ\theta_s$ sur D est p.s. croissante. Si l'on a

$$\lim_{s\downarrow\downarrow 0,\ s\in D} s+R\circ\theta_s = R \text{ p.s.}$$

R est dit <u>exact</u> . Cette propriété ne dépend pas de l'ensemble D, et peut être remplacée par $\lim\,\mathrm{ess}_{s\downarrow\downarrow 0}\ s+R\circ\theta_s = R$ p.s.

Le résultat que nous allons établir sur la perfection des temps terminaux pourrait se raccrocher à la proposition 2 de la manière suivante, très facile à comprendre : on considère l'ensemble de tous les graphes de temps d'arrêt $s+R\circ\theta_s$ ($s\in D$), et son adhérence A ; A est un ensemble à la fois co-optionnel et optionnel, et R est le début de A ; on remplace A par un co-optionnel parfait indistinguable, et le début de cet ensemble est le temps terminal parfait cherché.

Mais nous n'allons pas faire ainsi : nous travaillons à la WALSH :

PROPOSITION 3. <u>Il existe un temps terminal</u> R' <u>indistinguable de</u> R <u>et satisfaisant à</u> (3) <u>sans aucun ensemble exceptionnel</u>.

DEMONSTRATION. Nous posons

$$\overline{R}(\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow 0}\,\mathrm{ess}\ s+R\circ\theta_s(\omega)$$

on a alors par translation

$$u+\overline{R}(\theta_u\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u}\,\mathrm{ess}\ s+R(\theta_s\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u}\,\mathrm{ess}\ s+\overline{R}(\theta_s\omega)$$

Soit U l'ensemble des ω tels que l'ensemble

$$C(\omega) = \{\, s : s<R(\omega)\ ,\ s+R(\theta_s\omega)=R(\omega)\,\}$$

soit plein dans $[0,R(\omega)[$. Si $\omega\in U$ et $R(\omega)>0$ on a $\overline{R}(\omega)=R(\omega)$ et $s+\overline{R}(\theta_s\omega)=\overline{R}(\omega)$ pour $s\in[0,\overline{R}(\omega)[$. D'autre part, U est plein dans Ω. Nous avons vu d'autre part (R étant exact) que R et $\overline{R}$ sont indistinguables. Si $N=\{R\neq\overline{R}\}\cup U^c$, on a pour $\omega\notin N$, $s<\overline{R}(\omega)$ $s+\overline{R}(\theta_s\omega)=\overline{R}(\omega)$, et $\overline{R}$ est parfait.

Mais on peut faire un peu mieux. Soit V l'ensemble des ω tels que $\theta_u\omega\in U$ pour presque tout u ; V est plein dans Ω. Soit $\omega\in V$, et soit $u>0$. Supposons $s<\overline{R}(\theta_u\omega)$; on a $s+u<u+\overline{R}(\theta_u\omega)$; cette fonction étant scs à droite pour la topologie essentielle, l'ensemble des $v>u$ tels que $\theta_v\omega\in U$ et que $s+v<v+\overline{R}(\theta_v\omega)$, forme un voisinage essentiel droit (epointé) de u. Mais pour ceux là on a $s<\overline{R}(\theta_v\omega)$, donc $s+v+\overline{R}(\theta_s\theta_v\omega)=v+\overline{R}(\theta_v\omega)$ puisque $\theta_v\omega\in U$, et par passage à la lim inf ess lorsque $v\downarrow\downarrow u$, il vient que

$$\omega\in V \Rightarrow \left(\text{pour tout } u \text{ et tout } s<\overline{R}(\theta_u\omega),\ s+\overline{R}(\theta_{u+s}\omega)=\overline{R}(\theta_u\omega)\right)$$

Soit W l'ensemble des ω satisfaisant à cette propriété ; $\omega\in W \Rightarrow \theta_u\omega\in W$. D'autre part, on peut vérifier que $\theta_\varepsilon\omega\in W$ pour tout $\varepsilon>0 \Rightarrow \omega\in W$. Si maintenant on définit

$$R'(\omega) = R(\omega) \text{ si } \omega\in W$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

R' satisfait à (3) sans aucun ensemble exceptionnel. D'autre part, la fonction $s\mapsto R'(\theta_s\omega)$ est croissante et continue à droite pour tout ω, et sa limite lorsque $s\to 0$ est $R'(\omega)$ (" R' est parfaitement exact").

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES

Une fonctionnelle multiplicative $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus réel positif continu à droite, adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, tel que

(4) $\forall s, \forall t$, $M_{s+t} = M_s . M_t \circ \theta_s$ P^μ-p.s.

quelle que soit la loi μ . L'ensemble exceptionnel de (4) peut dépendre de s et t ; s'il n'en dépend pas, la fonctionnelle est dite parfaite.

On rencontre le plus souvent des fonctionnelles ≤ 1, qui ont été étudiées par WALSH : celui-ci montre que toute fonctionnelle exacte de ce type est indistinguable d'une fonctionnelle qui satisfait à (4) sans aucun ensemble exceptionnel. Nous allons plutôt diriger l'étude ci-dessous vers les fonctionnelles non nécessairement ≤ 1, pour lesquelles $M_0=1$ P^μ-p.s. quelle que soit μ : ces fonctionnelles correspondent aux fonctionnelles additives (non nécessairement ≥ 0). Les résultats ne sont sans doute pas définitifs.

Nous commençons par quelques calculs. Définissons pour $t>0$

(4.1) $\overline{M}_t(\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow 0} \text{ess } M_{t-s}(\theta_s\omega)$

en appliquant cela à $\theta_u\omega$, et en utilisant un argument déjà connu, nous obtenons , pour $u<t$

(4.2) $\overline{M}_{t-u}(\theta_u\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u} \text{ess } M_{t-s}(\theta_s\omega) = \limsup_{s\downarrow\downarrow u} \text{ess } \overline{M}_{t-s}(\theta_s\omega)$

Soit U_t l'ensemble des ω tels que $M_t(\omega) = M_s(\omega)M_{t-s}(\theta_s\omega)$ p.p. sur $[0,t[$: le théorème de Fubini entraîne que U_t est plein pour chaque t, et il en est donc de même pour $U=\bigcap_t U_t$, intersection pour t rationnel. Mais il vient par continuité à droite que

$$\omega\in U \text{ , } t>0 \Rightarrow M_s(\omega)M_{t-s}(\theta_s\omega) = M_t(\omega) \text{ p.p. sur } [0,t[$$

Par conséquent, en passant à la limite essentielle lorsque $s\downarrow\downarrow u$, nous obtenons que , si $M_u(\omega)>0$

(4.3) $\omega\in U \Rightarrow M_t(\omega) = M_u(\omega)\overline{M}_{t-u}(\theta_u\omega)$

Nous avons besoin que cette relation ait lieu identiquement. Aussi ferons nous l'hypothèse que pour presque tout ω , l'ensemble $\{t : M_t(\omega) = 0\}$ est un intervalle $[R(\omega),\infty[$. Au prix d'une modification triviale de (M_t), on peut d'ailleurs supposer que cette propriété a lieu identiquement. Noter aussi que c'est une condition nécessaire pour que (M_t) puisse être indistinguable d'une fonctionnelle parfaite !

Dans ce cas, la relation (4.3) est **une identité**, à condition de permettre à $\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$ la valeur $+\infty$, auquel cas $M_u(\omega)=0$, $M_t(\omega)=0$, et on convient que $0.\infty=0$.

Désignons maintenant par V l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $\Theta_r\omega\in U$ pour presque tout r : noter que $\omega\in U \Rightarrow \Theta_s\omega\in V$ pour tout s. Soit $\omega\in V$, et soit r tel que $\Theta_r\omega\in U$. La formule (4.3) s'écrit

(4.4) $$M_{t-r}(\Theta_r\omega) = M_{u-r}(\Theta_r\omega).\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$$

Nous faisons maintenant tendre r vers 0 au sens essentiel, en distinguant trois cas :

1) si $0<\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)<\infty$, il n'y a aucune difficulté ; nous obtenons la formule $\overline{M}_t(\omega)=\overline{M}_u(\omega).\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$, où les deux membres peuvent d'ailleurs valoir $+\infty$.

2) si $\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)=0$, les deux membres de la formule (4.4) sont nuls, et il vient à la limite $\overline{M}_t(\omega)=\overline{M}_u(\omega).\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$, l'égalité pouvant avoir la signification $0=\infty.0$.

3) Si $\infty=\overline{M}_{t-u}(\Theta_u)$, nous avons vu que la formule (4.4) ne peut avoir qu'un seul sens : $M_{u-r}(\Theta_r\omega)$ et $M_{t-r}(\Theta_r\omega)$, et le passage à la limite nous donne encore $\overline{M}_t(\omega)=\overline{M}_u(\omega)\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$, signifiant $0=0.\infty$. Ainsi

(4.5) $\omega\in V \Rightarrow \overline{M}_t(\omega)=\overline{M}_u(\omega).\overline{M}_{t-u}(\Theta_u\omega)$ pour $0<u<t$
si le dernier facteur vaut $+\infty$, les deux autres sont nuls.

Noter que rien n'est dit pour t=0 : $\overline{M}_0$ n'est pas même définie.

Nous faisons maintenant notre hypothèse que $M_0=1$ p.s.. Au prix d'une modification triviale de (M_t), <u>nous pouvons supposer que</u> $M_0\equiv 1$.

La relation (4.3) nous donne, lorsque $u\to 0$

(4.6) $$\omega\in U \Rightarrow M_t(\omega) = \overline{M}_t(\omega)$$

Cela montre que les processus (M_t) et $(\overline{M}_t)$ sont indistinguables.

Construisons par récurrence transfinie les temps d'arrêt $R_0=0$,

$$R_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} R_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite}$$

$$R_{\alpha+1}= R_\alpha + R\circ\Theta_{R_\alpha} \qquad (R = \inf\{t : M_t=0\})$$

D'après un raisonnement familier, il existe un ordinal dénombrable γ tel que $R_\gamma = \sup R_\alpha$ P^μ-p.s.. L'ensemble des ω tels que $\Theta_{R_\alpha}(\omega)\in U$ pour tout $\alpha\leq\gamma$ tel que $R_\alpha(\omega)<\infty$ est alors P^μ-plein (propriété de Markov forte). Mais $R_\gamma(\omega)<\infty$, $\Theta_{R_\gamma}\omega\in U \Rightarrow R_{\gamma+1}(\omega)>R_\gamma(\omega)$, et par conséquent $R_\gamma(\omega)=+\infty$, P^μ-p.s..

Supposons que ω possède ces propriétés , et en outre que ω appartienne à V. Soit $u\in\mathbb{R}_+$; si u=0, la relation $\omega\in U$ entraîne que $\overline{M}_.(\omega)$ est continue à droite, et $\overline{M}_{0+}(\omega)=1$. Supposons $u>0$; alors u appartient à l'un des intervalles $[R_\alpha, R_{\alpha+1}[$, ce qui signifie que si nous posons $v=R_\alpha(\omega)$ nous avons $u-v<R(\theta_v\omega)$. La relation

$$\overline{M}_{t-v}(\theta_v\omega) = \overline{M}_{u-v}(\theta_v\omega)\overline{M}_{t-u}(\theta_u\omega)$$

nous donne, pour $t\downarrow u$, que $\overline{M}_{0+}(\theta_u\omega)=1$ pour tout u. De plus, on a $\theta_v\omega\in U$, de sorte que la fonction $\overline{M}_.(\theta_v\omega)=M_.(\theta_v\omega)$ est finie et continue à droite. Mais alors la relation précédente nous donne le même résultat pour $\overline{M}_.(\theta_u\omega)$.

En définitive, nous avons montré que l'ensemble W des ω possédant les propriétés suivantes est P^μ-plein pour toute mesure μ :

a) Pour tout $u\geqq 0$, $\overline{M}_.(\theta_u\omega)$ est finie et continue à droite, et $\overline{M}_{0+}(\theta_u\omega)=1$.

b) Pour tout $u\geqq 0$, $\overline{M}_t(\theta_u\omega)=\overline{M}_s(\theta_u\omega).\overline{M}_{t-s}(\theta_{u+s}\omega)$ si $s<t$.

[c) Pour presque tout u , $\theta_u\omega\in U$: mais ceci est peu important]

<u>Noter que</u> $u\in W \Rightarrow \theta_u\omega\in W$ <u>pour tout</u> u. Si nous voulons avoir une fonctionnelle M' sans aucun ensemble exceptionnel, nous poserons

$M'_t(\omega)=0$ si $\omega\notin W$

$M'_t(\omega)= \overline{M}_t(\omega)$ si $\omega\in W$.

Noter qu'on n'est pas arrivé tout à fait à obtenir que $M'_{0+}\equiv 1$. Mais il semble que WALSH n'y soit pas arrivé[1] même dans le cas où la fonctionnelle est $\leqq 1$. De toute façon, on a bien plus qu'on n'espérait au départ !

[1] WALSH m'a fait remarquer qu'il n'a jamais essayé de parvenir à cette identité, et que cela ne présenterait aucun intérêt spécial. Par exemple, si f est une fonction positive non bornée, la fonctionnelle parfaite $M_t= \exp[-\int_0^t f\circ X_s ds]$ présente tout naturellement, même si f a un potentiel borné, des trajectoires pour lesquelles $M_0=0$. La remarque ci-dessus est donc déplacée.