PAUL-ANDRÉ MEYER

Une note sur le théorème du balayage de Hunt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 164-167
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__164_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1970/71

UNE NOTE SUR LE THÉORÈME DE HUNT

par P.A.Meyer

Nous considérons ici, avec les notations usuelles, un processus de Markov (X_t) à valeurs dans E, satisfaisant aux hypothèses droites, un ensemble A presque borélien, une fonction excessive u. Le processus est supposé transient. Rappelons l'énoncé du célèbre théorème de HUNT sur le balayage :

THEOREME 1. Pour toute mesure μ ne chargeant pas $A\setminus reg(A)$, il existe une suite décroissante (v_n) de fonctions excessives majorant u sur A, telle que $P_A u = \lim_n v_n$ μ-presque partout.

Quitte à remplacer les v_n par les $v_n \wedge u$, on peut en fait supposer que $v_n = u$ sur A. En prenant pour μ une masse unité ε_x, on retrouve l'énoncé de HUNT sous sa forme familière (et un peu moins forte) : l'enveloppe inférieure u_A de l'ensemble des fonctions excessives majorant u sur A est égale à $P_A u$, sauf peut être en des points de $A\setminus reg(A)$.

Notre objet est ici le suivant : nous allons faire l'hypothèse de continuité absolue, et chercher alors - comme on peut le faire pour tant d'autres questions - à rendre l'énoncé du théorème 1 indépendant d'une mesure μ. Cela nous donnera quelques petits résultats amusants sur la topologie fine, comme sous-produits. J'ai du mal à croire que tout cela soit nouveau, mais je ne l'ai vu écrit nulle part.

Nous n'avons aucun problème sur reg(A), car $P_A u$ y est égal à u. Nous n'avons non plus aucun problème sur $A\setminus reg(A)$, puisqu'il est impossible d'y affirmer quoi que ce soit ! En définitive, la seule chose intéressante est ce qui se passe sur l'ensemble $(\bar{A})^c$ restant, où $\bar{A}$ désigne ici, comme dans toute la suite de cet exposé, l'adhérence fine de A, qui est presque borélienne. Nous allons établir le théorème suivant :

THEOREME 2. Sous l'hypothèse de continuité absolue, il existe une suite décroissante (v_n) de fonctions excessives, majorant u sur A, telle que $\lim_n v_n = P_A u$ quasi-partout sur $\bar{A}^c$.

Le texte fournira d'ailleurs quelques compléments : il y aura des conditions suffisantes pour que l'égalité ait lieu partout, on verra que l'ensemble polaire exceptionnel peut être choisi indépendamment de u si celle-ci est finie, etc.

Nous allons commencer par établir le résultat suivant, relatif à la topologie fine : bien entendu, sous l'hypothèse de cont. absolue.

PROPOSITION 1. Soit A un ensemble presque borélien finement fermé. Il existe une suite décroissante d'ensembles finement ouverts A_n contenant A, tels que $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$ pour tout n, et que $A = \bigcap_n A_n = \bigcap_n \overline{A}_n$ à un ensemble polaire près.

Avant de l'établir, notons un corollaire amusant : A est l'intersections des ouverts fins A_n , et du complémentaire (finement ouvert) de l'ensemble polaire en question. Donc tout fermé fin (presque borélien) est intersection dénombrable d'ouverts fins.

DEMONSTRATION. Prenons $\lambda>0$, et choisissons une suite décroissante de fonctions λ-excessives $f_n \leqq 1$, égales à 1 sur A, convergeant presque partout vers $P_A^\lambda 1$, et posons $B_n = \{ f_n > 1 - 1/n \}$, de sorte que B_n est ouvert fin, contient A, décroît, et $\overline{B}_{n+1} \subset B_n$. Posons $A^* = \bigcap_n B_n = \bigcap_n \overline{B}_n$.

On a $P_A^\lambda 1 \leqq P_{B_n}^\lambda 1 \leqq P_{B_n}^\lambda (f_n + \frac{1}{n}) \leqq f_n + \frac{1}{n}$. Donc $P_{B_n}^\lambda 1$ converge presque partout vers $P_A^\lambda 1$. Comme $P_{A^*}^\lambda 1$ est entre les deux, elle est égale à $P_A^\lambda 1$ presque partout, donc partout.

Soit $\beta = A^* \setminus A$. Comme $\mathrm{reg}(A) = \mathrm{reg}(A^*)$, β est contenu dans $A^* \setminus \mathrm{reg}(A^*)$, donc semi-polaire. D'après une remarque simple de DELLACHERIE[1], il existe alors une mesure μ portée par β - et ne chargeant donc pas A - telle que toute partie μ-négligeable de β soit polaire. Choisissons à nouveau des g_n λ-excessives majorant 1 sur A, décroissant μ-p.p. vers $P_A^\lambda 1$, et posons $C_n = \{ g_n > 1 - 1/n \}$, $A_n = B_n \cap C_n$; on a encore $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$, A_n contient A, est finement ouvert.

Posons $A' = \bigcap_n A_n = \bigcap_n \overline{A}_n$. Pour μ-presque tout $x \in \beta$, $P_{C_n}^\lambda 1^x$, donc a fortiori $P_{A_n}^\lambda 1^x$ qui est plus petit, converge vers $P_A^\lambda 1^x$. Mais ceci est <1, donc pour n assez grand on a $x \notin C_n$, donc $x \notin A'$. Autrement dit, $A' \cap \beta$ est μ-négligeable, donc polaire, et $A' \setminus A$ est polaire.

Si A satisfait à l'énoncé sans ensemble polaire exceptionnel, i.e. si $A = \bigcap_n \overline{A}_n$, nous dirons que A est aimable . C'est le cas des fermés ordinaires.

Nous passons maintenant aux réduites.

PROPOSITION 2. Soit A presque borélien. Si u est finie sur A, il existe une suite décroissante (G_n) d'ouverts fins presque boréliens contenant A, telle que $P_{G_n} u$ converge vers $P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$. On peut remplacer quasi partout par partout si u est partout finie et $\overline{A}$ est aimable.

---

[1] Voir à la fin de l'exposé.

DEMONSTRATION. Les notations A', A_n sont celles de la démonstration de la proposition 1, relativement à l'ensemble finement fermé $\overline{A}$. Nous choisissons des fonctions excessives v_n égales à u sur A, décroissant p.s. vers $P_A u$ presque partout, et nous posons

$$D_n = \{ v_n > u - \frac{1}{n} \}$$

Ce sont des ouverts fins qui décroissent, et contiennent A <u>parce que</u> u <u>est finie sur</u> A. Le même raisonnement que dans la proposition 1 montre que $P_{D_n} u$ converge vers $P_A u$ presque partout. Posons ensuite

$$E_n = A_n \cap D_n \ , \quad w_n = P_{E_n} u \quad , \ w = \lim_n w_n \ ,$$

E_n est un ensemble finement ouvert contenant A ; $P_{E_n} u = w_n$ converge p.p. vers $P_A u$; on a $A = \bigcap_n \overline{E}_n$ à un ensemble polaire près.

Nous utilisons maintenant un petit raisonnement de KUNITA-T.WATANABE. Nous avons si $m \geqq n$ $P_{E_n} P_{E_m} = P_{E_m}$; le théorème de LEBESGUE nous donne donc $P_{E_n} w = w$ <u>en tout point où</u> w <u>est finie</u>. Mais cela entraîne que w est égale à sa régularisée excessive dans $\overline{E}_n^c \cap \{w < \infty\}$, car si $x \in \overline{E}_n^c \cap \{w < \infty\}$

$$P_t w^x \geqq P_t P_{E_n} w^x = P_{t+T_{E_n} \circ \theta_t} w^x \geqq E^x[w \circ X_{T_{E_n}} I_{\{t < T_{E_n}\}}]$$

et comme x est irrégulier pour E_n cela tend, lorsque $t \to 0$, vers $P_{E_n} w^x = w(x)$.

Supposons d'abord que u soit <u>partout finie</u> ; w l'est alors aussi, et on a $w = P_A u$ dans $\bigcup_n \overline{E}_n^c$, c'est à dire quasi-partout dans $\overline{A}^c$, et partout dans $\overline{A}^c$ si A est aimable. Noter que de toute façon, si u est partout finie, l'ensemble polaire exceptionnel est contenu dans $\overline{A}^c \setminus A'^c$, ensemble polaire fixe.

Ensuite, supposons que u soit finie seulement sur A. L'ensemble $\gamma = \overline{A}^c \cap \{w > P_A u\}$ est semi-polaire, et en utilisant à nouveau la remarque de DELLACHERIE, nous choisissons une mesure μ portée par γ (donc ne chargeant pas A) telle que toute partie μ-négligeable de γ soit polaire, puis une suite décroissante d'ouverts fins contenant A, mettons H_n , telle que $P_{H_n} u$ tende vers $P_A u$ μ-presque partout. Un raisonnement déjà fait plus haut montre qu'alors, si nous remplaçons E_n par $G_n = E_n \cap H_n$, nous avons bien $\lim_n P_{G_n} u = P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$.

Il nous faut maintenant démontrer le théorème 2 dans le cas où u n'est plus nécessairement finie sur A. Nous ne pourrons plus alors choisir des fonctions v_n de la forme $P_{G_n} u$, G_n ouvert fin contenant A, comme le montre l'exemple de la théorie classique dans $\mathbb{R}^3$, avec $A = \{x\}$, $u = g_x$, la fonction de GREEN en x : dans ce cas $P_A u = 0$, mais $P_G u = u$ pour tout G non effilé en x.

Etant donné ce que nous avons vu, il suffira d'esquisser la démonstration : nous prenons des fonctions excessives w_n majorant u sur A, qui décroissent, et dont la limite est presque partout égale à $P_A u$. Notons w cette limite, et β l'ensemble des points de $\overline{A}^c$ où $w > P_A u$. β est semi-polaire, nous choisissons une mesure μ portée par β telle que toute partie μ-négligeable de β soit semi-polaire, et nous choisissons une suite w'_n de fonctions excessives majorant u sur A, qui converge vers $P_A u$ μ-p.p., et nous posons $v_n = w_n \wedge w'_n$. La suite v_n maintenant converge vers $P_A u$ quasi-partout dans $\overline{A}^c$.

C'est plus facile que la proposition 2, parce qu'on n'a fait aucune restriction sur la forme des fonctions excessives utilisées, tandis qu'alors on voulait des fonctions de la forme $P_G u$. Mais le résultat peut s'améliorer : par exemple, si $\overline{A}$ est aimable, A_n une suite décroissante d'ouverts fins contenant $\overline{A}$ telle que $\overline{A} = \bigcap_n \overline{A}_n$, et si l'on remplace les v_n par les $P_{A_n} v_n$, la nouvelle limite sera égale à $P_A u$, non seulement quasi-partout dans $\overline{A}^c$, mais aussi en <u>tout</u> point de $\overline{A}^c$ où elle est finie.

APPENDICE : LA REMARQUE DE DELLACHERIE

On considère un ensemble semi-polaire S. On le représente comme réunion d'ensembles totalement effilés S_n . On prend une mesure de référence de masse 1, appelons la λ, et on pose

$$a_n = \sup_{x \in S_n} P^\lambda_{S_n} 1^x < 1$$

$$\mu_n(f) = E^\lambda[\sum_t e^{-\lambda t} I_{S_n} \circ X_t . f \circ X_t]$$

mesure de masse $\leqq a_n/1-a_n$, et enfin

$$\mu = \sum c_n \mu_n$$

où les $c_n > 0$ sont tels que μ soit bornée. Une partie μ-négligeable de S n'est P^λ-p.s. jamais rencontrée, comme λ est une mesure de référence, elle est polaire.